# Come dimostrare
# che non puoi dimostrare
# di non poter dimostrare tutto
# (a meno che tu non possa dimostrare davvero tutto)

Rosario Mennuni

Università degli Studi di Milano

Settimana Matematica
Università di Pisa
13 febbraio 2025

# In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.

# In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.

Perché esistono?

Cosa dicono, e come si dimostrano?

Epilogo

# In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.

Perché esistono?
Cosa dicono, e come si dimostrano?
Epilogo

Disclaimer:

- È tutto un po' romanzato.

# In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.



Disclaimer:

- È tutto un po' romanzato.
- Molti dettagli verranno nascosti sotto il tappeto.

# In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.

Perché esistono?
Cosa dicono, e come si dimostrano?
Epilogo

Disclaimer:

- È tutto un po' romanzato.
- Molti dettagli verranno nascosti sotto il tappeto.
- Useremo un linguaggio più moderno di quello disponibile all'epoca.

# In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.

Perché esistono?
Cosa dicono, e come si dimostrano?
Epilogo

Disclaimer:

- È tutto un po' romanzato.
- Molti dettagli verranno nascosti sotto il tappeto.
- Useremo un linguaggio più moderno di quello disponibile all'epoca.
- Vedremo versioni "moderne" dovute al lavoro non solo di Gödel

## In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.

Perché esistono?
Cosa dicono, e come si dimostrano?
Epilogo

Disclaimer:

- È tutto un po' romanzato.
- Molti dettagli verranno nascosti sotto il tappeto.
- Useremo un linguaggio più moderno di quello disponibile all'epoca.
- Vedremo versioni "moderne" dovute al lavoro non solo di Gödel: altri nomi sono Rosser, Robinson, Tarski, e mi fermo ma ci sarebbe da citare tanta altra gente.

## In questo talk

Parleremo di: i Teoremi di Incompletezza di Gödel.

Perché esistono?
Cosa dicono, e come si dimostrano?
Epilogo

Disclaimer:

- È tutto un po' romanzato.
- Molti dettagli verranno nascosti sotto il tappeto.
- Useremo un linguaggio più moderno di quello disponibile all'epoca.
- Vedremo versioni "moderne" dovute al lavoro non solo di Gödel: altri nomi sono Rosser, Robinson, Tarski, e mi fermo ma ci sarebbe da citare tanta altra gente.

**Interrompetemi e fate domande!**

# Matematica sempre più astratta

- $2 + 2 = 4$

# Matematica sempre più astratta

- $2 + 2 = 4$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

# Matematica sempre più astratta

- $2 + 2 = 4$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\int_0^\infty \sin(x)e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$

# Matematica sempre più astratta

- $2 + 2 = 4$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\int_0^\infty \sin(x) e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}$
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ (vedi lezione seguente)

# Matematica sempre più astratta

- $2 + 2 = 4$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\int_0^\infty \sin(x)e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ (vedi lezione seguente)
- Di quali di questi enunciati ci si può fidare?

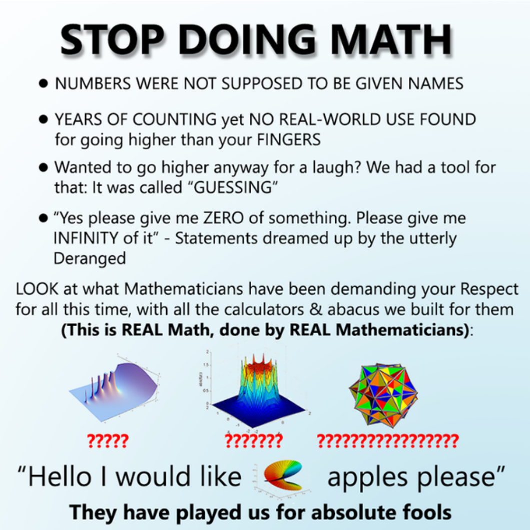
# Matematica sempre più astratta

- $2 + 2 = 4$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\int_0^\infty \sin(x)e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ (vedi lezione seguente)
- Di quali di questi enunciati ci si può fidare?
- Sulla base di cosa?

# Matematica sempre più astratta

- $2 + 2 = 4$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $\int_0^\infty \sin(x) e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}$
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ (vedi lezione seguente)
- Di quali di questi enunciati ci si può fidare?
- Sulla base di cosa?
- Hanno veramente un significato?

# Una possibile reazione (2020)



# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2 + 2 = 4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2+2=4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2+2=4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare "tecniche infinitarie" sempre più forti.

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2+2=4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare “tecniche infinitarie” sempre più forti.
- Per esempio: numeri infiniti e infinitesimi per definire e calcolare integrali e derivate.

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2 + 2 = 4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare "tecniche infinitarie" sempre più forti.
- Per esempio: numeri infiniti e infinitesimi per definire e calcolare integrali e derivate.
- Oppure, "insiemi infiniti sempre più grandi".

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2 + 2 = 4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare “tecniche infinitarie” sempre più forti.
- Per esempio: numeri infiniti e infinitesimi per definire e calcolare integrali e derivate.
- Oppure, “insiemi infiniti sempre più grandi”.
- Ci si può fidare?

## Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2+2=4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare "tecniche infinitarie" sempre più forti.
- Per esempio: numeri infiniti e infinitesimi per definire e calcolare integrali e derivate.
- Oppure, "insiemi infiniti sempre più grandi".
- Ci si può fidare?
- Hanno senso?

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2+2=4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare "tecniche infinitarie" sempre più forti.
- Per esempio: numeri infiniti e infinitesimi per definire e calcolare integrali e derivate.
- Oppure, "insiemi infiniti sempre più grandi".
- Ci si può fidare?
- Hanno senso?
- Posso usarli anche se "non ci credo"? Se uso "numeri infiniti" per dimostrare che $5+7=12$, ho veramente dimostrato che $5+7=12$?

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2 + 2 = 4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare "tecniche infinitarie" sempre più forti.
- Per esempio: numeri infiniti e infinitesimi per definire e calcolare integrali e derivate.
- Oppure, "insiemi infiniti sempre più grandi".
- Ci si può fidare?
- Hanno senso?
- Posso usarli anche se "non ci credo"? Se uso "numeri infiniti" per dimostrare che $5 + 7 = 12$, ho veramente dimostrato che $5 + 7 = 12$?
- Facciamo un passo indietro, e vediamo più o meno come si fa una dimostrazione.

# Circa un secolo prima

- Nessuno mette in dubbio che $2 + 2 = 4$, e pochi ne vogliono una dimostrazione.
- Però per cose meno evidenti una dimostrazione serve.
- Fra il 1600 e il 1900, i matematici iniziano ad usare "tecniche infinitarie" sempre più forti.
- Per esempio: numeri infiniti e infinitesimi per definire e calcolare integrali e derivate.
- Oppure, "insiemi infiniti sempre più grandi".
- Ci si può fidare?
- Hanno senso?
- Posso usarli anche se "non ci credo"? Se uso "numeri infiniti" per dimostrare che $5 + 7 = 12$, ho veramente dimostrato che $5 + 7 = 12$?
- Facciamo un passo indietro, e vediamo più o meno come si fa una dimostrazione.
- Anzi, guardiamone una al contrario.

## Una dimostrazione al contrario

- "Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi."

# Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”

# Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”
- “Perché ci sono infiniti numeri primi.”

# Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”
- “Perché ci sono infiniti numeri primi.”
- “Perché?”

# Una dimostrazione al contrario

- "Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi."
- "Perché?"
- "Perché ci sono infiniti numeri primi."
- "Perché?"
- $\vdots$

## Una dimostrazione al contrario

- "Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi."
- "Perché?"
- "Perché ci sono infiniti numeri primi."
- "Perché?"
- $\vdots$
- (svariati estenuanti minuti dopo)

# Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”
- “Perché ci sono infiniti numeri primi.”
- “Perché?”
- $\vdots$
- (svariati estenuanti minuti dopo)
- $\vdots$

# Una dimostrazione al contrario

- "Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi."
- "Perché?"
- "Perché ci sono infiniti numeri primi."
- "Perché?"
- ⋮
- (svariati estenuanti minuti dopo)
- ⋮
- "Perché?"

# Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”
- “Perché ci sono infiniti numeri primi.”
- “Perché?”
- $\vdots$
- (svariati estenuanti minuti dopo)
- $\vdots$
- “Perché?”
- “Perché $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.

# Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”
- “Perché ci sono infiniti numeri primi.”
- “Perché?”
- $\vdots$
- (svariati estenuanti minuti dopo)
- $\vdots$
- “Perché?”
- “Perché $(1+1)+1=1+(1+1)$.
- “Perché?”

## Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”
- “Perché ci sono infiniti numeri primi.”
- “Perché?”
- $\vdots$
- (svariati estenuanti minuti dopo)
- $\vdots$
- “Perché?”
- “Perché $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- “Perché?”
- “Scusa, devo portare il pesce rosso a passeggio.”

## Una dimostrazione al contrario

- “Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi.”
- “Perché?”
- “Perché ci sono infiniti numeri primi.”
- “Perché?”
- $\vdots$
- (svariati estenuanti minuti dopo)
- $\vdots$
- “Perché?”
- “Perché $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- “Perché?”
- “Scusa, devo portare il pesce rosso a passeggio.”
- “Davvero?”

# Una dimostrazione al contrario

- "Ci sono chiavi RSA complesse quanto vuoi."
- "Perché?"
- "Perché ci sono infiniti numeri primi."
- "Perché?"
- $\vdots$
- (svariati estenuanti minuti dopo)
- $\vdots$
- "Perché?"
- "Perché $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- "Perché?"
- "Scusa, devo portare il pesce rosso a passeggio."
- "Davvero?"
- "No. Alcune cose le prendiamo per buone e basta."

## Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.
- Esempio: “se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$”.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.
- Esempio: "se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$".
- Primo tentativo: magari possiamo fondare la matematica su due assiomi:

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.
- Esempio: “se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$”.
- Primo tentativo: magari possiamo fondare la matematica su due assiomi:
    1. se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$;

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.
- Esempio: "se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$".
- Primo tentativo: magari possiamo fondare la matematica su due assiomi:
  1. se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$;
  2. per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme delle cose che la soddisfano, $\{x : P(x)\}$.

## Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.
- Esempio: "se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$".
- Primo tentativo: magari possiamo fondare la matematica su due assiomi:
  1. se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$;
  2. per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme delle cose che la soddisfano, $\{x : P(x)\}$.
- Esempio: l'insieme dei naturali pari è uguale a $\{x : x \text{ è un naturale, e c'è un naturale } y \text{ tale che } x = y + y\}$.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.
- Esempio: "se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$".
- Primo tentativo: magari possiamo fondare la matematica su due assiomi:
  1. se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$;
  2. per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme delle cose che la soddisfano, $\{x : P(x)\}$.
- Esempio: l'insieme dei naturali pari è uguale a $\{x : x \text{ è un naturale, e c'è un naturale } y \text{ tale che } x = y + y\}$.
- Questo primo tentativo ha dei problemi.

# Fondare la matematica da zero

- Insomma, alcuni principi di base bisogna prenderli per buoni.
- Questi li chiamiamo *assiomi*.
- Poi, a partire dagli assiomi, dimostriamo cose via via più complesse.
- Già visto in geometria: assiomi di Euclide.
- Gli assiomi di Euclide non bastano per fare tutta la matematica.
- Scelta popolare: prendere come assiomi alcune proprietà di base degli insiemi.
- Esempio: "se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$".
- Primo tentativo: magari possiamo fondare la matematica su due assiomi:
    1. se due insiemi $x, y$ hanno gli stessi elementi, allora $x = y$;
    2. per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme delle cose che la soddisfano, $\{x : P(x)\}$.
- Esempio: l'insieme dei naturali pari è uguale a $\{x : x \text{ è un naturale, e c'è un naturale } y \text{ tale che } x = y + y\}$.
- Questo primo tentativo ha dei problemi.
- Per cominciare: cosa è una proprietà?

# Cosa è una proprietà?

- Se come “proprietà” prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.

# Cosa è una proprietà?

- Se come “proprietà” prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà “questa proprietà è falsa” è vera o falsa?

## Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.

## Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1, +, <$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:
  - Variabili $(x, y, z, \ldots)$.

## Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:
  - Variabili $(x, y, z, \ldots)$.
  - Parentesi $((, ))$.

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:
    - Variabili $(x, y, z, \ldots)$.
    - Parentesi $((,))$.
    - Uguaglianza $(=)$.

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:
  - Variabili $(x, y, z, \ldots)$.
  - Parentesi ((, )).
  - Uguaglianza $(=)$.
  - Connettivi logici: per esempio "non" $(\neg)$ e "se... allora" $(\rightarrow)$.

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:
  - Variabili $(x, y, z, \ldots)$.
  - Parentesi $((,))$.
  - Uguaglianza $(=)$.
  - Connettivi logici: per esempio "non" $(\neg)$ e "se... allora" $(\rightarrow)$.
  - Quantificatori: "esiste" $(\exists)$, "per ogni" $(\forall)$.

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:
  - Variabili $(x, y, z, \dots)$.
  - Parentesi $((,))$.
  - Uguaglianza $(=)$.
  - Connettivi logici: per esempio "non" $(\neg)$ e "se... allora" $(\rightarrow)$.
  - Quantificatori: "esiste" $(\exists)$, "per ogni" $(\forall)$.
- Per esempio, se $P(x, y)$ è la formula $x = y \cdot y$, allora $\exists x \, \forall y \, \neg P(x, y)$ dice "esiste un numero che non è un quadrato".

# Cosa è una proprietà?

- Se come "proprietà" prendiamo quelle esprimibili in italiano abbiamo un problema: il *paradosso del mentitore*.
- La proprietà "questa proprietà è falsa" è vera o falsa?
- Bisogna mettere su un *linguaggio formale*.
- Ce ne sono tanti. Useremo la *logica del prim'ordine*.
- In breve, un *linguaggio del prim'ordine* $L$ è un insieme di simboli di *costante*, *funzione* e *relazione*. Per esempio $1$, $+$, $<$.
- Da questi simboli costruiamo le *formule* usando anche:
  - Variabili $(x, y, z, \dots)$.
  - Parentesi ((, )).
  - Uguaglianza $(=)$.
  - Connettivi logici: per esempio "non" $(\neg)$ e "se... allora" $(\rightarrow)$.
  - Quantificatori: "esiste" $(\exists)$, "per ogni" $(\forall)$.
- Per esempio, se $P(x, y)$ è la formula $x = y \cdot y$, allora $\exists x\, \forall y\, \neg P(x, y)$ dice "esiste un numero che non è un quadrato".
- Questa formula è vera "dentro $\mathbb{N}$", ma è falsa "dentro $\mathbb{C}$".

# Insomma problema risolto?

- Il problema, "dire cos'è una proprietà" si risolve

# Insomma problema risolto?

- Il problema, "dire cos'è una proprietà" si risolve: per gli insiemi, usiamo il linguaggio con un simbolo di relazione "$\in$", che vuol dire "appartiene a".

# Insomma problema risolto?

- Il problema, “dire cos’è una proprietà” si risolve: per gli insiemi, usiamo il linguaggio con un simbolo di relazione “$\in$”, che vuol dire “appartiene a”.
- In altre parole, $x \in y$ vuol dire “$x$ è un elemento di $y$”.

# Insomma problema risolto?

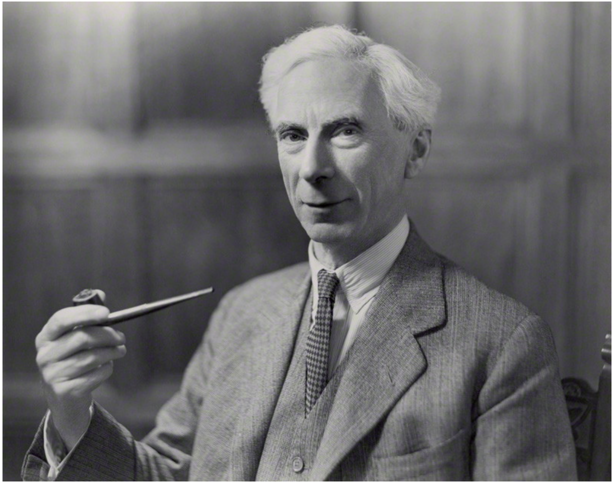
- Il problema, "dire cos'è una proprietà" si risolve: per gli insiemi, usiamo il linguaggio con un simbolo di relazione "$\in$", che vuol dire "appartiene a".
- In altre parole, $x \in y$ vuol dire "$x$ è un elemento di $y$".
- Per esempio, questa formula dice "$x$ ha al più un elemento":

$$\exists y \left(\forall z \left((z \in x) \to (z = y)\right)\right)$$

# Insomma problema risolto?

- Il problema, "dire cos'è una proprietà" si risolve: per gli insiemi, usiamo il linguaggio con un simbolo di relazione "$\in$", che vuol dire "appartiene a".
- In altre parole, $x \in y$ vuol dire "$x$ è un elemento di $y$".
- Per esempio, questa formula dice "$x$ ha al più un elemento":

$$\exists y \left( \forall z \left( (z \in x) \to (z = y) \right) \right)$$



"Ciao, sono Bertrand Russell, e qui c'è un secondo problema."

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
    - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(A)$ è falsa.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smiley}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(B)$ è vera.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{☺}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{☺}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{☺}(R)$ è vera.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smile}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smile}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smile}(R)$ è vera. $P_{\smile}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.

## Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smiley}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smiley}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smiley}(R)$ è vera. $P_{\smiley}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smiley}(x)$. Quindi $R \in R$.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smiley}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smiley}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smiley}(R)$ è vera. $P_{\smiley}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smiley}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smiley}(R)$ è la negazione di $R \in R$.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smiley}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smiley}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smiley}(R)$ è vera. $P_{\smiley}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smiley}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smiley}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{\smiley}(R)$ è falsa.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smile}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smile}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smile}(R)$ è vera. $P_{\smile}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smile}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smile}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smile}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{\smile}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{\smile}(R)$ è vera, allora $P_{\smile}(R)$ è falsa. Quindi $P_{\smile}(R)$ non è vera.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smile}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smile}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smile}(R)$ è vera. $P_{\smile}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smile}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smile}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smile}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{\smile}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{\smile}(R)$ è vera, allora $P_{\smile}(R)$ è falsa. Quindi $P_{\smile}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{\smile}(R)$ è falsa.

## Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smiley}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smiley}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smiley}(R)$ è vera. $P_{\smiley}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smiley}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smiley}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{\smiley}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $P_{\smiley}(R)$ è falsa. Quindi $P_{\smiley}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{\smiley}(R)$ è falsa. Questo vuol dire $R \in R$.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smile}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smile}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smile}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smile}(R)$ è vera. $P_{\smile}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smile}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smile}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smile}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{\smile}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{\smile}(R)$ è vera, allora $P_{\smile}(R)$ è falsa. Quindi $P_{\smile}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{\smile}(R)$ è falsa. Questo vuol dire $R \in R$.
- Ma tutti gli elementi $x \in R$ soddisfano $\neg(x \in x)$.

## Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{☺}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{☺}(R)$ è vera. $P_{☺}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{☺}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{☺}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{☺}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{☺}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{☺}(R)$ è vera, allora $P_{☺}(R)$ è falsa. Quindi $P_{☺}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{☺}(R)$ è falsa. Questo vuol dire $R \in R$.
- Ma tutti gli elementi $x \in R$ soddisfano $\neg(x \in x)$. Quindi $\neg(R \in R)$.

## Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smiley}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smiley}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smiley}(R)$ è vera. $P_{\smiley}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smiley}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smiley}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{\smiley}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $P_{\smiley}(R)$ è falsa. Quindi $P_{\smiley}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{\smiley}(R)$ è falsa. Questo vuol dire $R \in R$.
- Ma tutti gli elementi $x \in R$ soddisfano $\neg(x \in x)$. Quindi $\neg(R \in R)$.
- Insomma, se $P_{\smiley}(R)$ è falsa, allora $P_{\smiley}(R)$ è vera. Quindi $P_{\smiley}(R)$ non è falsa.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{☺}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{☺}(R)$ è vera. $P_{☺}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{☺}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{☺}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{☺}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{☺}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{☺}(R)$ è vera, allora $P_{☺}(R)$ è falsa. Quindi $P_{☺}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{☺}(R)$ è falsa. Questo vuol dire $R \in R$.
- Ma tutti gli elementi $x \in R$ soddisfano $\neg(x \in x)$. Quindi $\neg(R \in R)$.
- Insomma, se $P_{☺}(R)$ è falsa, allora $P_{☺}(R)$ è vera. Quindi $P_{☺}(R)$ non è falsa.
- Riassunto: $(R \in R) \leftrightarrow (\neg(R \in R))$. Questa è una contraddizione.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{☺}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{☺}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{☺}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{☺}(R)$ è vera. $P_{☺}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{☺}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{☺}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{☺}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{☺}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{☺}(R)$ è vera, allora $P_{☺}(R)$ è falsa. Quindi $P_{☺}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{☺}(R)$ è falsa. Questo vuol dire $R \in R$.
- Ma tutti gli elementi $x \in R$ soddisfano $\neg(x \in x)$. Quindi $\neg(R \in R)$.
- Insomma, se $P_{☺}(R)$ è falsa, allora $P_{☺}(R)$ è vera. Quindi $P_{☺}(R)$ non è falsa.
- Riassunto: $(R \in R) \leftrightarrow (\neg(R \in R))$. Questa è una contraddizione.
- Quindi assumere che l'insieme $\{x : P(x)\}$ esista per tutte le proprietà $P$ nel linguaggio $\{\in\}$ porta a una contraddizione.

# Il barbiere di Bertrand

- Chiamiamo $P_{\smiley}(x)$ la proprietà $\neg(x \in x)$. Cioè: $x$ non è un elemento di sé stesso.
  - Ad esempio: $A = \{13, A\}$ è un elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(A)$ è falsa.
  - Invece $B = \{13, \{2\}\}$ non è elemento di sé stesso, quindi $P_{\smiley}(B)$ è vera.
- Stiamo assumendo: "per ogni proprietà $P$, esiste l'insieme $\{x : P(x)\}$".
- Quindi esiste l'insieme $R = \{x : P_{\smiley}(x)\} = \{x : \neg(x \in x)\}$.
- Chiediamoci se $P_{\smiley}(R)$ è vera. $P_{\smiley}(R)$ vuol dire che $\neg(R \in R)$.
- Se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $R$ è uno degli $x$ tali che $P_{\smiley}(x)$. Quindi $R \in R$.
- Ma $P_{\smiley}(R)$ è la negazione di $R \in R$. Quindi $P_{\smiley}(R)$ è falsa.
- Insomma, se $P_{\smiley}(R)$ è vera, allora $P_{\smiley}(R)$ è falsa. Quindi $P_{\smiley}(R)$ non è vera.
- Allora $P_{\smiley}(R)$ è falsa. Questo vuol dire $R \in R$.
- Ma tutti gli elementi $x \in R$ soddisfano $\neg(x \in x)$. Quindi $\neg(R \in R)$.
- Insomma, se $P_{\smiley}(R)$ è falsa, allora $P_{\smiley}(R)$ è vera. Quindi $P_{\smiley}(R)$ non è falsa.
- Riassunto: $(R \in R) \leftrightarrow (\neg(R \in R))$. Questa è una contraddizione.
- Quindi assumere che l'insieme $\{x : P(x)\}$ esista per tutte le proprietà $P$ nel linguaggio $\{\in\}$ porta a una contraddizione.
- Potreste aver sentito qualcosa di simile con un isola e un barbiere.

# Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.

## Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.

## Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.

## Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).

# Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.

# Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.

## Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.
  - Russell: "da premesse false si può dimostrare tutto"

## Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.
  - Russell: "da premesse false si può dimostrare tutto"
  - Studente: "assumendo $1 = 0$, come dimostri di essere il papa"?

# Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.
  - Russell: "da premesse false si può dimostrare tutto"
  - Studente: "assumendo $1 = 0$, come dimostri di essere il papa"?
  - Russell:

## Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.
  - Russell: "da premesse false si può dimostrare tutto"
  - Studente: "assumendo $1 = 0$, come dimostri di essere il papa"?
  - Russell:
    - "Aggiungiamo 1 da entrambi i lati, otteniamo $2 = 1$."

# Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.
  - Russell: "da premesse false si può dimostrare tutto"
  - Studente: "assumendo $1 = 0$, come dimostri di essere il papa"?
  - Russell:
    - "Aggiungiamo 1 da entrambi i lati, otteniamo $2 = 1$."
    - "L'insieme $\{\text{io}, \text{il papa}\}$ ha 2 elementi."

## Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.
    - Russell: "da premesse false si può dimostrare tutto"
    - Studente: "assumendo $1 = 0$, come dimostri di essere il papa"?
    - Russell:
        - "Aggiungiamo 1 da entrambi i lati, otteniamo $2 = 1$."
        - "L'insieme $\{\text{io}, \text{il papa}\}$ ha 2 elementi."
        - "Ma abbiamo detto che $2 = 1$, quindi l'insieme $\{\text{io}, \text{il papa}\}$ ha 1 elemento."

# Cose false e cosa farci

- Insomma, se non ci stiamo attenti, rischiamo di fondare la matematica su un sistema che permette di dimostrare cose false.
- Questo è già male. Ma c'è di peggio.
- Se possiamo dimostrare cose false, allora possiamo dimostrare tutto.
- DAVVERO TUTTO (vedi titolo).
- Questo, per quanto controintuitivo, è un fatto base di logica.
- Facciamo un esempio, anche questo dovuto a Bertrand Russell.
  - Russell: "da premesse false si può dimostrare tutto"
  - Studente: "assumendo $1 = 0$, come dimostri di essere il papa"?
  - Russell:
    - "Aggiungiamo 1 da entrambi i lati, otteniamo $2 = 1$."
    - "L'insieme $\{\text{io}, \text{il papa}\}$ ha 2 elementi."
    - "Ma abbiamo detto che $2 = 1$, quindi l'insieme $\{\text{io}, \text{il papa}\}$ ha 1 elemento."
    - "Quindi io sono il papa."

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false?

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false? (quindi davvero tutto, quindi che scriviamo dimostrazioni a fare?)

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false? (quindi davvero tutto, quindi che scriviamo dimostrazioni a fare?)

"Ciao, sono David Hilbert e ho un piano per toglierci da questo imbarazzo."

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false? (quindi davvero tutto, quindi che scriviamo dimostrazioni a fare?)

“Ciao, sono David Hilbert e ho un piano per toglierci da questo imbarazzo.”

Il *Programma di Hilbert*:

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false? (quindi davvero tutto, quindi che scriviamo dimostrazioni a fare?)

"Ciao, sono David Hilbert e ho un piano per toglierci da questo imbarazzo."

Il *Programma di Hilbert*:

- Mettiamo su un linguaggio formale in cui esprimere tutti gli enunciati matematici. Chiamiamolo $L$.

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false? (quindi davvero tutto, quindi che scriviamo dimostrazioni a fare?)

"Ciao, sono David Hilbert e ho un piano per toglierci da questo imbarazzo."

Il *Programma di Hilbert*:

- Mettiamo su un linguaggio formale in cui esprimere tutti gli enunciati matematici. Chiamiamolo $L$.

  Spoiler: si può fare in $L = \{\in\}$.

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false? (quindi davvero tutto, quindi che scriviamo dimostrazioni a fare?)

"Ciao, sono David Hilbert e ho un piano per toglierci da questo imbarazzo."

Il *Programma di Hilbert*:

- Mettiamo su un linguaggio formale in cui esprimere tutti gli enunciati matematici. Chiamiamolo $L$.

  Spoiler: si può fare in $L = \{\in\}$.

- Mettiamo su un "sistema per fare le dimostrazioni": delle regole che ci permettono di formalizzare come da certi enunciati ne seguono altri. Chiamiamolo $S$.

# Fondare la matematica da zero (ci riproviamo)

Riassumendo: numeri infiniti, insiemi, tutto molto bello, ma chi ci assicura che usandoli non dimostriamo cose false? (quindi davvero tutto, quindi che scriviamo dimostrazioni a fare?)

"Ciao, sono David Hilbert e ho un piano per toglierci da questo imbarazzo."

Il *Programma di Hilbert*:

- Mettiamo su un linguaggio formale in cui esprimere tutti gli enunciati matematici. Chiamiamolo $L$.

  Spoiler: si può fare in $L = \{\in\}$.

- Mettiamo su un "sistema per fare le dimostrazioni": delle regole che ci permettono di formalizzare come da certi enunciati ne seguono altri. Chiamiamolo $S$.

  Spoiler: questo pure si può fare; esempio:

$$(\mathrm{In}_\wedge)\,\dfrac{(\mathrm{El}_{.\wedge})\,\dfrac{(\mathrm{Ax})\,\dfrac{}{A\wedge B\vdash A\wedge B}}{A\wedge B\vdash B} \qquad (\mathrm{El}_{\wedge.})\,\dfrac{(\mathrm{Ax})\,\dfrac{}{A\wedge B\vdash A\wedge B}}{A\wedge B\vdash A}}{A\wedge B\vdash B\wedge A}$$

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un “sistema per fare le dimostrazioni” $S$.

