GEOMETRIA 2 - SUM UP

Def. SPAZIO PROIETTIVO ASSOCIATO A V

$$\mathbb{P}(V) = V\setminus\{0\}/_\sim \qquad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid v = \lambda w$$

- $\mathbb{P}(V) \longleftrightarrow \{\text{rette di } V\}$
  $[v] \longmapsto \text{span}(v)$
  $\pi(r\setminus\{0\}) \longleftarrow r$
- $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$
- $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Def. TRASFORMAZIONE PROIETTIVA

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ t.c. $\exists\, \varphi: V \to W$ lineare $f([v]) = [\varphi(v)]\ \forall v \in V\setminus\{0\}$

"$f = [\varphi]$"

Proposizione: $\varphi: V \to W$ induce una trasformazione proiettiva $\iff$ è iniettiva

<u>COROLLARIO</u>: ogni trasformazione proiettiva è iniettiva

Proposizione: $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva, sono fatti equivalenti:

(i) f suriettiva — (iii) $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$

(ii) f biiettiva — (iv) f invertibile e f^{-1} trasf. proiettiva

Proposizione: (i) $Id: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è una trasf. proiettiva

(ii) $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$, $g: \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(H)$ trasf. proiettive

$g \circ f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(H)$ è una trasf. proiettiva

Def. $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ si dice ISOMORFISMO se $\exists\, g$ trasf. proiettiva $g: \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ t.c. $f \circ g = id_{\mathbb{P}(W)} \wedge g \circ f = id_{\mathbb{P}(V)}$

- si dice PROIETTIVITÀ se $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(V)$

<u>Osservazione</u>: $f = [\varphi]$ $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$

$[v]$ punto fisso di $f \iff v$ autovettore di φ

<u>Corollario</u>: $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow f$ ha almeno un punto fisso (se $\mathbb{P}(V) \neq \emptyset$)

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \wedge \dim \mathbb{P}(V) \equiv 0\ (2) \Rightarrow f$ ha almeno un punto fisso

Def. $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un SOTTOSPAZIO se $\exists$ un ssp. vettoriale $W \subseteq V$ tale che $S = \pi(W\setminus\{0\})$

- $S = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W') \Rightarrow W = W'$
- $\{\text{ssp. di } \mathbb{P}(V)\} \longleftrightarrow \{\text{ssp. di } V\}$

Def. $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottoinsieme. Allora il ssp. generato da A è il più piccolo ssp. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ che contiene A.

$$L(A) = \bigcap \{S \mid S \text{ ssp. proiettivo che contiene } A\}$$

Proposizione: $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2) \Rightarrow L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

TEOREMA - Formula di Grassmann

$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ P \text{ punto} \Rightarrow \dim P = 0 \\ \bullet\ \dim \emptyset := -1 \end{array} \right\}$

COROLLARIO: S_1 e S_2 ssp. di $\mathbb{P}(V)$, $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

In particolare r_1, r_2 rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \Rightarrow r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$

Def. $P_1, \dots, P_K \in \mathbb{P}(V)$ si dicono INDIPENDENTI se presi $v_i \mid P_i = [v_i]\ \forall i$, i v_i sono linearmente indipendenti in V.

$\Leftrightarrow \dim L(P_1, \dots, P_K) = K-1 \Rightarrow K \leq \dim \mathbb{P}(V) + 1$

Def. $P_1, \dots, P_K$ in POSIZIONE GENERALE, se qualsiasi loro sottoinsieme costituito da h punti, con $h \leq \dim \mathbb{P}(V) + 1$ è indipendente

Def. Un RIFERIMENTO PROIETTIVO di $\mathbb{P}(V)$, $n = \dim \mathbb{P}(V)$ è una $(n+2)$-upla $R = (\underbrace{P_0, P_1, \dots, P_n}_{\text{punti fondamentali}}, P_{n+1})$ di punti in $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale

P_{n+1} → punto unità

Def. R rif. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Una BASE NORMALIZZATA di V associata a R è una base di V, $(v_0, \dots, v_n) \mid [v_i] = P_i\ \forall i = 0, \dots, n$ e $P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$

