Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E DELLA NATURA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Il problema dell'immersione di varietà compatte in spazi euclidei

Candidato:
Lorenzo Cecchi

Relatore:
Prof. Riccardo Benedetti

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

Sia M una varietà liscia, compatta, senza bordo di dimensione n, possibilmente astratta.[1] Usando partizioni dell'unità finite è possibile mostrare che M può essere immersa (oppure embedded) in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^k$, con k che a priori dipende dalla varietà data; si osservi che, lavorando con varietà compatte, un embedding è semplicemente un'immersione iniettiva. La prima versione cosiddetta "debole" – basata su argomenti di trasversalità applicati alle proiezioni lineari generiche su iperpiani di spazi euclidei – del teorema di immersione di Whitney asserisce che esiste un numero naturale k tale che per *ogni* varietà M esiste un'immersione (o un embedding) in $\mathbb{R}^k$, funzione *solo* della dimensione n. È ben posto e naturale, a questo punto, il problema di quale sia il minimo $i(n)$ per cui esista un'immersione di ogni varietà di dimensione n in $\mathbb{R}^{i(n)}$ (e l'analogo problema di embedding di M in $\mathbb{R}^{e(n)}$).

Il primo raffinamento è dovuto a Whitney stesso, il quale in [11] – versione cosiddetta "forte" – dimostra che $i(n) \leq 2n - 1$ e $e(n) \leq 2n$, migliorando così di una dimensione ambedue i risultati dovuti alla forma "debole" del proprio teorema. Il problema di immersione vede una completa risoluzione a distanza di quarant'anni dalla migliore stima di Whitney, in una forma che a prima vista appare piuttosto sorprendente:

Teorema 0.1 (DI IMMERSIONE)**.** *Sia M una varietà liscia, reale, compatta di dimensione n. Allora $i(n) = 2n - \alpha(n)$, dove $\alpha(n)$ è il numero di 1 presenti nella scrittura di n in base due.*

Questo risultato è conseguenza dei seguenti due enunciati complementari (vedi [7] e [3]):

Teorema 0.2 (MASSEY, 1960)**.** *Per ogni n esiste una varietà liscia, reale, compatta di dimensione n che non si immerge in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)-1}$, ossia $i(n) \geq 2n - \alpha(n)$.*

Teorema 0.3 (COHEN, 1985)**.** *Sia M una varietà liscia, reale, compatta di dimensione n. Allora M si immerge in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$, ossia $i(n) \leq 2n - \alpha(n)$.*

[1] Molti degli enunciati presenti in questo lavoro, in effetti, sono veri anche per spazi più generali – ad esempio varietà non compatte, oppure semplicemente topologiche. I risultati chiave richiedono però tutte le ipotesi sopra citate, e per questo motivo si è deciso di introdurle fin da subito, a beneficio di maggior chiarezza.

Il suddetto articolo di Massey, in realtà, ha come risultato principale l'annullamento di determinati elementi dell'anello di coomologia (a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) della varietà M, detti *classi caratteristiche* del fibrato normale dell'immersione, che costituisce una condizione necessaria per l'esistenza dell'immersione stessa. La realizzazione di questa condizione necessaria in dimensione $\geq 2n - \alpha(n)$, unitamente all'ottimalità fornita dal Teorema 0.2, ha portato in particolare a congetturare il risultato dimostrato da Cohen venticinque anni dopo.[2]

Per dimostrare e comprendere il teorema di Massey, oggetto principale di questo lavoro, è necessario introdurre il concetto fondamentale di *fibrato vettoriale*, oggetto della prima sezione dell'elaborato; successivamente si definiranno le classi caratteristiche di un fibrato e si vedrà come la loro caratterizzazione assiomatica sia già sufficiente per alcuni risultati ottimali di immersione; parallelamente si introdurranno i risultati, limitatamente al caso di immersioni in spazi euclidei, dell'elegante teoria di Hirsch-Smale (come esposta in [6]) che fornisce condizioni sufficienti per l'esistenza di immersioni, basate su una nozione di "banalità" di certi fibrati. Essa permette di riformulare il problema dell'immersione in termini di sollevamento di una certa mappa $f_\nu \colon M \to BO$, detta *morfismo di classificazione* del fibrato normale (stabile), in modo che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & BO(n-\alpha(n)) \arrow[d, hook] \\ M \arrow[ur, "\tilde{f}_\nu"] \arrow[r, "f_\nu"'] & BO \end{tikzcd}$$

commuti a meno di omotopia. La costruzione di tale sollevamento, seguendo il programma delineato da Brown e Peterson in [2], è realizzato in primo luogo come omomorfismo tra i rispettivi anelli di coomologia; conclusione del presente elaborato sarà dunque quella di definire tale omomorfismo e abbozzare una panoramica dell'argomento che ha permesso a Cohen di far commutare il corrispettivo diagramma di spazi e risolvere definitivamente il problema dell'immersione.

[2]Naturalmente le condizioni che sono necessarie per l'esistenza di immersioni lo sono, a maggior ragione, per l'esistenza di embedding; il problema della determinazione di $e(n)$, tuttavia, è molto più difficile – e, a conoscenza di chi scrive, ancora aperto – a causa dell'assenza di una teoria omotopica analoga a quella di Hirsch-Smale per le immersioni.

Capitolo 1

Richiami su fibrati vettoriali e loro classificazione

1.1 Definizioni di base

Prima di richiamare la definizione formale, si consideri il seguente esempio familiare: se $M \subset \mathbb{R}^k$ è una n-varietà differenziabile, in ogni punto è ben definito lo spazio tangente $T_x M$. La collezione di questi spazi forma un sottoinsieme $TM \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, è non è difficile dimostrare che si tratta a sua volta di una $2n$-varietà. Tuttavia, lo spazio TM non è semplicemente una varietà: è un insieme di spazi vettoriali associati in modo continuo (o C^∞) ai punti di M, con l'ulteriore proprietà di essere localmente omeomorfi (o diffeomorfi) a un prodotto tra un aperto della varietà e uno spazio vettoriale fissato. La definizione di fibrato vettoriale è la naturale generalizzazione di quanto visto sopra.

Definizione 1.1. Sia B uno spazio topologico.[1] Un *fibrato vettoriale* ξ su B consiste di uno spazio topologico $E = E(\xi)$, di una mappa continua $\pi\colon E \to B$ e di una struttura di spazio vettoriale su ciascuna fibra $\pi^{-1}(b)$, che soddisfi la seguente proprietà: per ogni $b \in B$ esiste un intorno $U \subset B$, un numero naturale n e un omeomorfismo

$$h\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$$

tale che la restrizione $h \restriction \pi^{-1}(b)$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali con $\{b\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ per ogni $b \in U$.

[1] Nei capitoli successivi si lavorerà con fibrati *lisci*, dove gli spazi sono varietà differenziabili e tutte le mappe sono richieste di classe C^∞. Si è deciso tuttavia di lavorare con spazi topologici in questo capitolo per due motivi: i risultati hanno valenza più generale (e dal sapore prettamente topologico) e alcuni importanti spazi che si incontreranno (le grassmanniane) sono varietà topologiche; tuttavia è sempre bene tenere a mente che alcune dimostrazioni, nel caso di fibrati lisci, richiedono passi ulteriori rispetto a quelli riportati, volti a dimostrare la regolarità di alcune funzioni.

Lo spazio $B = B(\xi)$ si chiama *base* del fibrato, mentre $E = E(\xi)$ è detto *spazio totale*; talvolta sarà indicato con E, dove non sussista ambiguità, anche il fibrato stesso. Le *fibre* $\pi^{-1}(b)$ saranno indicate anche come $F_b(\xi)$ o più semplicemente F_b. La dimensione n è una funzione localmente costante di b, e dunque costante nel caso di spazi connessi; in questo elaborato sarà sempre supposta costante, sarà dunque ben definita la dimensione di un fibrato e sarà indicato con n-fibrato un fibrato le cui fibre siano spazi vettoriali (reali) n-dimensionali. L'insieme delle *carte* (U_α, h_α) è detto *atlante* del fibrato, mentre il ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ è detto *banalizzante*; il fibrato è detto banale se e solo se esiste un atlante composto di un unico elemento.

È possibile dare una struttura di categoria alla collezione dei fibrati vettoriali definendo opportuni morfismi tra fibrati, che preservino la struttura di "spazio vettoriale dipendente dal punto". La definizione adottata è la seguente (vedi [9]):

Definizione 1.2. Si definisce *morfismo* di fibrati $\eta \to \xi$ una funzione continua

$$g\colon E(\eta) \to E(\xi)$$

la cui restrizione a ciascuna fibra $F_b(\eta)$ è un isomorfismo con una fibra $F_{b'}(\xi)$.

Ponendo $\bar{g}(b) = b'$ si ottiene una funzione continua $\bar{g}\colon B(\eta) \to B(\xi)$; viceversa, una mappa f tra basi si dice *indotta* se esiste un morfismo g tale che $f = \bar{g}$. È naturale, a questo punto, introdurre la seguente relazione di equivalenza tra fibrati con base B in comune:

Definizione 1.3. Due fibrati η, ξ su B si dicono *isomorfi* se esiste un morfismo $\eta \to \xi$ che sia un omeomorfismo tra i due spazi totali.

Alla luce di questa definizione, la condizione di banalità di un fibrato sopra descritta può essere riformulata in questo modo: un n-fibrato si dice banale se è isomorfo al fibrato ε^n_B descritto dalla proiezione canonica

$$\pi\colon B \times \mathbb{R}^n \to B, \qquad \pi(b, v) = b.$$

Al fine di dimostrare l'isomorfismo tra due fibrati sulla stessa base è spesso utile la seguente condizione sufficiente:

Lemma 1.1. *Sia $g\colon E(\eta) \to E(\xi)$ una funzione continua che si restringe a un isomorfismo tra $F_b(\eta)$ e $F_b(\xi)$ per ogni $b \in B$. Allora g è un omeomorfismo, e dunque un isomorfismo tra η e ξ.*

Il lemma è una semplice conseguenza del fatto che l'inversa di un'applicazione lineare è continua. Una prima, fondamentale applicazione è il seguente:

Teorema 1.1. *Un n-fibrato è banale se e solo se esistono n sezioni linearmente indipendenti.*

Una *sezione* è una funzione continua $s\colon B \to E$ tale che $s(b) \in F_b$ per ogni $b \in B$; più sezioni $s_1, \ldots, s_k$ si dicono linearmente indipendenti se i vettori $s_1(b), \ldots, s_k(b)$ (o meglio, le loro coordinate in $\mathbb{R}^n$ tramite h) sono linearmente indipendenti per ogni $b \in B$.

Dimostrazione. Siano $s_1, \ldots, s_n$ sezioni linearmente indipendenti; definiamo

$$f\colon B \times \mathbb{R}^n \to E, \qquad f(b, v) = v_1 s_1(b) + \ldots + v_n s_n(b).$$

Per ipotesi f è continua ed è un isomorfismo tra ciascuna fibra di ε_B^n e la corrispondente fibra di E (per definizione di sezione); la tesi segue allora dal lemma precedente. Viceversa, se E è banale esiste un atlante formato da una sola carta (B, h) e ponendo $s_i(b) = h^{-1}(b, e_i)$ si ottengono n sezioni linearmente indipendenti (dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica). □

Si noti che ogni fibrato ammette una sezione canonica, detta *sezione zero*, definita come $s(b) = 0 \in F_b$; l'immagine di s in E è un sottospazio su cui E si retrae per deformazione.

1.2 Alcuni esempi e costruzioni

Stabilito un quadro di definizioni e prime proprietà, è opportuno adesso esibire esplicitamente alcuni fibrati, al fine di dare concretezza alle nozioni precedenti e di potercene servire in seguito. Si sono già visti il fibrato banale ε_B^n e quello tangente (in cui $E = TM$, $B = M$ e $\pi(x, v) = v$ con $v \in T_x M$), che sarà indicato con τ_M; essi non sono, in generale, isomorfi, come dimostra ad esempio il fibrato tangente della sfera S^2 (il quale, se fosse isomorfo a quello banale, ammetterebbe un frame globale e da ciò seguirebbe la parallelizzabilità di S^2, assurdo).

Definizione 1.4. Sia ξ un fibrato su B con proiezione π, e sia $f\colon B_1 \to B$ continua. Sia $E_1 \subset B_1 \times E$ l'insieme delle coppie (b, e) tali che $f(b) = \pi(e)$. Allora la proiezione $\pi_1(b, e) = b$ definisce un fibrato $f^*\xi$ su B_1, detto fibrato *pullback* di f.

Da definizione si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{g} & E \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

dove la mappa g è definita come $g(b, e) = e$ ed è un morfismo di fibrati. Il diagramma suggerisce che in effetti il concetto di pullback è analogo a quello di morfismo di fibrati; più precisamente, dato un morfismo $g\colon \eta \to \xi$, si ha che $\eta \cong \bar{g}^*\xi$, dove l'isomorfismo è dato dalla mappa $e \mapsto (\pi_\eta(e), g(e))$. Nel caso particolare in cui $B_1 \subset B$ e f è l'inclusione, il fibrato $f^*\xi$ è detto *restrizione* di ξ a B_1 ed è indicato anche come $\xi \restriction B_1$: ad esempio, se N è una varietà e $M \subset N$ è un suo aperto, allora $\tau_M = \tau_N \restriction M$.

Un altro esempio che si incontra frequentemente in topologia differenziale (e che sarà centrale in seguito) è quello di *fibrato normale* associato a un embedding $M \subset N$ tra due varietà. Per descriverlo è necessario introdurre alcune definizioni.

Definizione 1.5. Siano η, ξ due fibrati su B con $E(\xi) \subset E(\eta)$. Allora ξ si dice *sottofibrato* di η (e si indica con $\xi \subset \eta$) se ciascuna fibra $F_b(\xi)$ è sottospazio vettoriale di $F_b(\eta)$.

Dati due fibrati ξ_1, ξ_2 è possibile definire su $B(\xi_1) \times B(\xi_2)$ il *fibrato prodotto* $\xi = \xi_1 \times \xi_2$, dove la mappa di proiezione è semplicemente

$$\pi = \pi_1 \times \pi_2 \colon E(\xi_1) \times E(\xi_2) \to B(\xi_1) \times B(\xi_2)$$

le cui fibre sono date dal prodotto cartesiano delle fibre dei fattori. Questa nozione ci permette di formalizzare l'idea di "fibrato somma", dove ciascuna fibra è data dalla somma diretta delle fibre degli addendi.

Definizione 1.6. Siano η, ξ due fibrati su B, e sia $d\colon B \to B \times B$ l'embedding diagonale. Il fibrato $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ è detto *somma di Whitney* di ξ_1 e ξ_2 e si indica con $\xi_1 \oplus \xi_2$.

