Secondo compitino di Meccanica Razionale
31 Maggio 2024

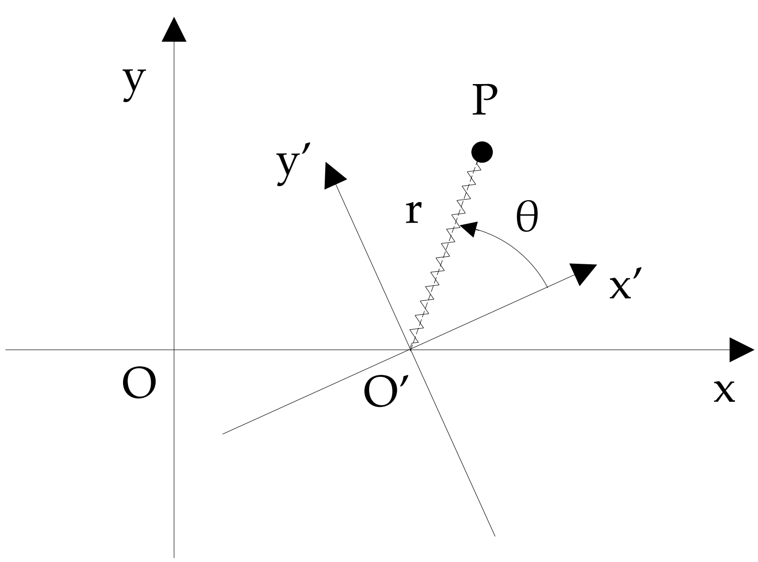
Esercizio 1. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$ e si consideri un punto O' che si muove lungo Ox con un'accelerazione costante $a\hat{\mathbf{e}}_1$ $(a > 0)$. Si consideri inoltre il sistema di riferimento $\Sigma' = O'x'y'$ con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$ $(\omega > 0)$ rispetto a Σ, dove $\hat{\mathbf{e}}_3$ è il versore perpendicolare al piano. Prendiamo un punto materiale P di massa m libero di muoversi nel piano e collegato ad O' da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate polari (r, θ) del punto P misurate in Σ' (si veda la figura) e si supponga che al tempo iniziale $t_0 = 0$ il punto O' coincida con O e abbia velocità nulla, e che sempre a t_0 gli assi Ox e $O'x'$ coincidano.

i) Scrivere la lagrangiana L nel sistema di riferimento Σ.

ii) Scrivere la lagrangiana L' nel sistema di riferimento Σ'.

iii) Mostrare che le due lagrangiane sono equivalenti trovando una funzione $F(r, \theta, t)$ tale che
$$L' = L + \frac{dF}{dt}.$$



Esercizio 2. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ nello spazio. Un punto materiale P di massa μ è vincolato a muoversi lungo una guida circolare di raggio $2R$, descritta da

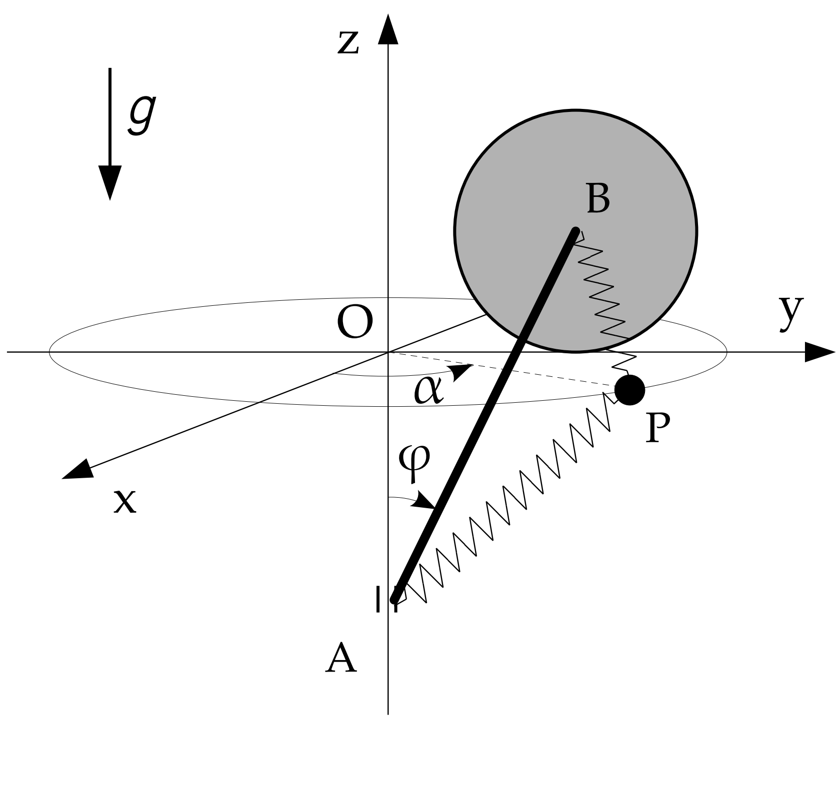
$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4R^2,\ z = 0\}.$$

Due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collegano P agli estremi di un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. L'asta è vincolata a rimanere sul piano verticale Oyz; l'estremo A è vincolato a scorrere lungo l'asse Oz, mentre l'altro estremo è incernierato al baricentro B di un disco omogeneo di massa M e raggio R, il quale rotola senza strisciare sull'asse Oy e rimane sempre nel piano Oyz (si veda la figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso (parallela all'asse Oz).

