TOPOLOGIA

Spazi metrici

Def. Uno SPAZIO METRICO (X,d) è un insieme X dotato di una distanza $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $d(x,x') \geq 0 \quad \forall (x,x') \in X \times X$ e $d(x,x') = 0 \iff x = x'$

(ii) $d(x,x') = d(x',x) \quad \forall x, x' \in X$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

es. $d_p(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$ è una distanza $\forall p \geq 1$

se $p=2$ è detta DISTANZA EUCLIDEA

Def. Dato V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale si definisce norma una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$

(iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

Osservazione: una norma induce una distanza ponendo $d(x,y) = \|x-y\|$

Def. DISTANZA DISCRETA

(X,d) $\qquad d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$

Def. (X,d) metrico, $x_0 \in X$, $R > 0$

la PALLA (aperta) di centro x_0 e raggio R è

$B(x_0, R) = \{ y \in X \mid d(x_0, y) < R \}$

Def. $f: (X,d) \to (Y,d')$

f si dice continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid$ $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

Si dice CONTINUA se è continua in $x_0 \ \forall x_0 \in X$

Def. (X,d) metrico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ dice APERTO se $\forall x_0 \in A \ \exists \delta > 0 \mid B(x_0, \delta) \subseteq A$

Proposizione in uno spazio metrico le palle aperte sono aperte

TEOREMA $f:(X,d) \to (Y,d')$ è continua $\iff \forall A$ aperto di Y, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in X

Proposizione: (X,d) metrico, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\tau = \{ A \subseteq X \mid A \text{ è aperto} \}$

(i) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$

(ii) $A \in \tau$, $B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

(iii) $A_i \in \tau$, $i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Spazi topologici

Def. uno spazio topologico è una coppia (X,τ) dove X è un insieme e $\tau \subseteq P(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi di X detti APERTI tale che:

(i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

(ii) $A \in \tau, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

(iii) Se $A_i \in \tau$ $\forall i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Def. $C \subseteq X$ si dice CHIUSO se $X \setminus C$ è aperto

Osservazione: Passando al complementare, si vede che

(i) $\emptyset$ e X sono chiusi

(ii) C_1 e C_2 chiusi $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ chiuso

(iii) C_i chiuso $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ è chiuso

es.
- Ogni sp. metrico è uno sp. topologico $\rightarrow$ le topologie indotte da una distanza si dicono metrizzabili
- $\tau = P(X)$ è detta TOPOLOGIA DISCRETA
- $\tau = \{\emptyset, X\}$ è detta TOPOLOGIA INDISCRETA

Proposizione (X,τ) metrizzabile e $x_0 \in X \Rightarrow \{x_0\}$ è chiuso

COROLLARIO: $|X| \geq 2$ la topologia indiscreta su X non è metrizzabile

Def. X, Y sp. topologici, $f: X \to Y$

f si dice CONTINUA se $\forall$ aperto A di Y, $f^{-1}(A)$ è aperto in X.

(equivalentemente se $\forall C \subseteq Y$ chiuso $f^{-1}(C)$ è chiuso in X)

Proposizione $(X,\tau_X), (Y,\tau_Y), (Z,\tau_Z)$ sp. topologici

(i) $id: (X,\tau_X) \longrightarrow (X,\tau_X)$ è continua

(ii) $f: (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ e $g: (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$ continue

$\Rightarrow f \circ g: (X,\tau_X) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$ continua

Gli spazi topologici con le funzioni continue formano una categoria.

Def. $f: X \to Y$ si dice OMEOMORFISMO se è continua, invertibile e l'inversa $f^{-1}: Y \to X$ è continua.

Confronto tra topologie

Def. Date τ_1 e τ_2 topologie su X, τ_1 è MENO FINE di τ_2 se $\tau_1 \subseteq \tau_2$ o equivalentemente $Id: (X,\tau_2) \longrightarrow (X,\tau_1)$ è continua

Proposizione d_1 e d_2 distanze su X che inducono le topologie τ_1 e τ_2. Se $\exists K>0 \mid d_1(x,y) \leq K d_2(x,y)$ $\forall x,y \in X$, allora $\tau_1 \subseteq \tau_2$

COROLLARIO: se $\exists K, h > 0$ con $d_1 \leq K d_2$ e $d_2 \leq h d_1 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2$
(cioè d_1 e d_2 topologicamente equivalenti)

Intorni

Def. un INTORNO di x_0 è un sottoinsieme $U \subseteq X$ tale che $\exists A \in \tau$ con $x_0 \in A \subseteq U$

L'insieme degli intorni di x_0 si indica con $I(x_0)$

Def. $f: X \to Y$ tra sp. topologici, $x_0 \in X$, f si dice continua in x_0 se $\forall V \in I(f(x_0))$ $\exists U \in I(x_0)$ t.c. $f(U) \subseteq V$