La fibra $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ è canonicamente isomorfa a $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, dove la canonicità è data dalla costruzione di pullback; equivalentemente, la somma di due fibrati può essere vista come restrizione del fibrato prodotto alla sottovarietà diagonale. Il Lemma 1.1 permette di concludere viceversa che, dati due fibrati $\xi_1, \xi_2 \subset \eta$ tali che $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2) = F_b(\eta)$, vale l'isomorfismo $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

A questo punto dovrebbe risultare chiaro che l'idea di fibrato normale può essere resa rigorosa in questi termini: se $M \subset N$, il fibrato normale ν_M è caratterizzato dalla proprietà che $\nu_M \oplus \tau_M \cong \tau_N \restriction M$. Sorgono però alcune difficoltà: come garantire l'esistenza (e unicità) di questo fibrato, e come renderlo – in analogia con il fibrato tangente – dipendente solo dalla varietà M e non dall'ambiente in cui è embedded? Una possibile risposta alla prima domanda consiste nell'assegnare una struttura ulteriore al fibrato più grande, che renda le fibre spazi euclidei e garantisca dunque esistenza e unicità del complementare di ciascun sottospazio – ossia il suo ortogonale. Fortunatamente questa struttura addizionale richiede solo l'ipotesi di *paracompattezza* della varietà (al fine di usare partizioni dell'unità), ipotesi soddisfatta nei casi di nostro interesse (spazi di Hausdorff compatti oppure CW complessi).

Definizione 1.7. Una *metrica euclidea* su un fibrato è una funzione continua $\mu\colon E \to \mathbb{R}$ tale che la sua restrizione a ciascuna fibra sia una forma quadratica definita positiva; un fibrato vettoriale equipaggiato con una metrica è detto fibrato euclideo.

A questo punto si è in grado di rispondere alla prima domanda.

Teorema 1.2. *Siano $\xi \subset \eta$, con η euclideo. Allora esiste un fibrato canonico $\xi^\perp \subset \eta$ tale che $\xi \oplus \xi^\perp \cong \eta$.*

Dimostrazione. Sia $E(\xi^\perp)$ l'unione degli ortogonali alle fibre $F_b(\xi)^\perp$ (rispetto a $F_b(\eta)$) al variare di $b \in B$, e sia π la proiezione data dalla restrizione di quella di η. L'unica cosa che rimane da dimostrare è la locale banalità (l'isomorfismo segue dal Lemma 1.1). Per definizione di fibrato, dato un punto $b_0 \in B$ esiste un intorno U tale che le restrizioni di ξ ed η siano banali; esistono perciò rispettivamente $s_1, \dots, s_m$ e $s'_1, \dots, s'_n$ sezioni linearmente indipendenti dei due fibrati in U. Le sezioni di ξ, valutate in b_0, formano un insieme di vettori linearmente indipendenti, che è possibile completare a base di $F_{b_0}(\eta)$ usando vettori ottenuti valutando in b_0 opportune sezioni di η (che senza perdita di generalità assumiamo essere le ultime $n-m$); a meno di restringere U, per continuità del determinante si può supporre che allora $s_1, \dots, s_m, s'_{m+1}, \dots, s'_n$ siano sezioni linearmente indipendenti. Ortogonalizzando con Gram-Schmidt in ciascuna fibra (la formula esplicita per Gram-Schmidt assicura la continuità) si ottengono sezioni ortogonali, e prendendo $s'_{m+1}, \dots, s'_n$ si hanno sezioni (in U) di $\xi^\perp$, che pertanto risulta localmente banale. □

Risulta ben definito, dunque, il fibrato normale di una varietà embedded in una varietà riemanniana.[2] È possibile estendere il concetto di fibrato normale al caso di un'immersione $f\colon M \to N$ (sempre supponendo N riemanniana). L'iniettività del differenziale implica infatti che, data la decomposizione

$$T_{f(x)}N = df(T_xM) \oplus df(T_xM)^\perp,$$

"tornando in M" tramite pullback si ottenga $\tau_M \subset f^*\tau_N$, da cui $\tau_M \cong f^*\tau_N \oplus \nu_f$.

Definizione 1.8. Si definisce *fibrato normale* di un'immersione $f\colon M \to N$, e si indica con ν_f, il complemento ortogonale di τ_M in $f^*\tau_N$.

Il caso di embedding si ritrova ricordando che il pullback di un'inclusione è la restrizione.

Consideriamo ora due immersioni $f\colon M \to \mathbb{R}^m$, $g\colon M \to \mathbb{R}^n$, con $n > m$. È intuitivo che $\nu_g \not\cong \nu_f$, in quanto il primo è "più grande" del secondo; come

[2] Si dice varietà riemanniana una varietà liscia sul cui fibrato tangente è definita una metrica euclidea.

osservato in precedenza, questo fatto impedisce una definizione intrinseca di fibrato normale, che dipende sempre dallo spazio in cui la varietà si immerge. Esiste tuttavia una relazione tra i due fibrati: ν_g, in un certo senso, può essere visto come ν_f "sommato" con $\mathbb{R}^{n-m}$. Ciò conduce alla seguente definizione, la cui completa motivazione è rimandata al prossimo capitolo:

Definizione 1.9. Due fibrati ξ, η su B si dicono *stabilmente equivalenti* se

$$\xi \oplus \varepsilon^m \cong \eta \oplus \varepsilon^n$$

per opportuni $m, n \in \mathbb{N}$.

La suddetta definizione stabilisce una relazione di equivalenza (la transitività segue da commutatività e associatività della somma di Whitney, e dal fatto che $\varepsilon^n \oplus \varepsilon^m \cong \varepsilon^{n+m}$). È possibile dare una risposta alla seconda domanda in termini di classe di equivalenza di fibrati normali.

Teorema 1.3. *Se f, g sono due immersioni come sopra allora ν_f e ν_g sono stabilmente equivalenti.*

Dimostrazione. Poiché il pullback di un fibrato banale è banale (si può vedere in più modi; ad esempio perché sezioni di un fibrato si sollevano a sezioni del pullback, oppure direttamente dalla definizione), per ipotesi

$$\tau_M \oplus \nu_f \cong \varepsilon^m, \qquad \tau_M \oplus \nu_g \cong \varepsilon^n$$

e di conseguenza, usando le proprietà della somma di Whitney,

$$\nu_f \oplus \varepsilon^n \cong \nu_f \oplus \tau_M \oplus \nu_g \cong \nu_g \oplus \varepsilon^m$$

come richiesto. □

Corollario 1.1. *Esiste un'unica classe di equivalenza stabile di fibrati normali di immersioni di M in spazi euclidei, detta fibrato normale* stabile *e indicata con ν_M.*

È possibile generalizzare l'idea contenuta nella definizione di somma di Whitney: essa consiste nel definire un'operazione tra fibrati (la somma di Whitney appunto) partendo da un'operazione analoga tra spazi vettoriali a livello di fibre, dando una topologia adeguata sullo spazio totale che ne risulta.

Definizione 1.10. Sia $\mathcal{O}$ la categoria degli spazi vettoriali reali di dimensione finita, con isomorfismi di spazi vettoriali come morfismi. Un *funtore covariante continuo* è un'operazione $T\colon \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ che assegna:

- a ciascun $V, W \in \mathcal{O}$ uno spazio vettoriale $T(V, W) \in \mathcal{O}$;

- a ciascuna coppia di isomorfismi $f \colon V \to V'$, $g \colon W \to W'$ un isomorfismo
$$T(f,g) \colon T(V,W) \to T(V',W')$$
che dipenda in modo *continuo* da f e g (rispetto alla topologia sull'opportuno spazio di applicazioni lineari) e tale che:

- $T(id_V, id_W) = id_T(V,W)$;

- $T(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) = T(f_1, g_1) \circ T(f_2, g_2)$.

La nozione qui definita di funtore continuo dipendente da due variabili si generalizza a qualsiasi numero di variabili. Alcuni esempi: il funtore somma $\oplus$; il funtore prodotto tensore $\otimes$; i funtori $\mathrm{Hom}(V,W)$ oppure $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$ (detto funtore *duale*). A ciascuna di queste operazioni è associata una corrispettiva costruzione sui fibrati, in questo modo. Sia T un funtore continuo in k variabili e siano $\xi_1, \ldots, \xi_k$ fibrati su B. Per ogni $b \in B$ si pone
$$F_b = T(F_b(\xi_1), \ldots, F_b(\xi_k)).$$
Se E è l'unione disgiunta dei F_b e si definisce $\pi \colon E \to B$ come $\pi(F_b) = b$, vale il seguente:

Teorema 1.4. *Esiste una topologia canonica su E che lo rende spazio totale di un fibrato su B con proiezione π e fibre F_b. Questo fibrato si indica con $T(\xi_1, \ldots, \xi_k)$.*

Ad esempio, il fibrato associato al funtore $\oplus$ non è altro che la somma di Whitney. La dimostrazione non è qui riportata, e si rimanda a [9] per approfondimenti; vale la pena di notare che la continuità del funtore è necessaria ad assicurare la continuità del cambio di carta nell'intersezione tra due aperti del ricoprimento. Si osservi anche che in caso di ulteriore regolarità di T (in particolare C^∞) anche il fibrato ottenuto gode della medesima regolarità. In questo elaborato si è interessati al funtore Hom, il cui fibrato associato sarà fondamentale nella determinazione delle classi di Stiefel-Whitney del fibrato tangente di spazi proiettivi reali.

1.3 Fibrato universale e classificazione

Come si è visto, è possibile dare una relazione di equivalenza sull'insieme (o sulla categoria) dei fibrati su base B assegnata, suddividendoli in classi di isomorfismo; il problema, naturale, della determinazione di tali classi di equivalenza è però di difficile soluzione. È tuttavia possibile riformulare questo problema in termini di omotopia, non tanto con lo scopo di realizzare questa classificazione (in quanto, com'è noto, la determinazione di classi di omotopia è altrettanto complessa) ma al fine di poter osservare il problema da un diverso punto di vista il quale, incidentalmente, permette di ridurre determinate questioni di carattere generale a considerazioni più o meno esplicite circa un fibrato noto, detto *fibrato universale*. Prima di procedere, analizziamo più da vicino alcune proprietà *funtoriali* dei pullback.

Lemma 1.2. *Sia ξ un fibrato e siano f, g mappe a valori in B. Allora*

- $(fg)^*\xi \cong g^*(f^*\xi)$*;*
- $\mathbf{1}^*\xi \cong \xi$*;*
- *se* $\xi_1, \xi_2 \subset \xi$ *allora* $f^*(\xi_1 \oplus \xi_2) \cong f^*\xi_1 \oplus f^*\xi_2$.

In particolare, l'associazione $f \mapsto f^*$ definisce un funtore controvariante dalla categoria di spazi topologici con funzioni continue a quella di fibrati con morfismi.

Dimostrazione. Le proprietà discendono direttamente dalla definizione e costruzione di pullback. □

Una proprietà meno immediata e molto più importante è la seguente, che inizia a delineare il ruolo del pullback all'interno del problema di classificazione:

Teorema 1.5. *Sia ξ un fibrato su B, e siano $f, g \colon B_1 \to B$ omotope. Se B_1 è paracompatto allora $f^*\xi \cong g^*\xi$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che le restrizioni di un fibrato $E \to B \times I$ a $B \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$ sono isomorfe. Seguendo [5], isoliamo un fatto preliminare. Un fibrato $E \to B \times [a, b]$ è banale se le sue restrizioni a $B \times [a, c]$ e $B \times [c, b]$ sono banali per qualche $c \in (a, b)$ (basta considerare i due isomorfismi tra gli spazi totali delle restrizioni e il prodotto tra base e $\mathbb{R}^n$, e modificare opportunamente uno dei due in modo che essi coincidano sull'intersezione).

A questo punto, supponiamo per semplicità che B sia uno spazio di Hausdorff compatto (è il caso cui si è interessati, anche se il teorema vale nella generalità presentata nell'enunciato); in questo caso esiste un ricoprimento banalizzante finito i cui elementi sono della forma $U_\beta \times [t_\beta, t'_\beta]$; per l'osservazione precedente, questo fatto implica l'esistenza di un ricoprimento banalizzante $\{U_i \times I\}$, con $i = 1, \ldots, m$ (dove ciascun U_i è un'opportuna intersezione finita di U_β). Ora consideriamo la corrispettiva partizione dell'unità data da funzioni ϕ_i a supporto in U_i, e sia $\psi_i = \phi_1 + \ldots + \phi_i$; in particolare $\psi_0 = 0$ e $\psi_m = 1$. Indicato con B_i il sottospazio di $B \times I$ costituito dagli elementi della forma $(b, \psi(b))$, sia ξ_i la restrizione di ξ a B_i. Essendo ξ banale su $U_i \times I$, l'omeomorfismo $B_i \to B_{i-1}$ è indotto da un isomorfismo di fibrati $\xi_i \to \xi_{i-1}$ che è l'identità fuori da $\pi^{-1}(U_i \times I)$ e su essa si esplicita come

$$h_i \colon U_i \times I \times \mathbb{R}^n \to U_i \times I \times \mathbb{R}^n, \qquad h_i(b, \psi_i(b), v) = (b, \psi_{i-1}(b), v).$$

La composizione $h = h_1 \circ \cdots \circ h_m$ è di conseguenza l'isomorfismo cercato. Il caso generale si gestisce allo stesso modo, sfruttando l'esistenza di opportune partizioni dell'unità che discende dalle proprietà di paracompattezza della base. $\square$

Una conseguenza immediata, ma utile in diverse circostanze, è la seguente:

Corollario 1.2. *Un'equivalenza omotopica tra due basi paracompatte induce una corrispondenza biunivoca tra classi di isomorfismo di fibrati sulle due basi; in particolare ogni fibrato su base contrattile e paracompatta è banale.*

Dimostrazione. Segue dalle proprietà funtoriali dei pullback, applicate alle composizioni $B_1 \to B \to B_1$ e $B \to B_1 \to B$ omotope alle rispettive identità. $\square$

Sia ξ un n-fibrato su X; se indichiamo con $\mathcal{F}^n B$ l'insieme degli n-fibrati su una base (paracompatta) assegnata B, il teorema precedente definisce una funzione $[B, X] \to \mathcal{F}^n B$ che associa a ciascuna classe di omotopia $[f]$ il fibrato $f^*\xi$. Risolvere il problema della classificazione significa trovare ξ che renda la funzione biunivoca, ossia un fibrato da cui sia possibile ricavare *ogni* fibrato su B tramite pullback e in modo tale che mappe non omotope inducano fibrati non isomorfi.

L'idea di fondo richiama ancora una volta quella di fibrato tangente. Nella definizione di τ_M si è costruito uno spazio totale dato da coppie (x, v) dove $v \in T_x M$. Perché non generalizzare costruendo n-fibrati con spazio totale (P, v) dove P è uno spazio vettoriale di dimensione n (visto come sottospazio di qualche $\mathbb{R}^k$) e $v \in P$?