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usino come coordinare lagrangiane l'angolo α che la direzione OP forma con l'asse Ox e l'angolo φ che l'asta forma con l'asse Oz (come riportato in figura).

i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.

ii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio, assumendo che $\frac{mg}{kR} = 2$.



Esercizio 1.

i) Considerando le condizioni date all'istante iniziale, vale che ad un tempo t generico il punto O' sarà ad una distanza $(1/2)at^2$ da O e l'angolo tra gli assi $O'x'$ e Ox sarà ωt.

Per calcolare L in Σ, calcolo la posizione e la velocità del punto P in tale sistema di riferimento:

$$(P-O) = \left(\frac{1}{2}at^2 + r\cos(\theta+\omega t)\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + r\sin(\theta+\omega t)\hat{\mathbf{e}}_2$$
$$\mathbf{v}_P = \left(at + \dot{r}\cos(\theta+\omega t) - r(\dot{\theta}+\omega)\sin(\theta+\omega t)\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\dot{r}\sin(\theta+\omega t) + r(\dot{\theta}+\omega)\cos(\theta+\omega t)\right)\hat{\mathbf{e}}_2$$

L'energia cinetica è quindi:

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m\left(a^2t^2 + \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}+\omega)^2 + 2at\dot{r}\cos(\theta+\omega t) - 2atr(\dot{\theta}+\omega)\sin(\theta+\omega t)\right)$$

L'energia potenziale del sistema comprende solo quella elastica:

$$V = \frac{1}{2}k|P-O'|^2 = \frac{1}{2}kr^2$$

Perciò la Lagrangiana completa (a meno dei termini che non dipendono dalle coordinate lagrangiane e quindi possono essere tralasciati) è

$$L = T-V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + mr^2w\dot{\theta} + mat\dot{r}\cos(\theta+\omega t) - matr(\dot{\theta}+\omega)\sin(\theta+\omega t) - \frac{1}{2}kr^2$$

ii) Per calcolare L' in Σ', riscriviamo la posizione e la velocità del punto P in questo sistema di riferimento:

$$(P-O') = r\cos\theta\hat{\mathbf{e}}'_1 + r\sin\theta\hat{\mathbf{e}}'_2$$
$$\mathbf{v}'_P = \left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)\hat{\mathbf{e}}'_1 + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}'_2$$

L'energia cinetica è quindi:

$$T' = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_P|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Per l'energia potenziale, a parte il contributo elastico, dobbiamo calcolare i vari contributi dovuti alle forze apparenti:

$$V' = m\mathbf{a}_{O'}\cdot(P-O') - \frac{1}{2}m|\omega\hat{\mathbf{e}}_3\times(P-O')|^2 + m(\omega\hat{\mathbf{e}}_3\times\mathbf{v}'_P)\cdot(P-O') + \frac{1}{2}k|P-O'|^2$$

Sviluppo i vari termini:

$$\begin{aligned}
m\mathbf{a}_{O'} \cdot (P-O') &= ma\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (P-O') = ma(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_1' - \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_2') \cdot (P-O') = \\
&= mar\cos(\omega t)\cos\theta - mar\sin(\omega t)\sin\theta = mar\cos(\theta+\omega t) \\
-\frac{1}{2}m|\omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times (P-O')|^2 &= -\frac{1}{2}mr^2\omega^2 \\
m(\omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{v}_P') \cdot (P-O') &= m\omega\left(-\left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_1' + \left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_2'\right) \cdot (P-O') = \\
&= -mr^2\omega\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Quindi l'energia potenziale è

$$V' = mar\cos(\theta+\omega t) - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - mr^2\omega\dot{\theta} + \frac{1}{2}kr^2$$

Perciò la Lagrangiana completa è

$$L' = T' - V' = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mar\cos(\theta+\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + mr^2\omega\dot{\theta} - \frac{1}{2}kr^2$$

iii) Calcoliamo la differenza tra L' e L, gli unici termini che rimangono sono:

$$L' - L = -mar\cos(\theta+\omega t) - mat\dot{r}\cos(\theta+\omega t) + matr(\dot{\theta}+\omega)\sin(\theta+\omega t)$$

Perciò è facile verificare che questa differenza è la derivata totale della funzione

$$F(r,\theta,t) = -matr\cos(\theta+\omega t).$$

Le due lagrangiane sono quindi equivalenti per una proposizione dimostrata a lezione.