LEMMA: $A \subseteq X$ aperto $\iff$ A è intorno di ogni suo punto

TEOREMA $f: X \to Y$ è continua $\iff$ f è continua in x_0 $\forall x_0 \in X$

Osservazione: (i) $U \in I(x_0)$ e $U \subseteq V \Rightarrow V \in I(x_0)$

(ii) $U, V \in I(x_0) \Rightarrow U \cap V \in I(x_0)$

Chiusura e parte interna

Def. CHIUSURA DI B $\quad \overline{B} = \bigcap\limits_{\substack{C \text{ chiuso} \\ B \subseteq C}} C$

PARTE INTERNA di B $\quad \mathring{B} = \bigcup\limits_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq B}} A$

Osservazione: $X \setminus \text{int}(B) = \overline{X \setminus B}$

Def. (X, τ) sp. topologico. $B \subseteq X$

$x_0 \in X$ si dice PUNTO ADERENTE di B se $\forall$ intorno U di x_0 si ha $B \cap U \neq \emptyset$, si dice DI ACCUMULAZIONE per B se $\forall$ intorno U di x_0 $(U \cap B) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Proposizione $\overline{B} = \{x_0 \in X \mid x_0 \text{ è aderente a } B\}$

Def. $B \subseteq X$ si dice DENSO se $\overline{B} = X$ (equivalentemente $\text{int}(X \setminus B) = \emptyset$)

Def. Su X la TOPOLOGIA COFINITA è la topologia i cui chiusi sono X stesso e i sottoinsiemi finiti di X. La TOPOLOGIA CONUMERABILE è la topologia i cui chiusi sono X e i suoi sottoinsiemi al più numerabili.

Topologia generata, basi e prebasi

LEMMA: τ_j, $j \in J$, topologie su X. Allora $\tau = \bigcap\limits_{j \in J} \tau_j \subseteq P(X)$ è una topologia su X.

COROLLARIO: data una famiglia di topologie τ_j come nel lemma, esiste una topologia più fine tra tutte le topologie meno fini di tutte le τ_j (cioè $\bigcap \tau_j$)

COROLLARIO: data una famiglia $S = \{S_i \mid i \in I\} \subseteq P(X)$ esiste la topologia meno fine che contiene S.

Def. La TOPOLOGIA GENERATA da S è la topologia meno fine su X che contiene S.

Def. (X,τ) spazio topologico
Una BASE di τ è un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ t.c.
$\forall A \in \tau \ \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \mid A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$

LEMMA: $\Omega \subseteq (0,+\infty)$ un sottoinsieme t.c. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R \in \Omega \mid 0 < R < \varepsilon$, X sp. metrico e $Z \subseteq X$ un sottoinsieme denso, allora $\mathcal{B} = \{B(z,R) \mid z \in Z, R \in \Omega\}$ è una base della topologia di X.

Proposizione X insieme, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base di una qualche topologia su X se e solo se
(i) $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = X$
(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \mid B_1 \cap B_2 = \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A$

Def. X sp. topologico.
Una PREBASE $\mathcal{P}$ di τ è un sottoinsieme $\mathcal{P} \subseteq \tau \mid$
$\mathcal{B} = \{P_1 \cap \dots \cap P_k \mid k \in \mathbb{N}, P_i \in \mathcal{P}\}$ è una base di τ

Proposizione la topologia τ generata da $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ha $S \cup \{X\}$ come prebase (cioè gli elementi di τ sono unioni arbitrarie di intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$)

Proposizione $f: X \to Y$ tra spazi topologici
Allora TFAE
(i) f è continua
(ii) $f^{-1}(A)$ è aperto in X $\forall A \in \mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ è base di Y
(iii) $f^{-1}(A)$ è aperto in X $\forall A \in \mathcal{P}$, dove $\mathcal{P}$ è prebase di Y

Assiomi di numerabilità

Def. Un SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI di $x_0 \in X$ è un sottoinsieme $\Omega \subseteq I(x_0)$ tale che $\forall A \in I(x_0) \ \exists A' \in \Omega$ t.c. $A' \subseteq A$

Def. X sp. topologico è
1) I-NUMERABILE se ogni $x_0 \in X$ ammette un SFI al più numerabile
2) II-NUMERABILE se ammette una base al più numerabile
3) SEPARABILE se ammette un sottoinsieme denso al più numerabile

TEOREMA ① II - numerabile $\Rightarrow$ I - numerabile

② II - numerabile $\Rightarrow$ separabile

③ X metrizzabile: separabile $\Leftrightarrow$ II - numerabile

Esempio: retta di Sorgenfrey

$X = \mathbb{R}$ con la base $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a<b\} \subseteq P(\mathbb{R})$

la topologia τ di cui $\mathcal{B}$ è base è strettamente più fine della topologia euclidea, $(\mathbb{R},\tau)$ è separabile e non II - numerabile. (ed è anche normale) ↳ definito dopo

Successioni in spazi topologici

Def. Una SUCCESSIONE in uno sp. topologico X è una funzione $x: \mathbb{N} \to X$ e $x(n)$ si denota con x_n

Def. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X converge a $x \in X$ se $\forall U \in I(x)$, $x_n \in U$ definitivamente.

