

Schemi

lunedì 13 marzo 2023 09:24

ARGOMENTI

- SPAZI METRICI, SPAZI DI BANACH, SPAZI NORMATI, SPAZI L^p , DISTANZA DI HAUSDORFF
- DIFFERENZIABILITA'
- FUNZIONI IMPLICITE
- MAX E MIN LIBERI E VINCOLATI
- TEORIA DELLA MISURA
- INTEGRALI MISTI
- FOURIER
- CONVOLUZIONE
- ALTRO
- CURVE E INTEGRALI CURVILINEI
- FORME DIFFERENZIALI
- SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE
- TEOREMA DI GAUSS-GREEN, DIVERGENZA, STOKES E FORMULA DELL'AREA
- SUPERFICI IN \mathbb{R}^n E k-FORME
- EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DIFFERENZIABILITA'

- 1) INSIEMI DI DEFINIZIONE
- 2) RAPPRESENTAZIONE GRAFICA E CURVE DI LIVELLO
- 3) LIMITI E CONTINUITA'
- 4) DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI E GRADIENTE
- 5) DIFFERENZIABILITA' E DERIVABILITA'
- 6) DERIVATE DELLE FUNZIONI COMPOSTE
- 7) DERIVATE MISTE
- 8) TAYLOR

INSIEMI DI DEFINIZIONE

Come trovare il dominio

- 1 Capire a quali condizioni di esistenza è soggetta f

Qui si tratta di studiare il dom. di funzioni a una variabile

- 2 Mettere a sistema le condizioni del punto 1 per determinare $D = \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui valgono tutte. (intersezione)

Si procede per interpretazione grafica

- A Si disegna il piano cartesiano

Supponiamo di aver individuato n condizioni al p.to 1

- B Rappresento la frontiera dell'insieme delle sol. della 1^a condizione

Rappresento la frontiera dell'insieme delle sol. della 2^a condizione

...

Rappresento la frontiera dell'insieme delle sol. della n ^a condizione

- C Si prende l'intersezione (grafica)

- 3 nota: non è sempre possibile la rappresentazione analitica del dominio

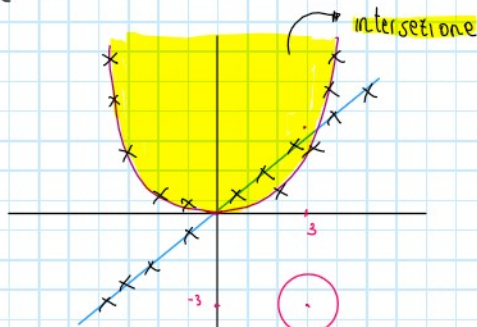
Esempio

$$f(x,y) = \frac{\log(y-x^2) \sqrt{x^2-6x+y^2+6y+17}}{y-x}$$

1 Condizioni di esistenza

$$\begin{cases} \bullet y - x^2 > 0 & (i) \\ \bullet x^2 - 6x + y^2 + 6y + 17 \geq 0 & (ii) \\ \bullet y - x \neq 0 & (iii) \end{cases}$$

2



$y - x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2 \Rightarrow y$ dentro la Parabola

⚠️ frontiera non ammessa

$x^2 - 6x + y^2 + 6y + 17 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + 17 - 9 - 9 \geq 0$
 $\Rightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 = 1$

Circonf. di raggio 1 e centro (-3,3)

Sono tutti i p.ti fuori dalla circonf

⚠️ qui la frontiera è ammessa

3 $\text{Dom}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y > x^2 \wedge y \neq x \}$

$y \neq x \Rightarrow y$ non sta sulla bisettrice

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Metodo 1 \rightarrow curve di livello

Teoria

$f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$

Si definisce **curva di livello** l'insieme costituito dai p.ti del dominio che soddisfanno l'equazione $f(x,y) = k$

$L(f,k) = \{ (x,y) \in \text{dom}(f) \mid f(x,y) = k \}$

Se $k \notin \text{Im}(f) \Rightarrow L(f,k) = \emptyset$

$f(x,y) = k \Rightarrow \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = k \end{cases} \quad (x)$

geometricamente le linee di livello sono le proiezioni ortogonali sul piano Oxy delle curve ottenute da *

Tutti i p.ti che e alla stessa curva di livello avranno la stessa quota $z=k$

Casi piu' comuni

parametro $a, b, c, d, p, q, \lambda \in \mathbb{R}$

fascio improprio di rette $y = mx + q \quad ax + by + c + t(dx + py + \lambda) = 0$

famiglia di parabole $y = ax^2 + bx + c \quad / x = ay^2 + by + c$

famiglia di circonferenze $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2 \quad x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \quad d = -2x_c, e = -2y_c, f = x_c^2 + y_c^2 - r^2$

famiglia di ellissi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{elisse traslata})$

famiglia di iperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{iperbole traslata})$

Come studiare le curve di livello

fisso una quota generica $z=k$

Al variare della quota ottengo una famiglia di curve

Metodo 1 \rightarrow Rappresentazione grafica

Consiste nel rappresentare le coordinate $(x, y, f(x, y))$ in un riferimento cartesiano ortogonale a z . Ottenendo una superficie in \mathbb{R}^3

Esempio

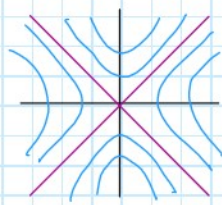
$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Metodo 1

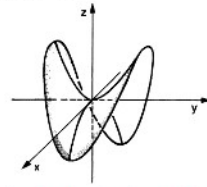
$$y^2 - x^2 = z = \text{costante}$$

Se $z=0 \Rightarrow y = \pm x$ (bisettrici)

Se $z \neq 0 \Rightarrow$ iperboli equilateri $a=b=1$



Metodo 2



LIMITI

Definizione

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) p.to di accumulazione per A .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall (x,y) \in A \setminus \{(x_0,y_0)\}, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon \quad (\text{Se } \exists \Rightarrow \exists !)$$

Esempio

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$$

$$\text{Uso } x^4 = x^2 \cdot x^2 \leq x^2(x^2+y^2)$$

$$\left| \frac{x^4}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^4}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$$

$$\text{Perciò } \forall \varepsilon > 0 \text{ posto } \delta = \sqrt{\varepsilon} \text{ si ha } \sqrt{x^2+y^2} = |x+y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^4}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Come dim che \nexists lim

Se riesco a determinare due cammini per i quali il lim della restrizione è $\neq \Rightarrow \nexists$ lim

Cammini tipici:

1 Restrizioni su rette $\rightarrow y = m(x-x_0) + y_0$ $m \in \mathbb{R}$ $f(x,y)$ diventa $f(x, m(x-x_0) + y_0) \stackrel{x_0=y_0=0}{=} f(x, mx)$ e studio $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, m(x-x_0) + y_0)$
se il lim dipende da $m \Rightarrow \nexists$ lim di partenza

2 Restrizione sugli assi $\rightarrow y=0$ $f(x,y) = f(x,0)$ studio $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = l$ se $l \neq l' \Rightarrow \nexists$ lim
 $x=0$ $f(x,y) = f(0,y)$ studio $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = l'$

3 Restrizione su parabole $\rightarrow y = mx^2$ $\forall x = mx^2 \Rightarrow f(x,y)$ diventa $f(mxy^2, y)$

4 altre $\rightarrow f(t, f(t))$, $f(t, -t + t^2)$

Come dim che il lim \exists

Tecnica 1

Determinare una f. positiva $h(x,y)$ che soddisfa: A $|f(x,y) - l| \leq h(x,y) \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l$

$$B \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x,y) = 0$$

Tecnica 2

Passaggio in coordinate polari

Sia $\epsilon \in \mathbb{R}$ sup $\exists g(\rho)$ f. positiva t.c. $|f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - \epsilon| \leq g(\rho)$. Se $\lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \epsilon$

cioè faccio la sostituzione
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases}$$