TEOREMA R rif. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

(i) Esiste una base normalizzata $(v_0, \dots, v_n)$ di V rispetto a R

(ii) $(v_0', \dots, v_n')$ un'altra base normalizzata, allora $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $v_i' = \lambda v_i'\ \forall i = 0, \dots, n$

TEOREMA $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazioni proiettive, $\varphi, \psi : V \to W$ t.c. $f = [\varphi]$, $g = [\psi]$. R rif. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. TFAE:

(i) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \varphi = \lambda \psi$

(ii) $f = g$

(iii) $f(P) = g(P)\ \forall P \in R$

COROLLARIO: $\mathbb{P}GL(V) \cong GL(V)/_N$, dove $N \trianglelefteq GL(V)$ è il sottogruppo $N = \{\lambda Id_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$

$\mathbb{P}GL(V)$ → gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$

TEOREMA - Fondamentale delle trasformazioni proiettive

$\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi $n = \dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$. R ed R' riferimenti proiettivi rispettivamente di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$. Allora $\exists!$ trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ che manda ordinatamente R in R'.

Def. Il punto $[(x_0 \cdots x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha COORDINATE OMOGENEE $[x_0 \cdots x_n]$ rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (cioè il rif. indotto dalla base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$).

Nel caso generale, se $\mathbb{P}(V)$ ha dimensione n, $\exists!\, f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che manda un riferimento R di $\mathbb{P}(V)$ in quello standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ le coordinate di P in $\mathbb{P}(V)$ sono quelle di $f(P)$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

<u>Osservazione</u>: $\underset{R}{f: \mathbb{P}(V)} \to \underset{R'}{\mathbb{P}(W)}$ $\quad \varphi: V \to W \quad f = [\varphi]$

Sia M la matrice che rappresenta φ, allora

" $[f(P)]_{R'} = M \cdot [P]_R$ "

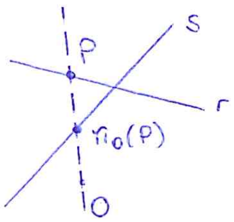
più correttamente $[f(P)]_{R'} = [M (v)_B]_{R'}$ $\quad P = [v]$ e B base norm. associata a R

M è unica a meno di multipli e ha dimensione $(\dim \mathbb{P}(V)+1) \times (\dim \mathbb{P}(W)+1)$

<u>Osservazione</u>: le coordinate omogenee permettono di dare ai sottospazi proiettivi una descrizione parametrica o cartesiana.

Proposizione: Siano r ed s in un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ e fissiamo $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$. Definisco $\pi_0 : r \to s \mid \pi_0(P) = L(O,P) \cap s$

π_0 è ben definita ed è una trasformazione proiettiva chiamata PROSPETTIVITÀ di centro O.



TEOREMA Siano r ed s rette distinte in un piano $\mathbb{P}(V)$ e $f: r \to s$ trasformazione proiettiva.

Allora, f è una prospettività $\Leftrightarrow f(A) = A$ dove $A = r \cap s$

<u>Carte affini e punti all'infinito</u>

Def. Sia $H_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ l'i-esimo IPERPIANO COORDINATO $H_i = \{x_i = 0\}$ $H_i = \{[x_0 \cdots x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0\}$ $\forall i = 0, \dots, n$. $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

Indichiamo con $U_i := \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i$

Def. i-ESIMA CARTA AFFINE

$f_i : \mathbb{K}^n \to U_i$

$(x_1 \cdots x_n) \longmapsto [x_1 \cdots \underset{\text{posto i-esimo}}{1} \cdots x_n]$ (sto aggiungendo una coordinata)

" f_i^{-1} " $: U_i \to \mathbb{K}^n$

$[x_0 \cdots x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i} \cdots \widehat{\frac{x_i}{x_i}} \cdots \frac{x_n}{x_i}\right)$ è ben definita

Proposizione: f_i e f_i^{-1} sono inverse

Def. I punti di H_0 si chiamano PUNTI ALL'INFINITO (o punti impropri) di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e H_0 si chiama IPERPIANO ALL'INFINITO

$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_i \cup H_i \cong \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

Def. / **Proposizione**: $\cdot K \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, $K \not\subseteq H_0$, allora $f_0^{-1}(K \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ e si chiama PARTE AFFINE di K

- $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ ssp. affine non vuoto $\Rightarrow$ Z è la parte affine di un unico ssp. proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, che si denota $\overline{Z}$ e si chiama CHIUSURA PROIETTIVA di Z.

