

Jupiter Icy moons Explorer

Seminario di determinazione orbitale

Giampaolo Mele

Università di Pisa

19 Novembre 2012

Descrizione
divulgativa della
missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e
manovre gravity
assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali
della missione

Campo
gravitazionale

Espansione in armoniche
sferiche

Richiamo sul problema di
determinazione orbitale

Obbiettivi della
missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di
risonanza

- Descrizione divulgativa della missione
- Itinerario e manovre gravity assist
- Campo gravitazionale:
 - Espansione in armoniche sferiche
 - Richiamo sul problema di determinazione orbitale
- Obbiettivi della missione

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Domanda

Perchè studiare Giove e le sue lune?

- Giove e le sue lune sono una miniatura del sistema solare
- Ganimede, Europa e Callisto sono costituiti da strati di ghiaccio e oceani interni (possibile vita?)

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

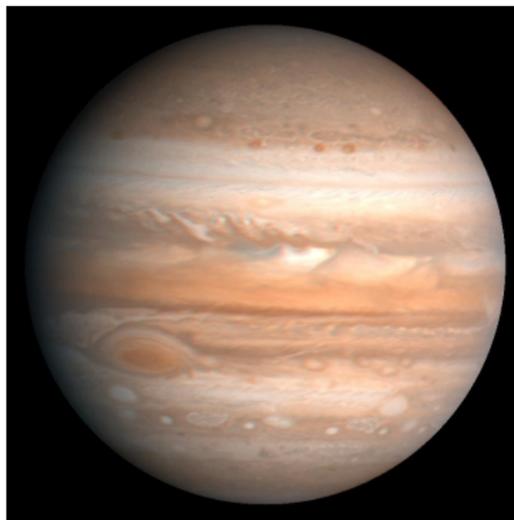
Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza



	DIAM. (km)	MASSA (kg)
GIOVE	142984	1.8986×10^{27}

	DIAM. (km)	MASSA (kg)	RAGGIO ORB. (km)	PERIODO ORB. (giorni)
IO	3643	8.9×10^{22}	421,700	1.77
EUROPA	3122	4.8×10^{22}	671,034	3.55
GANIMEDE	5262	14.8×10^{22}	1,070,412	7.15
CALLISTO	5262	10.8×10^{22}	1,882,709	16.69

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

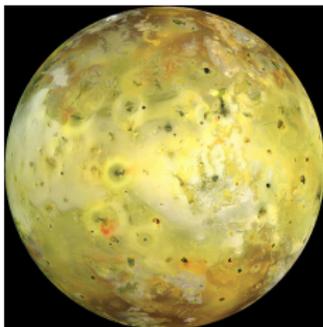
Figura: Le lune di Giove



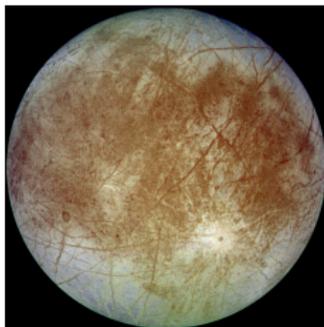
(a) Ganimede



(b) Callisto



(c) Io



(d) Europa

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Le manovre gravity assist sono fondamentali per i viaggi interplanetari, sono usate per cambiare la velocità della sonda sia in modulo che in direzione, in particolare le si effettuano per

- Aumentare la velocità della sonda
- Diminuire la velocità della sonda
- Cambiare l'inclinazione dell'orbita
- Modificare l'orbita

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Sfera di Hill

Dato il problema dei tre corpi ristretto dove ci sono due corpi (primario e secondario) di masse non trascurabili M_1 ed M_2 con $M_2 < M_1$ ed un corpo di massa trascurabile $m \ll M_2$, si definisce sfera di Hill la regione di spazio in cui la forza gravitazionale che esercita il secondario è maggiore di quella del primario.