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un “sistema per fare le dimostrazioni” $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi (“teorie”):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i “numeri infiniti”; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
    - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
    - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.

- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.
- Sennò, bisogna almeno poter scrivere un'app che, dato un enunciato in $L$, ci dice se questo è un assioma di $T$ o no. (se non chiediamo questo si può "barare")

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.
- Sennò, bisogna almeno poter scrivere un'app che, dato un enunciato in $L$, ci dice se questo è un assioma di $T$ o no. (se non chiediamo questo si può "barare")

Scriviamo $T \vdash F$ per dire che $T$, con le regole $S$, dimostra la formula $F$.

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.
- Sennò, bisogna almeno poter scrivere un'app che, dato un enunciato in $L$, ci dice se questo è un assioma di $T$ o no. (se non chiediamo questo si può "barare")

Scriviamo $T \vdash F$ per dire che $T$, con le regole $S$, dimostra la formula $F$.

- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *completa*: per ogni $F$, o $T_{\text{forte}} \vdash F$ oppure $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:
- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un “sistema per fare le dimostrazioni” $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi (“teorie”):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i “numeri infiniti”; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.
- Sennò, bisogna almeno poter scrivere un'app che, dato un enunciato in $L$, ci dice se questo è un assioma di $T$ o no. (se non chiediamo questo si può “barare”)

Scriviamo $T \vdash F$ per dire che $T$, con le regole $S$, dimostra la formula $F$.
- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *completa*: per ogni $F$, o $T_{\text{forte}} \vdash F$ oppure $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.
  - (gli assiomi di $T_{\text{forte}}$ li scegliamo con cura, così $T_{\text{forte}}$ “dimostra tutte le cose vere”)

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.
- Sennò, bisogna almeno poter scrivere un'app che, dato un enunciato in $L$, ci dice se questo è un assioma di $T$ o no. (se non chiediamo questo si può "barare")

Scriviamo $T \vdash F$ per dire che $T$, con le regole $S$, dimostra la formula $F$.

- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *completa*: per ogni $F$, o $T_{\text{forte}} \vdash F$ oppure $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.
  - (gli assiomi di $T_{\text{forte}}$ li scegliamo con cura, così $T_{\text{forte}}$ "dimostra tutte le cose vere")
- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *coerente*: non succede che $T_{\text{forte}} \vdash F$ e anche $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.
- Sennò, bisogna almeno poter scrivere un'app che, dato un enunciato in $L$, ci dice se questo è un assioma di $T$ o no. (se non chiediamo questo si può "barare")

Scriviamo $T \vdash F$ per dire che $T$, con le regole $S$, dimostra la formula $F$.

- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *completa*: per ogni $F$, o $T_{\text{forte}} \vdash F$ oppure $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.
  - (gli assiomi di $T_{\text{forte}}$ li scegliamo con cura, così $T_{\text{forte}}$ "dimostra tutte le cose vere")
- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *coerente*: non succede che $T_{\text{forte}} \vdash F$ e anche $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.
- Tutto questo lo dimostriamo dentro $T_{\text{debole}}$, di cui ci si può fidare.

# Il Programma di Hilbert (continua)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Facciamo anche due liste di assiomi ("teorie"):
  - Una $T_{\text{forte}}$ potente abbastanza da poterci fare dentro tutta la matematica, inclusi i "numeri infiniti"; per esempio una teoria degli insiemi (magari non quella di prima ☺).
  - Una con meno assiomi, $T_{\text{debole}}$, che parli solo di $\mathbb{N}$. Ci mettiamo assiomi di cui ci fidiamo a occhi chiusi: per esempio, $(1+1)+1 = 1+(1+1)$.
- Se queste $T$ riusciamo a scriverle con un numero finito di assiomi, bene.
- Sennò, bisogna almeno poter scrivere un'app che, dato un enunciato in $L$, ci dice se questo è un assioma di $T$ o no. (se non chiediamo questo si può "barare")

Scriviamo $T \vdash F$ per dire che $T$, con le regole $S$, dimostra la formula $F$.

- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *completa*: per ogni $F$, o $T_{\text{forte}} \vdash F$ oppure $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.
  - (gli assiomi di $T_{\text{forte}}$ li scegliamo con cura, così $T_{\text{forte}}$ "dimostra tutte le cose vere")
- Dimostriamo che $T_{\text{forte}}$ è *coerente*: non succede che $T_{\text{forte}} \vdash F$ e anche $T_{\text{forte}} \vdash \neg F$.
- Tutto questo lo dimostriamo dentro $T_{\text{debole}}$, di cui ci si può fidare.
- Ma allora ci possiamo fidare di tutta la matematica!

# Il Programma di Hilbert (DLC extra-lusso)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Una teoria $T_{\text{forte}}$ per fare tutta la matematica
- Una teoria $T_{\text{debole}}$ di cui ci fidiamo.
- App per sapere cosa è un assioma di $T_{\text{debole}}$ e di $T_{\text{forte}}$.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è completa.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è coerente.

# Il Programma di Hilbert (DLC extra-lusso)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Una teoria $T_{\text{forte}}$ per fare tutta la matematica
- Una teoria $T_{\text{debole}}$ di cui ci fidiamo.
- App per sapere cosa è un assioma di $T_{\text{debole}}$ e di $T_{\text{forte}}$.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è completa.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è coerente.

- Già che ci siamo, facciamo anche vedere che $T_{\text{forte}}$ è *conservativa* su $T_{\text{debole}}$: tutte le cose sui numeri naturali che dimostriamo usando reali, infiniti etc le possiamo dimostrare anche senza.

# Il Programma di Hilbert (DLC extra-lusso)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Una teoria $T_{\text{forte}}$ per fare tutta la matematica
- Una teoria $T_{\text{debole}}$ di cui ci fidiamo.
- App per sapere cosa è un assioma di $T_{\text{debole}}$ e di $T_{\text{forte}}$.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è completa.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è coerente.

- Già che ci siamo, facciamo anche vedere che $T_{\text{forte}}$ è *conservativa* su $T_{\text{debole}}$: tutte le cose sui numeri naturali che dimostriamo usando reali, infiniti etc le possiamo dimostrare anche senza. Giusto per stare più tranquilli.

# Il Programma di Hilbert (DLC extra-lusso)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Una teoria $T_{\text{forte}}$ per fare tutta la matematica
- Una teoria $T_{\text{debole}}$ di cui ci fidiamo.
- App per sapere cosa è un assioma di $T_{\text{debole}}$ e di $T_{\text{forte}}$.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è completa.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è coerente.

- Già che ci siamo, facciamo anche vedere che $T_{\text{forte}}$ è *conservativa* su $T_{\text{debole}}$: tutte le cose sui numeri naturali che dimostriamo usando reali, infiniti etc le possiamo dimostrare anche senza. Giusto per stare più tranquilli.
- Ah, e che è tutto *decidibile*: scriviamo anche un'app che, dato un $L$-enunciato, ti dice se è vero o falso.

# Il Programma di Hilbert (DLC extra-lusso)

Facciamo:

- Un linguaggio formale $L$ in cui scrivere tutta la matematica.
- Un "sistema per fare le dimostrazioni" $S$.
- Una teoria $T_{\text{forte}}$ per fare tutta la matematica
- Una teoria $T_{\text{debole}}$ di cui ci fidiamo.
- App per sapere cosa è un assioma di $T_{\text{debole}}$ e di $T_{\text{forte}}$.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è completa.
- Dimostrazione in $T_{\text{debole}}$ che $T_{\text{forte}}$ è coerente.

- Già che ci siamo, facciamo anche vedere che $T_{\text{forte}}$ è *conservativa* su $T_{\text{debole}}$: tutte le cose sui numeri naturali che dimostriamo usando reali, infiniti etc le possiamo dimostrare anche senza. Giusto per stare più tranquilli.
- Ah, e che è tutto *decidibile*: scriviamo anche un'app che, dato un $L$-enunciato, ti dice se è vero o falso.
- Insomma, una calcolatrice che sa risolvere tutti i problemi.

# 34495 giorni fa, a Königsberg

- 34495 giorni fa (è il 1930), a Königsberg, c'è una conferenza di matematica.

  (Königsberg è oggi Kaliningrad (Russia))

# 34495 giorni fa, a Königsberg

- 34495 giorni fa (è il 1930), a Königsberg, c'è una conferenza di matematica.

  (Königsberg è oggi Kaliningrad (Russia))

- C'è Hilbert che fa un discorso tipo: "Sapete perché nessuno ha ancora trovato un problema che non si può risolvere?

# 34495 giorni fa, a Königsberg

- 34495 giorni fa (è il 1930), a Königsberg, c'è una conferenza di matematica.

  (Königsberg è oggi Kaliningrad (Russia))
- C'è Hilbert che fa un discorso tipo: "Sapete perché nessuno ha ancora trovato un problema che non si può risolvere? Secondo me perché non esistono!

# 34495 giorni fa, a Königsberg

- 34495 giorni fa (è il 1930), a Königsberg, c'è una conferenza di matematica.

  (Königsberg è oggi Kaliningrad (Russia))
- C'è Hilbert che fa un discorso tipo: "Sapete perché nessuno ha ancora trovato un problema che non si può risolvere? Secondo me perché non esistono!
  Il programma sta andando bene, prima o poi saremo in grado di risolvere tutto.

# 34495 giorni fa, a Königsberg

- 34495 giorni fa (è il 1930), a Königsberg, c'è una conferenza di matematica.

  (Königsberg è oggi Kaliningrad (Russia))

- C'è Hilbert che fa un discorso tipo: "Sapete perché nessuno ha ancora trovato un problema che non si può risolvere? Secondo me perché non esistono!
  Il programma sta andando bene, prima o poi saremo in grado di risolvere tutto.
  Comunque ora vado in pensione, fate ammodino, xoxo."

## 34495 giorni fa, a Königsberg

- 34495 giorni fa (è il 1930), a Königsberg, c'è una conferenza di matematica.