Si usa specialmente a ρ_0 $x^2 + y^2$

Così che si usano per fare i limiti

- proprietà valore assoluto cioè $|f| \rightarrow 0 \Leftrightarrow f \rightarrow 0$
 - Carabinieri
 - Limiti notevoli
- } specialmente per tecnica 1

- maggiorazioni e minorazioni (specialmente tecnica 1)

- $x^2 y \sim 0 \leq |y| x^2$

- $|x y| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$

- $x^2 |y| \leq \frac{x^4 + y^2}{2}$

- $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$

- $|x| = \sqrt{x^2}$

- $x^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$

- $\sqrt{x^2} \geq |x| \Leftrightarrow |x| \leq 1$

- $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

- $x^2 \leq x^2 + y^2$

- $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{1}{|x| + |y|} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

- pareggiare gli esponenti $x^4 + y^2 \sim x^2 = u \Rightarrow u^2 + y^2$ oppure $y = v^2 \rightarrow x^4 + v^4$

Cambio di variabile utile

$$\begin{cases} X = \operatorname{sgn}(x) |x|^{\frac{1}{2}} \\ Y = \operatorname{sgn}(y) |y|^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{lo uso quando ho } |x|^a + |y|^b \text{ al denom o al numeratore}$$

⚠ possono esserci delle varianti

$$x^4 + |y|^2 \quad \begin{cases} X = x^2 \\ Y = |y|^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Continuità

$f(x,y)$ è continua in $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

esercizi tipici

- 1 Per quali $a \in \mathbb{R}$ \exists il lim?
- 2 Estendere la f. con continuità in (x_0, y_0) .
- 3 Verificare che non \exists il lim
- 4 Verificare che la f. è continua nel p.to (x_0, y_0) .

Esercizio 3.35 $f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ Per quali α è continua?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol.

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow |xy|^\alpha \leq \frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^\alpha$$

$$0 \leq f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha} \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow \alpha-1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1)$$

esercizio tipico 1

Es 3.26

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 + \frac{y^2}{3})}{x^2 + \frac{y^2}{3}} \quad \text{non è continua in } (0,0) \Rightarrow \text{estenderla per cont. in } (0,0)$$

Sol. Noto che $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ per il lim. notevole $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ per $t \rightarrow 0$

Posso estendere $f(x,y)$ in $(0,0)$ ponendo che a 0 faccia 1

$$\text{posto } t = x^2 + \frac{y^2}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \left| \frac{\sin t}{t} - 1 \right| < \varepsilon \text{ se } 0 < |t| < \delta$$

$$0 < x^2 + \frac{y^2}{3} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}} < \sqrt{3} \delta \Rightarrow \left| \frac{\sin(x^2 + \frac{y^2}{3})}{x^2 + \frac{y^2}{3}} - 1 \right| < \varepsilon$$

es tipico 2

Es 3.28

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \exists \text{ il lim a } 0?$$

$$f(0,y) = 0$$

$$f(x, mx) = f(t,t) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ il valore dipende da } m \Rightarrow \text{il lim}$$

Es 3.24

Usando la def. verificare che $f(x,y) = xy$ è continua in $(0,0)$

Sol.

Occorre verificare che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ si trova } |xy| < \varepsilon \text{ se } |x^2+y^2| < 2\varepsilon \Rightarrow \text{nella def. di limite posso scegliere } \delta = \sqrt{2\varepsilon}$$

es tipico 3

es tipico 4

DERIVATE DIREZIONALI

Teoria

$f(x,y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (x,y) $\in A$ e $v = (v_1, v_2)$ vettore di norma unitaria

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t}$$

⚠ Se u non ha norma unitaria \Rightarrow devo normalizzarlo cioè $v = \frac{u}{\|u\|}$

Come calcolare le derivate direzionali

Metodo 1

1 Normalizzare u cioè $v = \frac{u}{\|u\|}$ dove $u = (u_1, u_2)$
 $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \rho \neq 1$ (se $\rho = 1$ è normalizzato) $v = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{u_1}{\|u\|}, \frac{u_2}{\|u\|}\right) = \left(\frac{u_1}{\rho}, \frac{u_2}{\rho}\right)$

2 Costruisco il lim della def.

Metodo 2

Se f è differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$
 $\begin{matrix} \uparrow & \text{p. scalare} \\ v & \\ \downarrow & \text{unitario} \end{matrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\right) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(y_0) \cdot v_2$

DERIVATE PARZIALI

Sia $f(x,y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (x_0, y_0) $\in A$

f è derivabile rispetto a x nel pto (x_0, y_0) se $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

f è derivabile rispetto a y nel pto (x_0, y_0) se $\exists \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Legame tra der. parziali e der. direzionali

Se prendo il vettore $v = (1, 0)$ (rappresenta l'asse x) e $w = (0, 1)$ (rappresenta l'asse y) ottengo:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y+0) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x,y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+0, y+t) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y+t) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Così le der. parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono particolari derivate direzionali

Interpretazione geometrica di $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva che si ottiene intersecando il grafico di f con il piano $y = y_0$ nel pto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva che si ottiene intersecando il grafico di f con il piano $x = x_0$ nel pto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Così $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ ci danno la variazione istantanea di quota di f rispetto a x e a y

GRADIENTE

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Interpretazione geometrica

Valore che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$

In generale il \cdot tra 2 vettori è il prodotto delle loro norme per il coseno dell'angolo tra essi compreso

$$\text{così } \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \underbrace{\|v\|}_1 \cdot \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \cos \theta \quad \theta \in [0, \pi]$$

Quindi una volta fissato (x_0, y_0) $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ dipende solo da $\theta \Rightarrow$

- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è max per $\theta = 0 \Rightarrow v, \nabla f(x_0, y_0)$ hanno la stessa direzione e stesso verso
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è min per $\theta = \pi \Rightarrow v, \nabla f(x_0, y_0)$ hanno la stessa direzione ma verso opposto
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$ per $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v, \nabla f(x_0, y_0)$ sono perpendicolari tra loro

Quindi il $\nabla f(x_0, y_0)$ fornisce direzione e verso nei quali f cresce più rapidamente

$\nabla f(x_0, y_0)$ è \perp alle curve di livello ed è diretto verso le quote maggiori

DERIVABILITA'

Se f ammette derivate parziali in un pto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ è derivabile in (x_0, y_0)

DIFFERENZIABILITA'

Teoria

$f(x, y): A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in un pto $(x_0, y_0) \in A \Leftrightarrow \exists$ un'applicaz. lineare $L(h, k)$ t.c. $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + L(h, k) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$

dove $h = x - x_0$ = incremento di x
 $k = y - y_0$ = incremento di y

Se L esiste L = differenziale di f

$$L(h, k) = \alpha h + \beta k \quad (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$+ \alpha h + \beta k + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{\text{differenziale}}$$

Come stabilire se una funzione è differenziabile (si usano A, B, C)

A Teo 1

- Se f è diff in $(x_0, y_0) \Rightarrow$
- 1 $f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)
 - 2 $f(x, y)$ ammette der. direzionali lungo ogni direzione $v \in \mathbb{R}^2$
 - 3 $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Il Teo 1 viene usato per negazione cioè:

- 1 Se f non è continua in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ non è diff. in (x_0, y_0)
- 2 Se \exists vettore per il quale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ non esiste $\Rightarrow f$ non è diff. in (x_0, y_0)

B Condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità:

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è diff. in $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$

- 1 $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

2 $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \underbrace{(\nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k))}_{\text{scalar}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$

C Teorema del differenziale Totale

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se:

