Una condizione necessaria e sufficiente per la continuità di una funzione di una variabile reale

Lorenzo Cecchi

9 maggio 2018

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che mappa insiemi compatti in insiemi compatti e insiemi connessi in insiemi connessi. Allora f è continua.

Dimostrazione. Nel seguito gli *intorni* si intenderanno sempre privati del punto di cui sono intorni. Supponiamo per assurdo che f sia discontinua in un punto $x = x_0$; poniamo per semplicità $x_0 = 0$: allora

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0).$$

Ci sono due possibilità:

- Il limite esiste (sia per semplicità $L \in \mathbb{R}$) ma non coincide con $f(0)$: di conseguenza, dato $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|L - f(0)|$, per definizione di limite esisterà un intorno di zero $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ la cui immagine è contenuta in $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Dunque avremmo $f((-\delta, \delta)) = U \cup \{f(0)\}$, con $U \subseteq (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, ma questo insieme è sconnesso e siamo di fronte a una contraddizione (se $L = \pm\infty$ è ancora più semplice);
- Il limite non esiste: siano allora

  $$l = \liminf_{x\to 0} f(x), \qquad L = \limsup_{x\to 0} f(x)$$

  reali. Per il punto precedente vale la disuguaglianza

  $$l \leq f(0) \leq L$$

  poiché altrimenti, per caratterizzazione di $\liminf / \limsup$, troveremmo allo stesso modo un assurdo. Inoltre, poiché $l \neq L$, si ha che $f(0) \neq l$ oppure $f(0) \neq L$: supponiamo, senza perdita di generalità, che valga quest'ultima condizione. Per una proprietà nota del $\limsup$ esiste una successione $x_n \to 0$ tale che $f(x_n) \to L$: in particolare ne scegliamo una che non assuma mai il valore L — ciò è possibile poiché in ogni intorno dell'origine la funzione f non è costante, dunque assume un valore diverso da L (e per convessità dell'immagine ne assume uno arbitrariamente vicino a L). Consideriamo adesso l'insieme $K = \{x_n\} \cup \{0\}$: esso è chiuso, perché contiene l'unico punto di accumulazione (più precisamente, data una successione convergente a valori in K, o è definitivamente costante oppure converge a un punto di accumulazione: l'unico è 0 ed è contenuto nell'insieme), ed è ovviamente limitato (tutti i punti stanno definitivamente in un intorno di zero), dunque compatto. L'immagine di K, tuttavia, non risulta chiusa: infatti $\{f(x_n)\}$ è una successione a valori in $f(K)$ che converge a $L \notin f(K)$, e questo è assurdo perché f manda compatti in compatti. Infine, se i limiti superiore e inferiore sono infiniti basta applicare il medesimo ragionamento per trovare una contraddizione.

Poiché abbiamo escluso che il limite non esista o esista senza coincidere col valore di f, necessariamente f risulta continua. Si noti che l'implicazione inversa del teorema è un classico risultato, e che dunque la condizione data è necessaria e sufficiente. $\square$