Definizione 1.11. Si definisce *grassmanniana* di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$, e si indica con $G_n(\mathbb{V})$, l'insieme dei suoi sottospazi vettoriali di dimensione n.

Si noti che $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^n$. È possibile dare una struttura di varietà topologica su $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, esaminandone la relazione con un altro tipo di varietà.

Definizione 1.12. Si definisce *varietà di Stiefel*, e si indica con $V_n(\mathbb{V})$, il sottospazio aperto del prodotto topologico $\mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V}$ costituito da tutte le n-uple di vettori di $\mathbb{V}$ linearmente indipendenti.

La mappa naturale

$$q \colon V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

che assegna a ogni frame il sottospazio generato dai propri vettori è surgettiva, e permette di definire una topologia su G_n come identificazione di V_n. Il processo di Gram-Schmidt retrae per deformazione V_n su V_n^0, le n-uple di vettori ortonormali; il vantaggio di questa costruzione è la compattezza[3] di V_n^0 (oltre alla sua maggior semplicità), e il fatto che la topologia quoziente indotta dalla proiezione $q_0\colon V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ è equivalente a quella data in definizione.

Teorema 1.6. *La grassmanniana $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ è una varietà topologica compatta di dimensione nk. Inoltre $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ e $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ sono omeomorfi, mediante la corrispondenza $X \mapsto X^\perp$.*

Dimostrazione. Si suddivide la dimostrazione in piccoli passi.

- Lo spazio $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ è di Hausdorff: per dimostrarlo è sufficiente che per ciascuna coppia di punti esista una funzione continua a valori reali che li separa. Sia $w \in \mathbb{R}^{n+k}$, e sia $\rho_w(X)$ il quadrato della distanza euclidea di w da X. Presa una base ortonormale $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di X la formula esplicita

$$\rho_w(X) = \langle w, w\rangle - \langle w, x_1\rangle^2 - \ldots - \langle w, x_n\rangle^2$$

  dimostra che la composizione

$$V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{q_0} G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\rho_w} \mathbb{R}$$

  è continua, da cui la continuità di ρ_w per definizione. A questo punto è chiaro che due piani X, Y sono separati da una ρ_w con $w \in X \setminus Y$.

- Lo spazio $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ è compatto: infatti è immagine continua dello spazio compatto $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$.

- Ogni $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ha un aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^{nk}$: sia $\mathbb{R}^{n+k} = X_0 \oplus X_0^\perp$, e sia U il sottoinsieme aperto di $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ costituito dai piani Y tali che $Y \cap X_0^\perp = \{0\}$. In questo caso ciascun Y può essere identificato con il grafico di una trasformazione lineare $T(Y)\colon X_0 \to X_0^\perp$; è sufficiente dunque dimostrare che

$$T\colon U \to \mathrm{Hom}(X_0, X_0^\perp) \cong \mathbb{R}^{nk}$$

  è un omeomorfismo. Questo segue dal fatto che, fissata una base ortonormale $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di X_0, esiste un'unica base di Y costituita dalle preimmagini, rispetto alla proiezione ortogonale su X_0, degli elementi della base di X_0; vale cioè

$$y_i = x_i + T(Y)x_i$$

  e poiché si verifica che il frame $(y_1, \ldots, y_n)$ dipende con continuità da Y, anche $T(Y)$ ne dipende con continuità. Viceversa, l'identità di sopra mostra anche che il frame $(y_1, \ldots, y_n)$ è una funzione continua di $T(Y)$, e dunque lo è Y, ossia T^{-1} è continua e dunque un omeomorfismo.

[3] V_n^0 è un sottospazio chiuso (può essere definito da un'equazione algebrica) del prodotto di n sfere S^{n+k-1}, dunque compatto.

- L'applicazione $Y \mapsto Y^\perp$ è continua (e dunque un omeomorfismo, essendo chiusa e bigettiva): infatti, sia $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ una base di $X_0^\perp$, e si definisca una funzione

  $$f\colon q^{-1}(U) \to V_k(\mathbb{R}^{n+k})$$

  in questo modo. Dato $(y_1, \dots, y_n) \in q^{-1}(U)$, si applichi Gram-Schmidt al $(n+k)$-frame ottenuto completandolo con la base fissata di $X_0^\perp$: a questo punto si pone come immagine il k-frame composto degli ultimi vettori dell'insieme ottenuto. In questo modo si ha il diagramma commutativo

  $$\begin{tikzcd} q^{-1}(U) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & V_k(\mathbb{R}^{n+k}) \arrow[d, "q"] \\ U \arrow[r, "\perp"] & G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \end{tikzcd}$$

  da cui segue la continuità, per definizione, di $Y \mapsto Y^\perp$, in quanto lo sono f e q.

$\square$

Si osservi che le inclusioni $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \subset \dots$ implicano $G_n(\mathbb{R}^k) \subset G_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subset \dots$; pertanto, è possibile definire

$$G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k \geq n} G_n(\mathbb{R}^k)$$

su cui è data la topologia colimite.[4] Finalmente si è in condizione di definire il fibrato sopra descritto. Per ogni $k \geq n$ (eventualmente $k = \infty$), sia E l'insieme delle coppie $(P, v) \in G_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$, e consideriamo la proiezione naturale $\pi\colon E \to G_n(\mathbb{R}^k)$ data da $\pi(X, v) = X$. Questo fibrato è detto *n-fibrato canonico* e si indica con $\gamma^n(\mathbb{R}^k)$; nel caso $k = \infty$ si scrive semplicemente γ^n, e si denomina anche *fibrato universale*.

Teorema 1.7. *Per ogni n intero e $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\gamma^n(\mathbb{R}^k)$ è effettivamente un fibrato.*

Dimostrazione. Se k è finito, sia U l'aperto di X_0 costruito nella precedente dimostrazione, e sia $p\colon \mathbb{R}^{n+k} \to X_0$ la proiezione ortogonale. Allora le mappe

$$h\colon \pi^{-1}(U) \to U \times X_0, \qquad h(X, v) = (X, p(v))$$

[4] Nella topologia colimite (rispetto all'inclusione) un insieme è aperto se e solo se l'intersezione con ciascun elemento dell'unione è aperta in esso. Anche $\mathbb{R}^\infty$ sarà da considerarsi munito di questa topologia.

e

$$h^{-1}\colon U \times X_0 \to \pi^{-1}(U), \qquad h^{-1}(X,v) = (X, v + T(X)v)$$

sono continue, e definiscono dunque l'omeomorfismo richiesto per ciascun $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Nel caso in cui $k = \infty$, l'aperto U può essere caratterizzato, equivalentemente, come l'insieme di tutti gli Y tali che $p(Y) = X_0$, ossia richiedendo la surgettività della proiezione ortogonale. Questo insieme è effettivamente aperto (nella topologia colimite), poiché ogni sua intersezione con $G_n(\mathbb{R}^k)$ coincide con l'aperto U_k definito in dimensione finita. La mappa h, come definita nel caso precedente, non ha problemi di continuità; per l'inversa si osservi che la restrizione a ciascun prodotto $U_k \times X_0$ è continua per quanto visto sopra, e che la topologia di sottospazio indotta su $U \times X_0$ coincide con quella data dal colimite dei prodotti $U_k \times X_0$ per un lemma tecnico, per il quale si rimanda a [9]. □

Le grassmanniane permettono anche di definire per una n-varietà liscia qualsiasi un analogo della mappa di Gauss per le superfici in $\mathbb{R}^3$, tramite la corrispondenza $x \in M \subset \mathbb{R}^k \mapsto T_xM \in G_n(\mathbb{R}^k)$. È chiaro che questa funzione è indotta da un morfismo di fibrati, dato da

$$g\colon TM \to E(\gamma^n(\mathbb{R}^k)), \qquad g(x,v) = (T_xM, v)$$

e dunque $\bar{g}^*\gamma^n(\mathbb{R}^k) \cong \tau_M$. Ciò non sorprende, essendo le due costruzioni molto simili tra loro. È degno di nota, però, che la stessa cosa valga per qualunque fibrato ξ, a patto che k sia sufficiente grande; ossia, vale il seguente:

Teorema 1.8 (DI CLASSIFICAZIONE). *Per ogni n-fibrato ξ su base B paracompatta esiste un morfismo di fibrati $\xi \to \gamma^n$, detto morfismo* di classificazione *e indicato con f_ξ; inoltre a fibrati pullback isomorfi corrispondono mappe omotope, ossia la funzione*

$$[B, G_n] \to \mathcal{F}^n B, \qquad [\bar{f}_\xi] \mapsto [\bar{f}_\xi^*\gamma^n \cong \xi]$$

è una bigezione.

Prima di dimostrare il teorema, isoliamo il seguente risultato preliminare:

Lemma 1.3. *Dato un n-fibrato ξ, un isomorfismo $\xi \cong f^*\gamma^n$ è equivalente a una mappa $g\colon E(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$ che si restringe a un'applicazione lineare e iniettiva su ciascuna fibra, detta talvolta* mappa di Gauss.

Dimostrazione. Supponiamo di avere $\xi \cong f^*\gamma^n$; indichiamo con $\tilde{f}$ il corrispondente omeomorfismo fra spazi totali. Si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\pi"'] & E(f^*\gamma^n) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & E(\gamma^n) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^\infty \\
& B \arrow[r, "f"] & G_n &
\end{tikzcd}$$

dove $p(X, v) = v$; componendo lungo la prima riga si ottiene la funzione $g\colon E(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$ richiesta. Viceversa, data g si definisce $f\colon B \to G_n$ come $f(x) = g[F_x(\xi)]$ (come sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^\infty$ e dunque elemento di G_n), ottenendo il precedente diagramma commutativo, con isomorfismo dato da $x \mapsto (\pi_\xi(x), (f \circ \pi_\xi(x), g(x)))$. $\square$

Dimostrazione (di 1.8). Per la surgettività, sia $\xi \in \mathcal{F}^n B$; per l'ipotesi di paracompattezza (la numerabilità segue da un lemma di natura tecnica, vedi [5]) esistono un ricoprimento banalizzante numerabile $\{U_i\}$ di B e una partizione dell'unità ψ_i a esso subordinato (cioè con ciascuna ψ_i a supporto in U_i). Sia $g_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ la composizione della carta h_i e della proiezione su $\mathbb{R}^n$. L'applicazione $\psi_i \circ \pi \cdot g_i$ si estende a una mappa continua $\phi_i\colon E \to \mathbb{R}^n$, identicamente nulla fuori da $\pi^{-1}(U_i)$. Poiché solo un numero finito di ψ_i (e dunque di ϕ_i) è diversa da zero in un intorno di ogni $x \in B$, le ϕ_i sono le coordinate di una mappa $g\colon E \to (\mathbb{R}^n)^\infty = \mathbb{R}^\infty$ che si restringe a un'applicazione lineare iniettiva su ciascuna fibra.

Per l'iniettività, supponiamo $\xi \cong f_0^*\gamma^n \cong f_1^*\gamma^n$ e siano $g_0, g_1\colon E(\xi) \to \mathbb{R}^\infty$ le due funzioni date dal lemma. Se si dimostra che g_0 e g_1 sono omotope tramite mappe g_t che mantengono la proprietà di essere iniettive e lineari sulle fibre, allora $f_t(x) = g_t[F_x(\xi)]$ sarà l'omotopia cercata. Sia $L_t\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ un'omotopia tra l'identità e una mappa a valori nelle coordinate dispari di $\mathbb{R}^\infty$; essa è lineare e iniettiva, e dunque la composizione $L_t \circ g_0$ è un'omotopia tra g_0 e $\hat{g}_0 = L_1 \circ g_0$; allo stesso modo è possibile realizzare un'omotopia tra g_1 e $\hat{g}_1$ in modo che il risultato sia una mappa lineare, iniettiva, a valori nelle coordinate pari. A questo punto l'omotopia banale $\hat{g}_t = (1-t)\hat{g}_0 + t\hat{g}_1$ soddisfa le ipotesi richieste. $\square$

Il problema di classificare gli n-fibrati su uno spazio B, dunque, è perfettamente equivalente a quello di calcolare le classi di omotopia di mappe $B \to G_n$. Benché non sia agevole, come già accennato, risolvere esplicitamente tale problema, questa corrispondenza semplifica notevolmente alcune dimostrazioni, riconducendole al caso particolare del fibrato universale; ad esempio, da essa segue l'esistenza di una metrica euclidea per ogni fibrato su base paracompatta B, data semplicemente dal pullback della metrica euclidea standard su $\mathbb{R}^\infty$ (che si restringe alla metrica usuale su ciascun sottospazio di dimensione finita). Un'altra applicazione, che introduce al capitolo successivo, è la seguente: supponiamo di voler assegnare a un fibrato

ξ una determinata classe di coomologia $c(\xi) \in H^*(B(\xi); A)$ in modo che la corrispondenza sia *naturale* rispetto ai morfismi di fibrati.[5] Allora, preso il morfismo di classificazione $f_\xi \colon \xi \to \gamma^n$, si ha che $c(\xi) = \bar{f}_\xi^*(c(\gamma^n))$; viceversa, data una classe $c \in H^*(G_n; A)$, si costruisce una corrispondenza naturale $\xi \mapsto c(\xi)$ tramite pullback. In altre parole, si ha il seguente:

Corollario 1.3. *L'anello*[6] *di tutte le classi di coomologia a coefficienti in A, naturali rispetto ai morfismi di n-fibrati su base paracompatta, è canonicamente isomorfo all'anello $H^*(G_n; A)$.*

Le classi di coomologia che soddisfano questa proprietà sono dette *classi caratteristiche*, un esempio delle quali (classi di Stiefel-Whitney) è introdotto nel prossimo capitolo.

[5] Ossia, dato un morfismo $g \colon \xi \to \eta$, si ha $c(\xi) = \bar{g}^*(c(\eta))$.

[6] Le operazioni di anello sono quelle definite all'interno di $H^*(B; A)$.