Esempi:

- Sole-Terra-luna
- Sole-Terra-satelliti artificiali
- Sole-Terra-sonda
- Sole-Venere-sonda
- Giove-Ganimede-sonda
- Giove-Callisto-sonda

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Approssimativamente vale

Raggio di Hill

$$R_H = a \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{1/3}$$

Dove a è il semiasse maggiore (il secondario orbita attorno al primario)

Osservazione

Quando la sonda è nella sfera di influenza del secondario si è nel caso del problema dei due corpi

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Teorema

Una sonda che entra nella sfera di influenza del secondario con una velocità \mathbf{v}_i ne esce con una velocità \mathbf{v}_f e la sua traiettoria sarà stata deflessa di un angolo β secondo le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \beta &= 2 \arccos(-1/\epsilon) - \pi \\ v_f^2 &= v_i^2 + 2V \{ V(1 - \cos \beta) + v_i [\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha] \} \end{cases}$$

Dove ϵ è l'eccentricità dell'orbita della sonda attorno al pianeta (calcolabile a partire dalle altre quantità note usando Keplero), V è il valore assoluto della velocità del pianeta (supposta costante) e α è l'angolo tra \mathbf{V} e \mathbf{v}_i .

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Sono state individuate due *finestre di lancio*: la missione inizierà nel 2022 oppure nel 2023 e durerà 11 anni in entrambi i casi.

E' possibile dividere la missione in tre fasi

- Trasferimento interplanetario
- Tour di Giove
- Tour di Ganimede

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

	Durata	Dettagli
Trasferimento interplanetario	7.6 anni	gravity assist: Terra-Venere-Terra-Terra
Tour di Giove	31,8 mesi	Inserimento nell'orbita Giovecentrica. Gravity assist : <ul style="list-style-type: none">· Callisto (diminuzione velocità)· Europa· Callisto (inclinare l'orbita (29°) e studiare Giove da alte latitudini)· Callisto (diminuzione velocità)
Tour di Ganimede	9.4 mesi	Inserimento nell'orbita Ganimede-centrica. <ul style="list-style-type: none">· Studio di Ganimede con diverse orbite a diverse quote, fine della missione con schianto della sonda su Ganimede

Durante i gravity assist con Callisto per inclinare l'orbita la sonda sarà 1-1 risonante con Callisto e quindi passerà approssimativamente sugli stessi punti.

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Campo gravitazionale come funzione armonica

Teorema

Sia W un insieme limitato con bordo C^1 a tratti e che contiene nella parte interna il corpo esteso, allora per $\mathbf{x} \notin W$ vale (Equazione di Laplace)

$$\Delta U(\mathbf{x}) = 0$$

Teorema

Cambiando coordinate (coordinate sferiche) e utilizzando il metodo di separazione delle variabili, si trova che

$$U = \frac{GM}{r} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_{l,m}(\sin \theta) \frac{R_{\oplus}}{r^l} [C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)] \right\}$$

I coefficienti C_{lm} e S_{lm} sono detti *coefficienti armonici* di grado l e ordine m

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

L'equazione del moto della sonda è la seguente

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t, \boldsymbol{\mu})$$

- $\mathbf{y}(t)$ contiene le coordinate della sonda (posizione e velocità),
- \mathbf{y}_0 contiene la posizione e la velocità iniziale,
- $\boldsymbol{\mu}$ contiene i parametri dinamici (in questo caso contiene i coefficienti armonici).

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Predizioni

Dati ν i *parametri cinematici* (ad esempio le coordinate delle eventuali stazioni terrestri che effettuano le misure) la *funzione osservazione* è una funzione $R(\mathbf{y}, t, \nu)$, la *funzione predizione* è la composizione della funzione e della soluzione generale, ovvero

$$r(t) := R(\mathbf{y}(t), t, \nu)$$

Residui

Si supponga di aver fatto m osservazioni r_1, \dots, r_m ai tempi t_1, \dots, t_m , allora il residuo al tempo t_i è

$$\xi_i := r_i - r(t_i)$$

Il *vettore dei residui* è $\boldsymbol{\xi} := (\xi_i)_{i=1}^m$.