- 1 f ammette derivate parziali in un intorno di $(x_0, y_0) \in A$
 - 2 Se le der. parziali sono continue in (x_0, y_0)
- $\} \Rightarrow$ Allora f è diff. in (x_0, y_0)

Significato geometrico

$Z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) =$ eq. del piano tangente al grafico di f nel pto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Una f è diff in un pto se \exists il piano tangente passante per il pto in un intorno del quale è possibile approssimarla linearmente

RELAZIONI TRA CONTINUITA', DERIVABILITA' E DIFFERENZIABILITA'

- 1) f continua in x_0
- 2) Esistono le derivate parziali in x_0
- 3) Esistono tutte le derivate direzionali in x_0
- 4) f è differenziabile in x_0

$\} \Rightarrow$

3 \Rightarrow 2
4 \Rightarrow 1+2+3
3 \nRightarrow 1



e quindi anche parziali

\exists di tutte le der. direzionali in un pto \nRightarrow la continuità della f nel pto

\exists di tutte le der. diret. in un pto \nRightarrow la differenz.

f differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ derivabile in (x_0, y_0)

f differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in (x_0, y_0)

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ diff in $A \Rightarrow f \in C^0(A)$

super importante

DERIVATE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

$x(t), y(t)$ f. reali definite nell'intorno del pto $a=t$, $f(x, y)$ f. di var. reale definita in un intorno del pto $(x(t), y(t))=P$

Se $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili in $a=t$, Se $f(x, y)$ è differenziabile in $P=(x(t), y(t))$

Allora $t \mapsto f(x(t), y(t))$ (f. composta) è deriv. in t e $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)$

Teorema di Schwarz

- 1 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile (derivabile 2-volte)
 - 2 $x_0 \in U$
 - 3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \in Br(x_0)$ con $r > 0$ e sono continue in x_0
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}$$

Controesempio

$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2 y - y^2 x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ è derivabile 2-volte in \mathbb{R}^n ma le derivate miste non coincidono

TAYLOR

Teorema Taylor multivariable

Sia $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in U$

- 1) $f \in C^{K+1}(U)$ diff. K -volte in $x_0 \Rightarrow f(x) = T_K(f, x_0)(x) + o(|x-x_0|)$ dove $T_K(f, x_0)(x) = \sum_{i=0}^K \frac{1}{i!} D^{(i)} f(x_0) [x-x_0]^i$
 \downarrow Resto di Peano \downarrow pol. di grado K
 $\sum_{j_1, \dots, j_i} \frac{\partial^{(i)} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}} (x-x_0)_{j_1} \dots (x-x_0)_{j_i}$
- 2) $f \in C^{K+1}(U)$ diff. $(K+1)$ -volte in $x_0 \Rightarrow f(x) = T_K(f, x_0)(x) + \frac{1}{(K+1)!} D^{(K+1)} f(z) [x-x_0]^{K+1}$ con $z \in (x_0, x)$
 \downarrow $O(|x-x_0|^{K+1})$ Resto di la Grange.

FUNZIONI OMOGENEE

Def.

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se:

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Corollario

Sia f omogenea di grado α continua su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Se $\alpha \leq 0 \Rightarrow f$ non può essere estesa a una f continua su tutto \mathbb{R}^n tranne se $\alpha = 0$ e f sia costante

Se $\alpha > 0 \Rightarrow f$ è estendibile a una f continua con $f(0) = 0$

teo Eulero

Sia $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^h$ omogenea di grado α , sia $x \neq 0$, sia $\rho = \frac{x}{|x|}$

Allora $\exists \frac{\partial f}{\partial \rho}(x)$ e risulta che $|x| \frac{\partial f}{\partial \rho}(x) = \alpha f(x)$

Inoltre se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \Rightarrow |x| \frac{\partial f}{\partial \rho}(x) = x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x)$

Corollario

f omog. di grado α e $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ con $f(0) = 0$

Se $\alpha > 1 \Rightarrow f$ è C^1 su tutto \mathbb{R}^n

Se $\alpha = 1$ ed f non è lineare $\Rightarrow f$ non è diff in $(0,0)$

Se $\alpha < 1$ e f non è cost $\Rightarrow f$ non è diff in $(0,0)$

\nexists vettore $t.c. f(x) = v \cdot x$

Derivate prime e seconde definite tramite rapporti incrementali

- Se il risultato dei limiti $\in \mathbb{R} \Rightarrow$ le der parziali (prime/seconde)
- ⚠ questo lim. non mi dice che sono continue ma solo che esistono

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \bullet \text{ se } \exists \Rightarrow f \text{ è derivabile}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$f_{yy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0,h) - f_y(0,0)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

Per dim. che le der. parziali sono continue in un punto devo stimare gli incrementi di $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ nel pto

Sia (x_0, y_0) il punto in cui vogliamo vedere se le der parziali sono continue

Sia (x, y) punto qualsiasi

poniamo $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ espressione in r e y

per $r \rightarrow 0$ $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| = \left(\frac{\text{espressione in } r \text{ e } y}{r} \right) \rightarrow 0$ punto

$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| = \left(\frac{\text{espressione in } r \text{ e } x}{r} \right) \rightarrow 0$ punto

espress in r e x

idem per le der. II

Metodo alternativo per capire se f è diff. non pto

Calcolo $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$

$v = (\alpha, \beta)$

punto in cui voglio studiare la differenziabilità

espressione in α e β

se non è lineare in α e β $\frac{\alpha\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} / \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$

$\Rightarrow f$ non è diff perché

dovrei avere $\frac{d\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

se è lineare devo fare il lim con (h, k)

Ricorda

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v}$ con $v = (1, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}$ con $v = (0, 1)$

Osservazioni generali sullo studio della differenziabilità di f in un punto x^0 :

- se le funzioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_N} \text{ sono continue in } x^0$$

allora

f è differenziabile in x^0

(per il teorema del differenziale totale!)

- se per qualche $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$\nexists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$$

allora

f NON è differenziabile in x^0

(in effetti, non è definito $\nabla f(x^0)$, che è l'unico vettore candidato a verificare la definizione di differenziabilità!)

- se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_N}$$

sono definite ma non tutte continue in x^0

NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA, è necessario studiare la differenziabilità mediante la definizione!

Se f non è continua $\Rightarrow f$ non è differenziabile

DIFF. \Rightarrow CONTINUA

Se $f(x, y)$ avè la restrizione di f lungo la diret y
non è continua $\Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow$ la funz. non è derivabile

Se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è deriv.

$$\text{Se } \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$\nearrow h > 0$
 $\searrow h < 0$

$\nexists \Rightarrow$ non deriv. perchè $\nexists \lim \Rightarrow f$ non è deriv $\Rightarrow f$ non è diff.

FUNZIONI IMPLICITE

Setting

Sia $F(x, y)$ una funzione definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 e consideriamo l'equazione $F(x, y) = 0$

Obiettivo

Sotto quale condizioni $F(x, y) = 0$ esprime y in funzione di x ?

Cioè si vuole risolvere l'equaz. $F(x, y) = 0$ rispetto ad una delle 2 var.

definizione

Se $\exists U, V \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in U \exists! y \in V$ per cui $F(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = 0$ è un'eq. che definisce implicitamente una funzione di U in V che si indica con $y = f(x) =:$ **funzione implicita**.

In tal caso si ha $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U$

Teorema del Dini / funzioni implicite

Cosa dice il teorema

Se $F(x, y)$ è una f. continua con le der. parziali prime nell'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. (cioè $F \in C^1(A)$)

Se (x_0, y_0) è un pto in cui $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Allora è possibile esprimere y in funzione di x in un intorno U di x_0 .