Def. La CHIUSURA PER SUCCESSIONI di Y è $\hat{Y} = \{x \in X \mid \exists \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ t.c. $y_n \to x\}$

TEOREMA $\forall Y \subseteq X$, si ha $\hat{Y} \subseteq \overline{Y}$ e se X è I-numerabile, vale l'uguaglianza

COROLLARIO: X I-numerabile : $Y \subseteq X$ chiuso $\Leftrightarrow Y = \hat{Y}$ "sequenziale"

Nella dimostrazione del teorema è utile il seguente LEMMA: se $x \in X$ ammette un SFI al più numerabile, allora ne ammette uno $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, costituito da intorni "inscatolati", cioè tali che $U_{i+1} \subseteq U_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Def. X si dice SEQUENZIALE se $Y \subseteq X$ è chiuso SSE $\hat{Y} = Y$

Def. X si dice DI FRECHÉT - URYSOHN se $\forall Y \subseteq X$ si ha $\hat{Y} = \overline{Y}$

Frechet-Urysohn $\Rightarrow$ sequenziale (⇍)

Proposizione $Y \subseteq X$, allora vale

$x \in \mathring{Y} \Rightarrow \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \to x$ si ha $x_n \in Y$ definitivamente. Se X è I-num. vale anche il viceversa.

Def. $f: X \to Y$ si dice SEQUENZIALMENTE CONTINUA o CONTINUA PER SUCCESSIONI se $x_n \to x$ in $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ in Y

Proposizione $f: X \to Y$ continua $\Rightarrow f$ sequenzialmente continua e vale il viceversa se X è I - numerabile.

Topologia di sottospazio

Def. (X,τ) sp. topologico e $Y \subseteq X$ sottoinsieme. La TOPOLOGIA DI SOTTOSPAZIO di Y è la topologia $\tau|_Y$ meno fine tra tutte quelle che rendono l'inclusione $i: Y \to X$ una funzione continua.

Proposizione $T|_Y$ coincide con $\{Y \cap A \mid A \subseteq X$ è aperto$\} \subseteq P(Y)$

Osservazione: $\mathcal{B}$ base di T su $X \Rightarrow \mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base della top. di sottospazio

Proposizione PROPRIETÀ UNIVERSALE DELLA TOP. DI SOTTOSPAZIO

X, Z spazi topologici e $Y \subseteq Z$ dotato della topologia di sottospazio

Se $i: Y \to Z$ inclusione, $f: X \to Y$ continua $\Leftrightarrow i \circ f : X \to Z$ lo è

Proposizione $f: X \to Z$ continua e $Y \subseteq X$ con la topologia di sottospazio, allora $f|_Y : Y \to Z$ è continua

Proposizione X sp. topologico, $Y \subseteq X$ sottospazio topologico

(i) X è II numerabile $\Rightarrow Y$ è II-numerabile

(ii) X è I-numerabile $\Rightarrow Y$ è I-numerabile

(iii) X separabile $\not\Rightarrow Y$ separabile

(iv) X metrizzabile $\Rightarrow Y$ metrizzabile e la topologia di sottospazio coincide con quella indotta dalla distanza ristretta.

(v) X metrizzabile $\wedge$ separabile $\Rightarrow Y$ separabile

Proposizione (i) $Y \subseteq X$ aperto in X e $A \subseteq Y$ aperto in $Y \Rightarrow A$ aperto in X

(ii) $Y \subseteq X$ chiuso in X e $C \subseteq Y$ chiuso in $Y \Rightarrow C$ chiuso in X

Def. $f: X \to Y$ tra sp. topologici si dice

- APERTA se manda aperti di X in aperti di Y
- CHIUSA se manda chiusi di X in chiusi di Y

non sono equivalenti

Def. Una funzione $f: X \to Y$ si dice IMMERSIONE TOPOLOGICA se f induce un omeomorfismo $X \to f(X)$, dove $f(X) \subseteq Y$ ha la topologia di sottospazio.

Osservazione: $f: X \to Y$ continua e biunivoca, allora

f^{-1} è continua $\Leftrightarrow f$ è aperta $\Leftrightarrow f$ è chiusa

Topologia prodotto

$X_i,\ i \in I$ spazi topologici

$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ proiezione sul j-esimo fattore

Def. La TOPOLOGIA PRODOTTO su $\prod_{i \in I} X_i$ è la topologia meno fine tra quelle che rendono tutte le proiezioni $\pi_j\ (\forall j \in I)$ continue.

Proposizione La topologia prodotto ha come prebase la famiglia

$\{\pi_j^{-1}(A) \mid j \in I,\ A \subseteq X_j$ aperto$\}$

COROLLARIO: Una base della topologia prodotto è
$$\mathcal{B} = \{ \pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k) \mid k \in \mathbb{N}, i_j \in I, A_j \subseteq X_{i_j} \text{ aperto} \}$$

Osservazione: se I è finito, $I = \{1, \dots, k\}$
una base della topologia prodotto è data da
$$\{ \underbrace{A_1 \times \dots \times A_k}_{= \pi_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(A_k)} \mid A_i \subseteq X_i \text{ è aperto} \}$$

