Vediamo all'opera il famoso principio "non importa come trovi una primitiva se poi derivando si ottiene il risultato corretto".

Cerco una primitiva di $1/(1+x^2)$; nel seguito si scriverà così, tralasciando sempre il dx:

$$\int \frac{1}{x^2+1}$$

Vorrei fattorizzare il denominatore, ma è irriducibile... davvero?

$$= \int \frac{1}{(x+i)(x-i)}$$

Adesso decompongo come somma – regola generale di ogni buon procedimento alla ricerca di primitive

$$= \frac{i}{2} \int \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}$$

A questo punto so integrare i singoli termini:

$$= \frac{i}{2} \log(x+i) - \frac{i}{2} \log(x-i) = \frac{i}{2} \log \frac{x+i}{x-i}$$

Passando in notazione polare per numeri complessi si ottiene

$$= \frac{i}{2} \log \frac{\rho \cdot e^{i \arctan(1/x)}}{\rho \cdot e^{i \arctan(-1/x)}} = \frac{i}{2} \log e^{2i \arctan(1/x)}$$

Il logaritmo è l'inverso dell'esponenziale, per cui

$$= \frac{i}{2} \cdot 2i \arctan(1/x) = -\arctan \frac{1}{x}$$

e sfruttando l'identità più bella della goniometria (?), cioè

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{per ogni } x > 0$$

si arriva al risultato

$$= \arctan x - \frac{\pi}{2}$$

e facendo la derivata torna ^.^ Un paio di osservazioni:

- certo, per verificare la correttezza del risultato è necessario sapere che la derivata di $\arctan x$ è proprio $1/(x^2+1)$, dunque siamo finiti in un circolo vizioso. Ne usciamo prontamente, però, ricordando che si tratta solo di un esempio di modo *spregiudicato* di fare le primitive, e non della *reale* determinazione di quella primitiva;

- ci sono alcuni passaggi matematici non giustificati (anche se in realtà giustificabili): l'integrazione di una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ trattata come funzione a valori reali in cui i è una costante (come in effetti è!), la determinazione dell'angolo via arcotangente (che prende solo i valori dell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$), l'abuso delle proprietà del logaritmo dimenticando di avere argomenti complessi... ma tutto ciò non ha importanza: se alla fine la derivata è quella giusta, il procedimento risulta logicamente ineccepibile;

- questo procedimento ha davvero qualche utilità? Probabilmente no, però è divertente – personalmente l'ho utilizzato solo una volta (in quinta liceo), ma per la cronaca devo ammettere che esisteva un altro modo per trovare quella primitiva (forse due passaggi di integrazione per parti).

Lorenzo Cecchi
15 novembre 2019