Enunciato

- Sia $F(x, y)$ definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto
- $F \in C^1(A)$
- Se $\exists (x_0, y_0) \in A$ t.c. :
 - 1 $F(x_0, y_0) = 0$
 - 2 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Allora $\exists U$ int. di x_0 , V int. di y_0 t.c. l'eq. $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione f

$f: U \rightarrow V$, con le seguenti proprietà:

- f è $C^1(U)$
- $\forall x \in U \quad f'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$

Come si usa?

- * Teo di Dini assicura che \exists una f. implicita $y = f(x)$ ma non fornisce un modo per calcolarla.
- Fornisce un modo per calcolare $f'(x)$. Si derivano entrambi i membri di $F(x, y) = 0$ rispetto a x pensando a y come funzione di x e risolvendo rispetto a y' la risultante

esempio

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$\text{derivo rispetto a } x \rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$$

$$\text{Risolvo rispetto a } y' \rightarrow 3y'(y^2 - x) = 3(y - x^2) \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Osservazioni:

- Il procedimento mediante il quale si calcola $f'(x)$ senza conoscere $f(x)$ si chiama **derivazione implicita**.
- Il procedimento può essere iterato se F ha der. parz. di ordine superiore. Infatti se $F \in C^k(A)$ $\Rightarrow f \in C^k(U)$.
- Se sostituisco $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ con $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow F(x,y)=0$ definirà implicitamente $x=g(y)$ in un int di y_0 . In questo caso $Z = \{(x,y) | F(x,y)=0\}$ sarà in un int di (x_0, y_0) , un grafico avente per base un intervallo dell'asse y .
- In entrambi i casi Z ha **retta tangente** nel pto (x_0, y_0) di equaz. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.
- Un pto (\tilde{x}, \tilde{y}) per cui $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ si dice **singolare** (altrimenti è **regolare**).

Max e min delle f implicite

- Sia $F(x,y)$ una f che verifica le ip. del Teo di Dini.
- Sia $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) = 0$.
- Se F è $C^2 \Rightarrow f''(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F^2}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F^2}{\partial x}}{\frac{\partial F^3}{\partial y}}$ (calcolate in $(x, f(x))$)

Allora x_0 è di max relativo per f se $f'(x_0) = 0$ cioè 1 $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ 2 $f''(x_0) < 0$

$$\text{in tal caso } f''(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x \partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

quindi x_0 è di max se (x_0, y_0) è sol. del sistema $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases}$ e risulta $\frac{\frac{\partial F}{\partial x \partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} > 0$

Analogoamente con min ma con segno opposto

Teorema di invertibilità locale / funzioni inverse

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto e $f \in C^1(A)$ tr. 1 $f'(x_0) \neq 0$
2 $f(x_0) = y_0$

Allora \exists int di y_0 nel quale è def l'inversa di f , f^{-1} e l'è dotata di deriv. continua:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ con } y = f(x)$$

è una conseguenza del Teo del Dini applicato a $F(x,y) = y - f(x)$

Definizioni

• Sia A aperto di \mathbb{R}^n

• Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$

Diciamo che f è localmente invertibile in $x_0 \in A$ se $\exists I \text{ int } \subseteq A$ di x_0 t.c. $f|_I$ sia invertibile su $f(I)$

Se $f|_I$ è $C^{-1} \Rightarrow f$ è un diffeomorfismo locale in x_0

Teorema dell'invertibilità locale

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
 - Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$
 - $f \in C^1(A)$
 - $x_0 \in A$
- Se $\det \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0$ allora f è un diffeomorfismo locale in x_0

Da Dini si ha che $\frac{\partial f^{-1}}{\partial y} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(f^{-1}(y)) \right]^{-1}$ equivalentemente $J_{f^{-1}}(y) = [J_f(f^{-1}(y))]^{-1}$

Teorema del Dini caso generale

notazioni introduttive

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

de $(J_f(x_0))_j$ quando passo in coordinate polari $f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

Teo dini 3 var.

$F = F(x, y, z) \in C^1(A)$, A aperto di \mathbb{R}^3

$F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Allora $\exists U$ int di (x_0, y_0) e V int di \mathbb{R} t.c. $\forall (x, y) \in U \exists ! z = f(x, y) \in V$ t.c.

$F(x, y, z) = 0$, $f \in C^1$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$

Esempio

$$g(x, y) = y^5 - x^6$$

1) In un int di $(1, 1)$ g soddisfa le hp del Teo del Dini? Se sì calcolare $y'(1)$

2) Calcolare l'eq. della retta tangente al grafico della f . $y = y(x)$ nel pto $(1, 1)$

Sol 1

$$g(1,1) \stackrel{?}{=} 0 \quad g(1,1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{OK}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) \neq 0? \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 5y^4(1,1) = 5 \neq 0 \quad \text{OK}$$

$$g \in C^1(\mathbb{R}^2) \text{ OK}$$

Si soddisfa le hip del Teo del Dini $\Rightarrow g(x,y)=0$ ammette una rappresentazione come grafico di una funzione $y=y(x)$ in un int di (y)

$$y'(1) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)} = - \frac{-6}{5} = \frac{6}{5}$$

Sol 2

$$\text{eq. retta tangente } \frac{\partial g}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow -6(x-1) + 5(y-1) \Rightarrow 5y = 5 + 6x - 6 = 6x - 1 \quad y = \frac{6}{5}x - \frac{1}{5}$$

Esempio 2

$$f(x,y) = (x-2)^2 + e^y - y^2$$

1 Dim che l'eq. $f(x,y)=0$ definisce un'unica f. implicita $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2 Determinare eventuali pt critici per y presandone la natura.

Sol 1

$$\text{Per } x=2 \Rightarrow f(2,y) = e^y - y^2 = h(y)$$

$$h(y) \text{ è continua e } \lim_{y \rightarrow -\infty} h(y) = -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} h(y) = +\infty$$

$$\text{Per Teo } \exists y_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } h(y_0) = 0$$

Applico Teo Dini in un int di $(2, y_0)$

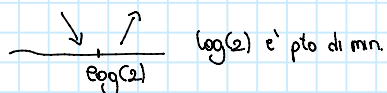
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (e^y - 2y)(2, y_0) \neq 0?$$

non posso farlo diretti \Rightarrow chiamo $z(y) = e^y - 2y$

$$z'(y) = e^y - 2$$

$$z'(y) = 0 \Leftrightarrow e^y = 2 \Leftrightarrow y = \log(2)$$

$$z'(y) > 0 \Leftrightarrow e^y > 2 \Leftrightarrow y > \log(2)$$



$$z(\log(2)) = e^{\log(2)} - 2\log(2) = 2(1 - \log(2)) > 0$$

Il teo del Dini è soddisfatto per $(2, y_0)$

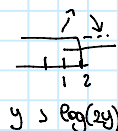
$$\exists \text{ un int. } U \times V \text{ di } (2, y_0) \text{ t.c. } y = \phi(x) \quad \forall (x,y) \in U \text{ e } \phi'(x) = \frac{4-2x}{e^y - 2y}$$

Sol 2

$$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2x > 0 \quad x < 2$$

$$e^y - 2y > 0 \quad e^y > 2y$$



$(2, y_0)$ è pto di max.