  (Königsberg è oggi Kaliningrad (Russia))
- C'è Hilbert che fa un discorso tipo: "Sapete perché nessuno ha ancora trovato un problema che non si può risolvere? Secondo me perché non esistono!
  Il programma sta andando bene, prima o poi saremo in grado di risolvere tutto.
  Comunque ora vado in pensione, fate ammodino, xoxo."
- 34493 giorni fa, a Königsberg, durante una tavola rotonda nella stessa conferenza:

"Ciao, sono Kurt Gödel, e avrei dimostrato questa cosina."

# 34495 giorni fa, a Königsberg

- 34495 giorni fa (è il 1930), a Königsberg, c'è una conferenza di matematica.

  (Königsberg è oggi Kaliningrad (Russia))
- C'è Hilbert che fa un discorso tipo: "Sapete perché nessuno ha ancora trovato un problema che non si può risolvere? Secondo me perché non esistono!
  Il programma sta andando bene, prima o poi saremo in grado di risolvere tutto.
  Comunque ora vado in pensione, fate ammodino, xoxo."
- 34493 giorni fa, a Königsberg, durante una tavola rotonda nella stessa conferenza:
- Lì per lì nessuno sembra farci troppo caso, tranne John von Neumann, che va a parlargli.

"Ciao, sono Kurt Gödel, e avrei dimostrato questa cosina."

# Il Primo Teorema di Incompletezza

## Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

# Il Primo Teorema di Incompletezza

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male))**

Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica", (vediamo dopo)

# Il Primo Teorema di Incompletezza

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male))**

Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica", (vediamo dopo)
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e

## Il Primo Teorema di Incompletezza

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male))**

Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica", (vediamo dopo)
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

# Il Primo Teorema di Incompletezza

## Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

## Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male))

Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica", (vediamo dopo)
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

# Il Primo Teorema di Incompletezza

### Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

### Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male))

Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica", (vediamo dopo)
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

### Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto malissimo))

Il programma di Hilbert non si può fare.

# Il Primo Teorema di Incompletezza

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male))**

Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica", (vediamo dopo)
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

**Teorema (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto malissimo))**

Il programma di Hilbert non si può fare. Perlomeno non tutto.

# Esprimere abbastanza artimetica? Scrivere delle app?

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria

- che “contiene abbastanza aritmetica”,
- per cui si può fare un’app che ci dice se un’enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Quanta aritmetica è “abbastanza aritmetica”?

# Esprimere abbastanza artimetica? Scrivere delle app?

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica",
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Quanta aritmetica è "abbastanza aritmetica"?
- Basta che $T$ abbia almeno questi assiomi (aritmetica di Robinson):
  - $\forall x\ (x + 1 \neq 0)$
  - $\forall x \forall y\ ((x + 1 = y + 1) \rightarrow (x = y))$
  - $\forall y\ ((y \neq 0) \rightarrow (\exists x\ x + 1 = y))$
  - $\forall x\ (x + 0 = x)$
  - $\forall x \forall y\ (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
  - $\forall x\ (x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x, y\ (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$

# Esprimere abbastanza artimetica? Scrivere delle app?

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica",
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Quanta aritmetica è "abbastanza aritmetica"?
- Basta che $T$ abbia almeno questi assiomi (aritmetica di Robinson):
  - $\forall x\ (x+1 \neq 0)$
  - $\forall x \forall y\ ((x+1 = y+1) \to (x = y))$
  - $\forall y\ ((y \neq 0) \to (\exists x\ x+1 = y))$
  - $\forall x\ (x+0 = x)$
  - $\forall x \forall y\ (x + (y+1) = (x+y)+1)$
  - $\forall x\ (x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x, y\ (x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x)$
- Se ci aggiungiamo anche assiomi per l'*induzione* otteniamo l'*Aritmetica di Peano*.

# Esprimere abbastanza artimetica? Scrivere delle app?

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica",
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Quanta aritmetica è "abbastanza aritmetica"?
- Basta che $T$ abbia almeno questi assiomi (aritmetica di Robinson):
  - $\forall x\ (x + 1 \neq 0)$
  - $\forall x \forall y\ ((x + 1 = y + 1) \to (x = y))$
  - $\forall y\ ((y \neq 0) \to (\exists x\ x + 1 = y))$
  - $\forall x\ (x + 0 = x)$
  - $\forall x \forall y\ (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
  - $\forall x\ (x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x, y\ (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$
- Se ci aggiungiamo anche assiomi per l'*induzione* otteniamo l'*Aritmetica di Peano*.
- Nel 1930 non esistevano computer né app.

# Esprimere abbastanza artimetica? Scrivere delle app?

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica",
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Quanta aritmetica è "abbastanza aritmetica"?
- Basta che $T$ abbia almeno questi assiomi (aritmetica di Robinson):
  - $\forall x\ (x + 1 \neq 0)$
  - $\forall x \forall y\ ((x + 1 = y + 1) \rightarrow (x = y))$
  - $\forall y\ ((y \neq 0) \rightarrow (\exists x\ x + 1 = y))$
  - $\forall x\ (x + 0 = x)$
  - $\forall x \forall y\ (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
  - $\forall x\ (x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x, y\ (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$
- Se ci aggiungiamo anche assiomi per l'*induzione* otteniamo l'*Aritmetica di Peano*.
- Nel 1930 non esistevano computer né app. Per avere una nozione precisa di "calcolabile" c'è voluto qualche altro anno (Gödel, Church, Turing).

# Esprimere abbastanza artimetica? Scrivere delle app?

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria

- che "contiene abbastanza aritmetica",
- per cui si può fare un'app che ci dice se un'enunciato è un assioma oppure no, e
- che non dimostra DAVVERO TUTTO (non dimostra il falso),

allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Quanta aritmetica è "abbastanza aritmetica"?
- Basta che $T$ abbia almeno questi assiomi (aritmetica di Robinson):
  - $\forall x \ (x + 1 \neq 0)$
  - $\forall x \forall y \ ((x + 1 = y + 1) \to (x = y))$
  - $\forall y \ ((y \neq 0) \to (\exists x \ x + 1 = y))$
  - $\forall x \ (x + 0 = x)$
  - $\forall x \forall y \ (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
  - $\forall x \ (x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x, y \ (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$
- Se ci aggiungiamo anche assiomi per l'*induzione* otteniamo l'*Aritmetica di Peano*.
- Nel 1930 non esistevano computer né app. Per avere una nozione precisa di "calcolabile" c'è voluto qualche altro anno (Gödel, Church, Turing).
  In un certo senso, i computer esistono perché un po' di logici matematici volevano sapere quanto in là andava il Teorema di Gödel.

## Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.

## Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII)

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.
- Per esempio, codifichiamo la formula $(1+1)+1 = 1+(1+1)$ con un numero.

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.
- Per esempio, codifichiamo la formula $(1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1)$ con un numero.
- In ASCII, il simbolo "1" corrisponde al numero 49.

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.
- Per esempio, codifichiamo la formula $(1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1)$ con un numero.
- In ASCII, il simbolo "1" corrisponde al numero 49.
- "(" corrisponde a 40, ")" a 41, "+" a 43, "=" a "61".

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.
- Per esempio, codifichiamo la formula $(1+1)+1=1+(1+1)$ con un numero.
- In ASCII, il simbolo "1" corrisponde al numero 49.
- "(" corrisponde a 40, ")" a 41, "+" a 43, "=" a "61". Scriviamo $\ulcorner ( \urcorner = 40$.

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.
- Per esempio, codifichiamo la formula $(1+1)+1=1+(1+1)$ con un numero.
- In ASCII, il simbolo "1" corrisponde al numero 49.
- "(" corrisponde a 40, ")" a 41, "+" a 43, "=" a "61". Scriviamo $\ulcorner ( \urcorner = 40$.
- La formula $(1+1)+1=1+(1+1)$ ha 15 caratteri.

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.
- Per esempio, codifichiamo la formula $(1+1)+1=1+(1+1)$ con un numero.
- In ASCII, il simbolo “1” corrisponde al numero 49.
- “(” corrisponde a 40, “)” a 41, “+” a 43, “=” a “61”. Scriviamo $\ulcorner ( \urcorner = 40$.
- La formula $(1+1)+1=1+(1+1)$ ha 15 caratteri. Prendiamo i primi 15 numeri primi, e mettiamo ad esponente le codifiche dei caratteri.

$$2^{\ulcorner ( \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner 1 \urcorner} \cdot 5^{\ulcorner + \urcorner} \cdot 7^{\ulcorner 1 \urcorner} \cdot 11^{\ulcorner ) \urcorner} \cdot 13^{\ulcorner + \urcorner} \cdot 17^{\ulcorner 1 \urcorner} \cdot 19^{\ulcorner = \urcorner} \cdot 23^{\ulcorner 1 \urcorner} \cdot 29^{\ulcorner + \urcorner} \cdot 31^{\ulcorner ( \urcorner} \cdot 37^{\ulcorner 1 \urcorner} \cdot 41^{\ulcorner + \urcorner} \cdot 43^{\ulcorner 1 \urcorner} \cdot 47^{\ulcorner ) \urcorner}$$

# Dillo con un numero

- Il primo passo per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza è tradurre tutto in numeri: formule, dimostrazioni, app.
- Le formule sono delle speciali sequenze finite di simboli.
- Bisogna scegliere come codificare i simboli (per esempio, in ASCII) e scegliere come codificare le sequenze finite.
- Per esempio, codifichiamo la formula $(1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1)$ con un numero.
- In ASCII, il simbolo "1" corrisponde al numero 49.
- "(" corrisponde a 40, ")" a 41, "+" a 43, "=" a "61". Scriviamo $\ulcorner ( \urcorner = 40$.
- La formula $(1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1)$ ha 15 caratteri. Prendiamo i primi 15 numeri primi, e mettiamo ad esponente le codifiche dei caratteri.