Se $|I| = +\infty$, c'è un'altra topologia su $\prod_{i \in I} X_i$, in generale più fine della topologia prodotto, la BOX TOPOLOGY una cui base è
$$\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \text{ è aperto in } X_i \}$$

Proposizione: (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici
la topologia prodotto su $X \times Y$ coincide con la topologia indotta da una qualsiasi tra le seguenti distanze su $X \times Y$
$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y')$$
$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}$$
$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$$

COROLLARIO: se $n, m \in \mathbb{N}$, allora $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$

TEOREMA: "proprietà universale del prodotto"
X_i, $i \in I$ e Y spazi topologici
$f: Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ funzione
Allora f è continua $\iff$ $\pi_j \circ f : Y \to X_j$ è continua $\forall j \in I$

LEMMA: Se $\mathcal{B}$ è una base di X e $f: X \to Y$ è una funzione
allora f è aperta $\iff$ $f(B) \subseteq Y$ è aperto $\forall B \in \mathcal{B}$

Proposizione: le proiezioni di un prodotto $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ sono funzioni aperte

Def. Dati sp. topologici X_i, $i \in I$ e fissato $i_0 \in I$, esiste una immersione naturale di X_{i_0} in $\prod_{i \in I} X_i$: scelgo $\bar{x}_i \in X_i$ per tutti gli $i \in I$, $i \neq i_0$
↳ (in particolare suppongo $X_i \neq \emptyset$ $\forall i$)
$$j_{i_0} : X_{i_0} \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$$
$$x \longmapsto (x_i)_{i \in I}$$
dove $x_i = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{se } i \neq i_0 \\ x & \text{se } i = i_0 \end{cases}$

Proposizione: j_{i_0} è un'immersione topologica

Proposizione: se $J \subseteq I$ e fissato $\bar{x}_i \in X_i$ $\forall i \in I \setminus J$ la funzione

$$j: \prod_{i\in J} X_i \to \prod_{i\in I} X_i$$
$$(x_i)_{i\in J} \mapsto (y_i)_{i\in I}$$
dove $y_i = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{se } i\notin J \\ x_i & \text{se } i\in J \end{cases}$ è pure un'immersione topologica.

Topologia della convergenza puntuale

X sp. topologico, Y insieme

$F(Y,X) = \{f: Y\to X \text{ funzione}\}$ è in bigezione naturale con $X^Y = \prod_{y\in Y} X_y \qquad X_y = X \quad \forall y\in Y$

la topologia prodotto in questo caso si chiama "TOPOLOGIA DELLA CONVERGENZA PUNTUALE" perché vale la seguente

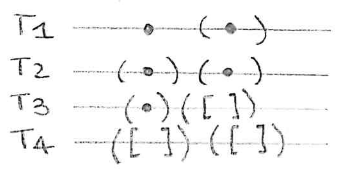
Proposizione: $f_n: Y\to X \quad \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $F(Y,X)$

$f_n \to \bar{f}$ in $F(Y,X) \iff \forall y\in Y \quad f_n(y)\to \bar{f}(y)$ in X.

Assiomi di separazione

Def. X sp. topologico. Si dice che

1. X è T_1 se $\forall x,y\in X$ con $x\neq y$ $\exists U\in I(x) \mid y\notin U$
2. X è T_2 (o di Hausdorff) se $\forall x,y\in X$ con $x\neq y$ $\exists U\in I(x),\ V\in I(y)$ t.c. $U\cap V=\emptyset$
3. X è T_3 se $\forall x\in X$ e $\forall C\subseteq X$ chiuso con $x\notin C$ $\exists$ aperti $U,V\subseteq X$ con $x\in U$, $C\subseteq V$ e $U\cap V=\emptyset$
4. X è T_4 se $\forall C,D\subseteq X$ chiusi t.c. $C\cap D=\emptyset$ $\exists$ aperti $U,V\subseteq X$ con $C\subseteq U$, $D\subseteq V$ e $U\cap V=\emptyset$
5. X è REGOLARE se è T_1 e T_3
6. X è NORMALE se è T_1 e T_4



Proposizione: X metrizzabile $\Rightarrow X$ è T_2

Proposizione: X è $T_2 \Rightarrow$ i limiti di successioni se esistono sono unici

Proposizione: X è $T_1 \iff \forall x\in X$, $\{x\}\subseteq X$ è un chiuso

$\iff$ la topologia di X è più fine della topologia cofinita

Def. X sp. topologico, la diagonale di $X\times X$ è $\Delta = \{(x,x) \mid x\in X\}$

Proposizione: Uno sp. topologico è $T_2 \iff \Delta$ è chiuso in $X\times X$

COROLLARI:
- $f: X\to Y$ continua e Y è T_2, allora il grafico di f $\Gamma_f = \{(x,f(x)) \mid x\in X\}\subseteq X\times Y$ è chiuso
- $f,g: X\to Y$ continue e Y è T_2, allora

$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ è chiuso

- $f: X \to X$ continua e X è T_2 allora

  $Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ è chiuso in X

TEOREMA Valgono le seguenti implicazioni

metrizzabile $\Rightarrow$ normale $\Rightarrow$ regolare $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