ES FUNZIONI IMPLICITE

Tipologia 1

Data $f(x,y) = xy^2 + \sin(xy) + 3e^x - 3 + y$ determinare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 3x}{x}$ dove $g(x)$ è la f. che definisce esplicitamente il luogo dei pt. t.c. $f(x,y)=0$ in un int. di $(0,0)$

Sol

$f(x,y)=0$ è un'eq. implicita

$$y = g(x)$$

Uso teo f. implicite \rightarrow 1) $f(0,0)=0$ $0+0+3-3+0=0$

$$2) \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0 \quad 2xy + \cos(xy) \cdot x + 1 = 1$$

$\exists \delta > 0 \quad \exists g \in C^1((- \delta, \delta), \mathbb{R})$ t.c. $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x$
 $g(0) = 0$

$$g'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

Calcolo del lim. $\frac{g(x) + 3x}{x} = \frac{0}{0}$ uso Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + 3}{1} \stackrel{!}{=} g'(0) + 3 = -3 + 3 = 0$$

$$g'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} = \frac{-\left(g^2(x) + \cos(xg(x))g(x) + 3e^x\right)}{2xg(x) + x\cos(xg(x)) + 1}$$

$$g'(0) = \frac{(g^2(0) + 1 \cdot g'(0) + 3)}{0 + 0 + 1} = -\frac{3}{1} = -3$$

Tipologia 2

$$x^3y + xy^4 = 2$$

Det. un pto x_0 nell'intorno del quale si può esprimere la y in funt. di x

$y = y(x)$. Det. il valore di $y'(x_0)$

Sia $f(x,y) = x^3y + xy^4 - 2 = 0$ eq. implicita

Trovare (x_0, y_0) t.c. $f(x_0, y_0) = 0$ es $x_0 = y_0 = 1$ risolvono l'eq.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 4xy^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1 + 4 = 5 \neq 0$$

Siamo nelle hp del Teo delle f. implicite

$$y = y(x) \quad y(1) = y(x_0) = y_0 = 1$$

$$y'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))} = \frac{-(3x^2y(x) + y^4(x))}{x^3 + 4x(y(x))^3}$$

$$y'(x_0) = - \frac{3+1}{1+4} = -\frac{4}{5}$$

$\underset{1}{x_0}$

MAX E MIN LIBERI E VINCOLATI

A) COME CALCOLARE MAX E MIN RELATIVI (CON HESSIANA)

Ap. necessarie:

- 1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $z = f(x, y)$ definita su un insieme aperto D . Stiamo cercando i p.ti $(x, y) \in D$ in cui f ha max e min
- 2) f ammette derivate parziali fino al 2° ordine nei p.ti $(x, y) \in D$

STEPS

- 1 Calcoliamo $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$
- 2 Cerco i p.ti stazionari cioè $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ elenco dei p.ti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ etc.
- 3 Calcolo la matrice Hessiana $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$
- 4 Valuto H_f nei p.ti stazionari cioè $H_f(x_1, y_1), H_f(x_2, y_2)$ etc.
- 5 Studio il segno delle matrici $H_f(x_i, y_i)$ e usiamo il seguente Teo di caratterizzazione di max e min

TEOREMA

- a Se l'Hessiana è definita positiva, allora (x_i, y_i) è un punto di minimo
- b Se l'Hessiana è definita negativa, allora (x_i, y_i) è un punto di massimo
- c Se l'Hessiana è indefinita, allora (x_i, y_i) è un punto di sella
- * d Se l'Hessiana è semidefinita (positiva/negativa) non possiamo dire nulla sulla natura del punto (x_i, y_i)

Il Teorema vale per funzioni da $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

5A funzioni di due variabili

- a' Se $\det H_f(x_i, y_i) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) > 0 \Rightarrow H_f(x_i, y_i)$ è def. positiva $\Rightarrow (x_i, y_i)$ è p.to di min
- b' Se $\det [H_f(x_i, y_i)] > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i) < 0 \Rightarrow H_f(x_i, y_i)$ è def. negativa $\Rightarrow (x_i, y_i)$ è p.to di max
- c' Se $\det [H_f(x_i, y_i)] < 0 \Rightarrow (x_i, y_i)$ è p.to di sella
- * d' Se $\det [H_f(x_i, y_i)] = 0 \Rightarrow$ non posso dire nulla.

5B funzioni di 3 o più variabili (va bene anche per 2)

Come studiare il segno di una matrice

I autovalori tutti positivi \Rightarrow def. positiva

II autovalori tutti negativi \Rightarrow def. negativa

III autovalori di sgn + e - \Rightarrow indefinita

IV c'è almeno un autovalore nullo \Rightarrow semidefinita

$p(t) = \det(A - tI)$ e le radici di $p(t)$ sono gli autovalori

B) QUANDO I MAX E I MIN RELATIVI SONO ANCHE ASSOLUTI?

1 Cercare tutti i p.ti di max e min relativi come in A

2 Fare considerazioni per riconoscere i max e min assoluti.

2A Considerare il comportamento globale di f , con particolare attenzione per gli estremi del dominio illimitati e limitati

• Se f è illimitata sup \Rightarrow no p.ti di max assoluto

• Se f è illimitata inf \Rightarrow no p.ti di min assoluto

2B Valutiamo $z_i = f(x_i, y_i)$ dove (x_i, y_i) sono p.ti di min o max relativi.

• Se f è lim. super. \Rightarrow il valore più grande degli z_i è max ass.

• Se f è lim. infer \Rightarrow il valore più piccolo degli z_i è min ass.

C) MAX E MIN SU INSIEMI CPT

1 Weierstrass $\Rightarrow f$ continua su un c.p.t. ammette max e min assoluto

2 Lavoro su $\text{Int}(D) = D - \partial D \Rightarrow$ si procede nella ricerca di max e min con Hf

3 Lavoro sulla frontiera ∂D
 $\begin{matrix} \nearrow \text{curva } C_1 \\ \searrow C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \end{matrix}$

3A Faccio una parametrizzazione di ogni curva $\Rightarrow C_i: y = g_i(x)$ con $x \in I_i \subseteq \mathbb{R}$

3B restringiamo la funzione $z = f(x, y)$ su ogni curva $\Rightarrow z = f(x, g_i(x)) : I_i \rightarrow \mathbb{R}$

3C Otengo m. funzioni di una sola var e ne studio max e min $\Rightarrow (x_0, g(x_0)) = (x_0, y_0)$

3D Otterremo così: $\left. \begin{matrix} \text{i punti ottenuti in 2} \\ \text{i punti ottenuti in 3} \end{matrix} \right\}$ li valuto in f
 $\begin{matrix} \nearrow \text{il valore + grande} \Rightarrow \text{max ass.} \\ \searrow \text{il valore + piccolo} \Rightarrow \text{min ass.} \end{matrix}$



Se i p.ti trovati in 2 e 3 sono sulla ∂D non sono assoluti \Rightarrow non posso dire nulla sulla loro natura

D) FUNZIONI DEFINITE MA NON DERIVABILI IN QUALCHE PUNTO

Si procede come nel caso 3 di C ($C = \text{max e min in un c.p.t.}$)

Poi si confrontano i valori ottenuti. (2 e 3 di C)

A') HESSIANO NULLO

approfondiamo i casi di d' di A

Metodo delle rette

Serve a dire che un certo pto è di sella.