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Descrizione
divulgativa della
missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e
manovre gravity
assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali
della missione

Campo
gravitazionale

Espansione in armoniche
sferiche

Richiamo sul problema di
determinazione orbitale

Obiettivi della
missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di
risonanza

Problema ai minimi quadrati

Funzione obiettivo

Si definisce funzione obiettivo come

$$Q(\xi) = \frac{1}{m} \xi \cdot \xi$$

Problema ai minimi quadrati

Risolvere il problema ai minimi quadrati vuol dire scegliere i parametri dinamici in modo tale da minimizzare la funzione obiettivo. Il p.m.q può essere lineare oppure non lineare.

Incertezza nella determinazione dei parametri dinamici

Matrice di disegno, normale e di covarianza

Si definisce la matrice di disegno come

$$B = (b_{ij}) = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \mu_j} \right)$$

mentre la matrice normale è data da

$$C = B^T B$$

Se la matrice normale C è invertibile, la sua inversa si denota con Γ ed è detta matrice di covarianza.

L'elemento $\gamma_{i,i}$ della matrice di covarianza determina con quale incertezza è stato determinato il valore di μ_i

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Deficienza di rango approssimata

- Se la matrice normale non è invertibile e il suo ker ha dimensione d allora si parla di *deficienza di rango* di ordine d
- Se la matrice normale è invertibile ma malcondizionata, allora la sua inversa avrà elementi molto grandi e pertanto l'incertezza sarà grande. In questo caso si parla di *deficienza di rango approssimata*.

Esempio

- Se ci sono d osservazioni della sonda che coincidono (ad esempio la sonda passa d volte per gli stessi punti) allora si avrà una deficienza di rango di ordine d .
- Se ci sono d osservazioni "molto vicine" allora si avrà una deficienza di rango approssimata.

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Durante il tour si dovranno effettuare le seguenti manovre

- 2 gravity con Europa;
- 20 gravity assist con Callisto (12 per cambiare l'inclinazione dell'orbita);
- 282 giorni in orbita attorno a Ganimede con orbite circolari, ellittiche e a diverse quote.

Obiettivi

Tra gli obiettivi ci sono

- Determinare le armoniche sferiche per Ganimede di grado e ordine almeno 10;
- Determinare le armoniche sferiche per Callisto di grado 2 e 3;
- Determinare $C_{2,2}$ e J_2 per Europa.

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist
Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche
Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist
Callisto e problemi di risonanza

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Studio di Callisto

- L'obiettivo della missione è determinare solo pochi coefficienti armonici di Callisto nonostante si facciano 20 gravity assist
- 12 gravity assist sono eseguiti per inclinare l'orbita (studio di Giove da alte latitudini)
- durante questi 12 gravity assist la sonda sarà in risonanza con Callisto
- ci sarà una deficienza di rango approssimata

