Esercizi2

domenica 17 marzo 2019 17:04

Esercizio 11: Sia G gruppo finito.

1) Se S, T sottogruppi di G, allora $|ST| = |S|\cdot|T| / |S \cap T|$
2) Sia $H < G$ tale che $[G:H] = 2$. Sia $K < G$. Dimostrare che $K < H$ oppure $|H \cap K| = |K|/2$ ovvero K è contenuto in H o K si spezza a metà in H e $G \setminus H$.

Esercizio 12: Sia $H \triangleleft G$ con $|H| = p$ primo e p il più piccolo primo che divide la cardinalità di G. Dimostrare che $H < Z(G)$.

Esercizio 13: Sia G gruppo finito e sia $H \triangleleft G$.

1. È vero che se $K \triangleleft H \Rightarrow K \triangleleft G$?
2. Dimostrare che se K è caratteristico in H (i.e. $\forall \varphi \in Aut(H), \varphi(K) = K$), allora vale che $K \triangleleft G$.

Esercizio 14: Sia G un gruppo tale che $G \curvearrowright X$. Siano $x, y \in orb(x)$. Dimostrare che $Stab(x)$ e $stab(y)$ sono coniugati in G.

Esercizio 15: TEOREMA DI CORRISPONDENZA: Seguire i seguenti passi per dimostrare il seguente enunciato:
Sia $H \triangleleft G$, allora esiste una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di G che contengono H e i sottogruppi di G/H. In particolare sono anche in bigezione i sottogruppi normali.
Sia $f: G_1 \longrightarrow G_2$. Dimostrare che:

1) Se $K_1 < G_1$, allora $f(K_1)$ è sottogruppo di G_2
2) Se $K_2 < G_2$ allora $f^{-1}(K_2) = \{g \in G_1 \mid f(g) \in K_2\}$ è sottogruppo di G_1.
3) Se $K_2 \triangleleft G_2$ allora $f^{-1}(K_2)$ è normale in G_1
4) Se $K_1 \triangleleft G_1$ e f <u>surgettiva</u>, allora $f(K_1)$ è normale in G_2

Chiamiamo $\ker f = H$ e definiamo

$$X = \{K < G_1 \mid H \text{ è contenuto in } K\} \quad \text{e} \quad Y = \{S < G_2\}$$

e definiamo inoltre le seguenti mappe tra insiemi

$$F: X \longrightarrow Y \qquad\qquad G: Y \longrightarrow X$$
$$K \longmapsto f(K) \qquad\qquad S \longmapsto f^{-1}(S) = \{g \in G_1 \mid f(g) \in S\}$$

5) Mostrare che le mappe F e G sono ben definite
6) Mostrare che $G \circ F = id_X$
7) Mostrare che se f è surgettiva allora $F \circ G = id_Y$

Grazie a 5-6-7 abbiamo la bigezione cercata.

Osserviamo che nel caso di una proiezione

$$\pi: G \longrightarrow G/H$$

abbiamo che $\ker \pi = H$ e π è surgettiva. Dunque per i punti visti vale che

$$X = \{ K_1 < G \mid H < K_1 \} \longleftrightarrow Y = \{ K_2 < G/H \}$$

e inoltre la bigezione conserva la normalità.

Esercizio 16: Un esempio Concreto: Consideriamo $G = S_4$ $H = A_4$.

1) Trovare $K_1, K_2 < G$ tali che $K_1 \cap H = K_1$ e $K_2 \cap H$ si spezza in due
2) Dimostrare che $K = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ gruppo di Klein è caratteristico in A_4 (e dunque normale in S_4).
3) Mostrare che
$$S_4/K \simeq S_3$$
4) Calcolare quanti sono gli $H < S_4$ che contengono K; Quanti normali?

Esercizio 17 Sia G un gruppo e sia $f \in Aut(G)$. Definiamo

$$H = \{ (x, f(x)) \in G \times G \mid x \in G \}$$

a) Provare che H è sottogruppo di $G \times G$
b) Decidere se H è normale
c) Determinare il centralizzatore di H $(\forall h \in H,\ ghg^{-1} = h)$
d) Determinare il normalizzatore di H in $G \times G$. (Hard!)