Se però (x_0, y_0) non è p.to di sella \Rightarrow test non funziona e non posso dire nulla sul pto

- 1 Considero fascio di rette passanti per $(x_0, y_0) \Rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0) \quad m \in \mathbb{R} \Rightarrow y = mx - mx_0 + y_0$
- 2 $f(x, mx - mx_0 + y_0)$ m fissato (f. di una sola var)
- 3 calcolo f'
- 4 studio se x_0 è max, min, niente
- 5A Se x_0 non è né max né min $\Rightarrow (x_0, y_0)$ è di sella
- 5B Se x_0 è di max e trovo un'altra direzione $y = \tilde{m}x - \tilde{m}x_0 + y_0$ con $\tilde{m} \neq m$ per cui x_0 è di min $\Rightarrow (x_0, y_0)$ è di sella

MORALE

Se restringiamo la funzione lungo una retta passante per (x_0, y_0) e la restrizione lungo tale retta ha in x_0 un punto che non è né di max né di min allora (x_0, y_0) è di sella per f

Se troviamo due rette per le quali le restrizioni della funzione presentano un punto estremo di nature diverse (da una parte minimo, dall'altra massimo) allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f

Metodo del segno

Caso base

- 1 (x_0, y_0) punto di Hessiano nullo cioè $\det[H_f(x_0, y_0)] = 0$ R.p.
2. $f(x_0, y_0) = 0$

- 1 Se almeno un int di (x_0, y_0) in cui f è negativa in ogni pto $(x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di max relativo
Se almeno un int di (x_0, y_0) in cui f è positiva in ogni pto $(x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di min relativo
- 2 Se in ogni int di (x_0, y_0) la f. assume sia valori di segno positivo che negativo $\Rightarrow (x_0, y_0)$ è di sella

MORALE

Ci basta studiare il segno di $f(x, y)$ in un intorno del punto di Hessiano nullo

Caso generale

Tolgo R.p 2 cioè $f(x_0, y_0) = 0$, adesso $f(x_0, y_0) = c$

- 1 Considero la nuova funzione $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - c$
- 2 adesso avrò una \tilde{f} con $\det[H_{\tilde{f}}(x_0, y_0)] = 0$ e t.c. $\tilde{f}(x_0, y_0) = c - c = 0$ sono nelle R.p del caso base



Naturalmente (x_0, y_0) sarà un punto stazionario anche per \tilde{f} , e la natura del punto sarà la stessa sia per f che per \tilde{f} , in quanto f e \tilde{f} differiscono solo per una traslazione verticale

Il metodo del segno funziona anche per ∞ p.ti a Hessiano nullo

Metodo per simmetrie

Si usa nel caso in cui f ha particolari simmetrie
per esempio simmetrie radiali (tipico di $x^2 + y^2$) \Rightarrow passaggio a coord. polari
 $f(x, y) = f(r) = f.$ a 1 variabile



Se ottengo lo punto di min/max $\Rightarrow (r_0, \theta)$ $\theta \in [0, 2\pi)$ we' avro' un'infinita' di pti in 2 var.

Le f del tipo $f(x, y) = g(ax + by)$, $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ sono tipicamente a Hessiano nullo

Studio $g(t)$. Se t_0 e' pto di min $\Rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = t_0\}$ = retta e' un insieme di pti di min per f

Studio del segno di una delle 2 der parziali

es 1.21 libro parte 2.

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Tramite parametrizzazioni

Setting: $f(x, y): A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^1(A)$

Vogliamo studiare gli estremi della funz. f su una curva $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$ def. in forma cartesiana come luogo di zeri di una funz. $g(x, y)$ anch'essa derivabile con continua'

$$V = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$$

Se la curva e' facilmente riparametrizzabile come $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in I \Rightarrow$ posso stud. la f composta
 $h = f \circ \gamma$ $h(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$ e' a 1 var. e rappresenta $f|_V$ e procediamo con h'

moltiplicatori di lagrange

Setting: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

$$f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, f, g \in C^1(A)$$

Condizione necessaria ma non sufficiente affinché $(x_0, y_0) \in A$ sia estremo relativo per la funz. f ristretta al vincolo di eq. $g(x, y) = 0$ e' che sia verificata una delle 2 condit:

$$1 \quad g(x_0, y_0) = 0 \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$$

$$2 \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f - \lambda g)(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(f - \lambda g)(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Dopo aver trovato i punti stazionari procediamo a valutarli in f .

MAX E MIN OSSERVAZIONI VARIE

INTEGRALI MULTIPLI (Integrali doppi)

Formule di riduzione

definizioni

Un insieme H del piano (x,y) si dice normale rispetto all'asse x se è possibile rappresentare H nella forma $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ α, β f. continue in $[a, b]$
 In tal caso se $f(x,y)$ è una f. continua in H vale la formula di riduzione

$$\iint_H f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy$$

Analogamente se K è normale rispetto a y .

Cambiamenti di variabili: da c. cartesiane a c. polari

Se f è continua in A aperto
 Se φ è invertibile tra B e $\varphi(B) = A$
 Se $\det J_\varphi \neq 0$ dove $J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } f \text{ è continua in } A \text{ aperto} \\ \text{Se } \varphi \text{ è invertibile tra } B \text{ e } \varphi(B) = A \\ \text{Se } \det J_\varphi \neq 0 \text{ dove } J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_A f(x,y) dx dy = \iint_{\varphi(B)} f(x,y) dx dy = \iint_B f(x(u,v), y(u,v)) |\det J_\varphi| du dv$$

È la stessa cosa di $\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt$

coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad |\det J_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

in generale $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\rho > 0$

altri cambiamenti di variabile

$$\left. \begin{array}{l} u = x-y, v = x+y \\ u = x \cdot y, v = \frac{x}{y} \\ u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{x}{y} \end{array} \right\} \text{ dipende dal dominio!}$$

APPLICAZIONI

• misura di $A = m(A) = \iint_A dx dy$
 " area di A

con A misurabile e limitato

• Baricentro di $A = B = (x_0, y_0)$ dove $x_0 = \frac{1}{m(A)} \iint_A x dx dy$ $y_0 = \frac{1}{m(A)} \iint_A y dx dy$

se $m(A) \neq 0$

• Momento di inerzia di A rispetto all'asse $x =: I_x(A) = \iint_A y^2 dx dy$
 Momento di inerzia di A rispetto all'asse $y =: I_y(A) = \iint_A x^2 dx dy$

Momento di inerzia di A rispetto a una retta $r = I_r(A) = \iint_A [\text{dist}((x,y), r)]^2 dx dy$

Integrali doppi

Formule di riduzione

A è normale rispetto al piano (x,y) se si può scrivere $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } (x,y) \in A \text{ e } \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$

$$\iiint_H f(x,y,z) dx dy dz = \iint_A dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z) dz$$

Cambiamenti di variabili

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_B f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right) \right| du dv dw$$

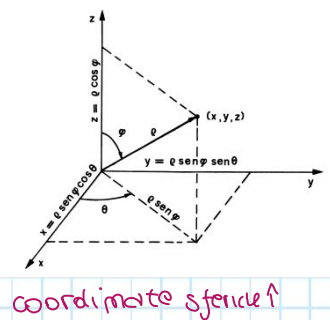
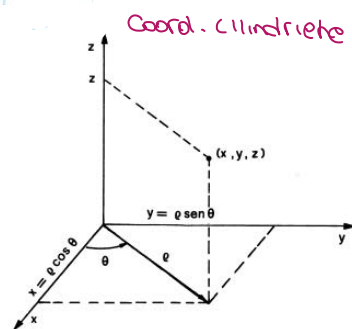
Coordinate Sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$|\det J_\varphi| = \rho^2 \sin \varphi$$

Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad |\det J_\varphi| = \rho$$



Coordinate sferiche ↑

CURVE

DEFINIZIONI DI BASE

- $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua si dice **curva**
- γ è **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- $\text{Im}(\gamma)$ si dice **supporto** della curva
- γ è **regolare** se $\gamma \in C^1$ e $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$
- γ è **regolare a tratti** se γ è continua $\exists d \in \mathbb{R} \quad t_1 < \dots < t_n \in [a,b]$ con $t_1 = a, t_n = b$ t.c. $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è regolare
- γ si dice **semplice** in uno dei due seguenti casi: (cioè se c'è int. tranne al più ai due estremi)
 - γ è un omeomorfismo di $[a,b]$ su $\gamma([a,b]) \rightarrow$ curva semplice aperta
 - γ è continua da $[a,b]$ su $\gamma([a,b])$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ e γ è bigettiva \rightarrow curva semplice chiusa

- Il disegno di una curva è il suo supporto, la curva è il modo in cui il supporto viene percorso.