Capitolo 2

Classi caratteristiche di Stiefel-Whitney

2.1 Definizione assiomatica e prime proprietà

Alla fine del capitolo precedente si è accennato alla possibilità di assegnare a ciascun fibrato ξ una classe di coomologia $c(\xi)$, allo scopo di "misurarne" per via algebrica la non banalità. Storicamente, la definizione di un oggetto algebrico di natura *controvariante* analogo a costrutti già noti in topologia (gruppi di omotopia e di omologia) ha ricevuto parte della propria motivazione dall'esigenza di assegnare invarianti naturali a fibrati, le cui proprietà controvarianti sono manifeste, ad esempio, nella fondamentale costruzione di pullback. Una seconda motivazione può essere ricondotta al teorema di classificazione. Una sua conseguenza, infatti, è che un fibrato ξ è banale se e solo se la mappa tra basi $\bar{f}_\xi$ indotta dal suo morfismo di classificazione è omotopa a zero. Un problema più semplice, benché non equivalente, è quello di studiare la banalità o meno della mappa indotta in coomologia

$$\bar{f}_\xi^* \colon H^*(G_n; A) \to H^*(B(\xi); A)$$

che è zero (in dimensione positiva) se ξ è banale. La naturalità delle classi caratteristiche, inoltre, implica che

$$c(\xi) = \bar{f}_\xi^*(c(\gamma^n)) = 0$$

e dunque le classi caratteristiche del fibrato banale sono nulle. Se in aggiunta le classi caratteristiche generano l'anello di coomologia di G_n, le classi caratteristiche di ξ sono nulle se e solo se $\bar{f}_\xi^*$ è nulla in coomologia. A posteriori, le classi che si vanno ora a introdurre godono proprio di questa importante proprietà. D'ora innanzi, dove non altrimenti specificato, la coomologia sarà a coefficienti in $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definizione 2.1. Le *classi di Stiefel-Whitney*, indicate con w_i, sono caratterizzate dai seguenti assiomi:

1. (Esistenza) Esiste una corrispondenza che associa a ogni fibrato ξ una successione di classi
$$w_i(\xi) \in H^i(B), \quad i \in \mathbb{N}$$
dette classi di Stiefel-Whitney. La classe $w_0(\xi)$ è posta uguale all'unità dell'anello di coomologia, indicata con $1 \in H^0(B)$; se ξ è un n-fibrato, $w_i(\xi) = 0$ per $i > n$.

2. (Naturalità) Se $f\colon B(\xi) \to B(\eta)$ è indotta da un morfismo di fibrati $\xi \to \eta$, allora
$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta).$$

3. (Prodotto di Whitney) Se ξ, η sono fibrati su B allora
$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^{i} w_j(\xi) \smile w_{i-j}(\eta).$$

4. (Non banalità) Il fibrato canonico $\gamma^1(\mathbb{R}^2)$ su $\mathbb{P}^1$ ha classe w_1 non nulla – altrimenti $w_i(\xi) = 0$ per ogni $i > 0$ soddisferebbe gli altri tre assiomi per ogni ξ.

L'esistenza delle suddette classi caratteristiche non è ovvia; una loro costruzione si trova, ad esempio, in [9]. In questo elaborato essa sarà assunta, e si andranno a studiare le proprietà che discendono dagli assiomi sopra descritti. Vediamo alcune conseguenze immediate, ma importanti:

- Se $\xi \cong \eta$ allora $w_i(\xi) = w_i(\eta)$: infatti esse sono immagini dello stesso elemento tramite mappe in coomologia indotte da funzioni omotope, e dunque uguali. Oppure, poiché un isomorfismo induce l'identità tra le basi, si ottiene che la mappa indotta tra le basi in coomologia è l'identità.

- In particolare, se ε è banale, allora $w_i(\varepsilon) = 0$ per ogni $i > 0$: infatti basta considerare un morfismo di fibrati tra ε e il fibrato banale su un punto, che ha tutti i gruppi di coomologia banali in dimensione positiva.

- Combinando questa informazione con l'assioma 3, si ottiene che $w_i(\varepsilon \oplus \xi) = w_i(\xi)$ per ogni fibrato banale: dunque due fibrati stabilmente equivalenti hanno medesime classi di Stiefel-Whitney, e sono ben definite quelle del fibrato normale stabile.

- Se ξ è un n-fibrato *euclideo* che possiede k sezioni linearmente indipendenti, allora
$$w_{n-k+1}(\xi) = \ldots = w_n(\xi) = 0,$$
poiché può essere decomposto come $\varepsilon \oplus \varepsilon^\perp$, con ε banale e $\varepsilon^\perp$ di dimensione $n - k$.

Esiste un modo più sintetico e in un certo senso più fedele nei confronti della propria costruzione esplicita di vedere le classi di Stiefel-Whitney. Sia $H^{\Pi}(B)$ l'anello di coomologia delle serie formali;[1] allora si definisce la *classe totale* di Stiefel-Whitney

$$w(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\xi)$$

come serie formale delle singole classi sopra definite. Il prodotto in $H^{\Pi}(B)$ è definito dalla formula $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots) = (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \dots$, dove $a_i, b_i \in H^i(B)$ e $a_ib_j = a_i \smile b_j$. Si noti che il primo termine della serie è sempre 1, e che quindi $w(\xi)$ è un invertibile dell'anello; il suo inverso si indica con $\bar{w}(\xi)$ e può essere costruito induttivamente (vedi [9]). Con questo formalismo, inoltre, l'assioma di prodotto di Whitney si esprime semplicemente come

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta).$$

Una riscrittura dell'uguaglianza precedente ci dà

$$w(\eta) = \bar{w}(\xi)w(\xi \oplus \eta)$$

e nel caso particolare in cui il fibrato somma sia banale, si ottiene

$$w(\eta) = \bar{w}(\xi).$$

Corollario 2.1 (Dualità di Whitney)**.** *Se M è una varietà liscia immersa in uno spazio euclideo, vale*

$$w_i(\nu_M) = \bar{w}_i(\tau_M).$$

In seguito la classe totale del fibrato tangente τ_M sarà indicata semplicemente come $w(M)$.

2.2 Esempi e applicazioni

Introdotte le proprietà essenziali delle classi di Stiefel-Whitney, vediamo ora alcuni calcoli espliciti su semplici fibrati. Si prenda ad esempio il fibrato tangente di una sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$: il fibrato normale dell'inclusione è chiaramente banale (esiste un campo unitario di vettori normali alla superficie), dunque $1 = w(\nu) = \bar{w}(\xi) \Rightarrow w(\xi) = 1$. In particolare, le classi di Stiefel-Whitney non distinguono i fibrati tangenti banali (com'è noto, quelli di S^0, S^1, S^3, S^7) dagli altri a causa della loro equivalenza stabile.

Un altro importante esempio è quello di γ^1 su $\mathbb{P}^n$. Premettiamo il seguente risultato, che si dimostra ad esempio tramite (co)omologia cellulare.

[1] Esso differisce da $H^*(B)$ poiché non è richiesto che i suoi elementi siano somme *finite* di elementi appartenenti ai gruppi di coomologia.

Lemma 2.1. *Il gruppo $H^i(\mathbb{P}^n)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ per $i \leq n$ e banale altrimenti. Inoltre, se a genera $H^1(\mathbb{P}^n)$, allora a^i genera $H^i(\mathbb{P}^n)$ per ogni $i \leq n$; in altre parole*

$$H^*(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[a]/(a^{n+1}).$$

Consideriamo l'inclusione standard $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $v \mapsto (v, 0)$; essa induce un'inclusione $j \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$, che è canonicamente indotta da un morfismo $\gamma^1(\mathbb{R}^2) \to \gamma^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Di conseguenza $j^*(w_1(\gamma^1(\mathbb{R}^{n+1})) = w_1(\gamma^1(\mathbb{R}^2)) \neq 0$ per l'assioma 4, e quindi $w_1(\gamma^1(\mathbb{R}^{n+1})) = a$. Le classi in dimensione più alta sono nulle per l'assioma 1; abbiamo dunque il seguente:

Corollario 2.2. *Per γ^1 su $\mathbb{P}^n$ vale $w = 1 + a$.*

Poiché da definizione γ^1 su $\mathbb{P}^n$ è un sottofibrato di ε^{n+1} (lo spazio totale è sottospazio di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e le fibre sono sottospazi vettoriali), esiste il suo complemento ortogonale $\gamma^\perp$, per il quale vale

$$w(\gamma^\perp) = \bar{w}(\gamma^1) = (1 + a)^{-1} = 1 + a + \ldots + a^n.$$

Questo esempio mostra che esistono fibrati con tutte le classi di Stiefel-Whitney non banali (in dimensione consentita).

Se consideriamo $\mathbb{P}^n$ come varietà differenziabile, la cui struttura è indotta da quella di S^n tramite quoziente – ossia, $f \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}$ è liscia se e solo se la composizione $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è liscia, dove p è la proiezione canonica –, è possibile indagare il suo fibrato tangente, che si rivelerà particolarmente importante in seguito.

Lemma 2.2. *Il fibrato tangente τ di $\mathbb{P}^n$ è isomorfo a* $\mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^\perp)$.

Dimostrazione. Sia $p \colon S^n \to \mathbb{P}^n$ come sopra, ossia $p(x) = \{\pm x\}$; essa è differenziabile, e induce quindi una mappa $dp \colon TS^n \to T\mathbb{P}^n$. Questa applicazione è tale che $dp(x, v) = dp(-x, -v)$, in quanto una curva α su S^n con $\alpha(0) = x$ e vettore tangente v ha lo stesso vettore tangente, in $\mathbb{P}^n$, di una curva con $\alpha(0) = -x$ e $\alpha'(0) = -v$, e dunque $T\mathbb{P}^n$ consiste di coppie $\{(x, v), (-x, -v)\}$ tali che $x \cdot x = 1$ e $x \cdot v = 0$. Se L è la retta per l'origine di $\mathbb{R}^{n+1}$ che interseca S^n in $\{\pm x\}$, ciascuna coppia in $T\mathbb{P}^n$ corrisponde (in modo continuo[2], e lineare su ciascuna fibra) a un'unica applicazione lineare $l \colon L \to L^\perp$ dove $l(x) = v$. Ne segue che $T\mathbb{P}^n \cong \mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ e, per il Teorema 1.4, che τ è canonicamente isomorfo a $\mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^\perp)$. □

Questo lemma non è apparentemente di alcun aiuto, poiché non siamo in grado di legare le classi di due fibrati a quelle di Hom tra loro. Tuttavia esiste un espediente, basato sulla stabilità delle classi di Stiefel-Whitney, che permette di concludere.

[2]Non avendo descritto la topologia su $\mathrm{Hom}(\cdot, \cdot)$ non è purtroppo possibile verificare rigorosamente la continuità, più che plausibile, di questa applicazione.

Teorema 2.1. *La somma $\tau \oplus \varepsilon^1$ su $\mathbb{P}^n$ è isomorfa al fibrato $n+1$-dimensionale $\gamma^1 \oplus \ldots \oplus \gamma^1$. Di conseguenza*

$$w(\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1}$$

Nella dimostrazione si farà uso del seguente:

Lemma 2.3. *Sia ξ un fibrato euclideo. Allora $\xi \cong \mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$, detto fibrato* duale *di ξ.*

Dimostrazione. Lo spazio totale di $\eta = \mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1)$ è dato dall'unione disgiunta degli spazi duali delle fibre di ξ; in particolare, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ è il prodotto scalare su ciascuna $F_b(\xi)$ dato dalla restrizione di μ, la mappa

$$g\colon \xi \to \eta, \qquad g(x) = \langle \cdot, x \rangle_\mu$$

definisce un isomorfismo di fibrati, in quanto isomorfismo canonico su ciascuna fibra dato dal teorema di Riesz, la cui continuità segue dalla continuità di μ e dunque del prodotto scalare da essa indotto. □

Dimostrazione (di 2.1). L' 1-fibrato $\mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^1)$ ha base $B = \mathbb{P}^n$, e

$$s\colon \mathbb{P}^n \to \mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^1), \quad s(x) = id_{F_x(\gamma^1)}$$

è una sua sezione non nulla; pertanto $\mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^1) \cong \varepsilon^1$. Ora

$$\begin{aligned}
\tau \oplus \varepsilon^1 &\cong \mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^\perp) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^1) \\
&\cong \mathrm{Hom}(\gamma^1, \gamma^\perp \oplus \gamma^1) \\
&\cong \mathrm{Hom}(\gamma^1, \varepsilon^{n+1}) \\
&\cong \mathrm{Hom}(\gamma^1, \varepsilon^1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}(\gamma^1, \varepsilon^1) \\
&\cong \gamma^1 \oplus \ldots \oplus \gamma^1
\end{aligned}$$

per il lemma precedente (γ^1 è metrizzabile in quanto fibrato su base paracompatta) e dunque, sfruttando stabilità delle classi di Stiefel-Whitney e formula per il prodotto, si ottiene

$$w(\tau) = w(\tau \oplus \varepsilon^1) = w(\gamma^1)^{n+1} = (1+a)^{n+1}.$$

□

2.3 Immersioni e classi di Stiefel-Whitney

Il calcolo della classe totale degli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n$, insieme al teorema di immersione di Whitney (nella sua forma forte) citato nell'introduzione, permette di stabilire alcuni primi risultati circa immersioni di varietà in spazi euclidei.

Sia M una n-varietà, e si supponga di avere un'immersione $f\colon M \to \mathbb{R}^{n+k}$. Dalla dualità di Whitney segue che $w(\nu) = \bar{w}(M)$, e poiché ν è un k-fibrato, si deduce il seguente:

Corollario 2.3. *Se una n-varietà M si immerge in $\mathbb{R}^{n+k}$, allora $\bar{w}_i(M) = 0$ per $i > k$.*

Applicando il corollario al risultato sulle classi di $\mathbb{P}^n$ si ottengono varie condizioni necessarie per l'immersione di $\mathbb{P}^n$ in uno spazio euclideo, e dunque delle prime stime su $i(n)$ (in quanto $\mathbb{P}^n$ è compatto). Il caso più eclatante si verifica per $n = 2^m$, in quanto la condizione diventa anche sufficiente.

Teorema 2.2. *Se $n = 2^m$, $i(n) \geq 2n - 1 = 2n - \alpha(n)$, in accordo con il Teorema 0.3.*

Dimostrazione. Sia $M = \mathbb{P}^n$; dal calcolo precedente si ha (in caratteristica due)

$$w(\mathbb{P}^n) = (1+a)^{2^m+1} = (1+a^n)(1+a) = 1 + a + a^n.$$

Il suo inverso è dato da $\bar{w}(\mathbb{P}^n) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$ e dunque la minima dimensione di immersione è $n + n - 1 = 2n - 1$, ossia $i(n) \geq 2n - \alpha(n)$. $\square$

Unendo questo risultato al teorema di immersione di Whitney, secondo il quale $i(n) \leq 2n - 1$, si ottiene $i(n) = 2n - 1$ per tutti gli n che sono potenze di due. È in qualche modo sorprendente che si possa ottenere un risultato ottimale a partire dal solo studio di invarianti algebrici associati ai fibrati tangente e normale. Si noti, fin da subito, che la varietà in grado di fornire una stima ottimale dal basso è non orientabile, e in particolare uno spazio proiettivo.