$$2^{\ulcorner(\urcorner}\cdot 3^{\ulcorner 1\urcorner}\cdot 5^{\ulcorner +\urcorner}\cdot 7^{\ulcorner 1\urcorner}\cdot 11^{\ulcorner )\urcorner}\cdot 13^{\ulcorner +\urcorner}\cdot 17^{\ulcorner 1\urcorner}\cdot 19^{\ulcorner =\urcorner}\cdot 23^{\ulcorner 1\urcorner}\cdot 29^{\ulcorner +\urcorner}\cdot 31^{\ulcorner (\urcorner}\cdot 37^{\ulcorner 1\urcorner}\cdot 41^{\ulcorner +\urcorner}\cdot 43^{\ulcorner 1\urcorner}\cdot 47^{\ulcorner )\urcorner}$$

più esplicitamente:

$$2^{40} \cdot 3^{49} \cdot 5^{43} \cdot 7^{49} \cdot 11^{41} \cdot 13^{43} \cdot 17^{49} \cdot 19^{61} \cdot 23^{49} \cdot 29^{43} \cdot 31^{40} \cdot 37^{49} \cdot 41^{43} \cdot 43^{49} \cdot 47^{41}$$

# Cosa è una dimostrazione?

- Una dimostrazione dell'enunciato $F$ nella teoria $T$ è una successione finita di formule che inizia con assiomi di $T$, finisce con $F$ e nel mezzo ha formule ottenute da quelle prima tramite certe regole.

# Cosa è una dimostrazione?

- Una dimostrazione dell'enunciato $F$ nella teoria $T$ è una successione finita di formule che inizia con assiomi di $T$, finisce con $F$ e nel mezzo ha formule ottenute da quelle prima tramite certe regole.
- Ma tanto le formule le sappiamo codificare coi numeri.

# Cosa è una dimostrazione?

- Una dimostrazione dell'enunciato $F$ nella teoria $T$ è una successione finita di formule che inizia con assiomi di $T$, finisce con $F$ e nel mezzo ha formule ottenute da quelle prima tramite certe regole.
- Ma tanto le formule le sappiamo codificare coi numeri.
- E le successioni finite di cose che sappiamo codificare coi numeri, le sappiamo a loro volta codificare coi numeri.

# Cosa è una dimostrazione?

- Una dimostrazione dell'enunciato $F$ nella teoria $T$ è una successione finita di formule che inizia con assiomi di $T$, finisce con $F$ e nel mezzo ha formule ottenute da quelle prima tramite certe regole.
- Ma tanto le formule le sappiamo codificare coi numeri.
- E le successioni finite di cose che sappiamo codificare coi numeri, le sappiamo a loro volta codificare coi numeri.
- Bisogna codificare anche gli assiomi di $T$. Se sono infiniti, non possiamo scriverli tutti esplicitamente dentro un numero. Ma se c'è un app, possiamo codificare con un numero il codice sorgente dell'app! (anche per le regole di dimostrazione "c'è un'app")

# Cosa è una dimostrazione?

- Una dimostrazione dell'enunciato $F$ nella teoria $T$ è una successione finita di formule che inizia con assiomi di $T$, finisce con $F$ e nel mezzo ha formule ottenute da quelle prima tramite certe regole.
- Ma tanto le formule le sappiamo codificare coi numeri.
- E le successioni finite di cose che sappiamo codificare coi numeri, le sappiamo a loro volta codificare coi numeri.
- Bisogna codificare anche gli assiomi di $T$. Se sono infiniti, non possiamo scriverli tutti esplicitamente dentro un numero. Ma se c'è un app, possiamo codificare con un numero il codice sorgente dell'app! (anche per le regole di dimostrazione "c'è un'app")
- Fare questo richiede abbastanza lavoro e ci sono un bel po' di dettagli da controllare.

# Cosa è una dimostrazione?

- Una dimostrazione dell'enunciato $F$ nella teoria $T$ è una successione finita di formule che inizia con assiomi di $T$, finisce con $F$ e nel mezzo ha formule ottenute da quelle prima tramite certe regole.
- Ma tanto le formule le sappiamo codificare coi numeri.
- E le successioni finite di cose che sappiamo codificare coi numeri, le sappiamo a loro volta codificare coi numeri.
- Bisogna codificare anche gli assiomi di $T$. Se sono infiniti, non possiamo scriverli tutti esplicitamente dentro un numero. Ma se c'è un app, possiamo codificare con un numero il codice sorgente dell'app! (anche per le regole di dimostrazione "c'è un'app")
- Fare questo richiede abbastanza lavoro e ci sono un bel po' di dettagli da controllare. Ve li risparmio, ma il punto è:

## Lemma

Se $T$ è una "teoria che contiene abbastanza aritmetica", allora c'è una formula $\mathrm{D}_T(x)$ tale che, per ogni $n$ numero naturale, $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [. . . ] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [. . . ] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice “io non sono dimostrabile in $T$”.
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
    - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
      (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
  - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
    (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)
  - Ma per costruzione $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
  - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
    (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)
  - Ma per costruzione $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T \vdash \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
  - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
    (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)
  - Ma per costruzione $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T \vdash \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Ma avevamo anche $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [. . . ] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
  - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
    (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)
  - Ma per costruzione $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T \vdash \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Ma avevamo anche $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T$ è incoerente.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
  - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
    (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)
  - Ma per costruzione $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T \vdash \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Ma avevamo anche $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T$ è incoerente. Ma abbiamo assunto che non lo fosse.

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
  - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
    (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)
  - Ma per costruzione $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T \vdash \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Ma avevamo anche $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T$ è incoerente. Ma abbiamo assunto che non lo fosse.
- Quindi $T \nvdash G$, e $G$ dice "$T$ non mi dimostra".

# La vendetta del mentitore

Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (detto male): Se $T$ è una teoria coerente tale che [...] allora $T$ non dimostra tutte le cose vere nei numeri naturali.

- Per dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza, il trucco è scrivere una formula $G$ che dice "io non sono dimostrabile in $T$".
- Più precisamente, tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Vediamo dopo come si può fare, ma intanto:
- $G$ non è dimostrabile in $T$.
  - Supponiamo per assurdo che $T \vdash G$. Per il Lemma $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
    (Lemma: $T \vdash \mathrm{D}_T(n)$ se e solo se $n$ codifica una formula che ha una dimostrazione in $T$.)
  - Ma per costruzione $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T \vdash \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Ma avevamo anche $T \vdash \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Quindi $T$ è incoerente. Ma abbiamo assunto che non lo fosse.
- Quindi $T \nvdash G$, e $G$ dice "$T$ non mi dimostra". Ma allora $G$ è vera in $\mathbb{N}$!

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Come $G$ non possiamo prendere direttamente $\neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Come $G$ non possiamo prendere direttamente $\neg \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Infatti, nella codifica con i caratteri ad esponente, dovrebbe contenere il suo codice $\ulcorner G \urcorner$ spalmato fra vari esponenti.

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\,\mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Come $G$ non possiamo prendere direttamente $\neg\,\mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Infatti, nella codifica con i caratteri ad esponente, dovrebbe contenere il suo codice $\ulcorner G \urcorner$ spalmato fra vari esponenti.
  - Da questo seguirebbe facilmente la contraddizione $\ulcorner G \urcorner > \ulcorner G \urcorner$.

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\,\mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Come $G$ non possiamo prendere direttamente $\neg\,\mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Infatti, nella codifica con i caratteri ad esponente, dovrebbe contenere il suo codice $\ulcorner G \urcorner$ spalmato fra vari esponenti.
  - Da questo seguirebbe facilmente la contraddizione $\ulcorner G \urcorner > \ulcorner G \urcorner$.
- Un trucco per risolvere il problema è prendere una $G$ che dice:

$$\neg\,\mathrm{D}_T(n) \text{ dove } n \text{ è il risultato di un certo conto } C$$

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Come $G$ non possiamo prendere direttamente $\neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Infatti, nella codifica con i caratteri ad esponente, dovrebbe contenere il suo codice $\ulcorner G \urcorner$ spalmato fra vari esponenti.
  - Da questo seguirebbe facilmente la contraddizione $\ulcorner G \urcorner > \ulcorner G \urcorner$.
- Un trucco per risolvere il problema è prendere una $G$ che dice:

$$\neg\, \mathrm{D}_T(n) \text{ dove } n \text{ è il risultato di un certo conto } C$$

e scrivere un conto $C$ che restituisce proprio $\ulcorner G \urcorner$.

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Come $G$ non possiamo prendere direttamente $\neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Infatti, nella codifica con i caratteri ad esponente, dovrebbe contenere il suo codice $\ulcorner G \urcorner$ spalmato fra vari esponenti.
  - Da questo seguirebbe facilmente la contraddizione $\ulcorner G \urcorner > \ulcorner G \urcorner$.
- Un trucco per risolvere il problema è prendere una $G$ che dice:

  $$\neg\, \mathrm{D}_T(n) \text{ dove } n \text{ è il risultato di un certo conto } C$$

  e scrivere un conto $C$ che restituisce proprio $\ulcorner G \urcorner$.
- Se invece che in un linguaggio formale stessimo lavorando in italiano, $G$ avrebbe un aspetto del genere:

# Come si costruisce questa formula?

- Resta da fare: costruire una formula $G$ tale che $T \vdash G \leftrightarrow \neg\,\mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
- Come $G$ non possiamo prendere direttamente $\neg\,\mathrm{D}_T(\ulcorner G \urcorner)$.
  - Infatti, nella codifica con i caratteri ad esponente, dovrebbe contenere il suo codice $\ulcorner G \urcorner$ spalmato fra vari esponenti.
  - Da questo seguirebbe facilmente la contraddizione $\ulcorner G \urcorner > \ulcorner G \urcorner$.
- Un trucco per risolvere il problema è prendere una $G$ che dice:

  $$\neg\,\mathrm{D}_T(n) \text{ dove } n \text{ è il risultato di un certo conto } C$$

  e scrivere un conto $C$ che restituisce proprio $\ulcorner G \urcorner$.
- Se invece che in un linguaggio formale stessimo lavorando in italiano, $G$ avrebbe un aspetto del genere:

  “, preceduta da sé stessa fra virgolette, non è dimostrabile.”, preceduta da sé stessa fra virgolette, non è dimostrabile.