LEMMA DI URYSOHN: X normale, C_1 e C_2 chiusi disgiunti di X. Allora $\exists f: X \to [0,1]$ continua $\mid f(x) = 0$ $\forall x \in C_1$ e $f(x) = 1$ $\forall x \in C_2$

Proposizione: "T_1, T_2 e T_3 passano a sottospazi e prodotti" cioè, se X_1 e X_2 sono T_i $(i = 1, 2, 3)$ ogni sottospazio di X_1 è T_i e $X_1 \times X_2$ è T_i (vale analogamente per $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, J qualsiasi)

Per dimostrare che T_3 passa al prodotto è utile il seguente

LEMMA: (i) $B_i \subseteq X_i$, $i \in I$ X_i sp. topologici e $X = \prod_{i \in I} X_i$

Se B_i è chiuso in X_i $\forall i \in I$ allora $\prod_{i \in I} B_i$ è chiuso in X

(ii) X è $T_3 \iff$ ogni $x_0 \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni chiusi

T_4 non passa né a sottospazi né a prodotti: !!

Proposizione: sia X T_4 e $A \subseteq X$

(i) Se A è chiuso, A è T_4

(ii) Ci sono esempi di A non T_4

Ricoprimenti

Def. X sp. topologico. Un RICOPRIMENTO di X è una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di X t.c. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Si dice APERTO se ogni A_i è aperto, CHIUSO se ogni A_i è chiuso.

Def. Un ricoprimento si dice LOCALMENTE FINITO se
↳ $\{A_i\}_{i \in I}$ $\forall p \in X$ $\exists$ un intorno U di p tale che $\{i \in I \mid U \cap A_i \neq \emptyset\}$ è un insieme finito.

Def. Un ricoprimento $\{B_i\}_{i \in I}$ si dice FONDAMENTALE se $A \subseteq X$ è aperto $\iff A \cap B_i$ è aperto in B_i $\forall i \in I$

TEOREMA ogni ricoprimento aperto è fondamentale

LEMMA: $\{B_i\}_{i \in I}$ famiglia di sottoinsiemi di X localmente finita. Allora $\bigcup_{i \in I} \overline{B_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} B_i}$

COROLLARIO: Un' unione localmente finita di chiusi è chiusa

TEOREMA: $\{C_i\}_{i\in I}$ ricoprimento chiuso <u>localmente finito</u> è fondamentale.

TEOREMA: $\Omega = \{A_i\}_{i\in I}$ ricoprimento fondamentale di X
$f: X \to Y$ tra spazi topologici. Allora f è continua SSE $f|_{A_i}: A_i \to Y$ è continua $\forall i \in I$

Connessione

Def. X sp. topologico non vuoto si dice CONNESSO se vale una delle seguenti condizioni equivalenti

(i) Non esiste una partizione $X = A \cup B$, A e B aperti $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$

(ii) " " A e B chiusi
" " "

(iii) Se $A \subseteq X$ è aperto, chiuso e non vuoto allora $A = X$

TEOREMA $[0,1]$ con la topologia euclidea è connesso

Def. X si dice CONNESSO PER ARCHI se $\forall p,q \in X$ esiste un cammino (cioè una funzione continua) $\gamma: [0,1] \to X$ t.c. $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$

TEOREMA X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso

TEOREMA $f: X \to Y$ continua, $C \subseteq X$ allora:

(i) C connesso $\Rightarrow$ $f(C)$ connesso

(ii) C connesso per archi $\Rightarrow$ $f(C)$ connesso per archi

Def. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se $\forall p,q \in C$ il segmento $[p,q]$ di estremi p e q è contenuto in C, cioè $\forall t \in [0,1]$ $(1-t)p + tq \in C$

<u>Osservazione</u>: convesso $\Rightarrow$ connesso archi $\Rightarrow$ connesso

i convessi di $\mathbb{R}$ sono detti INTERVALLI

TEOREMA $A \subseteq \mathbb{R}$, allora sono fatti equivalenti: (rispetto alla top. euclidea)

(i) A intervallo (cioè convesso)

(ii) A connesso per archi

(iii) A connesso

Proposizione: X connesso, $f: X \to \mathbb{R}$ continua
Se $\exists x_0 \in X$, $x_1 \in X$ | $f(x_0) < 0$, $f(x_1) > 0$ allora $\exists \bar{x} \in X$ con $f(\bar{x}) = 0$

LEMMA: $Z \subseteq X$, $A \subseteq Z$. Se denotiamo con $\overline{A}^Z$ la chiusura di A in Z (come ssp. di Z) e con $\overline{A}$ la chiusura di A in X allora $\overline{A}^Z = \overline{A} \cap Z$

LEMMA: $A \subseteq X$, Z t.c. $A \subseteq Z \subseteq \overline{A}$
Se A è connesso, anche Z è connesso (per cui in particolare la chiusura di un connesso è connessa)

LEMMA: Siano X_i, $i \in I$ ssp. di uno spazio topologico X tali che $\exists\, x_0 \in X$ con $x_0 \in X_i \ \forall i \in I$ $\left(\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\right)$
(i) Se X_i è connesso $\forall i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} X_i$ è connesso
(ii) Se X_i è connesso per archi $\forall i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} X_i$ è connesso per archi *