$\Rightarrow$ j_0 induce una bigezione tra sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$ di dimensione k e ssp. proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di dimensione k non contenuti in H_0.

Def. $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ ssp. affine. $\overline{Z} \cap H_0$ si chiamano PUNTI ALL'INFINITO di Z

TEOREMA Sia $G \subset \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$ (= proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$)

$G = \{ f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \mid f(H_0) = H_0 \}$ ($\Rightarrow G = \{ f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \mid f(U_0) = U_0 \}$)

Fissata l'identificazione $j_0 : \mathbb{K}^n \to U_0$ la mappa

$$G \xrightarrow{\psi} \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$$
$$f \longmapsto f|_{U_0}$$

è un isomorfismo di gruppi

Dualità

$\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*)$, $\mathbb{P}(V)^*$ è isomorfo (non canonicamente) a $\mathbb{P}(V)$

Proposizione C'è una bigezione $\psi : \mathbb{P}(V)^* \to \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$

$$\psi([\varphi]) = \mathbb{P}(\mathrm{Ker}\,\varphi)$$

Se $(a_0 \cdots a_n)$ sono le coordinate di φ rispetto alla base duale canonico di V^*, allora $\psi([\varphi]) = \psi([a_0 \cdots a_n]) = \{ [x_0 \cdots x_n] \in \mathbb{P}(V) \mid a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \}$

Def. Sia S un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione k, $S = \mathbb{P}(W)$, $W \subseteq V$ ssp. vettoriale di dim. $k+1$

Allora definiamo la MAPPA DI DUALITÀ $\delta_k : \left\{ \begin{array}{l} \text{ssp. proiettivi} \\ \text{di } \mathbb{P}(V) \text{ di} \\ \text{dim } k \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{ssp. proiettivi} \\ \text{di } \mathbb{P}(V)^* \text{ di} \\ \text{dim } n-k-1 \end{array} \right\}$

$$S = \mathbb{P}(W) \longmapsto \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\, W)$$

TEOREMA $\forall k = 0, \dots, n$ δ_k è una bigezione

Indichiamo con $\delta : \{\text{ssp. proiettivi di } \mathbb{P}(V)\} \to \{\text{ssp. proiettivi di } \mathbb{P}(V)^*\}$ la mappa tale che $\delta(S) = \delta_k(S)$ se $\dim S = k$

(δ è una bigezione che scambia ssp. di dimensione k e ssp. di dim. $n-k-1$)

TEOREMA S_1 ed S_2 ssp. di $\mathbb{P}(V)$

1) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \delta(S_2) \subseteq \delta(S_1)$
2) $\delta(L(S_1, S_2)) \Rightarrow \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$
3) $\delta(S_1 \cap S_2) \Rightarrow L(\delta(S_1), \delta(S_2))$

TEOREMA - principio di dualità

Sia P una proposizione che riguarda intersezioni, "somme" e contenimenti di sottospazi di uno sp. proiettivo di dimensione n. Sia P^* la

PROPOSIZIONE DUALE ottenuta da P con le seguenti operazioni

$$\subseteq \to \supseteq$$
$$\supseteq \to \subseteq$$
$$\circ \cap \circ \to L(\circ,\circ)$$
$$L(\circ,\circ) \to \circ \cap \circ$$
$$\dim = k \to \dim = n-k-1$$

allora P è vera $\Leftrightarrow$ P^* è vera

Proposizione: se identifichiamo gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)^*$ con δ_{n-1}, allora vale che $\delta(S) = \{H \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ iperpiano} \mid S \subseteq H\}$

S ↓ ssp. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

$\Rightarrow$ ha senso chiamare $\delta(S)$ SISTEMA LINEARE DI CENTRO S

Def. Un sistema lineare si dice FASCIO se ha dimensione 1 (il che equivale ad avere centro di codimensione 2)