Esercizio 2.

i) Chiamiamo $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ ed $\hat{\mathbf{e}}_3$ i versori ortonormali associati al sistema $Oxyz$. Sia G il baricentro dell'asta, esplicitiamo le componenti dei seguenti vettori:

$$(P-O) = 2R\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + 2R\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_2, \qquad (A-O) = (R-2\ell\cos\varphi)\,\hat{\mathbf{e}}_3,$$
$$(B-O) = 2\ell\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_2 + R\hat{\mathbf{e}}_3, \qquad (G-O) = \ell\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_2 + (R-\ell\cos\varphi)\hat{\mathbf{e}}_3.$$

L'energia potenziale $V(\alpha,\varphi)$ comprende i contributi delle molle e della forza di gravità sui vari corpi:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\left(|P-A|^2 + |P-B|^2\right) + mgz_G + Mgz_B + \mu g z_P \\ &= \frac{1}{2}k\left(5R^2 + 4\ell^2\cos^2\varphi - 4R\ell\cos\varphi + 5R^2 + 4\ell^2\sin^2\varphi - 8R\ell\sin\alpha\sin\varphi\right) \\ &\quad + mg(R-\ell\cos\varphi) + MgR + \mu g0 \end{aligned}$$

Trascurando i termini costanti, che non contribuiscono alle equazioni di Lagrange,

$$V(\alpha,\varphi) = -2kR\ell(\cos\varphi + 2\sin\alpha\sin\varphi) - mg\ell\cos\varphi$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di V rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial\alpha} = -4kR\ell\cos\alpha\sin\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = 2kR\ell(\sin\varphi - 2\sin\alpha\cos\varphi) + mg\ell\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è verificata nel caso $\cos\alpha = 0$ o $\sin\varphi = 0$ (le due non possono essere verificate simultanemanete perchè altrimenti la seconda equazione del sistema non avrebbe soluzione).

- Nel caso $\sin\varphi = 0$ (e $\cos\alpha \neq 0$) ho che $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$. In entrambi i casi la seconda equazione si riduce a $\sin\alpha = 0$. Otteniamo quindi le prime quattro configurazioni di equilibrio

$$(\alpha,\varphi) = (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$$

- Nel caso $\cos\alpha = 0$ (e $\sin\varphi \neq 0$) ho che $\alpha = \pi/2$ oppure $\alpha = 3\pi/2$. Introduco il parametro adimensionale $J = mg/(kR)$, la seconda equazione diventa

1) se $\alpha = \pi/2$, $\sin\varphi(J+2) - 4\cos\varphi = 0$, da cui otteniamo $\tan\varphi = 4/(J+2)$, le cui soluzioni sono $\varphi^* = \arctan\left(4/(J+2)\right)$ e $\pi + \varphi^*$

2) se $\alpha = 3\pi/2$, $\sin\varphi(J+2) + 4\cos\varphi = 0$, da cui otteniamo $\tan\varphi = -4/(J+2)$, le cui soluzioni sono $-\varphi^*$ e $\pi - \varphi^*$

Otteniamo quindi le ultime quattro configurazioni di equilibrio (nota che $\varphi^* \in (0,\pi/2)$)

$$(\alpha,\varphi) = (\pi/2,\varphi^*),\ (\pi/2,\pi+\varphi^*),\ (3\pi/2,-\varphi^*),\ (3\pi/2,\pi-\varphi^*)$$

ii) Siccome $J = 2$, vale che $\arctan\varphi^* = 1 \implies \varphi^* = \pi/4$, e quindi gli ultimi quattro punti di equilibrio sono:

$$(\alpha,\varphi) = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$$

Per studiare la stabilità delle configurazioni calcolo la matrice hessiana di V (in cui ho sostituito $mg = 2kR$).

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(\alpha,\varphi)^2} = 4kR\ell \begin{bmatrix} \sin\alpha\sin\varphi & -\cos\alpha\cos\varphi \\ -\cos\alpha\cos\varphi & \sin\alpha\sin\varphi + \cos\varphi \end{bmatrix}$$

e la valuto nelle configurazioni di equilibrio. Dal segno degli autovalori λ_1 e λ_2 possiamo ricavare le proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio.

$$V''(0,0) = 4kR\ell \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad V''(0,\pi) = 4kR\ell \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$V''(\pi,0) = 4kR\ell \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad V''(\pi,\pi) = 4kR\ell \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

in tutti quattro i casi $\det = -(4kR\ell)^2$
$\det < 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$ sono instabili perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$V''\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) = V''\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right) = 4kR\ell \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

La matrice è in forma diagonale, quindi possiamo vedere direttamente il segno degli autovalori. Poichè risulta $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (\pi/2, \pi/4)$ e $(3\pi/2, 3\pi/4)$ sono dei minimi di V e quindi stabili per il teorema di Lagrange-Dirichilet.

$$V''\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right) = V''\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right) = 4kR\ell \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

Siccome $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $(\pi/2, 3\pi/4)$ e $(3\pi/2, \pi/4)$ sono instabili perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.