Def. Grazie ai lemmi precedenti sono ben definite la componente connessa di $x_0 \in X$:

$$C(x_0) = \bigcup_{\substack{C \subseteq X \\ C \text{ connesso} \\ x_0 \in C}} C$$ → più grande ssp. connesso di X che contiene x_0

e la componente connessa per archi di $x_0 \in X$:

$$P(x_0) = \bigcup_{\substack{P \subseteq C \\ P \text{ connesso per archi} \\ x_0 \in P}} P$$ → più grande ssp. connesso per archi di X che contiene x_0

Vale sempre $P(x_0) \subseteq C(x_0)$

Proposizione: (i) le componenti connesse danno una partizione di X
(ii) le componenti connesse per archi danno una partizione di X
(iii) le componenti connesse sono chiuse

* per dimostrare questo punto è utile la seguente costruzione
$r_1 : [0,1] \to X$ e $r_2 : [0,1] \to X$ cammini | $r_1(0) = a$
$r_1(1) = b$, $r_2(0) = b$ $r_2(1) = c$
la GIUNZIONE DI CAMMINI:

$$r_1 * r_2 : [0,1] \to X$$
$$t \longmapsto \begin{cases} r_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ r_2(2t-1) & \text{se } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

è un cammino tra a e c

Def. Uno spazio X si dice LOCALMENTE CONNESSO (per archi) se ogni $x_0 \in X$ ammette un SFI connessi (per archi)

TEOREMA Se X è connesso e localmente connesso per archi allora X è connesso per archi

<u>Osservazione</u>: se X è localmente connesso per archi, allora

(i) le componenti connesse per archi sono aperte e chiuse

(ii) le componenti connesse coincidono con le componenti connesse per archi

(iii) se $U \subseteq X$ è aperto, allora anche U è localmente connesso per archi

(iv) se $U \subseteq X$ è un aperto connesso, allora è anche connesso per archi

<u>Osservazione</u>: se $U \subseteq X$ è un sottoinsieme aperto e chiuso, allora è unione di componenti connesse di X

Il funtore π_0

il numero di componenti connesse (e connesse per archi) è un invariante per omeomorfismo.

Def. X sp. topologico. Si denota con $\pi_0(X)$ l'insieme delle componenti connesse per archi di X

Data una funzione continua $f: X \to Y$ questa induce una una funzione $\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ tale che:

- $\pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$
- $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$

$\mapsto$ π_0 è un funtore covariante

<u>Compattezza</u>

Def. Uno spazio topologico X si dice COMPATTO se da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un sottoricoprimento finito

Def. Se $\{Y_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, si dice che ha la PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE FINITA se $\forall J \subseteq I$ finito si ha $\bigcap_{i\in J} Y_i \neq \emptyset$

Proposizione: uno spazio X è compatto SSE ogni famiglia di chiusi $\{Y_i\}_{i\in I}$ con la prop. dell'int. finita è tale che $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$.

TEOREMA $[0,1]$ con la topologia euclidea è uno spazio compatto

TEOREMA $f: X \to Y$ continua e $C \subseteq X$ sottospazio compatto, allora $f(C) \subseteq Y$ è compatto

Proposizione: se X è compatto e $Y \subseteq X$ è chiuso, allora Y è compatto. "chiuso in un compatto è compatto"

Proposizione: se X è T_2 e $Y \subseteq X$ è un sottospazio compatto, allora Y è chiuso in X

Proposizione: se X è compatto e T_2 allora è regolare ($T_1 + T_3$)

Proposizione: se X è compatto e T_2 allora è normale ($T_1 + T_4$)

Proposizione: $f: X \to Y$ continua.
Se X è compatto e Y è T_2, allora f è chiusa.
in particolare, se f è anche biunivoca, segue che è un omeomorfismo

TEOREMA Se X e Y sono spazi compatti, allora $X \times Y$ è compatto
(in generale se $\{X_i\}_{i \in I}$ sono compatti, allora $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto: teorema di Tychonoff).

__LEMMA__ Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia di X e da qualsiasi ricoprimento di X costituito da aperti di $\mathcal{B}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito, allora X è compatto. (vale anche con le prebasi: teorema di Alexander)

TEOREMA (Heine-Borel) I compatti di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente i chiusi e limitati

TEOREMA (Weierstraß) $f: X \to \mathbb{R}$ continua e X compatto $\Rightarrow f$ ammette massimo e minimo

__Corollario__: tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono topologicamente equivalenti

Compattificazione di Alexandrov

Dato X sp. topologico, si costruisce $\hat{X}$ la sua compattificazione di Alexandrov nel seguente modo

$\hat{X} = X \cup \{\infty\} \qquad \infty \notin X$

$A \subseteq \hat{X}$ è un aperto SSE

- $\infty \notin A$ e A è un aperto di X
- $\infty \in A$ e $X \setminus i^{-1}(A)$ è un chiuso compatto di X

dove $i: X \hookrightarrow \hat{X}$ è l'inclusione

Proposizione:
Questa è una topologia su $\hat{X}$ e $\hat{X}$ è compatto

Osservazione: X è T_2 e localmente compatto $\Longleftrightarrow$ $\hat{X}$ è T_2

Proposizione: se Y è uno spazio compatto e T_2 e $p \in Y$ è fissato, $X \cong Y \setminus \{p\}$, allora $Y \cong \hat{X}$

Compattezza per successioni

Def. Uno sp. topologico X è COMPATTO PER SUCCESSIONI (o sequenzialmente compatto) se da ogni successione in X si può estrarre una sottosuccessione convergente.