Def. Sia $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ una proiettività indotta dall'isomorfismo lineare $\varphi: V \to V$. Sia $\varphi^*: V^* \to V^*$ la mappa duale o mappa trasposta di φ
$\alpha \mapsto \alpha \circ \varphi$

(φ: rappresentata dalla matrice A) (φ^*: rappresentata dalla matrice ${}^tA$ (nella base duale indotta dalla base presa per V))

Allora chiamiamo PROIETTIVITÀ DUALE $f^*: \mathbb{P}(V)^* \to \mathbb{P}(V)^*$ la mappa $f^* = [\varphi^*]$

Proposizione: data f come sopra essa manda iperpiani in iperpiani, per cui induce una bigezione

$$f_{ip}: \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \to \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$$

allora $f^* = f_{ip}^{-1}$

RAPPORTO SEMPLICE E BIRAPPORTO

Def. A^1 retta affine, $\{P_1, P_2\}$ riferimento affine

$\psi: A^1 \to \mathbb{K}$ isomorfismo affine tale che $\psi(P_1) = 0$ e $\psi(P_2) = 1$

Chiamo RAPPORTO SEMPLICE di P_1, P_2, P_3 il numero

$$[P_1\ P_2\ P_3] := \psi(P_3)$$

<u>Osservazione</u> le affinità conservano il rapporto semplice, cioè:

$\alpha: A \to B$ isomorfismo tra rette affini $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\alpha(P_1)\ \alpha(P_2)\ \alpha(P_3)] = [P_1\ P_2\ P_3]$

TEOREMA $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{K}$, $z_1 \neq z_2$. Allora $[z_1\ z_2\ z_3] = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

Def. $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ e P_1, P_2, P_3 a due a due distinti ($\Rightarrow$ riferimento proiettivo). Siano $[\lambda_4\ \mu_4]$ le coordinate omogenee di P_4 rispetto al riferimento P_1, P_2, P_3. Allora

$$\beta(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = \mu_4/\lambda_4 \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

$\varphi: \mathbb{P}^1(V) \to \mathbb{K} \cup \{\infty\} \mid P_4 \xmapsto{\varphi} \beta(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ è una bigezione in questo caso si dicono PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI

TEOREMA $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$, $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}(W)$

$\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = 1$, $P_1, P_2, P_3 \wedge Q_1, Q_2, Q_3$ distinti

Allora esiste una trasformazione proiettiva $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che $f(P_i) = Q_i \ \forall i = 1,2,3,4 \iff \beta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \beta(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$

TEOREMA $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$ con P_1, P_2, P_3 a due a due distinti, allora fissato un qualsiasi riferimento su $\mathbb{P}(V)$ (e quindi un sist. di coord. omogenee), se $P_i = [\lambda_i \ \mu_i] \ \forall i = 1,2,3,4$ allora

$$\beta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

Osservazione: $\beta = \beta(P_1 P_2 P_3 P_4)$, P_i distinti

al variare di σ in S_4 $\beta(P_{\sigma(1)} P_{\sigma(2)} P_{\sigma(3)} P_{\sigma(4)})$ varia nell'insieme $\delta(\beta) = \{\beta, 1/\beta, 1-\beta, 1/(1-\beta), \beta/(\beta-1), (\beta-1)/\beta\}$

TEOREMA char $\mathbb{K} = 0$

$\jmath: \mathbb{K} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{K}$

$\jmath(\beta) = \dfrac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2}$ Allora $\beta' \in \delta(\beta) \iff \jmath(\beta') = \jmath(\beta)$

Corollario: $\{P_1 P_2 P_3 P_4\}$ proiettivamente equivalenti a $\{Q_1 Q_2 Q_3 Q_4\}$ (P_i e Q_i tra loro distinti) NON ordinatamente $\iff$

$\iff \jmath(\beta(P_1 P_2 P_3 P_4)) = \jmath(\beta(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4))$

Def. $\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2] = \{$polinomi in $\mathbb{K}[x_0\ x_1\ x_2]$ omogenei di deg $2\} \cup \{0\}$

$\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2] = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \langle x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_1x_2, x_0x_2 \rangle$