# Abbiamo dimostrato il Primo Teorema di Incompletezza?

## (o almeno: lo avremmo dimostrato se avessimo fatto tutti i dettagli che ho saltato?)

Primo Teorema di Incompletezza: Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

# Abbiamo dimostrato il Primo Teorema di Incompletezza?

## (o almeno: lo avremmo dimostrato se avessimo fatto tutti i dettagli che ho saltato?)

Primo Teorema di Incompletezza: Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

- Non del tutto. Abbiamo dimostrato la versione "detta male": per ogni $T$ [tale che. . . ] c'è un'enunciato $G$ vero in $\mathbb{N}$ che $T$ non dimostra, cioè $T \nvdash G$.

# Abbiamo dimostrato il Primo Teorema di Incompletezza?

## (o almeno: lo avremmo dimostrato se avessimo fatto tutti i dettagli che ho saltato?)

Primo Teorema di Incompletezza: Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

- Non del tutto. Abbiamo dimostrato la versione "detta male": per ogni $T$ [tale che...] c'è un'enunciato $G$ vero in $\mathbb{N}$ che $T$ non dimostra, cioè $T \nvdash G$.
- Per quella "enunciata bene" serve una formula $R$ tale che $T \nvdash R$ e $T \nvdash \neg R$.

# Abbiamo dimostrato il Primo Teorema di Incompletezza?

## (o almeno: lo avremmo dimostrato se avessimo fatto tutti i dettagli che ho saltato?)

Primo Teorema di Incompletezza: Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

- Non del tutto. Abbiamo dimostrato la versione "detta male": per ogni $T$ [tale che…] c'è un'enunciato $G$ vero in $\mathbb{N}$ che $T$ non dimostra, cioè $T \nvdash G$.
- Per quella "enunciata bene" serve una formula $R$ tale che $T \nvdash R$ e $T \nvdash \neg R$.
- Il trucco (dovuto a Rosser) è scrivere una $R$ che dice "se io ho una dimostrazione, allora la mia negazione ne ha una più corta".

# Abbiamo dimostrato il Primo Teorema di Incompletezza?

## (o almeno: lo avremmo dimostrato se avessimo fatto tutti i dettagli che ho saltato?)

Primo Teorema di Incompletezza: Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ è incompleta.

- Non del tutto. Abbiamo dimostrato la versione "detta male": per ogni $T$ [tale che...] c'è un'enunciato $G$ vero in $\mathbb{N}$ che $T$ non dimostra, cioè $T \nvdash G$.
- Per quella "enunciata bene" serve una formula $R$ tale che $T \nvdash R$ e $T \nvdash \neg R$.
- Il trucco (dovuto a Rosser) è scrivere una $R$ che dice "se io ho una dimostrazione, allora la mia negazione ne ha una più corta".
- Provate a capire perché questa $R$ funziona.

# E il Programma di Hilbert?

# E il Programma di Hilbert?

# E il Programma di Hilbert???

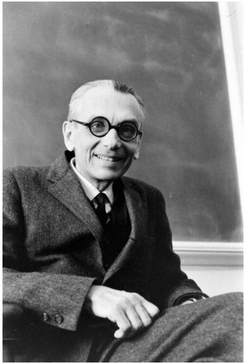
von Neumann, 34,419 giorni fa, 75 giorni dopo aver parlato con Gödel, gli scrive:

"Caro Kurt, sai cosa segue dal tuo Primo Teorema di Incompletezza?"

# E il Programma di Hilbert???

von Neumann, 34,419 giorni fa, 75 giorni dopo aver parlato con Gödel, gli scrive:

"Caro Kurt, sai cosa segue dal tuo Primo Teorema di Incompletezza?"



"Il mio Secondo Teorema di Incompletezza; l'ho giusto mandato a una rivista, gli è arrivato 3 giorni fa."

# Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".

## Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$.

# Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{“}T\text{ è coerente”}} \rightarrow \underbrace{\neg \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \qquad (*)$$

# Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{"}T\text{ è coerente"}} \to \underbrace{\neg\, \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \qquad (*)$$

- Hilbert voleva $T_{\text{debole}} \vdash \neg\, \mathrm{D}_{T_{\text{forte}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

## Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{“}T\text{ è coerente”}} \to \underbrace{\neg\, \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \tag{$*$}$$

- Hilbert voleva $T_{\text{debole}} \vdash \neg\, \mathrm{D}_{T_{\text{forte}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Dato che $T_{\text{debole}}$ dovrebbe avere meno assiomi di $T_{\text{forte}}$, ne seguirebbe $T_{\text{debole}} \vdash \neg\, \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

# Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{“}T\text{ è coerente”}} \rightarrow \underbrace{\neg \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \qquad (*)$$

- Hilbert voleva $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{forte}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Dato che $T_{\text{debole}}$ dovrebbe avere meno assiomi di $T_{\text{forte}}$, ne seguirebbe $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Ma per $(*)$, allora $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(G)$.

# Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{"}T\text{ è coerente"}} \to \underbrace{\neg \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \qquad (*)$$

- Hilbert voleva $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{forte}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Dato che $T_{\text{debole}}$ dovrebbe avere meno assiomi di $T_{\text{forte}}$, ne seguirebbe $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Ma per $(*)$, allora $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(G)$.
- Che è equivalente a $G$. Quindi $T_{\text{debole}} \vdash G$.

# Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg\, \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{“}T\text{ è coerente”}} \to \underbrace{\neg\, \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \qquad (*)$$

- Hilbert voleva $T_{\text{debole}} \vdash \neg\, \mathrm{D}_{T_{\text{forte}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Dato che $T_{\text{debole}}$ dovrebbe avere meno assiomi di $T_{\text{forte}}$, ne seguirebbe $T_{\text{debole}} \vdash \neg\, \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Ma per $(*)$, allora $T_{\text{debole}} \vdash \neg\, \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(G)$.
- Che è equivalente a $G$. Quindi $T_{\text{debole}} \vdash G$.
- Ma il Primo Teorema di Incompletezza dice che $T_{\text{debole}} \nvdash G$!

# Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{“}T\text{ è coerente”}} \rightarrow \underbrace{\neg \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \qquad (*)$$

- Hilbert voleva $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{forte}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Dato che $T_{\text{debole}}$ dovrebbe avere meno assiomi di $T_{\text{forte}}$, ne seguirebbe $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Ma per $(*)$, allora $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(G)$.
- Che è equivalente a $G$. Quindi $T_{\text{debole}} \vdash G$.
- Ma il Primo Teorema di Incompletezza dice che $T_{\text{debole}} \nvdash G$!
- Quindi, ci sono brutte notizie per Hilbert: se $T_{\text{debole}}$ è coerente, allora non dimostra di essere coerente.

## Ma il sistema questo teorema lo sa dimostrare?

- Se guardiamo il Primo Teorema di Incompletezza da un altro angolo, dice: "se $T$ (soddisfa certe ipotesi ed) è coerente, allora non dimostra $G$".
- Controllando i dettagli con (molta) cura, si scopre che si riesce a rifare la dimostrazione vista prima dentro $T$. Cioè:

$$T \vdash \underbrace{(\neg \mathrm{D}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))}_{\text{“}T\text{ è coerente”}} \to \underbrace{\neg \mathrm{D}_T(G)}_{\leftrightarrow G} \qquad (*)$$

- Hilbert voleva $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{forte}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Dato che $T_{\text{debole}}$ dovrebbe avere meno assiomi di $T_{\text{forte}}$, ne seguirebbe $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- Ma per $(*)$, allora $T_{\text{debole}} \vdash \neg \mathrm{D}_{T_{\text{debole}}}(G)$.
- Che è equivalente a $G$. Quindi $T_{\text{debole}} \vdash G$.
- Ma il Primo Teorema di Incompletezza dice che $T_{\text{debole}} \nvdash G$!
- Quindi, ci sono brutte notizie per Hilbert: se $T_{\text{debole}}$ è coerente, allora non dimostra di essere coerente. Figuriamoci se dimostra la coerenza di $T_{\text{forte}}$!

# Il Secondo Teorema di Incompletezza

Abbiamo appena dimostrato il:

**Teorema (Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ non dimostra la sua coerenza.

# Il Secondo Teorema di Incompletezza

Abbiamo appena dimostrato il:

### Teorema (Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ non dimostra la sua coerenza.

In altre parole abbiamo visto come si dimostra che

# Il Secondo Teorema di Incompletezza

Abbiamo appena dimostrato il:

**Teorema (Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ non dimostra la sua coerenza.

In altre parole abbiamo visto come si dimostra che $T$ non dimostra

# Il Secondo Teorema di Incompletezza

Abbiamo appena dimostrato il:

**Teorema (Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ non dimostra la sua coerenza.

In altre parole abbiamo visto come si dimostra che $T$ non dimostra che non può dimostrare tutto.

# Il Secondo Teorema di Incompletezza

Abbiamo appena dimostrato il:

**Teorema (Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel (versione moderna))**

Siano $L$ un linguaggio del prim'ordine e $T$ una $L$-teoria coerente, ricorsivamente assiomatizzata, e che interpreti l'aritmetica di Robinson. Allora $T$ non dimostra la sua coerenza.

In altre parole abbiamo visto come si dimostra che $T$ non dimostra che non può dimostrare tutto. A meno che $T$ non dimostri DAVVERO TUTTO.

## Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.

## Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo “la mente umana è più potente di qualunque computer”.

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo “la mente umana è più potente di qualunque computer”.
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.

## Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo "la mente umana è più potente di qualunque computer".
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l'ipotesi "si deve poter scrivere un'app che riconosce gli assiomi".

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo “la mente umana è più potente di qualunque computer”.
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l’ipotesi “si deve poter scrivere un’app che riconosce gli assiomi”.
- Questa ipotesi è cruciale

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo "la mente umana è più potente di qualunque computer".
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l'ipotesi "si deve poter scrivere un'app che riconosce gli assiomi".
- Questa ipotesi è cruciale: la collezione di tutte le formule vere in $\mathbb{N}$ è completa e coerente

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo “la mente umana è più potente di qualunque computer”.
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l’ipotesi “si deve poter scrivere un’app che riconosce gli assiomi”.
- Questa ipotesi è cruciale: la collezione di tutte le formule vere in $\mathbb{N}$ è completa e coerente. Ma non è ricorsivamente assiomatizzabile.

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo “la mente umana è più potente di qualunque computer”.
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l’ipotesi “si deve poter scrivere un’app che riconosce gli assiomi”.
- Questa ipotesi è cruciale: la collezione di tutte le formule vere in $\mathbb{N}$ è completa e coerente. Ma non è ricorsivamente assiomatizzabile.
- E il programma di Hilbert?

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo "la mente umana è più potente di qualunque computer".
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l'ipotesi "si deve poter scrivere un'app che riconosce gli assiomi".
- Questa ipotesi è cruciale: la collezione di tutte le formule vere in $\mathbb{N}$ è completa e coerente. Ma non è ricorsivamente assiomatizzabile.
- E il programma di Hilbert?
- Beh, qualcosa è comunque stato fatto. Per esempio, di "numeri infiniti e infinitesimi" si può parlare in maniera rigorosa.

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo “la mente umana è più potente di qualunque computer”.
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l’ipotesi “si deve poter scrivere un’app che riconosce gli assiomi”.
- Questa ipotesi è cruciale: la collezione di tutte le formule vere in $\mathbb{N}$ è completa e coerente. Ma non è ricorsivamente assiomatizzabile.
- E il programma di Hilbert?
- Beh, qualcosa è comunque stato fatto. Per esempio, di “numeri infiniti e infinitesimi” si può parlare in maniera rigorosa.
- Si chiama *analisi non-standard*, e in sostanza permette di ragionare “come Newton e Leibniz”: senza $\varepsilon$ e $\delta$ ma con *veri* infinitesimi. Rigorosamente.

# Il mondo dopo i Teoremi di Incompletezza

- Dai Teoremi di Gödel, molta gente ha tratto conclusioni affrettate.
- Tipicamente cose tipo "la mente umana è più potente di qualunque computer".
- Non ne discuteremo, comunque i Teoremi di Gödel *non* dicono questo.
- Una cosa che molti si dimenticano quando enunciano i Teoremi di Gödel è l'ipotesi "si deve poter scrivere un'app che riconosce gli assiomi".
- Questa ipotesi è cruciale: la collezione di tutte le formule vere in $\mathbb{N}$ è completa e coerente. Ma non è ricorsivamente assiomatizzabile.
- E il programma di Hilbert?
- Beh, qualcosa è comunque stato fatto. Per esempio, di "numeri infiniti e infinitesimi" si può parlare in maniera rigorosa.
- Si chiama *analisi non-standard*, e in sostanza permette di ragionare "come Newton e Leibniz": senza $\varepsilon$ e $\delta$ ma con *veri* infinitesimi. Rigorosamente.
- Ma questa è un'altra storia.

# Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.

## Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!

## Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata $\mathsf{ZFC}$.

# Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata $\mathsf{ZFC}$.
- È una teoria degli insiemi, e dimostra che l'Aritmetica di Peano è coerente.

# Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata $\mathsf{ZFC}$.
- È una teoria degli insiemi, e dimostra che l'Aritmetica di Peano è coerente.
- Ma $\mathsf{ZFC}$ non dimostra che $\mathsf{ZFC}$ è coerente…

# Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata ZFC.
- È una teoria degli insiemi, e dimostra che l'Aritmetica di Peano è coerente.
- Ma ZFC non dimostra che ZFC è coerente...
- ...o perlomeno nessuno è riuscito a dimostrare dentro ZFC che ZFC è coerente.

# Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata ZFC.
- È una teoria degli insiemi, e dimostra che l'Aritmetica di Peano è coerente.
- Ma ZFC non dimostra che ZFC è coerente...
- ...o perlomeno nessuno è riuscito a dimostrare dentro ZFC che ZFC è coerente.
- N.B.: per il Secondo Teorema di Incompletezza, se qualcuno ci riesce, allora ha dimostrato che ZFC è incoerente!

## Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata ZFC.
- È una teoria degli insiemi, e dimostra che l'Aritmetica di Peano è coerente.
- Ma ZFC non dimostra che ZFC è coerente...
- ...o perlomeno nessuno è riuscito a dimostrare dentro ZFC che ZFC è coerente.
- N.B.: per il Secondo Teorema di Incompletezza, se qualcuno ci riesce, allora ha dimostrato che ZFC è incoerente!
- Se questo dovesse succedere ~~si ride tantis~~ il consenso è che una modificazione minore di ZFC dovrebbe risolvere il problema.

# Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata ZFC.
- È una teoria degli insiemi, e dimostra che l'Aritmetica di Peano è coerente.
- Ma ZFC non dimostra che ZFC è coerente...
- ...o perlomeno nessuno è riuscito a dimostrare dentro ZFC che ZFC è coerente.
- N.B.: per il Secondo Teorema di Incompletezza, se qualcuno ci riesce, allora ha dimostrato che ZFC è incoerente!
- Se questo dovesse succedere ~~si ride tantis~~ il consenso è che una modificazione minore di ZFC dovrebbe risolvere il problema.
- Riguardo il Primo Teorema di Incompletezza, nel caso di ZFC, è venuto fuori che vari enunciati "naturali" sono indimostrabili e irrefutabili. (assumendo che ZFC sia coerente)

## Ma quindi della matematica ci possiamo fidare?

- Per il Secondo Teorema di Incompletezza, nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile coerente dell'aritmetica dimostra la sua coerenza.
- Questo non vieta a nessuno di dimostrarla in sistemi più forti!
- Oggi, di solito si formalizza la matematica in una teoria chiamata ZFC.
- È una teoria degli insiemi, e dimostra che l'Aritmetica di Peano è coerente.
- Ma ZFC non dimostra che ZFC è coerente...
- ...o perlomeno nessuno è riuscito a dimostrare dentro ZFC che ZFC è coerente.
- N.B.: per il Secondo Teorema di Incompletezza, se qualcuno ci riesce, allora ha dimostrato che ZFC è incoerente!
- Se questo dovesse succedere ~~si ride tantis~~ il consenso è che una modificazione minore di ZFC dovrebbe risolvere il problema.
- Riguardo il Primo Teorema di Incompletezza, nel caso di ZFC, è venuto fuori che vari enunciati "naturali" sono indimostrabili e irrefutabili. (assumendo che ZFC sia coerente)
- Ne vedrete uno esplicito in un'altra lezione in questi giorni.

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.

## E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.
- Per esempio, se ne può fare una che risolve tutta la "geometria algebrica".

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.
- Per esempio, se ne può fare una che risolve tutta la "geometria algebrica".
- Più precisamente: la teoria di $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è decidibile (Tarski).

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.
- Per esempio, se ne può fare una che risolve tutta la "geometria algebrica".
- Più precisamente: la teoria di $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è decidibile (Tarski).
- In un certo senso, i numeri complessi sono "più facili" dei numeri naturali.

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.
- Per esempio, se ne può fare una che risolve tutta la "geometria algebrica".
- Più precisamente: la teoria di $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è decidibile (Tarski).
- In un certo senso, i numeri complessi sono "più facili" dei numeri naturali.
- Ma per $\mathbb{C}$, c'è fisicamente un'app? Da dove la scarico?

## E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.
- Per esempio, se ne può fare una che risolve tutta la "geometria algebrica".
- Più precisamente: la teoria di $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è decidibile (Tarski).
- In un certo senso, i numeri complessi sono "più facili" dei numeri naturali.
- Ma per $\mathbb{C}$, c'è fisicamente un'app? Da dove la scarico?
- Si può scrivere

# E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.
- Per esempio, se ne può fare una che risolve tutta la "geometria algebrica".
- Più precisamente: la teoria di $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è decidibile (Tarski).
- In un certo senso, i numeri complessi sono "più facili" dei numeri naturali.
- Ma per $\mathbb{C}$, c'è fisicamente un'app? Da dove la scarico?
- Si può scrivere, ma si può anche dimostrare che ogni app del genere è condannata ad essere talmente lenta da essere inutilizzabile.

## E quella storia della decidibilità?

- Hilbert voleva scrivere un'app che decidesse se un enunciato matematico è vero.
- Una conseguenza dei Teoremi di Incompletezza è che questo non si può fare: la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ "è indecidibile".
- Insomma, non si può fare un'app che risolve tutta l'aritmetica.
- Figuriamoci una che risolve tutta la matematica!
- Però, se ne possono fare alcune che ne risolvono dei pezzi.
- Per esempio, se ne può fare una che risolve tutta la "geometria algebrica".
- Più precisamente: la teoria di $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è decidibile (Tarski).
- In un certo senso, i numeri complessi sono "più facili" dei numeri naturali.
- Ma per $\mathbb{C}$, c'è fisicamente un'app? Da dove la scarico?
- Si può scrivere, ma si può anche dimostrare che ogni app del genere è condannata ad essere talmente lenta da essere inutilizzabile.
  Ma pure questa è un'altra storia.

Grazie per l'attenzione!

# Crediti

- Foto di von Neumann:



- Tutte le altre immagini sono di pubblico dominio, sono meme, o non sono riuscito a tracciarne il copyright.