es: $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$ } percorrono lo stesso supporto
 $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 8\pi]$ } ma γ_2 lo percorre 4 volte



- Se γ è continua $\Rightarrow \text{Im}(\gamma)$ è cpr

Come dim. che una curva è semplice 4 modi

- Se almeno una componente è strett. monotona $\Rightarrow \gamma$ semplice
 cioè se $\gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow \gamma_i(s) = \gamma_i(t)$ ma se γ_i è strett. monot. $\Rightarrow t=s$
- \exists invariante strett. monotono $\Rightarrow \gamma$ semplice
 cioè $\exists f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $t \mapsto f(\gamma(t))$ è strett. monot.
- Se scompongo $[a,b]$ in sottintervalli in cui γ è int. e γ è zone disgiunte in $\mathbb{R}^n \Rightarrow \gamma$ semplice
- Uso la def. negata cioè Supp. γ semplice e trovo \mathbb{Z}

DEFINIZIONI DI BASE

Siano γ_1 e γ_2 curve con $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$
 \nearrow equivalente

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ se $\exists \psi: I_1 \rightarrow I_2$ continua e bigettiva (monotona) t.c. $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$

Questo definisce una relazione di equivalenza sulle curve

Si ha $\text{Im}(\gamma_1) = \text{Im}(\gamma_2)$

ψ si dice **riparametrizzazione**

Se ψ è crescente $\Rightarrow \gamma_1$ e γ_2 hanno lo stesso verso di percorrenza altrimenti hanno verso opposto

Una parametrizzazione non cambia supporto ma può invertire l'ordine

DEFINIZIONI DI BASE

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva

$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m, t_n = b\}$ partizione

lunghezza di γ : $L(\gamma) = \sup_P \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \in [0, +\infty)$

Se $L(\gamma) < +\infty$ la curva si dice **rettificabile**

- $L(\gamma)$ non dipende dalla classe di equivalenza o dalla parametrizzazione di γ
- $L(\gamma)$ non è la lunghezza del supporto di γ o.e. la stessa circonferenza percorsa 2 volte ha lunghezza doppia.

Teorema **Rettificabilità nel caso \mathbb{C}^1**

γ curva $\mathbb{C}^1 \Rightarrow \gamma$ rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$



Se due curve percorrono lo stesso supporto \Rightarrow che hanno la stessa L

Lunghezze di curve definite come grafici

$y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ f derivabile $\Rightarrow L(f, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Lunghezze di curve piane date in forma parametrica

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di equazione $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \Rightarrow L(\gamma, [a, b]) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

vale anche per 3 dim $\Rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow L(\gamma, [a, b]) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$

Lunghezze di curve date in forma polare

Sono curve della forma $p = f(\theta)$ con $\theta \in [\theta_0, \theta_1] \Rightarrow L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta$

o.e. ho $p(t), \theta(t) \quad t \in [a, b]$

$x(t) = p(t) \cos \theta(t) \quad y(t) = p(t) \sin \theta(t)$

$x'(t) = p'(t) \cos \theta - p(t) \sin \theta \quad y'(t) = p'(t) \sin \theta + p(t) \cos \theta$

$\|\gamma'(t)\|^2 = (p')^2 + p^2 (\theta')^2$

$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{p'(t)^2 + p(t)^2 \theta'(t)^2} dt$

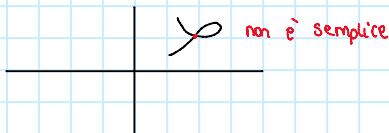
ES CURVE PARAMETRICHE

mercoledì 5 aprile 2023 13:58

Dire se la curva è semplice

$$\varphi(t) = (t^3 - t, t^2 - 1) \quad t \in \mathbb{R}$$

curva semplice $\Rightarrow \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice semplice se $\forall t_1, t_2 \in (a, b) : \varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$



Prendo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$ vediamo se l'implicazione è vera: $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$

$$\varphi(t_1) = (t_1^3 - t_1, t_1^2 - 1) = \varphi(t_2) = (t_2^3 - t_2, t_2^2 - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2 \\ t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1(t_1^2 - 1) = t_2(t_2^2 - 1) & A \\ t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1 & B \end{cases}$$

Se $t_1, t_2 = \pm 1 \Rightarrow B$ è vera

$$A \Rightarrow t_1 \cdot 0 = t_2 \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow A \text{ vera}$$

Quindi $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ con $t_1, t_2 = \pm 1$ e $\varphi(1) = \varphi(-1) \Rightarrow \varphi$ non è semplice.

Dire se la curva è regolare

$$\varphi(t) = (t^3, t^2) \quad t \in [-1, 1]$$

$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare se: 1) $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ cioè φ è derivabile con derivata continua

$$2) \|\varphi'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

Vediamo se la nostra φ è regolare

$$\varphi = (t^3, t^2) \quad \varphi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

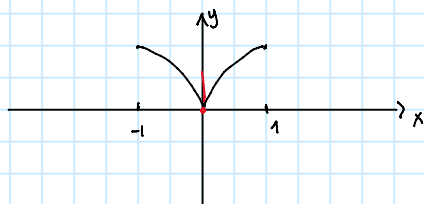
$$1) t^3 \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}), \quad t^2 \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}^2)$$

$$2) \varphi'(t) = (3t^2, 2t)$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

se $t=0 \Rightarrow \|\varphi'(t)\| = 0 \Rightarrow$ la curva non è regolare

Disegno il $\Gamma(\varphi)$



$$\begin{cases} x = t^3 \Rightarrow t = x^{\frac{1}{3}} \\ y = t^2 = (x^{\frac{1}{3}})^2 = x^{\frac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) \text{ è il grafico della funzione } y = x^{\frac{2}{3}} \text{ per } x \in [-1, 1]$$

La tangente in 0 è verticale cioè non esiste, quindi in 0 non è derivabile.

Dire se due curve sono equivalenti

$$\varphi_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi_2(t) = (\cos \sqrt{2}t, \sin \sqrt{2}t) \quad t \in [0, \sqrt{2}\pi]$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(\sqrt{2}t)$$

↳ sto usando il cambiamento di parametro $g(t) = \sqrt{2}t$ $\varphi_2(t) = \varphi_1(g(t))$

Verifichiamo che è un cambiamento di parametro ammissibile

A) $g(t) = \sqrt{2}t$ $g: [0, \sqrt{2}\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ è ben def. per: $g(t)$ deve essere definita dove è def. φ_1 ; ma ea t è def. dove è def. φ_2

B) $g(t) = \sqrt{2}t \in C^1$ cioè è derivab. con derivata continua $g'(t) = \sqrt{2}$ e' continuo

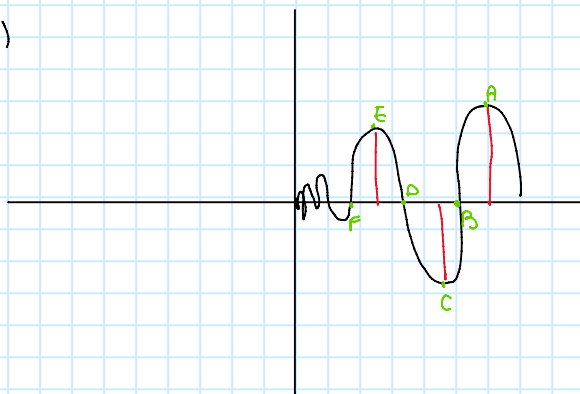
C) $g'(t) = \sqrt{2}t \neq 0$ vero perché $g'(t) = \sqrt{2} \neq 0$

Osservazione

$g'(t) = \sqrt{2} > 0$ quindi φ_1 e φ_2 hanno lo stesso verso di percorrenza $\varphi_1 \sim \varphi_2$