Incertezza nella determinazione del campo gravitazionale di Callisto

JUICE

Giampaolo Mele

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

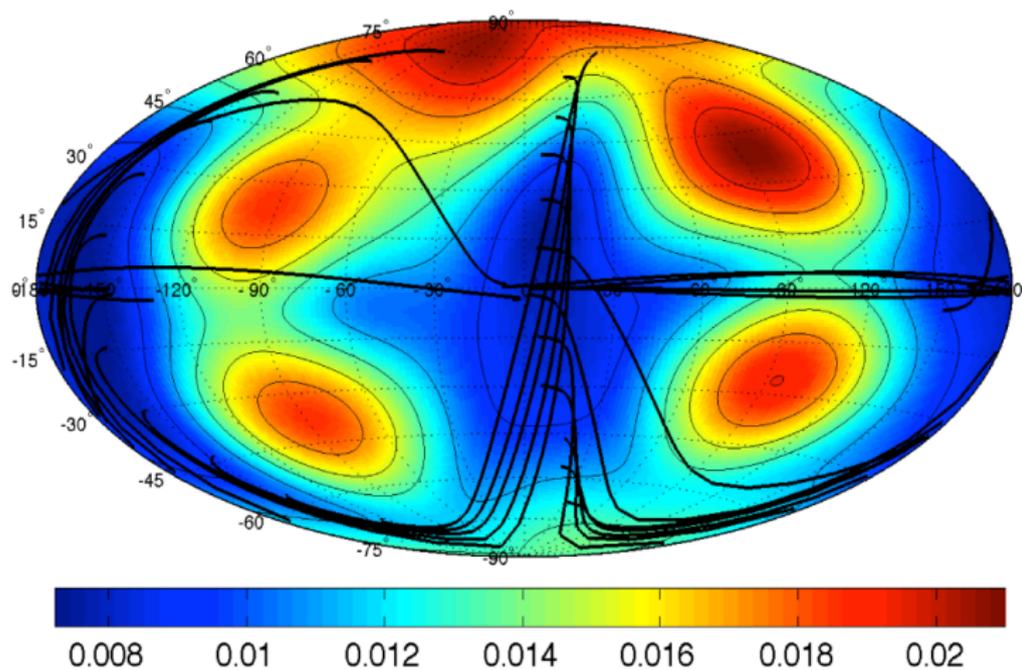
Manovre gravity assist
Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche
Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist
Callisto e problemi di risonanza



Incertezza con cui verrà calcolato il campo gravitazionale di Callisto (la scala è in mGal), la linea nera mostra la traccia a terra della sonda su Callisto

Gravity assist con Callisto

Quota di orbitazione e coefficienti armonici

Per determinare i coefficienti armonici di grado l la sonda deve orbitare ad una quota minore o uguale a

$$h = \frac{\pi R}{l}$$

L'obiettivo è calcolare:

- gli istanti t_1 e t_2 tali che $r(t) \leq 3R$ con $t \in [t_1, t_2]$,
- la lunghezza della traccia a terra durante $[t_1, t_2]$.

Osservazione

Se $r(t) \leq 3R$ allora si è nella sfera di influenza di Callisto, quindi si approssima il problema con il modello *due corpi*, in questo caso si supporrà Callisto fermo e la sonda in moto (iperbolico).

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Moto della sonda

Si consideri il riferimento centrato in Callisto, allora vale la seguente

$$\ddot{r} = \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}.$$

Noti $r(0)$, $\dot{r}(0)$ e α l'angolo tra posizione e velocità è possibile risolvere (numericamente) l'equazione.

Si risolve l'equazione in $[0, T]$ con T molto grande e si determinano gli istanti t_1 e t_2 tali che $r(t) \leq 3R$

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

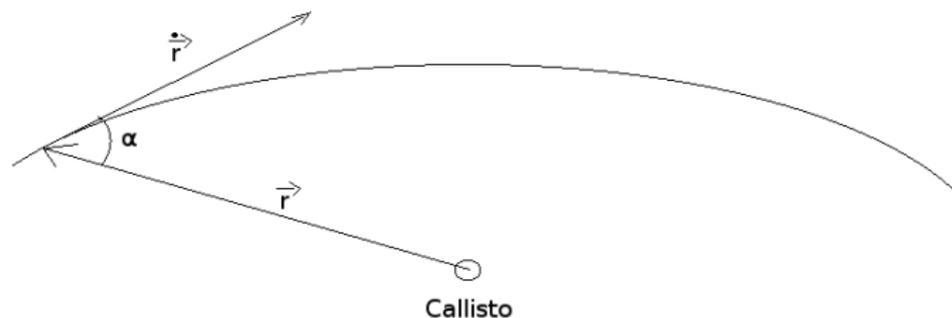
Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Approssimazioni

Per ogni gravity assist, gli unici dati disponibili sono V_{Inf} e r_{min} , pertanto si è scelto di fare le seguenti approssimazioni

- $r(0) = R_{\text{Hill}}$,
- $\dot{r}(0) = V_{\text{Inf}} \cos(\alpha)$,
- da r_{min} con una tecnica di *shooting* si determina α .



Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

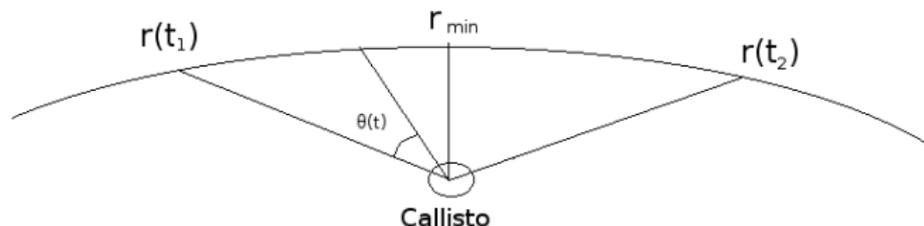
Calcolo della lunghezza della traccia a terra

Si consideri il riferimento centrato in Callisto, allora vale la seguente

$$\dot{\theta} = \frac{J}{r^2}.$$

Scegliendo $\theta(t_1) = 0$, si risolve (numericamente) in $[t_1, t_2]$, allora $R\theta(t_2)$ è la lunghezza della traccia a terra.

NB: $r(t)$ in $[t_1, t_2]$ è nota.



Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza

Seguono i risultati di una semplice sperimentazione, le equazioni sono state risolte con Eulero.

Da C13 a C24 ci sono i gravity assist eseguiti per inclinare l'orbita

Fase	Δv	r_{\min}	V_{Inf}	α	Δt	traccia	% della circonf.
C6	1,026	1107	4,8	0.0191	46m 31s	7735.7	51.079
C7	1,048	1725	4,9	0.0276	45m 27s	6966.8	46.003
C8	1,048	743	4,9	0.0138	45m 27s	8324.3	54.966
C11	1,078	837	5,3	0.0152	42m 31s	7951.9	52.507
C13	1,078	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C14	1,081	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C15	1,081	367	4,2	0.0091	50m 52s	9823	64.862
C16	1,082	713	4,2	0.0144	51m 46s	8695.8	57.419
C17	1,082	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C18	1,085	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C19	1,085	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C20	1,088	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C21	1,090	1305	4,2	0.0229	52m 17s	7651.2	50.522
C22	1,091	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C23	1,091	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C24	1,091	589	4,2	0.0125	51m 30s	9030.2	59.628
C26	1,091	382	2,2	0.0156	1h 19m 51s	11354	74.970
C27	1,091	1704	2,2	0.0275	1h 24m 18s	9464.6	62.496
C28	1,091	528	2,2	0.0187	1h 21m 09s	10787	71.23
C29	1,091	4936	2,3	0.0854	1h 8m 18s	4425.1	29.22

Le distanze sono in chilometri, i tempi in secondi e gli angoli in radianti

Descrizione
divulgativa della
missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e
manovre gravity
assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali
della missione

Campo
gravitazionale

Espansione in armoniche
sferiche

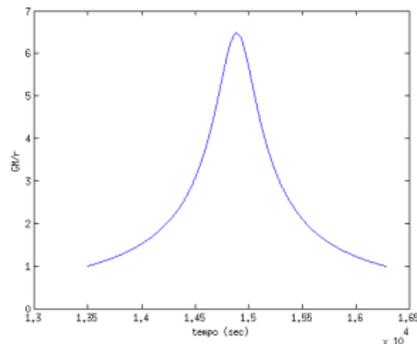
Richiamo sul problema di
determinazione orbitale

