Esercizi5

giovedì 28 marzo 2019 19:56

Esercizio 27: Completare la classificazione dei quozienti di $\mathbb{Z}/4 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4$ viste nelle note; Calcolare cioè chi è il gruppo $G/\langle(2,2)\rangle$.

Esercizio 28: PROBLEMI DI COSTRUZIONE

1) Si consideri $H = \mathbb{Z}$ e $K = \mathbb{Z}/2$. Calcolare $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ e mostrare che $\exists$ un prodotto semidiretto non banale tra H e K. Mostrare inoltre che in tale gruppo ci sono infiniti elementi di ordine 2.
2) Sia G un gruppo e sia $G^n = G \times G \times \dots \times G$. Definire esplicitamente una mappa

$$\varphi : S_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(G^n)$$

che permuta le componenti e mostrare dunque l'esistenza di un prodotto semidiretto.
3) Mostrare (con la proposizione vista) che può esistere soltanto un prodotto semidiretto (diverso da quello banale) tra $\mathbb{Z}/p$ e $\mathbb{Z}/q$ e solo nel caso in cui $q \mid p-1$

Esercizio 29: Dato $\sigma = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8,9)(10,11,12) \in S_{12}$ esprimere il centralizzatore di σ come prodotto semidiretto.
Esprimere anche $N(\langle\sigma\rangle)$ come prodotto semidiretto.

Esercizio 30: Mostrare che Q_8 non può essere espresso come prodotto semidiretto.

Esercizio 31:
(1) Trovare tutti i sottogruppi di ordine 15 in S_5
(2) Trovare tutti i sottogruppi di ordine 20 in S_5

Esercizio 32: Dato un numero primo p, descrivere le classi di coniugio del gruppo $\mathbb{Z}/p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p^*$ relativo a:

$$\varphi : (\mathbb{Z}/p)^* \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$$
$$a \longmapsto \varphi_a : n \longmapsto an$$

- Calcolare inoltre il centro e il centralizzatore di $(1,1)$
- Mostrare che se $p \neq 2$, allora $(\mathbb{Z}/p) \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/p)^*$ si immerge in S_p

Esercizio 33: Sia $G = (\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3$ dove

$$\varphi : \mathbb{Z}/3 \longrightarrow \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/3)^3)$$

è definita da:

$$\begin{cases} \varphi_0(x,y,z) = (x,y,z) \\ \varphi_1(x,y,z) = (y,z,x) \\ \varphi_2(x,y,z) = (z,x,y) \end{cases}$$

- Determinare il centro di G
- Determinare il # di elementi di ordine 3

Esercizio 34: Siano H e K gruppi e $\varphi: K \to Aut(H)$ morfismo e $G = H \rtimes_\varphi K$
- Dato $\omega \in Aut(H)$ provare che

$$\Omega: H \rtimes_\varphi K \longrightarrow H \rtimes_\varphi K$$
$$(h,k) \longmapsto (\omega(h), k)$$

appartiene a $Aut(G)$ se e solo se $\omega \in Z_{Aut(H)}(Im(\varphi))$
- Dato $\varepsilon \in Aut(K)$ provare che

$$\mathcal{E}: H \rtimes_\varphi K \longrightarrow H \rtimes_\varphi K$$
$$(h,k) \longmapsto (h, \varepsilon(k))$$

appartiene ad $Aut(G)$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:
1) $\varepsilon(\ker\varphi) = \ker\varphi$
2) L'applicazione indotta al quoziente

$$\bar{\varepsilon}: K/\ker\varphi \longrightarrow K/\ker\varphi$$

è l'applicazione identica

Esercizio 35:

(1) Sia G abeliano, H t.c. $Z(H) = \{e\}$ e $\varphi: H \to Aut(G)$ un morfismo.
Provare che il centro di $G \rtimes_\varphi H$ ~~ē~~ è il gruppo $G_0 \times e_H$ con

$$G_0 = \{g \in G \mid \varphi_h(g) = g \ \forall h \in H\}$$

(2) Unire questo criterio e quello visto nelle note per trovare esplicitamente il centro di un prodotto semidiretto. (Forse non si trova proprio un se e solo se)

(3) Calcolare il centro di $(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes_\varphi S_n$ dove φ permuta le componenti.