Una CONICA PROIETTIVA è un elemento di $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2])$ (polinomio omogeneo non nullo a meno di scalari)

Def. $C = [p]$. Il SUPPORTO di C, indicato con $V(C)$ è

$V(C) = \{[x_0\ x_1\ x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid p(x_0\ x_1\ x_2) = 0\}$ (ben definito

Def. $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività rappresentata da $\varphi: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$

$C = [p]$. Si pone $f(C) = [p \circ \varphi^{-1}]$

PROPOSIZIONE $V(f(C)) = f(V(C))$

$p(x_0\ x_1\ x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{02}x_0x_2 =$

$$= (x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}/2 & a_{02}/2 \\ a_{10}/2 & a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{20}/2 & a_{21}/2 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ se $j > i$

↳ matrice simmetrica che rappresenta $[p] = C$ (unica a meno di prodotto per scalare)

Def. Due coniche C e C' in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si dicono PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI se $\exists$ una proiettività $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid f(C) = C'$

Osservazione $C = [A]$, $[\varphi] = f$, φ rappresentato da M
$\Rightarrow f(C)$ rappresentato da ${}^tM^{-1} A M^{-1}$

Def. Sia $\sim$ la seguente relazione di equivalenza
$A \sim A' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ M \in Gl_3(\mathbb{K})$ tale che $A' = \lambda\, {}^tM^{-1} A M^{-1}$

Proposizione $C = [A]$, $C' = [A']$, allora C proiettivamente equivalente a $C' \iff A \sim A'$

Osservazione ① Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora $A \sim A' \iff A$ congruente ad A'
② Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora $A \sim A' \iff A$ congruente ad A' oppure $-A'$

Classificazione delle coniche su $\mathbb{C}$

il rango è invariante completo per congruenza

① $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ non degenere

② $x_0^2 + x_1^2 = 0$ degenere

③ $x_0^2 = 0$ doppiamente degenere

Classificazione delle coniche su $\mathbb{R}$

Classificate dalle possibili segnature a meno di segno.

① $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ non degenere (supporto vuoto)

② $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ non degenere (supporto non vuoto)

③ $x_0^2 + x_1^2 = 0$ degenere (supporto un punto $[0\ 0\ \alpha]$)

④ $x_0^2 - x_1^2 = 0$ degenere (supporto unione di due rette distinte)

⑤ $x_0^2 = 0$ doppiamente degenere (supporto una retta "doppia")

Def. Sia $C = [p]$ una conica proiettiva, $x_0 \nmid p$
Allora la PARTE AFFINE di C è la conica affine di $\mathbb{K}^2$ di equazione $f(x, y) = p(1, x, y)$

Proposizione $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0$
$V(C) \cap U_0$ è proprio il supporto della parte affine di C.

TEOREMA Sia C una conica affine non degenere. Allora

① C ellisse $\iff V(\overline{C}) \cap H_0 = \emptyset$

② C parabola $\iff V(\overline{C}) \cap H_0 = 1$

③ C iperbole $\iff V(\overline{C}) \cap H_0 = 2$

Def. Sia $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ retta di equazione $f(x_0\ x_1\ x_2) = 0$. $C = [p]$ conica.
Allora r è una componente di C se $f \mid p$, cioè
$p(x_0\ x_1\ x_2) = f(x_0\ x_1\ x_2) \cdot q(x_0\ x_1\ x_2)$

r componente di $C \iff r \subseteq V(C)$

TEOREMA Sia C una conica e sia r una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Allora, se $|V(C) \cap r| \geq 3$, r è una componente di $V(C)$.

Inoltre, se $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow |V(C) \cap r| \geq 1$

Se C è una conica irriducibile, $\forall$ retta r di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

$|V(C) \cap r| = 0, 1, 2$

TEOREMA ① $\mathbb{K}$ qualsiasi : riducibile $\Rightarrow$ degenere

② $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: riducibile $\iff$ degenere

Def. Sia C una conica non degenere e $Q \in V(C)$. Una retta $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si dice TANGENTE a C in Q se $V(C) \cap r = \{Q\}$

TEOREMA Sia $C = [M]$ una conica non degenere, $Q \in V(C)$, $Q = [v]$

Allora $\exists!$ retta tangente a C in Q, detta τ_Q, che ha equazione

${}^t v M x = 0$

Def. Un SISTEMA LINEARE di coniche è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2])$. Se ha dimensione 1 si chiama FASCIO.