TEOREMA Se X è metrizzabile, sono equivalenti:

(i) X compatto

(ii) X compatto per successioni

(iii) X completo e totalmente limitato

TEOREMA Se X è I-numerabile e compatto, allora è compatto per successioni.

TEOREMA Se X è II-numerabile, allora X è compatto SSE è compatto per successioni

LEMMA Se X è II-numerabile, allora da ogni ricoprimento di X si può estrarre un sottoricoprimento al più numerabile (cioè X è "di LINDELÖF")

Numero di Lebesgue

Def. Un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di uno spazio metrico (X, d) ammette $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ come NUMERO DI LEBESGUE se $\forall x \in X$, $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$ per qualche $i \in I$

TEOREMA X metrico compatto e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento, allora $\exists$ un numero di Lebesgue per $\mathcal{U}$

Def. $f : (X, d) \to (X', d')$ è uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y \in X$

TEOREMA (Heine-Cantor) Se $f : (X, d) \to (X', d')$ è continua e X è compatto, allora f è uniformemente continua.

~ Secondo semestre ~

Topologia quoziente

Def. X sp. topologico e $\sim$ rel. di equivalenza su X.
La TOPOLOGIA quoziente su $X/\sim$ è la topologia più fine che rende la proiezione $\pi : X \to X/\sim$ continua.

Proposizione: $A \subseteq X/\sim$ è aperto (rispetto alla topologia quoziente) se e solo se $\pi^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto in X (vale la prop. analoga per i chiusi).

TEOREMA (prop. universale della topologia quoziente)
X, Y sp. topologici, $\sim$ relazione di equivalenza su X e $f : X \to Y$ "compatibile" con $\sim$ (cioè $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$). Sia $\bar{f} : X/\sim \to Y$ indotta da f, cioè $\bar{f}([x]) = f(x)$ (è ben def. perché f è compatibile). Cioè la funt. che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Allora f è continua $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ è continua

Def. Uno sp. topologico X si dice COMPATTAMENTE GENERATO se l'unione dei suoi compatti è un ricoprimento fondamentale

Def. Uno sp. topologico X si dice LOCALMENTE COMPATTO se ogni punto ha un SFI compatti

OSS: localmente compatto $\Rightarrow$ compattamente generato

TEOREMA Sia $f : X \to Y$ continua, con Y compattamente generato e T_2, allora se f è PROPRIA (cioè $f^{-1}(K)$ compatto in X $\forall K \subseteq Y$ compatto) è anche chiusa.

Def. COLLASSO DI UN SOTTOINSIEME A UN PUNTO
X sp. topologico $A \subseteq X$. Definisco $\sim$ come la rel. di equivalenza t.c. $x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \vee \{x, x'\} \subseteq A$
In tal caso $X/\sim$ si indica con X/A

Ricordiamo che $D^n = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1 \}$
$S^{n-1} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1 \}$

Proposizione: $D^n / S^{n-1} \cong S^n$

TEOREMA Il quoziente di uno sp. topologico compatto / connesso per archi / connesso è rispettivamente compatto / connesso per archi / connesso

Def. $f : X \to Y$ si dice IDENTIFICAZIONE se:

1) f è surgettiva
2) $A \subseteq Y$ è aperto $\iff$ $f^{-1}(A)$ è aperto in X

TEOREMA Sia $f: X \to Y$ continua e $\sim$ rel. di equivalenza su X data da $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$
Allora la mappa indotta $\bar{f}: X/_\sim \to Y$ è un omeomorfismo se e solo se f è un'identificazione

Proposizione: $f: X \to Y$ continua e suriettiva. Allora
(i) f aperta $\Rightarrow$ f identificazione
(ii) f chiusa $\Rightarrow$ f identificazione

Osservazione: un'identificazione non è necessariamente aperta o chiusa

Def. Sia $f: X \to Y$. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice SATURO (o meglio f-saturo) se $f^{-1}(f(A)) = A$

Proposizione: $B \subseteq X/_\sim$ aperto (rispettivamente chiuso) $\iff$ $B = \pi(B')$ con B' aperto saturo (rispettivamente chiuso saturo)

Osservazione (i) $f: X \to Y$, $\forall B \subseteq Y$, $f^{-1}(B)$ è saturo
(ii) $\pi: X \to X/_\sim$ è aperta $\iff$ il saturato di ogni aperto di X è aperto