Obbiettivi della
missione

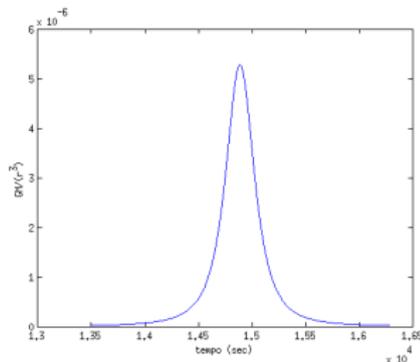
Tour e gravity assist

Callisto e problemi di
risonanza

Figura: Andamento di GM/r e di GM/r^3



(a) GM/r



(b) GM/r^3

Descrizione
divulgativa della
missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e
manovre gravity
assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali
della missione

Campo
gravitazionale

Espansione in armoniche
sferiche

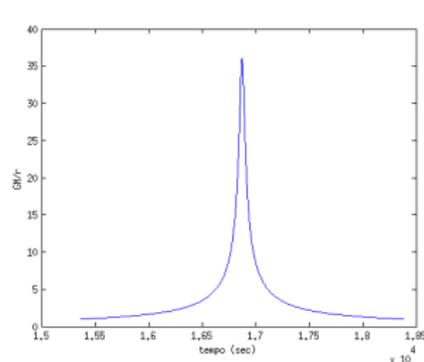
Richiamo sul problema di
determinazione orbitale

Obbiettivi della
missione

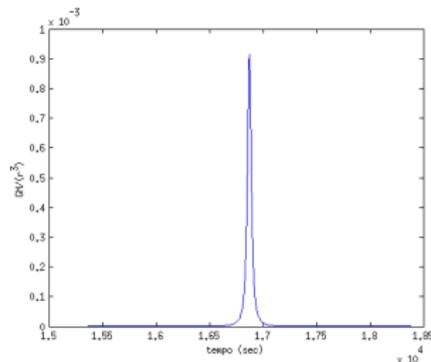
Tour e gravity assist

Callisto e problemi di
risonanza

Figura: Andamento di GM/r e di GM/r^3



(a) GM/r



(b) GM/r^3

Descrizione
divulgativa della
missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e
manovre gravity
assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali
della missione

Campo
gravitazionale

Espansione in armoniche
sferiche

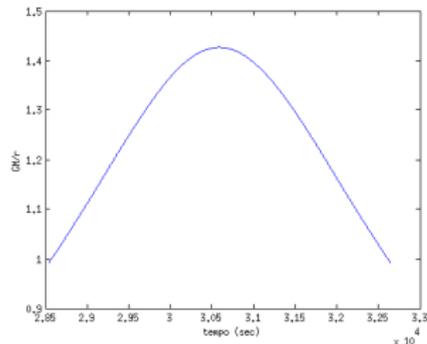
Richiamo sul problema di
determinazione orbitale

Obbiettivi della
missione

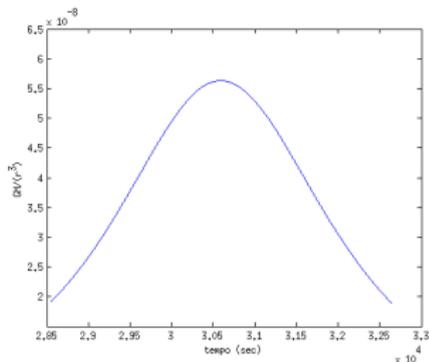
Tour e gravity assist

Callisto e problemi di
risonanza

Figura: Andamento di GM/r e di GM/r^3



(a) GM/r



(b) GM/r^3

Problema

Non tutti i gravity assist sono utili per la determinazione dei coefficienti armonici di grado 2, lo sono solo quelli a bassa quota, ovvero quelli in cui c'è risonanza con Callisto.

Soluzione

Sarebbe quindi opportuno ridefinire la traiettoria per eliminare questo problema e ottenere prestazioni migliori.

Descrizione divulgativa della missione

Sistema Giove-Lune

Itinerario e manovre gravity assist

Manovre gravity assist

Itinerario e fasi principali della missione

Campo gravitazionale

Espansione in armoniche sferiche

Richiamo sul problema di determinazione orbitale

Obbiettivi della missione

Tour e gravity assist

Callisto e problemi di risonanza