

Alcune osservazioni sul terzo esercizio

Cari studenti e care studentesse, dal momento che l'emergenza sanitaria non ci permette di ritrovarci a discutere delle correzioni dei vostri compiti ho deciso di preparare questo breve documento per raccogliere alcune osservazioni circa gli errori più frequenti o più "importanti" che ho incontrato durante la correzione. Vi prego di leggere sempre le correzioni che trovate sui compiti perché

1. riconoscendo i propri errori si può imparare moltissimo;
2. il prof ed io abbiamo speso ore durante la correzione per fare queste osservazioni :)

A parte gli scherzi, veniamo al succo del discorso. Necessariamente i punti di cui parlerò non esauriscono tutti i tipi di errore commesso; l'idea è che ciascuno riconosca i propri e si renda conto del motivo per cui ha eventualmente perso punti sul terzo esercizio. Non fa comunque male dare un'occhiata anche agli errori non commessi: sapere ciò che non è giusto spesso è importante tanto quanto conoscere ciò che lo è.

- L'errore sicuramente più ricorrente e in qualche modo grave è stato il calcolo della derivata seconda della funzione inversa. Ecco i due svolgimenti **errati** più frequenti:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \implies g''(y) = \frac{1}{f''(x)}$$

Questa cosa può venire in mente solo procedendo per analogia / simmetria / altro principio estetico o filosofico. È bene avere questo tipo di intuizione (soprattutto in Fisica!), ma all'intuizione deve seguire una verifica rigorosa (cioè, va fatto qualche conto) e davvero nessun conto può portare a una conclusione simile. Da notare che basta provare questa formula sulla funzione $f(x) = x$ per rendersi conto che è totalmente errata.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \implies g''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Questo è un errore molto più sottile: l'idea è stata di derivare a destra e sinistra, e in effetti il calcolo della derivata del quoziente è corretto. Cosa non va bene dunque? Per rendercene conto, poniamoci una domanda: **rispetto a quale variabile** ho derivato la prima uguaglianza? Ci si rende subito conto di cosa è successo: a sinistra si è derivato rispetto a y , a destra rispetto a x , ed è chiaro che l'uguaglianza va a farsi benedire.

I due errori nascono entrambi, secondo me, dalla cattiva forma della formula $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. Personalmente vi consiglio di scriverla sempre così

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

o così

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Sono convinto che, partendo da una scrittura di questo tipo, quasi tutti voi avreste svolto correttamente l'esercizio. Per cui attenzione a usare formule con più variabili in gioco: per la cronaca, in questo caso la y era in realtà una $y(x)$, e andava derivata pure lei, ossia

$$[g'(y)]' = g''(y) \cdot y' = g''(y) \cdot f'(x)$$

- Nel primo punto un numero nutrito di persone ha scritto (o lasciato pensare) che una funzione monotona, continua e definita su tutto \mathbb{R} è automaticamente suriettiva (e dunque invertibile, dato che tutti o quasi avete dimostrato l'iniettività). Questo è semplicemente **falso**: il controesempio più semplice che mi viene in mente è $f(x) = \arctan x$.
- Soprattutto nel primo punto (ma anche in altri) si è assistito a una sovrabbondanza di fatti dimostrati – ad esempio, diversi hanno fatto uno studio di funzione e tracciato il grafico – che non servivano a dimostrare la tesi richiesta. Questa è una **pessima** abitudine perché:
 1. dà l'impressione che non sappiate bene come raggiungere la tesi, e quindi dimostrate tutto quel che riuscite a dimostrare;
 2. rende difficile distinguere, per chi corregge, se in mezzo al *mare magnum* di roba detta avete riconosciuto quella che serviva per rispondere alla domanda oppure no;
 3. nella migliore delle ipotesi è un vano tentativo di esibire la propria preparazione: per fare questo c'è apposta l'esame orale, in cui si è molto più liberi di dire ciò che si sa. In uno scritto non si guadagnano punti e si rischia, semmai, di fare una brutta impressione al professore (che è un umano come me e come voi).

Personalmente non ho penalizzato questo comportamento, ma ve lo voglio far notare per i vostri futuri esami, in cui magari invece potrebbe compromettere i vostri sforzi. Se proprio si desidera far notare qualcosa in più che esula dalle richieste, la cosa migliore da fare è aggiungere

una postilla, o in qualche modo far capire che siete consapevoli di star facendo un'aggiunta.

- Ultima cosa, due righe a proposito di come si applicano i teoremi; ci sono stati due comportamenti non particolarmente entusiasmanti.
 1. Qualcuno ha usato teoremi, ma senza dirlo. Un chiaro esempio è il teorema dei valori intermedi nel primo esercizio: sì, so che è ovvio che una funzione continua con limiti a $\pm\infty$ agli estremi è suriettiva, ma essendo un compito del primo anno vi è richiesto di dare tutti i dettagli, per dimostrare di aver assimilato bene la teoria. In futuro tante cose si daranno per scontate, ma come dice il prof. Oak, «c'è un tempo e luogo per ogni cosa».
 2. Molti di più hanno applicato teoremi **senza** verificare le ipotesi. Questa è una cosa da non fare, anche quando “è ovvio” che le ipotesi siano soddisfatte. Nella migliore delle ipotesi fa sorgere il dubbio che si sia applicato un risultato senza pensarci troppo; nella peggiore, porta a un risultato errato. Un esempio è l'applicazione del teorema di de l'Hôpital nel terzo punto: quasi nessuno (anche di quelli cui ho dato 9/10 punti!) ha verificato¹ che la funzione fosse C^2 in un opportuno intorno di 0 – e questo ci può stare, dopotutto stiamo parlando dell'inversa di un polinomio – mentre alcuni hanno applicato il teorema due volte senza controllare (o almeno ciò risulta dalle cose scritte) se dopo la prima volta si avesse ancora una forma indeterminata – e questo è un po' più brutto.

La morale è: almeno **dire** di aver controllato che tutte le ipotesi prima di applicare un teorema – magari anche senza averlo fatto davvero con tutti i dettagli. Nel 99% delle volte non servirà, ma magari potrà succedere un giorno che l'ipotesi che sembrava così “ovvia” in realtà non sia soddisfatta, e porti a un risultato errato.

Ho deciso di non penalizzare questo comportamento, perché dopotutto non stiamo parlando di un CdL in Matematica, e non è nelle prerogative di un Fisico stare a controllare tutti i dettagli di un teorema (e anzi, a volte ci se ne infischia proprio volutamente: un esempio – anche se come

¹Ad essere precisi, per applicare il teorema basta che sia derivabile due volte in un intorno bucato del punto: la continuità della derivata seconda serve in questo caso a dire che quando fate il limite con de l'Hôpital potete “sostituire” nel limite il valore che avete trovato facendo la derivata seconda nel punto precedente.

sapete non me ne intendo – vi arriverà dalla MQ), però mi sembrava comunque doveroso farvi riflettere su questo punto.

Non ho commentato l'esercizio bonus, perché in qualche modo ogni persona l'ha svolto in modo diverso e le correzioni sono molto più *ad personam*; dico solo che, trattandosi di punti (al massimo 3) in più, ho cercato di essere più rigoroso possibile, e dato punteggio pieno solo a chi ha scritto una soluzione (nei limiti della mia comprensione) chiara, corretta e completamente motivata.

Spero di non avervi tediato troppo. Per qualunque domanda o informazione, potete scrivermi all'indirizzo lcecchi@mail.dm.unipi.it. Augurandovi una (quanto possibile) serena quarantena,

Lorenzo Cecchi