Capitolo 3

I risultati di Massey (1960)

3.1 Quadrati di Steenrod, omologia di varietà e formule di Wu

Le proprietà di *naturalità* esibite dalle classi di Stiefel-Whitney derivano dalla loro costruzione esplicita in termini dei cosiddetti *quadrati di Steenrod*. I quadrati di Steenrod rappresentano non a caso uno tra gli esempi principali di *operazioni coomologiche*, ossia trasformazioni naturali della forma

$$\theta\colon H^n(-, G_1) \to H^q(-, G_2);$$

oltre al loro impiego in una possibile costruzione delle suddette classi, essi rappresentano un potente mezzo per derivare alcune relazioni tra esse, dette *formule di Wu* e centrali nello studio delle varietà differenziabili. Anche in questo caso si preferisce optare per una trattazione assiomatica, rimandando a [4] il lettore interessato alla loro costruzione esplicita; dove non altrimenti specificato, anche in questo caso la coomologia è da intendersi a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$.

Definizione 3.1. I *quadrati di Steenrod*, indicati con Sq^i, sono caratterizzati dai seguenti assiomi:

1. (Esistenza) Per ogni coppia di spazi $Y \subset X$ e per ogni $i, n \in \mathbb{N}$ è definito un omomorfismo di gruppi
$$Sq^i\colon H^n(X, Y) \to H^{n+i}(X, Y).$$
2. (Naturalità) Per ogni $f\colon (X, Y) \to (X', Y')$ vale
$$Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i.$$
3. (Quadrato) Per ogni $a \in H^n(X, Y)$ si ha $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a \smile a$, $Sq^i(a) = 0$ per $i > n$ (dunque in dimensione adeguata Sq^i è realmente un quadrato).

4. (Formula di Cartan) Vale l'identità

$$Sq^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \smile Sq^j(b).$$

In analogia con la classe totale w si definisce il *quadrato totale*

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + \ldots + Sq^n(a)$$

per $a \in H^n(X, Y)$, tramite cui l'Assioma 4 si scrive

$$Sq(a \smile b) = Sq(a) \smile Sq(b)$$

e dunque Sq è un endomorfismo (iniettivo) di $H^*(X, Y)$. Questa somiglianza non è casuale, in quanto $w(\xi) = \phi^{-1} \circ Sq \circ \phi(1)$ per un certo isomorfismo ϕ, detto *isomorfismo di Thom.*[1]

Il passo successivo consiste nello studio della composizione di questi omomorfismi; un primo risultato, congetturato da Wen-tsün Wu e dimostrato da José Ádem nello stesso anno (1952), è il seguente, riportato senza dimostrazione:

Teorema 3.1. *Per $i < 2j$ valgono le seguenti* relazioni di Ádem*:*

$$Sq^i \circ Sq^j = \sum_{k \geq 0} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} \circ Sq^k$$

dove per convenzione $\binom{m}{n} = 0$ se uno tra m, n è < 0 oppure $m < n$.

Dimostrazione. Si veda [4]. □

Il secondo ingrediente che si introduce in questo paragrafo è una caratterizzazione computazionale delle classi di Stiefel-Whitney in termini di altre classi di coomologia, dette *classi di Wu* e ad esse intimamente legate per mezzo dei quadrati di Steenrod. Se questi ultimi, infatti, sono responsabili della natura controvariante delle classi di Stiefel-Whitney e dei loro coefficienti in $\mathbb{Z}_2$, sono le classi di Wu a introdurre e valorizzare l'ipotesi di *compattezza* della varietà. Questo è particolarmente evidente nella loro definizione, che richiede il fondamentale teorema di dualità di Poincaré; prima di enunciarlo (senza dimostrazione) in una delle sue diverse forme equivalenti, però, si premette un'indagine della struttura omologica di una varietà.

[1]Dato un n-fibrato ξ, esiste un isomorfismo canonico tra ciascun $H^k(E; \mathbb{Z}_2)$ e $H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$, dove E_0 è il sottospazio dei vettori nulli dello spazio vettoriale definito su ciascuna fibra; componendo questo isomorfismo con quello dato dalla retrazione per deformazione di E su B per mezzo della sezione zero si ottiene il suddetto isomorfismo di Thom, il quale rappresenta lo strumento principale per una possibile costruzione esplicita delle classi di Stiefel-Whitney; per approfondimenti si veda [9].

Sia M una n-varietà. Per escissione si ha che

$$H_i(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$$

che dunque è ciclico infinito per $i = n$ e banale altrimenti. D'ora innanzi si indicherà il gruppo di omologia locale $H_i(M, M \setminus Y; A)$ con la notazione $H_i(M \mid Y; A)$.

Definizione 3.2. Un'*orientazione locale* per M in x è la scelta di uno dei due generatori di $H_n(M \mid x; \mathbb{Z})$, il quale si indica con μ_x.

La scelta di un'orientazione locale μ_x in un punto determina quella di tutti i punti in un intorno in quanto, data una palla aperta B contenuta nell'intorno, si hanno isomorfismi naturali

$$H_n(M \mid x; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\rho_x} H_n(M \mid B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho_y} H_n(M \mid y; \mathbb{Z})$$

per ogni $y \in B$, dove ρ è la mappa in omologia indotta dall'inclusione. La definizione seguente rende rigoroso il concetto di "scelta coerente" di un'orientazione e fa da ponte tra la precedente definizione locale e quella globale di varietà orientabile.

Definizione 3.3. Un'*orientazione* per M è una funzione che assegna a ciascun $x \in M$ un'orientazione locale μ_x in questo modo: per ogni $x \in M$ deve esistere un intorno compatto N e un elemento $\mu_N \in H_n(M \mid N; \mathbb{Z})$ tale che $\rho_y(\mu_N) = \mu_y$ per ogni $y \in N$.

Osservando un poco più in profondità la definizione sopra è possibile intravedere la costruzione esplicita di uno spazio topologico collegato all'orientabilità di M. Si consideri l'insieme

$$\tilde{M} = \{\mu_x : x \in M \text{ e } \mu_x \text{ è un'orientazione locale di } M \text{ in } x\};$$

data una palla aperta (da intendersi nell'omeomorfismo locale con $\mathbb{R}^n$) di raggio finito, per ogni generatore μ_B di $H_n(M \mid B; \mathbb{Z})$ sia $U(\mu_B)$ l'insieme

$$U(\mu_B) = \{\mu_x \in \tilde{M} : x \in B, \rho_x(\mu_B) = \mu_x\}.$$

Al variare di μ_B questi insiemi formano una base[2] per una topologia su $\tilde{M}$ che rende la proiezione $\mu_x \mapsto x$ un rivestimento di grado due, con le palle B come aperti banalizzanti. Rivestendo una varietà, $\tilde{M}$ è una varietà topologica a sua volta, ed è inoltre orientabile: infatti esiste un'orientazione locale canonica in ciascun μ_x, data dall'elemento che corrisponde a μ_x nell'isomorfismo

$$H_n(\tilde{M} \mid \mu_x; \mathbb{Z}) \cong H_n(U(\mu_B) \mid \mu_x; \mathbb{Z}) \cong H_n(B \mid x; \mathbb{Z})$$

[2]Discende dal fatto che le palle aperte sono a loro volta base per la topologia standard di $\mathbb{R}^n$.

il quale rispetta per costruzione la condizione di coerenza globale.

Generalizzando, si può costruire un rivestimento (di grado infinito) $M_{\mathbb{Z}} \to M$ senza limitarsi ai generatori: in questo caso M è orientabile se e solo se esiste una sezione di questo rivestimento che mappa ciascun x in un generatore dell'opportuno gruppo di omologia. L'anello $\mathbb{Z}$ non sembra avere alcuna importanza all'interno del ragionamento: in effetti esso può essere generalizzato a un qualsiasi anello A, definendo una varietà A-*orientabile* se esiste una sezione del corrispondente rivestimento che mappa ciascun x in un invertibile di A. Osservando però l'isomorfismo canonico $H_n(M \mid x; A) \cong H_n(M \mid x) \otimes A$ ci si accorge che ciascun $a \in A$ determina un sottospazio $M_a \subset M_A$ (che realizza a sua volta un sottorivestimento), consistente di elementi della forma $\pm\mu_x \otimes a$. Se a è un elemento di ordine due in A allora M_a è una copia di M, altrimenti di $\tilde{M}$, e lo spazio totale M_A è loro unione disgiunta al variare di $a \in A$.

In particolare una varietà orientabile è A-orientabile per ciascun A, mentre una varietà non orientabile è A-orientabile se A contiene un'unità di ordine due, ossia se $A = \mathbb{Z}_2$. Questo spiega l'importanza degli anelli $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2$ all'interno della teoria delle varietà, e come essi siano collegati rispettivamente al concetto di varietà orientabile e non orientabile. In una varietà compatta senza bordo l'orientabilità si riflette anche nell'omologia non relativa, ed è questo il risultato centrale cui conducono le precedenti considerazioni.

Lemma 3.1. *Sia M una n-varietà, e sia $N \subset M$ un suo sottoinsieme compatto. Allora, se $x \mapsto \mu_x$ è una sezione del rivestimento $M_A \to M$, esiste un'unica classe $\mu_N \in H_n(M \mid N; A)$ tale che $\rho_x(\mu_N) = \mu_x$. Inoltre $H_i(M \mid N; A) = 0$ per ogni $i > n$.*

Dimostrazione. Si veda [9]; l'idea è quella di dimostrare l'enunciato per insiemi convessi, estrarre un sottoricoprimento finito da un opportuno ricoprimento di N con aperti convessi e di procedere per induzione finita sull'unione sfruttando la successione esatta di Mayer-Vietoris. □

Teorema 3.2. *Sia M una varietà compatta, connessa, senza bordo di dimensione n. Allora se M è A-orientabile la mappa*

$$H_n(M; A) \to H_n(M \mid x; A) \cong A$$

è un isomorfismo per ogni $x \in M$, mentre in caso contrario è iniettiva con immagine corrispondente (nell'isomorfismo) alle unità di ordine due in A. In particolare $H_n(M; \mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ oppure 0 a seconda che M sia orientabile o meno, mentre $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ sempre. Inoltre, $H_i(M; A) = 0$ per ogni $i > n$.

Dimostrazione. Sia $\Gamma_A(M)$ l'insieme delle sezioni $M \to M_A$; poiché somme e multipli scalari di sezioni sono ancora sezioni, $\Gamma_A(M)$ è un A-modulo. Prendendo $N = M$ nel lemma si trova una classe $\mu_M \in H_n(M; A)$ la cui immagine tramite ρ_x è μ_x per ogni $x \in M$; se si considera l'omomorfismo $H_n(M;A) \to \Gamma_A(M)$ che associa a ciascun μ la sezione $x \mapsto \rho_x(\mu)$, il lemma asserisce che si tratta in realtà di un isomorfismo. A questo punto la tesi segue dall'analisi della struttura di M_A condotta in precedenza, in quanto dalla connessione di M segue che ogni sezione è determinata in modo unico dal suo valore in un punto, e dunque $\Gamma_A(M) \cong H_n(M \mid x; A)$ per un qualunque x in cui si assegna un'orientazione locale. La banalità in dimensione $> n$, infine, discende banalmente dal lemma. □

La classe μ_M sopra definita, che esiste ed è unica per varietà compatte orientabili[3], è detta *classe fondamentale di omologia* di M; essa è indicata anche con la notazione $[M]$. Scegliendo come anello dei coefficienti $\mathbb{Z}_2$ è dunque possibile lavorare disinteressandosi dell'orientabilità di M, ed è questo fatto, insieme alla costruzione dei quadrati di Steenrod, a giustificare l'importanza della base due all'interno della problematica analizzata in questo elaborato e, in particolare, nell'enunciato del teorema di Massey. In base due, inoltre, la classe fondamentale di omologia è l'unico elemento non zero del gruppo $H_n(M;\mathbb{Z}_2)$, ed è l'ingrediente di cui si aveva necessità per enunciare la dualità di Poincaré nella variante qui proposta; d'ora innanzi la coomologia è da intendersi nuovamente a valori in $\mathbb{Z}_2$. Dato un elemento $c \in H^*(M)$, si definisce *valutazione* di c in $[M]$, e si indica con $c([M])$, il valore che un rappresentante della classe di coomologia della componente di c in dimensione n assume in $[M]$; la buona definizione di $c([M]) \in \mathbb{Z}_2$ segue in quanto indipendente dalla scelta del rappresentante.

Teorema 3.3 (Dualità di Poincaré)**.** *Sia M una n-varietà compatta. Allora il prodotto cup definisce un funzionale bilineare*

$$H^k(M) \times H^{n-k}(M) \to \mathbb{Z}_2, \qquad (\phi,\psi) \mapsto (\phi \smile \psi)([M])$$

non singolare, ossia tale che la restrizione $H^k \to \mathrm{Hom}(H^{n-k},\mathbb{Z}_2)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Vedi [4]. □

Inoltre, usando il teorema dei coefficienti universali, segue che $H_k(M) \cong H^{n-k}(M)$ e dunque omologia e coomologia sono banali in dimensione $> n$; in particolare $H^*(M) = H^{\Pi}(M)$. In ciò che segue, la varietà M è sempre supposta compatta; sotto queste ipotesi, $H^*(M)$ è uno spazio vettoriale su Z_2 di dimensione finita.

[3]Non si richiede che M sia connessa, in quanto è sufficiente prendere come classe fondamentale la somma di quelle delle componenti connesse, la cui esistenza e unicità è garantita dal teorema precedente. In generale, comunque, si lavorerà con varietà connesse (infatti per definire un'immersione o un embedding di M è sufficiente farlo su ciascuna componente connessa).

Si consideri ora l'omomorfismo $H^{n-k} \to \mathbb{Z}_2$ dato da

$$x \mapsto Sq^k(x)([M]);$$

dal teorema di dualità segue l'esistenza di un'unica classe di coomologia $v_k \in H^k(M)$ tale che

$$(v_k \smile x)([M]) = Sq^k(x)([M]).$$

Per il teorema dei coefficienti universali, essendo $[M]$ generatore di $\mathbb{Z}_2$, l'isomorfismo $H^n(-; A) \cong \mathrm{Hom}(H_n, A)$ implica l'uguaglianza $v_k \smile x = Sq^k(x)$ per ogni $x \in H^{n-k}$.

Definizione 3.4. Le classi v_k sopra descritte al variare di $k \in \mathbb{N}$ sono chiamate *classi di Wu*; in analogia con la classe totale di Stiefel-Whitney, si definisce la classe totale di Wu $v = v_0 + v_1 + \dots$ (la somma è finita, in quanto $v_k = 0$ se $k > n - k$).

Vale ovviamente l'uguaglianza $(v \smile x)([M]) = Sq(x)([M])$. Il prossimo teorema mostra nel modo più limpido lo stretto legame che intercorre tra classi di Stiefel-Whitney, quadrati di Steenrod e classi di Wu, e in particolare l'utilità computazionale di queste ultime.