Def. Siano $C_1 = [p_1]$ e $C_2 = [p_2]$ coniche distinte. Il FASCIO GENERATO da C_1 e C_2 è l'insieme delle coniche del tipo $[\lambda p_0 + \mu p_1]$ con $[\lambda\ \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$

(*) **Proposizione** $P, Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, C conica non degenere

(i) $P \in \text{pol}(Q) \Rightarrow Q \in \text{pol}(P)$

(ii) $P \in V(C) \Rightarrow \text{pol}(P) = \tau_P$

(iii) In generale,

$$\text{pol}(P) \cap V(C) = \{Q \in V(C) \mid P \in \tau_Q\}$$

<u>Osservazione</u> $|\text{pol}(P) \cap V(C)| = 1 \Rightarrow P \in V(C)$

(*) **Def.** C conica non degenere rappresentata da $M \in S_{3\times 3}(\mathbb{K})$

$P = [v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. La RETTA POLARE di P rispetto a C è la retta $\text{pol}(P) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di equazione ${}^t v M x = 0$

M invertibile $\Rightarrow$ ogni retta è polare di un unico punto P_r

P_r è detto POLO (pol isomorfismo proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$)

Def.
$$\text{pol}: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$$
$$P \mapsto \text{pol}(P)$$

La conica duale di C è la conica $\text{pol}(C) = C^*$

$$\text{pol}|_{V(C)}: V(C) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*, \quad P \mapsto \tau_P$$

l'immagine di questa mappa è il supporto di C^*

Proposizione Se M è la matrice che descrive la conica C, allora la matrice simmetrica che descrive C^* è $M^{-1} \in Sym_{3\times 3}(\mathbb{K})$

Osservazione: la retta r è tangente a una conica C (anche degenere) $\iff$ il Δ quell'equazione di secondo grado che si ottiene mettendo a sistema l'equazione della conica e l'equazione della retta si annulla

Proposizione (caso particolare del "Nullstellensatz")

D, D' coniche complesse e $V(D) = V(D') \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \Rightarrow D = D'$

FATTI TEORICI UTILI DIMOSTRATI NEGLI ESERCIZI SETTIMANALI

es. 1) • $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{i=0}^{n} q^i$

• Date tre rette r_1, r_2, r_3 in un piano proiettivo tali che $r_1 \cap r_2 \cap r_3 = \emptyset$ esiste un punto che non appartiene a nessuna delle rette ($\mathbb{K}$ qualsiasi)

es. 3) • r_1, r_2, r_3 rette di $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ a due a due sghembe e non tutte contenute in un iperpiano, allora esiste un'unica retta che interseca sia r_1, sia r_2, sia r_3.

Vecchio compitino) • date due rette sghembe e un punto esterno in $\mathbb{P}^3$, esiste un'unica retta passante per il punto e che interseca le due rette

non dimostrato in classe

es. 11) $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ proiettività. $f = [\overset{M}{\varphi}]$ $\overset{M^{-1}}{\varphi^*} : V^* \to V^*$ mappa duale di φ. $f^* = [\varphi^*]$ mappa su $\mathbb{P}(V)^*$

$f_{ip} : \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \longleftrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$ indotta da f

$\Rightarrow f^* = f_{ip}^{-1}$

es. 13) $\mathcal{F}$ fascio di rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di centro P e $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ retta non passante per P

$f : \mathcal{F} \to r$, $f(s) = s \cap r$ è un isomorfismo proiettivo

es. 17) $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività.

La mappa indotta da f sullo spazio delle coniche è una proiettività.

es. 18) $P_1, \dots, P_5$ punti in posizione generale in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Esiste un'unica conica il cui supporto contiene tutti i P_i e tale conica è non degenere

Corollario: se P_i, $1 \leq i \leq k \leq 5$ sono k punti in posizione generale, allora il sistema lineare delle coniche passanti per i P_i ha dimensione $5-k$.