Azioni di gruppo su uno spazio topologico

G gruppo, X sp. topologico. L'azione $G \circlearrowleft X$ induce una rel. di equivalenza su X: $x \sim y \iff \exists g \in G \mid g \cdot x = y$

TEOREMA $G \circlearrowleft X$. La proiezione $\pi: X \to X/_G$ è una mappa aperta, inoltre, se G è finito, è anche chiusa

Def. L'azione si dice PROPRIAMENTE DISCONTINUA se $\forall x \in X$ $\exists U \in I(x)$ t.c. $g \cdot U \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq 1_G$

Def. L'azione si dice PROPRIA se $\forall x, y \in X$ $\exists$ intorni $U \in I(x)$ e $V \in I(y)$ | $\{g \in G \mid g \cdot U \cap V \neq \emptyset\}$ sia finito

TEOREMA $G \circlearrowleft X$. Se X è uno spazio T_2 e l'azione è propria allora $X/_G$ è T_2

Def. $G \circlearrowleft X$. Un DOMINIO FONDAMENTALE per l'azione è un sottoinsieme $D \subseteq X$ t.c.
1) D è chiuso
2) $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$
3) $\{g \cdot D, g \in G\}$ è una fam. localmente finita in X

4) $\pi|_{\mathring{D}} : \mathring{D} \to X/G$ è iniettiva

TEOREMA se $G \circlearrowleft X$ è un'azione che ammette un dominio fondamentale $D \subseteq X$, allora:

(i) L'azione è propria

(ii) Se X è T_2 anche X/G lo è

(iii) $X/G \cong D/_{\sim'}$ dove $\sim'$ è la restrizione di $\sim$ a D $(\forall x, y \in D \quad x \sim' y \iff \exists g \in G \mid g \cdot x = y)$

Bouquet di spazi topologici

Def. Siano (X,τ) e (Y, τ') spazi topologici. L'unione disgiunta (topologica) $X \sqcup Y$ è l'insieme $X \sqcup Y$ dotato della topologia $\overline{\tau}$ t.c. $A \in \overline{\tau} \iff A \cap X \in \tau$ e $A \cap Y \in \tau'$

Proposizione: (i) X e Y sono aperti di $X \sqcup Y$

(ii) le inclusioni $X \overset{i}{\hookrightarrow} X \sqcup Y$, $Y \overset{j}{\hookrightarrow} X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche

(iii) Se X e Y sono non vuoti $X \sqcup Y$ è sconnesso

Def. $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ sp. topologici, allora il bouquet di X e Y con punto base (x_0, y_0) è $(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$

Proposizione: (i) Le mappe $i : X \to X \vee Y$, $i(x) = [x]$; $j : Y \to X \vee Y$, $j(y) = [y]$ sono immersioni topologiche

(ii) Se X e Y sono T_1, allora i e j sono mappe chiuse (in particolare $i(X)$ e $j(Y)$ sono chiusi in $X \vee Y$)

(iii) Se X e Y sono T_2 allora $X \vee Y$ è T_2

Spazi proiettivi con la topologia quoziente

Ricordiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} /_{\sim}$ $\quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid v = \lambda w$

Allora dotando $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ della topologia euclidea si ha $\mathbb{R}^* \circlearrowleft \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ $\quad \lambda \cdot v \mapsto \lambda v$ $\quad \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$

$\mathbb{C}^* \circlearrowleft \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ $\quad \lambda \cdot v \mapsto \lambda v$ $\quad \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$

Caso reale

TEOREMA $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n / \pm Id$

Corollario: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso per archi, compatto e T_2 $\forall n \in \mathbb{N}$

Proposizione: l'azione di $\{\pm Id\}$ su S^n ammette come dominio fondamentale $D = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \geq 0\}$ (emisfero nord della sfera)

TEOREMA Sia $D^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ il disco chiuso in $\mathbb{R}^n$ e sia $\sim'$ la relazione su D^n data da $v \sim' w \iff$

$\Leftrightarrow$ $v = w$ oppure $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v = -w$

Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{D}^n/_{\sim'}$

Reminder: CARTE AFFINI

$j_i : \mathbb{K}^n \to U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ $\quad U_i = \{x_i \neq 0\}$ $\quad H_i = \{x_i = 0\}$

$(x_1 \cdots x_n) \mapsto [x_1 \cdots \underset{i}{1} \cdots x_n]$

$j_i^{-1} : U_i \to \mathbb{K}^n$

$[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$

TEOREMA Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora

(i) U_i è aperto e H_i è chiuso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

(ii) $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

(iii) $j_i : \mathbb{K}^n \to U_i$ è un omeomorfismo

Il caso complesso

$S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\}$

↳ norma indotta dal prodotto hermitiano standard

Dato $v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$

$v \sim \frac{v}{\|v\|} \in S^{2n+1} \Rightarrow \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si restringe a una mappa continua e suriettiva $\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Corollario: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è compatto e connesso per archi

Proposizione: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è omeomorfo a $S^{2n+1}/_{S^1}$ con $S^1 \circlearrowright S^{2n+1}$ tramite $\lambda \cdot v \mapsto \lambda v$ ed è T_2

Proposizione $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$