Teorema 3.4 (Wu). *Vale l'uguaglianza $w(\tau_M) = Sq(v)$, ossia*

$$w_k = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j).$$

Dimostrazione. La dimostrazione di una simile identità, in grado di armonizzare i tre oggetti sopra citati, involve un'indagine dettagliata di alcune costruzioni coomologiche associate a fibrati tangenti e normali di varietà costruite a partire da M, che esulano dalla problematica affrontata in questa sede; il lettore interessato può consultare [9]. □

Una conseguenza interessante è l'indipendenza delle classi di Stiefel-Whitney del fibrato tangente dalla struttura differenziale sulla varietà, in quanto la classe v dipende solo dal tipo di omotopia di M. Inoltre le stesse classi godono di una proprietà di naturalità ulteriore rispetto a quella da definizione: infatti esse si corrispondono tramite qualunque isomorfismo $H^*(M_1) \cong H^*(M_2)$ (e non solo, come da definizione, tramite un morfismo tra i rispettivi fibrati tangenti).

Se si definisce la classe duale di Wu $\bar{v}$ mediante la relazione $v \smile \bar{v} = 1$, è possibile dimostrare una formula analoga per le classi duali di Stiefel-Whitney:

Corollario 3.1. *Vale l'uguaglianza $\bar{w}(\tau_M) = Sq(\bar{v})$.*

Dimostrazione. Essendo $Sq\colon H^\Pi(M) \to H^\Pi(M)$ un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale di dimensione finita, esso è automaticamente un automorfismo; si ha dunque

$$1 = Sq(v \smile \bar{v}) = Sq(v) \smile Sq(\bar{v}).$$

Ma per il teorema di Wu $Sq(v) = w$ e dunque $Sq(\bar{v})$ è l'inverso di w, cioè la tesi. □

Se si considera l'automorfismo inverso $\bar{Sq}\colon H^\Pi \to H^\Pi$ è possibile ricavare una relazione analoga a quelle di sopra, ma che non coinvolge direttamente le classi di Wu.

Corollario 3.2. *Vale la relazione*

$$\bar{Sq}(x)([M]) = (\bar{w} \smile x)([M])$$

per ogni classe di coomologia x.

Dimostrazione. Si ponga $y = Sq(x)$; allora (tralasciando la valutazione in $[M]$)

$$\bar{Sq}(y) = x = v \smile \bar{Sq}(\bar{w}) \smile x = Sq(\bar{Sq}(\bar{w} \smile x)) = \bar{w} \smile y$$

come volevasi. □

Un caso interessante si ottiene nel caso in cui $x \in H^0(M)$: infatti, poiché $Sq(x) = x$, si ha

$$0 = x([M]) = \bar{Sq}(x)([M]) = (\bar{w}_n \smile x)([M]);$$

in altre parole, l'omomorfismo $x \mapsto (\bar{w}_n \smile x)([M])$ è identicamente nullo. Dalla dualità di Poincaré segue quindi $\bar{w}_n = 0$; i risultati di Massey, in modo complementare (non si occupano infatti di $\bar{w}_n$), possono essere intepretati come estensione di questa banalità a tutte le classi duali di Stiefel-Whitney in dimensione maggiore di $n - \alpha(n)$.

Si conclude con un lemma tecnico che sarà utile nel capitolo successivo.

Lemma 3.2. *Per ogni $x \in H^k(M)$ con $0 < k < n$, si ha*

$$x \smile \bar{w}_{n-k} = \sum_{i>0} Sq^i(x) \smile \bar{w}_{n-k-i}.$$

Dimostrazione. Nei calcoli seguenti si omette per comodità il simbolo di prodotto $\smile$. Dalla formula di Wu

$$\bar{w}_{n-k} = \sum_{i\geq 0} Sq^i(\bar{v}_{n-k-i}) = \bar{v}_{n-k} + \sum_{i>0} Sq^i(\bar{v}_{n-k-i});$$

dalla definizione ricorsiva delle classi duali di Wu

$$\bar{v}_{n-k} = \sum_{i>0} v_i \bar{v}_{n-k-i}$$

e dunque

$$\bar{w}_{n-k} = \sum_{i>0} (v_i \bar{v}_{n-k-i} + Sq^i(\bar{v}_{n-k-i})).$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri per x ed esaminiamo il primo addendo (in $\mathbb{Z}_2$ il prodotto cup è commutativo!):

$$x \smile v_i \bar{v}_{n-k-i} = Sq^i(x \smile \bar{v}_{n-k-i}) = \sum_{j=0}^{i} Sq^j(x) Sq^{i-j}(\bar{v}_{n-k-i})$$

e di conseguenza

$$x \smile \bar{w}_{n-k} = \sum_{i>0} \left(\sum_{j=0}^{i} Sq^j(x) Sq^{i-j}(\bar{v}_{n-k-i}) + x \smile Sq^i(\bar{v}_{n-k-i}) \right).$$

Essendo in caratteristica due il primo termine della sommatoria interna si cancella con l'addendo più a destra, lasciando

$$\begin{aligned} x \smile \bar{w}_{n-k} &= \sum_{0<j\leq i<\infty} Sq^j(x) Sq^{i-j}(\bar{v}_{n-k-i}) \\ &= \sum_{j>0} Sq^j(x) \smile \sum_{l\geq 0} Sq^l(\bar{v}_{n-k-j-l}) = \sum_{j>0} Sq^j(x) \smile \bar{w}_{n-k-j} \end{aligned}$$

che è la formula cercata. □

3.2 Il teorema di Massey

Si è pronti per uno dei due risultati centrali del presente elaborato. Nell'enunciarlo si farà uso dell'equivalenza delle due seguenti affermazioni, osservata dallo stesso Massey:

- $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_q}$ per qualche $h_1, \ldots, h_q \in \mathbb{N}$;
- $\alpha(n) \leq q$.

Teorema 3.5 (Teorema 1 di Massey, 1960). *Sia M una n-varietà liscia, compatta e connessa e sia $0 < q < n$ un intero. Se $q < \alpha(n)$ allora $\bar{w}_{n-q}(M) = 0$.*

Detto in altri termini, $\bar{w}_i(M) = 0$ per $i > n - \alpha(n)$. Questo risultato è ottimale, in quanto per ogni n esiste una n-varietà con $\bar{w}_{n-\alpha(n)} \neq 0$.

Teorema 3.6. *Sia* $n = 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{\alpha(n)}}$. *Allora*

$$M = \mathbb{P}^{2^{h_1}} \times \ldots \times \mathbb{P}^{2^{h_{\alpha(n)}}}$$

è una n*-varietà e* $\bar{w}_{n-\alpha(n)}(M) \neq 0$.

Dimostrazione. In un prodotto topologico le dimensioni delle varietà si sommano (in quanto localmente è ovvio e prodotti di aperti banalizzanti danno una collezione di aperti banalizzanti per la varietà prodotto); inoltre prodotto di varietà lisce è ancora liscio ed esiste un isomorfismo canonico $T(M_1 \times M_2) \cong TM_1 \times TM_2$. A questo punto, poiché

$$p_1^*\xi \oplus p_2^*\eta = d^*(p_1^*\xi \times p_2^*\eta) = \xi \times \eta$$

dove p è la proiezione canonica, ricordando la relazione tra i prodotti cup e cross,

$$\bar{w}(M) = \bar{w}(\mathbb{P}^{2^{h_1}}) \times \ldots \times \bar{w}(\mathbb{P}^{2^{h_{\alpha(n)}}}),$$

e se si pone $a_i = p_i^*(a)$ dove $p_i^* \colon H^*(\mathbb{P}^{2^{h_i}}) \to H^*(M)$ è la mappa in coomologia indotta dalla proiezione, il termine di grado più alto risulta

$$a_1^{2^{h_1-1}} \smile \ldots \smile a_{\alpha(n)}^{2^{h_{\alpha(n)}-1}} \neq 0$$

da cui si conclude $\bar{w}_{n-\alpha(n)} \neq 0$. □

Per dimostrare il Teorema 3.5 è opportuno ricavare preliminarmente alcuni risultati tecnici, al fine di rendere più agevole e chiaro lo sviluppo dell'argomentazione principale; nel farlo si seguirà da vicino la struttura dell'articolo originale di Massey.

Si introduce la notazione Sq^I, dove $I = (i_1, \ldots, i_r)$ è un insieme ordinato di interi positivi, per indicare l'omomorfismo dato dalla composizione $Sq^{i_1} \circ \ldots \circ Sq^{i_r}$. Una tale sequenza è detta *ammissibile* se valgono le disuguaglianze $i_j \geq 2i_{j+1}$ per $1 \leq j < r$. In questo caso è possibile definire una sequenza $(a_1, \ldots, a_r)$ di interi non negativi dati da queste differenze (e da $a_r = i_r$); è chiaro che quest'ultima determina la prima in modo univoco. Si definiscono infine *grado* ed *eccesso* di I, rispettivamente, le due quantità $n(I) = \sum_j i_j$ e $e(I) = \sum_j a_j$.

Lemma 3.3. *Ogni iterazione di quadrati di Steenrod è esprimibile come somma di iterazioni indicizzate da sequenze ammissibili.*

Dimostrazione. Tralasciando i dettagli, è possibile applicare ripetutamente le relazioni di Ádem a due quadrati consecutivi in modo da incrementare l'esponente del componendo a sinistra e diminuire quello a destra, fino a che non valgano le disuguaglianze richieste (e ovviamente pagando in termini di numero di addendi). L'unica verifica da fare è la finitezza dell'algoritmo, garantita dal fatto che ad ogni passo una delle somme dei primi p indici aumenta di uno, lasciando le altre invariate, e ciascuna di esse risulta ovviamente limitata dall'alto da $n(I)$. □

Lemma 3.4. *Per ogni $x \in H^*(M)$, se $\deg(x) < e(I)$ allora $Sq^I(x) = 0$.*

Dimostrazione. La condizione data è equivalente a $i_1 > \deg(x) + i_2 + \ldots + i_r$ e a questo punto si conclude per l'Assioma 3 dei quadrati di Steenrod. $\square$

Il prossimo lemma, nonostante l'apparenza squisitamente tecnica, lascia intravedere un primo collegamento fra il Teorema 3.5 e l'espansione diadica.

Lemma 3.5. *Per ogni sequenza I ammissibile esistono una sequenza J ammissibile e un intero k tali che*

$$\deg(x) = e(I) \implies Sq^I(x) = (Sq^J(x))^{2^k};$$

vale inoltre la disuguaglianza $e(J) < e(I)$.

Dimostrazione. Sia k il minimo intero per cui $a_k > 0$ e si ponga $J = (i_{k+1}, \ldots, i_r)$. La sequenza J è chiaramente ammissibile; inoltre $e(I) = a_k + e(J)$ e dunque $e(J) < e(I)$. Rimane da dimostrare la relazione tra i due quadrati iterati. Il grado di $Sq^J(x)$ è

$$\deg(x) + n(J) = e(I) + n(J) = e(J) + n(J) + a_k = 2i_{k+1} + i_k - 2i_{k+1}$$

e di conseguenza

$$\deg(Sq^J(x)) = i_k \implies Sq^{i_k} \circ Sq^J(x) = (Sq^J(x))^2;$$

si osservi che questo elemento ha grado $2i_k = i_{k-1}$ per la scelta di k e dunque, induttivamente, si ottiene l'uguaglianza desiderata. $\square$

Il significato dei tre lemmi precedenti si riassume dicendo che, nello studio di quadrati iterati applicati a un elemento di grado q, ogni omomorfismo è esprimibile come somme e prodotti di iterazioni descritte da sequenze ammissibili I con $e(I) < q$. In questo caso si può definire un intero non negativo $a_0 = q - e(I) - 1$.

Lemma 3.6. *Sia $x \in H^*(M)$, con $\deg(x) = q$. Se I è ammissibile con $e(I) < q$ allora esistono interi $h_1 \geq \ldots \geq h_{q-1} \geq 0$ tali che*

$$\deg(Sq^I(x)) = 1 + 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{q-1}}.$$

Dimostrazione. Ricavando $(i_1, \ldots, i_r)$ da $(a_1, \ldots, a_r)$ si ottiene

$$n(I) = \sum_{j=1}^{r} (2^j - 1) a_j$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\deg(Sq^I(x)) = n(I) + q &= \sum_{j=1}^{r}(2^j - 1)a_j + q \\ &= \sum_{j=1}^{r} 2^j a_j - e(I) + q = 1 + \sum_{j=0}^{r} 2^j a_j.\end{aligned}$$

Si osservi che il numero di potenze di due all'interno della sommatoria è dato da $\sum_{j=0}^{r} a_j = q - 1$ e dunque la formula sopra si riscrive come

$$\deg(Sq^I(x)) = 1 + 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{q-1}}$$

nella quale ciascun 2^i appare a_i volte. □

È giunto il momento di concludere la dimostrazione di Massey.

Dimostrazione (di 3.5). Supponiamo $\bar{w}_{n-q} \neq 0$; allora, per dualità di Poincaré, l'omomorfismo

$$\phi\colon H^q(M;\mathbb{Z}_2) \to H^n(M;\mathbb{Z}_2), \qquad \phi(x) = x \smile \bar{w}_{n-q}$$

è non banale. Applicando un numero finito di volte il Lemma 3.2 è possibile scrivere ϕ come somma di quadrati di Steenrod iterati (ammissibili), di cui uno necessariamente non nullo. Come osservato in precedenza, senza perdita di generalità questo omomorfismo è della forma Sq^I, con $e(I) \leq q$. Ci sono due possibilità:

- se $e(I) < q$ allora per il lemma precedente, preso $x \in H^q(M;\mathbb{Z}_2)$, si ha

  $$n = \deg(Sq^I(x)) = 1 + 2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{q-1}}$$

  e dunque $\alpha(n) \leq q$, contraddizione;

- se $e(I) = q$ si considera la sequenza J data da uno dei lemmi precedenti, tale che $Sq^I = (Sq^J)^{2^k}$ con $k \in \mathbb{N}$, da cui

  $$n = \deg(Sq^I(x)) = 2^k \deg(Sq^J(x))$$

  e ci si riconduce al caso precedente.

□

Capitolo 4

Teoria di Hirsch-Smale (1959)

4.1 Ostruzioni

Nel lavoro originale di Stiefel (datato 1935) le omonime classi caratteristiche sono definite come *ostruzioni* – cioè condizioni necessarie – all'esistenza di sezioni di fibrati.[1] Per capire meglio l'idea, esaminiamo da vicino il problema dell'*orientabilità* di un fibrato su base B CW complesso. Un fibrato si dice orientabile se ammette un'orientazione, ossia la scelta di un'orientazione su ciascuna fibra in modo che, dato un atlante (U_α, h_α), la restrizione di h_α a ciascuna fibra preservi l'orientazione. In modo equivalente è possibile altresì richiedere l'esistenza di un insieme ordinato di sezioni locali, definite in ciascun U_α, che determinino le orientazioni assegnate su ciascuna fibra.

