Esercizio 46: Sia A anello con la seguente proprietà: $\forall x \in A$ esiste $n_x > 1$ tale che $x^{n_x} = x$. Provare che un ideale di A è primo se e solo se è massimale.

Esercizio 47: Sia A l'anello $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ e sia σ l'automorfismo

$$\sigma: A \longrightarrow A$$
$$f(t) \longmapsto f(t^{-1})$$

Provare che l'insieme dei punti fissi $A^{\sigma} = \{f(t) \in A \mid \sigma(f) = f\}$ è l'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[t + t^{-1}]$.

Esercizio 48: Dato un ideale I di un anello A definiamo $\mathcal{V}(I)$ come l'insieme degli ideali primi di A che contengono I. Dati due ideali I, J provare che:

(i) Esiste H ideale t.c. $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(H)$

(ii) Esiste N ideale t.c. $\mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(N)$

È vero che $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(J) \Leftrightarrow I = J$?

Esercizio 49: Sia $a \in A$ e sia I ideale di A. Definiamo

$$\Gamma = \{ f(x) \in A[x] \mid f(a) \in I \}$$

Provare che:

(i) L'insieme Γ è ideale di $A[x]$

(ii) I è primo in A $\Leftrightarrow$ Γ è primo in $A[x]$

(iii) Se $A = \mathbb{Z}$, $I = (5)$ e $a = 1$ allora $\Gamma = (5, x-1)$

Esercizio 50: Sia A l'anello $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(i) È vero che A è un dominio?

(ii) È vero che ogni ideale è generato da un solo elemento?

(iii) Determinare ideali primi e massimali di A

Esercizio 51: Sia A un dominio in cui tutti gli ideali sono principali (generati da un solo elemento). Mostrare che:

(1) Se p è un ideale primo, allora p è massimale.

(2) Sia B un dominio e sia $\varphi: A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli surgettivo. Allora o φ è isomorfismo o B è un campo.

Esercizio 52: Sia A anello in cui ogni ideale diverso da A è primo. Provare che A è un campo.

Esercizio 53: Un anello si dice locale se ha un solo ideale massimale. Dimostrare che

(1) Se $\varphi: A \longrightarrow B$ è omomorfismo di anelli e A è locale allora $\varphi(A)$ è locale

Dimostrare che

① Se $\varphi: A \longrightarrow B$ è omomorfismo di anelli e A è locale, allora $\varphi(A)$ è locale

② L'anello A è locale se e solo se $A \setminus A^*$ è un ideale di A.