L'orientabilità di un fibrato è chiaramente una condizione necessaria per la sua banalità. Consideriamo l'omomorfismo $\pi_1(B) \to \mathbb{Z}_2$ che associa il valore 1 a una classe di omotopia di cammini chiusi se l'orientazione delle fibre viene invertita "dopo un giro". Il gruppo $\mathbb{Z}_2$ è abeliano e dunque l'omomorfismo si fattorizza a una mappa $H_1(B) \to \mathbb{Z}_2$, che per il teorema dei coefficienti universali si identifica con un elemento di $H^1(B; \mathbb{Z}_2)$. Risulta definita dunque una classe di coomologia che è zero se e solo se il fibrato è orientabile: questa classe coincide proprio con $w_1(\xi)$.

Per il teorema di approssimazione cellulare i cammini chiusi possono essere deformati in modo che l'immagine sia contenuta nell'1-scheletro di B. Inoltre un fibrato su un CW complesso di dimensione uno è banale se e solo se è orientabile – le n sezioni locali si estendono lungo i cammini in quanto l'omomorfismo $\pi_1(B) \to \mathbb{Z}_2$ è banale – e dunque la prima classe di Stiefel-Whitney misura la banalità del fibrato sull'1-scheletro. È naturale domandarsi a questo punto se sia possibile estendere le sezioni linearmente indipendenti, definite finora solo sull'1-scheletro di B, al suo 2-scheletro. Per

[1] In questo paragrafo il rigore dei ragionamenti è temporaneamente allentato, poiché il suo scopo è quello di introdurre non precisi risultati bensì un certo ordine di idee, senza preoccuparsi dei dettagli tecnici su cui esse poggiano.

semplicità supponiamo che le sezioni siano ortonormali: in effetti non si sta perdendo di generalità in quanto questa nozione di banalità è equivalente a quella solita in caso di fibrati euclidei, e ciascun fibrato su base paracompatta può essere reso euclideo. Presa una 2-cella, consideriamo la mappa caratteristica $D^2 \to B$: il pullback di ξ su D^2 è banale (la base è contrattile), e dunque esistono n sezioni locali ortonormali. In particolare, poiché il pullback agisce sulle sezioni già definite sull'1-scheletro determinandone su ∂D^2, è ben definita una mappa $\partial D^2 \to SO(n)$, che assegna a ciascun punto del bordo un frame ortonormale e orientato in modo da garantire la coerenza con quelli del pullback. Essa definisce un elemento di $\pi_1(SO(n))$; in analogia con l'orientabilità si definisce una mappa che assegna a ciascuna 2-cella il corrispettivo elemento di $\pi_1(SO(n))$ sopra descritto. È possibile dimostrare che in realtà questo elemento è un cociclo e dunque, passando in coomologia, definire un elemento di $H^2(B; \pi_1(SO(n)))$, nullo se e solo se esiste l'estensione cercata. In modo simile si può mostrare l'equivalenza tra il problema dell'estensione di n sezioni ortonormali a tutto lo spazio B e la banalità di certi elementi in $H^k(B; \pi_{k-1}(SO(n)))$, detti *classi di ostruzione*.

I problemi dell'approccio sopra descritto sono molteplici. Innanzitutto la difficoltà del calcolo dei gruppi di omotopia richiesti cresce all'aumentare di k; inoltre questo metodo definisce in effetti una sola classe caratteristica, ossia la prima a non essere banale: secondo tale approccio non dovrebbero esistere classi caratteristiche in dimensione maggiore di uno se il fibrato è non orientabile. Un modo di risolvere, almeno in parte, questi problemi è l'idea di ricercare ostruzioni all'esistenza di un numero qualunque di sezioni ortonormali (ovviamente minore o uguale della dimensione di ξ).

Per riformulare in modo semplice la questione si consideri, per ciascuna fibra F_b di ξ, la varietà $V_k(F_b)$, con $k < n$. L'unione di questi spazi al variare di $b \in B$ definisce lo spazio totale di un fibrato che associa a ciascun punto di B un k-upla di vettori linearmente indipendenti – oppure, usando V_k^0, ortonormali – della fibra di B rispetto al fibrato ξ. Questo fibrato si dice fibrato di Stiefel relativo a ξ, ed è caratterizzato dal fatto che una sua sezione equivale a k sezioni indipendenti (rispettivamente, ortonormali) di ξ. Si supponga di aver definito una sezione di questo fibrato sull'$i-1$-scheletro di B; un ragionamento analogo a quello di sopra, a questo punto, identifica condizioni necessarie e sufficienti per l'estensione di questa sezione in un elemento di $H^i(B; \pi_{i-1}(V_k(\mathbb{R}^n)))$. Diventa quindi fondamentale conoscere i gruppi di omotopia delle varietà di Stiefel; vale il seguente risultato:

Lemma 4.1. *Il primo gruppo di omotopia non banale di $V_k(\mathbb{R}^n)$ è π_{n-k}, isomorfo a $\mathbb{Z}$ se $k = 1$ oppure $n - k$ è pari, e $\mathbb{Z}_2$ altrimenti.*

Dimostrazione. Vedi [5]. □

La $n - k - 1$-connessione di $V_k(\mathbb{R}^n)$ implica la possibilità di costruire una sezione su B^{n-k}, dove la notazione B^i indica l'i-scheletro di B. È dunque ben definita un'ostruzione canonica, data da una classe in $H^{n-k+1}(B;\Pi)$, detta ostruzione *primaria* e indicata con $\omega_{n-k+1}(\xi)$. Una proprietà importante di cui gode ω è la naturalità rispetto al pullback. Sia $f\colon B_1 \to B$ una funzione che possiamo supporre cellulare – in quanto pullback tramite mappe omotope sono isomorfi; allora una sezione s di ξ su B^n determina una sezione $f^*(s)$ su B_1^n e da questo segue (senza scendere nei dettagli, si passa in coomologia a partire da omotopia tramite la surgettività della mappa di Hurewicz) che $\omega(f^*\xi) = f^*(\omega(\xi))$. Questa proprietà ricorda da vicino le classi caratteristiche, e rappresenta il primo passo verso la dimostrazione, non immediata e qui non riportata, del seguente risultato fondamentale:

Teorema 4.1. *La riduzione modulo 2 di $\omega_{n-k+1}(\xi)$, definita come sopra, coincide con la classe di Stiefel-Whitney $w_{n-k+1}(\xi)$.*

Se siamo in uno dei casi in cui il gruppo di omotopia dei coefficienti è $\mathbb{Z}_2$, dunque, condizione necessaria e sufficiente per l'estensione di una data sezione (equivalente, si ricorda, a k sezioni indipendenti) è data dall'annullarsi di una precisa classe di Stiefel-Whitney; in caso contrario si avrà soltanto una condizione necessaria. Un'applicazione del teorema, ad esempio, è la dimostrazione che una 3-varietà compatta e orientabile è parallelizzabile: l'orientabilità implica l'annullarsi di w_1, e un calcolo standard con le formule di Wu dimostra la nullità delle altre due. A questo punto si prendono su B^0 due sezioni indipendenti; esse si estendono a B^1 per connessione di $V_2(\mathbb{R}^3)$; il teorema di sopra e la banalità di w_2 implicano l'esistenza di un'estensione su B^2 ($3-2=1$ è dispari, e dunque si ha la condizione sufficiente); infine, l'ostruzione all'ultima estensione vive in un gruppo di coomologia a coefficienti in $\pi_2(V_2(\mathbb{R}^3)) \cong \pi_2(SO(3)) = 0$ (vedi [9]) ed è dunque banalmente nulla. Una volta costruite queste due sezioni su tutto B, è possibile scomporre il fibrato tangente come somma di un 2-fibrato banale e di un 1-fibrato, necessariamente banale in quanto la varietà è orientabile. Il fibrato tangente è dunque banale, ossia la varietà è parallelizzabile. Questo esempio mostra come la teoria delle ostruzioni si combina con altri ingredienti nel dimostrare la banalità di fibrati, senza necessariamente impiegare un "attacco frontale" volto a costruire n sezioni linearmente indipendenti in modo esplicito.

4.2 Il risultato di Hirsch

Nel 1959, basandosi su un precedente lavoro di Whitney e Graustein (datato 1937), Stephen Smale pubblica un articolo in cui identifica le immersioni lisce $S^k \to \mathbb{R}^n$ con $k < n$, a meno di *omotopia regolare*[2], con elementi di $\pi_k(V_k(\mathbb{R}^n))$ (si veda [10]). Intuendo un parallelismo tra teoria delle ostruzioni

[2] Date due varietà differenziabili M, N, si definisce *omotopia regolare* (o anche *isotopia*) un'omotopia $f_t\colon M \times I \to N$ che gode delle seguenti proprietà: per ogni t, f_t è un'immersione, e l'omotopia f_t^* indotta tra i rispettivi spazi tangenti è continua.

e gruppi di omotopia da una parte e immersioni di varietà e immersioni di sfere in dischi dall'altra, Hirsch (in [6]) riesce a costruire una teoria omotopica delle immersioni tra varietà, identificando opportuni invarianti a valori in adeguati gruppi di omotopia (più precisamente, $\pi_q(V_k(\mathbb{R}^n))$ per opportuni k e q, con n fisso). Il problema principale di un ragionamento analogo a quello su cui si basano le ostruzioni, vale a dire la costruzione induttiva di applicazioni continue su scheletri successivi di un CW complesso, sta nel fatto che in generale l'i-scheletro di una varietà M non è a sua volta una varietà (e dunque non si possono definire immersioni), e che la decomposizione CW di M è data non da dischi ma da simplessi, e dunque non risulta immediata l'applicazione dei risultati di Smale. L'idea di Hirsch è quella di definire il concetto di *M-immersione*, che consiste essenzialmente nell'immersione di intorni di sottospazi $B \subset M$, in cui due di esse sono identificate in caso di coincidenza dei rispettivi differenziali in tutti i punti di B, e di costruire per esse gli invarianti omotopici sopra citati. Il risultato principale cui egli perviene può essere interpretato così: le classi di isotopia di immersioni di M in $\mathbb{R}^k$ (o, più generalmente, in una k-varietà N) sono in corrispondenza biunivoca con le classi di omotopia di sezioni del fibrato *associato* (si veda la definizione poco più avanti) al fibrato di Stiefel del tangente $V_n(\tau_M)$, con fibra $V_n(\mathbb{R}^k)$.

Riportiamo adesso, senza dimostrazione, i due principali risultati di Hirsch inerenti al problema affrontato in questo elaborato. Si antepongono alcune definizioni:

Definizione 4.1. Si dice che una varietà M si immerge in $\mathbb{R}^k$ con un *r-campo trasversale* se esiste un'immersione $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ e una mappa C^∞ che associa a ogni punto $x \in M$ un insieme di r vettori linearmente indipendenti appartenenti a $\mathbb{R}^k \setminus df(T_xM)$.

Definizione 4.2. Sia G un gruppo di Lie, sia M una varietà munita di un atlante $\{U_\alpha\}$, e consideriamo una famiglia di mappe lisce (detta *cociclo*[3] *principale*)

$$\mathfrak{c} = \{c_{ts}\colon U_s \cap U_t \to G\}$$

tale che

- per ogni indice s e per ogni $x \in U_s$ si abbia $c_{ss}(x) = 1 \in G$;
- per ogni terna s, t, r di indici (non necessariamente distinti) e per ogni $x \in U_s \cap U_t \cap U_r$ si abbia

$$c_{sr}(x)c_{rt}(x)c_{ts}(x) = 1 \in G.$$

[3] Per comprendere questa terminologia, si immagini di costruire un complesso simpliciale in cui gli aperti siano i vertici, l'intersezione di due il segmento che li collega e l'intersezione di tre il triangolo contenuto.

A questo punto per ogni azione di G su una varietà (liscia) F è possibile intepretare il corrispondente di $\mathfrak{c}$ a valori in $\mathrm{Aut}(F)$ come descrizione delle "mappe di transizione", definite nelle intersezioni di più aperti dell'atlante sopra assegnato, del fibrato, avente fibre omeomorfe a F, che si ottiene per mezzo di una costruzione analoga a τ_M (per dettagli si rimanda a [1]). Nel caso in cui $F = G$, con azione data dalla moltiplicazione a sinistra, il fibrato si dice *principale* su M con *gruppo strutturale* G; gli altri si dicono *associati* a tale fibrato principale.

All'interno della teoria di Hirsch si considera il fibrato di Stiefel $V_n(\tau_M)$ relativo al fibrato tangente sulla varietà M; esso è un esempio di fibrato principale con gruppo strutturale $GL(n)$. Se ci si restringe ai soli frame ortonormali $V_n^0(\tau_M)$ si ottiene come gruppo strutturale $O(n)$.

Teorema 4.2 (Hirsch, 1959)**.** *Sia M una varietà liscia di dimensione n. Allora M si immerge in $\mathbb{R}^k$ con un r-campo trasversale se e solo se il fibrato associato a $V_n(\tau_M)$ con fibra $V_{n+r}(\mathbb{R}^k)$, dove l'azione è definita facendo agire per moltiplicazione $GL(n)$ sui primi n vettori di un frame di $V_{n+r}(\mathbb{R}^k)$ e lasciando gli altri r invariati, ammette una sezione.*

Il secondo teorema è in realtà una conseguenza del primo, sebbene non sia possibile mostrarlo in questa sede:

Teorema 4.3. *Se M si immerge in $\mathbb{R}^{k+r}$ con un r-campo trasversale allora si immerge in $\mathbb{R}^k$.*

Si noti che il secondo teorema fornisce una condizione solo sufficiente, che tuttavia è proprio ciò di cui si necessita.

Unendo i risultati dati dalla teoria delle ostruzioni e i teoremi appena enunciati è possibile dimostrare nuovi fatti relativi al problema dell'immersione. Come primo esempio, si ritrova una dimostrazione immediata della forma debole del teorema di Whitney.

Teorema 4.4 (Whitney)**.** *Ogni n-varietà M si immerge in $\mathbb{R}^{2n}$.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che $\pi_i(V_n(\mathbb{R}^{2n})) = 0$ per ogni $0 < i < n$ e dunque il fibrato associato a τ_M, avendo fibra omeomorfa a $V_n(\mathbb{R}^{2n})$, ammette una sezione definita induttivamente su ciascuno scheletro data dall'annullarsi delle classi di ostruzione; la tesi segue perciò dal teorema di Hirsch. □

Come prossimo esempio si riporta la soluzione del problema di immersione in dimensioni tre e cinque; si antepone un calcolo delle classi di Stiefel-Whitney correlate alle rispettive ostruzioni primarie.

Lemma 4.2. *Sia M una n-varietà compatta. Allora:*

- *se $n = 3$ allora $\bar{w}_2(M) = 0$;*

- *se $n = 5$ allora $\bar{w}_4(M) = 0$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema di Massey, in quanto $\alpha(3) = \alpha(5) = 2$. $\square$

Teorema 4.5. *La congettura di immersione vale in dimensioni tre e cinque, ossia:*

- *ogni 3-varietà compatta si immerge in $\mathbb{R}^4$;*
- *ogni 5-varietà compatta si immerge in $\mathbb{R}^8$.*

Dimostrazione. Sia M una 3-varietà; per il secondo teorema di Hirsch è sufficiente costruire un immersione di M in $\mathbb{R}^6$ con un 2-campo trasversale. Consideriamo il fibrato normale dell'immersione data dal teorema di Whitney, e cerchiamo due sezioni indipendenti. Le due sezioni si estendono senza problemi a M^1; l'identificazione tra $\bar{w}_2$ e ω_2 implica l'estensione a M^2, mentre l'ultima ostruzione ha coefficienti in $\pi_2(V_2(\mathbb{R}^3)) = 0$ come già visto in precedenza, e si ottiene il risultato cercato. Analogamente in caso di M 5-varietà si cerca un immersione in $\mathbb{R}^{10}$ con 2-campo trasversale. Due sezioni del fibrato normale si estendono a M^3 per connessione; il lemma di sopra garantisce l'estensione a M^4 ($5 - 2 = 3$ dispari), e si conclude osservando che anche in questo caso $\pi_4(V_2(\mathbb{R}^5)) = 0$ (vedi [6]). $\square$

Terminiamo questo capitolo con la riformulazione del teorema di Hirsch, già accennata nell'introduzione, nei termini usati da Cohen all'interno della dimostrazione della congettura di immersione. Nel paragrafo relativo alla classificazione di fibrati su base paracompatta si è mostrato come a ciascuna classe di isomorfismo di fibrati corrisponda una certa classe di omotopia di mappe $B \to G_n$ o, nella terminologia adottata da Cohen, $B \to BO(n)$.[4] Come trattare il fibrato normale stabile, che per definizione non ha una dimensione propria e dunque non può essere classificato in termini di alcun $BO(n)$? Si consideri la mappa $BO(n) \to BO(n+1)$, unica a meno di omotopia, che classifica il fibrato $\gamma^n \oplus \varepsilon^1$ su base $BO(n)$; la descrizione esplicita, data in [8], è data dalla composizione

$$G_n(\mathbb{R}^\infty) \to G_{n+1}(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}) \cong G_{n+1}(\mathbb{R}^\infty), \qquad x \mapsto x \oplus \mathbb{R}$$

dove la classe di omotopia della mappa composta non dipende dall'isomorfismo scelto. Prendendo il limite diretto di questi spazi rispetto alle inclusioni

[4] Non si tratta di un semplice cambio di notazione: è possibile infatti estendere la nozione di *spazio classificante* a ciascuna collezione di fibrati principali con gruppo strutturale G, ottenendo la medesima corrispondenza tra mappe di classificazione omotope a valori in un certo spazio topologico denominato BG e classi di isomorfismo dei suddetti fibrati. Nel caso di fibrati vettoriali (attenzione: non sono principali!) questo gruppo è $GL(n)$; se la base è paracompatta essa ammette una metrica euclidea, che riduce il gruppo strutturale a $O(n)$, da cui la terminologia $BO(n)$ per lo spazio classificante.

date dalla mappa sopra descritta per ogni n si ottiene uno spazio, denominato BO; una mappa $B \to BO$, in ipotesi di compattezza di B, identifica per costruzione una classe di isomorfismo di fibrati a meno di equivalenza stabile, in quanto si fattorizza a una mappa $B \to BO(k) \hookrightarrow BO$ per k sufficientemente grande, e fibrati corrispondenti a diverse fattorizzazioni sono stabilmente equivalenti, poiché le inclusioni – a livello di fibrati – sono date da somme di Whitney con fibrati banali. Per questo motivo, data una n-varietà compatta M e supponendo di avere un diagramma commutativo (a meno di omotopia)

$$\begin{tikzcd} & BO(n-\alpha(n)) \arrow[d, hook] \\ M \arrow[ur, "\tilde{f}_\nu"] \arrow[r, "f_\nu"] & BO \end{tikzcd}$$

è possibile prendere un rappresentante del fibrato normale stabile all'interno della propria classe di equivalenza (per k sufficientemente grande), ottenendo

$$\begin{tikzcd} & BO(n-\alpha(n)) \arrow[d, hook] \\ M \arrow[ur, "\tilde{f}_\nu"] \arrow[r, "f_\nu"] & BO(k) \end{tikzcd}$$

Parafrasando tutto ciò nel linguaggio della teoria di Hirsch, la situazione del diagramma descrive un'immersione di M in $\mathbb{R}^{n+k}$ con un $k-(n-\alpha(n))$-campo trasversale, poiché il fibrato normale associato all'immersione con fibrato normale classificato da f_ν è dato dalla somma di quello classificato da $\tilde{f}_\nu$ con $\varepsilon^{k-n+\alpha(n)}$, e cioè una condizione sufficiente per l'esistenza di un'immersione di M in $\mathbb{R}^{n+k-k+n-\alpha(n)} = \mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$. La strategia avanzata da Brown e Peterson e portata avanti da Cohen, descritta nel prossimo capitolo, si fonda proprio su questa condizione sufficiente per dimostrare la veridicità della congettura di immersione.

Capitolo 5

Una panoramica sulla dimostrazione di Cohen (1985)

Esaminiamo più da vicino, forti della condizione sufficiente data dalla teoria di Hirsch-Smale, la soluzione al problema della determinazione di $i(n)$. Si ricorda che l'obiettivo è costruire una fattorizzazione della mappa classificante del fibrato normale stabile, a valori in BO, come composizione $M \to BO[n - \alpha(n)] \hookrightarrow BO$. Prima di descrivere la strategia delineata – e parzialmente realizzata – da Brown e Peterson in tre diversi lavori (tra cui [2]), si premettono alcune costruzioni. In questo paragrafo, seguendo la notazione di Cohen, $\nu_M \colon M \to BO$ denota la mappa tra basi indotta dal morfismo di classificazione, unica a meno di omotopia, e ciascuna varietà sarà supposta compatta e liscia.

Si consideri la mappa in coomologia

$$\nu_M^* \colon H^*(BO) \to H^*(M)$$

e sia $I_n \subset H^*(BO)$ l'ideale definito dall'intersezione

$$I_n = \bigcap_M \ker \nu_M^*$$

su tutte le n-varietà M. Per definizione di I_n si ottiene il diagramma

$$\begin{tikzcd} H^*(BO)/I_n \arrow[r, "\tilde{\nu}_M^*"] & H^*(M) \\ & H^*(BO) \arrow[u, "\nu_M^*"'] \arrow[ul, "\rho^*"] \end{tikzcd}$$

dove ρ^* è la proiezione al quoziente.

D'altro canto, si rammenti che la struttura dell'anello di coomologia di $BO(k)$ è descritta dall'isomorfismo

$$H^*(BO(k)) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_k],$$

dove w_i indica l'i-esima classe di Stiefel-Whitney associata al fibrato universale γ^k. Poiché la topologia sullo spazio BO è definito come limite diretto (dato dalle solite inclusioni) di quelle su $BO(k)$, la controvarianza della coomologia implica che $H^*(BO)$ è isomorfo al limite inverso delle algebre polinomiali $\mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_k]$ (vedi ad esempio [4]). Il limite inverso di algebre polinomiali, le cui mappe sono date dalle proiezioni naturali sulle sottoalgebre, consiste dell'anello $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots]$, che rappresenta quindi la descrizione esplicita della coomologia di BO; vale la pena di notare che la successione delle w_i non può essere associata alle classi di Stiefel-Whitney di alcun fibrato, in quanto sono non banali in ogni dimensione. È evidente che la mappa in coomologia data dall'inclusione

$$i^* \colon H^*(BO) \to H^*(BO(k))$$

ha $\ker i^* = \mathbb{Z}_2[w_{k+1}, w_{k+2}, \dots]$. Il Teorema 3.5 si traduce nel fatto che $w_i \in I_n$ per ogni $i > n - \alpha(n)$, in quanto

$$0 = \bar{w}_i(M) = w_i(\nu_M) = \nu_M^* w_i$$

qualunque sia la varietà M. Se dunque si considera l'inclusione $i \colon BO(n - \alpha(n)) \to BO$ segue che $\ker i^* \subset I_n$ che è il nucleo della proiezione $\rho^* \colon H^*(BO) \to H^*(BO)/I_n$, da cui la fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} H^*(BO)/I_n & \\ H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[u, "\rho_n^*"] & H^*(BO) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[ul, "\rho^*"'] \end{tikzcd}$$

e mettendo insieme il tutto, si ottiene

$$\begin{tikzcd} H^*(BO)/I_n \arrow[r, "\tilde{\nu}_M^*"] & H^*(M) \\ H^*(BO(n-\alpha(n))) \arrow[u, "\rho_n^*"] & H^*(BO) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[ul, "\rho^*"'] \arrow[u, "\nu_M^*"'] \end{tikzcd}$$

Si osservi che la composizione

$$\tilde{\nu}_M^* \circ \rho_n^* \colon H^*(BO(n - \alpha(n))) \to H^*(M)$$

descrive una mappa in coomologia coerente con la possibilità di definire un sollevamento $M \to BO(n - \alpha(n))$ che commuti nel modo giusto (a meno di omotopia).

Si è ora pronti per delineare il suddetto programma di Brown e Peterson. Esso si compone dei seguenti passi:

1. Calcolare esplicitamente l'ideale I_n.

2. Costruire uno spazio BO/I_n (non è un quoziente, ma una notazione analoga al costrutto in coomologia sopra descritto) e una mappa $\rho\colon BO/I_n \to BO$ tale che:

    - $H^*(BO/I_n) = H^*(BO)/I_n$ e ρ induca in coomologia la proiezione naturale al quoziente ρ^*;
    - Ciascuna mappa classificante ν_M si fattorizza (a meno di omotopia) come composizione $M \xrightarrow{\tilde{\nu}_M} BO/I_n \xrightarrow{\rho} BO$.

3. In analogia al diagramma di sopra, costruire una fattorizzazione di ρ (a meno di omotopia) tramite una mappa $\rho_n\colon BO/I_n \to BO(n - \alpha(n))$.

I primi due passi sono stati portati a termine dai due autori, che hanno poi congetturato la realizzabilità del terzo, di cui si occupa Cohen in [3]. La composizione $\rho_n \circ \tilde{\nu}_M$, a questo punto, dimostra l'esistenza della mappa tra spazi cercata (di cui si è costruita la trasposizione in coomologia) e realizza la condizione sufficiente richiesta dal teorema di Hirsch: la congettura di immersione è così completamente provata.

Bibliografia

[1] Riccardo Benedetti. «Lectures on Differential Topology». 2019.

[2] Edgar H. Brown e Franklin P. Peterson. «A universal space for normal bundles of n-manifolds». In: *Commentarii Mathematici Helvetici* (1979).

[3] Ralph L. Cohen. «The immersion conjecture for differentiable manifolds». In: *Annals of Mathematics* (1985).

[4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2015. URL: `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`.

[5] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. 2017. URL: `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf`.

[6] Morris W. Hirsch. «Immersion of manifolds». In: *Transactions of the American Mathematical Society* (1959).

[7] William S. Massey. «On the Stiefel-Whitney classes of a manifold». In: *American Journal of Mathematics* (1960).

[8] John P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. 2007. URL: `https://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`.

[9] John W. Milnor e James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.

[10] Stephen Smale. «The classification of immersion of spheres in Euclidean spaces». In: *Annals of Mathematics* (1959).

[11] Hassler Whitney. «The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space». In: *Annals of Mathematics* (1944).

Ringraziamenti

Al termine di un lavoro così umile, dedicare un piccolo capoverso a ringraziamenti vari appare quasi un atto di ὕβρις; ciononostante, si è deciso di correre questo rischio.

Il primo pensiero va al professor Riccardo Benedetti, senza il quale questo lavoro non sarebbe mai potuto nascere: oltre ad avermi proposto un argomento così affascinante e in grado di soddisfare la mia esigenza – che, sostanzialmente, è il motivo per cui studio Matematica – di ricercare relazioni profonde tra concetti apparentemente lontani fra loro, il cui intreccio partorisce risultati sorprendenti come quello discusso nel presente elaborato, nei pochi mesi in cui siamo stati in contatto in qualità di relatore e laureando non ha esitato a parlarmi del lato umano e personale della Matematica e del suo essere matematico, ed è soprattutto di questo che lo ringrazio.

Il secondo pensiero va a coloro che sopportano ogni giorno le mie lamentele domestiche: a mamma, per tutti i caffè prontamente (più o meno) recapitati in camera nel primo pomeriggio; a babbo, che ha collegato un secondo monitor al mio computer per farmi ammattire un po' meno; ad Andrea, che si è occupato di svolgere le faccende al posto mio nei momenti in cui fuggivo in camera a correggere la sciocchezza scritta poco prima; ad Alessio, che mi ha concesso di svagarmi ai videogiochi insieme a lui quando la testa stava per scoppiare (i due gemelli si possono anche intercambiare).

Il terzo pensiero va a tutte le altre persone che mi sono state accanto in questi anni: a partire dai miei compagni di università, capaci di sopportare la mia parlantina infinita dalla mattina alla sera e di affiancarmi, ciascuno con la propria diversa eppur meravigliosa personalità, in un corso di studi che senza di loro non avrei mai condotto fino a questo punto – posso dire di aver imparato da loro almeno tanto quanto abbia imparato seguendo le lezioni, da un punto di vista sia umano che prettamente matematico; ai miei compagni di liceo e più in generale alle mie Lenticchie, capaci di stupirmi, ogni volta che ci incontriamo, della sincerità del nostro legame anche a distanza di tre anni da quando abbiamo smesso di vivere insieme: detto in parole semplici, siete una di quelle cose in grado di far capire che la vita, in fondo, non è poi così male; alle mie compagne di passeggiate pomeridiane e gelati notturni, per avermi tirato fuori di casa, fatto apprezzare la bellezza della natura e fatto ingrassare di qualche chilo; ai miei amici del mare, per aver soddisfatto

la mia primordiale e maniacale necessità di giocare a Lupus e avermi fatto perdere tante schedine, ma vincere tante risate.

L'ultimo ringraziamento, ma non per importanza, va a tutto il resto della mia famiglia, che tanto in questo giorno di festa quanto in tutti i precedenti mi offre il conforto di un amore gratuito e di un solido basamento cui rivolgermi quando intorno tutto il resto sembra burrasca; e a te, che sei arrivato o arrivata a leggere fino a questo punto, dando un significato e un vero compimento a questo piccolo lavoro.