Dire se la curva è rettificabile

$$\varphi(t) = (t, t \cdot \sin(\frac{1}{t}))$$



L'idea che useremo è la seguente: Dato che una curva è rettificabile se la sua lunghezza è finita, dimostreremo che la somma dei tratti in rosso tende a $+\infty$ ed essendo la curva in nero (=lunghezza della curva) maggiore della somma dei tratti in rosso concludiamo che anche la lunghezza della curva è $+\infty$

In generale sappiamo che se $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ $k=0,1,2,\dots$ $\sin(\alpha) = \{0, 1, -1\}$

nel nostro caso $k\frac{\pi}{2} = \alpha = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{2}{k\pi}$

Calcolo allora la curva nei pti $t = \frac{2}{k\pi}$ $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi\left(\frac{2}{k\pi}\right) = \left(\frac{2}{k\pi}, \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)$

per $k=1$ $t = \frac{2}{\pi}$ $\varphi\left(\frac{2}{\pi}\right) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ A D $\left(\frac{2}{6\pi}, 0\right)$

$k=2$ $t = \frac{1}{\pi}$ $\varphi\left(\frac{1}{\pi}\right) = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ B E $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{5\pi}\right)$

$k=3$ $t = \frac{2}{3\pi}$ $\varphi\left(\frac{2}{3\pi}\right) = \left(\frac{2}{3\pi}, -\frac{2}{3\pi}\right)$ C F $\left(\frac{2}{\pi}, 0\right)$

Quindi la lunghezza del 1° tratto verticale = ea y del pto A cioè $\frac{2}{\pi}$

" " 2° " " C $\frac{2}{3\pi}$
 " " 3° " " E $\frac{2}{5\pi}$

$$l_i = \frac{2}{(2i+1)\pi} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{(2i+1)\pi} = \sum_{i=0}^{\infty} l_i = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} = +\infty$$

$L(\varphi) \geq \sum l_i \rightarrow +\infty \Rightarrow L(\gamma) = +\infty \Rightarrow$ la curva non è rettificabile
 lunghezza curva

Calcolare la lunghezza di una curva

$$\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t) \quad R > 0 \quad t \in [0, 2\pi]$$

Useremo la formula $\ell(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$ con $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi'(t)$ esiste

OSS

$\varphi(t)$ è la circonferenza di raggio R e $\ell(\varphi) = \text{perimetro} = 2\pi R$

0 $[a, b] = [0, 2\pi]$

1 $\varphi'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$

2 $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$

3 $\int_0^{2\pi} R dt = R \int_0^{2\pi} 1 dt = R [t]_0^{2\pi} = 2\pi R$

Calcolare la lunghezza di una curva

$$\varphi(t) = \left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}, t \right) \quad t \in [-1, 1]$$

Usiamo la seguente formula se $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi'(t)$ esiste $\Rightarrow \ell(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$

Nel nostro caso

1 $[a, b] = [-1, 1]$

2 $\varphi'(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} t, t^2, 1 \right)$

3 $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2t^2 + t^4 + 1} = \sqrt{(t^2 + 1)^2} = t^2 + 1$

4 $\ell(\varphi) = \int_{-1}^1 (t^2 + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + [t]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

Dire se la curva è regolare e calcolare la lunghezza

$$\varphi(t) = (\sqrt{2} \cos^2 t, \sqrt{2} \sin^2 t) \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

La curva $\varphi(t)$ è regolare se $\varphi \in C^1$ e $\varphi'(t) \neq 0$

1) φ è di classe C^1

2) $\varphi'(t) = (-2\sqrt{2} \cos t \sin t, 2\sqrt{2} \sin t \cos t) = 2\sqrt{2} \cos t \sin t \cdot (-1, 1)$

Per $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ si ha che $\cos t, \sin t \neq 0 \Rightarrow \varphi'(t) \neq 0 \Rightarrow \varphi$ è regolare

• Lunghezza

$$\ell(\varphi) = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{8 \cos^2 t \sin^2 t + 8 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \int_{\pi/2}^{\pi} 4 |\sin t| |\cos t| dt = \int_{\pi/2}^{\pi} -4 \cos t \sin t dt = \int_{\pi/2}^0 -4 y dy = 4 \int_0^1 y dy = 4 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 2$$

$\parallel \varphi'(t) \parallel$

Dire se la curva è regolare a tratti e tracciare il grafico

$$\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Regolare a tratti

$$\varphi'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$$

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \vee \sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$$

$$\|\varphi'(t)\| \neq 0 \text{ se } t \in (0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\pi, \frac{3\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

questo è equivalente ad affermare che φ è una curva regolare a tratti poiché

$$\varphi(t) = \varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3 \cup \varphi_4 \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi(t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \varphi_2(t) &= \varphi(t) \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \varphi_3(t) &= \varphi(t) \quad t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ \varphi_4(t) &= \varphi(t) \quad t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{aligned} \quad \text{e le } \varphi_i \text{ sono tutte regolari poiché } \|\varphi_i'(t)\| \neq 0$$

Grafico di φ_1 $\begin{aligned} x &= \cos^3 t = (\cos^2 t)^{3/2} \Rightarrow \cos^2 t = x^{2/3} \\ y &= \sin^3 t = (\sin^2 t)^{3/2} = (1 - \cos^2 t)^{3/2} = (1 - x^{2/3})^{3/2} \end{aligned}$

$$\varphi_1(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) = (x, y) \quad \text{per } t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

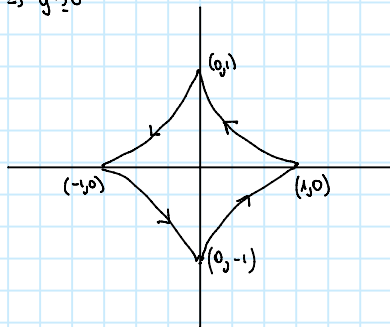
quindi φ_1 è il grafico della funzione $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ per $x \in [0, 1]$

$$y' = \frac{3}{2} (1 - x^{2/3})^{1/2} \cdot (-\frac{2}{3} x^{-1/3}) = - (1 - x^{2/3})^{1/2} x^{-1/3}$$

$$y'' = -\frac{1}{2} (1 - x^{2/3})^{-1/2} \cdot (-\frac{2}{3} x^{-1/3}) \cdot x^{-1/3} - (1 - x^{2/3})^{1/2} \cdot (-\frac{1}{3} x^{-4/3})$$

$$= \underbrace{+\frac{1}{3} (1 - x^{2/3})^{-1/2}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x^{-2/3}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{3} (1 - x^{2/3})^{1/2}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x^{-4/3}}_{\geq 0}$$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow y'' \geq 0$$



Che relazione c'è tra $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e φ_4

$$\text{oss } 1 \quad \underbrace{[\frac{\pi}{2}, \pi]}_{\text{intervallo di } \varphi_2} = [0, \frac{\pi}{2}] + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_2(t) = \varphi(t + \frac{\pi}{2}) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned} t &\stackrel{\omega}{\sim} t + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_2(t) &= (\cos^3(t + \frac{\pi}{2}), \sin^3(t + \frac{\pi}{2})) = (-\sin^3(t), \cos^3(t)) \quad \text{con } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$\text{Quindi se } (x_0, y_0) \in \varphi_1 \Rightarrow (-y_0, x_0) \in \varphi_2$$

$$\varphi_3(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] = [0, \frac{\pi}{2}] + \pi$$

$$\varphi_3(t) = \varphi_2(t + \frac{\pi}{2}) = (-\sin^3(t + \frac{\pi}{2}), \cos^3(t + \frac{\pi}{2})) = (-\cos^3 t, -\sin^3 t) = -(\cos^3 t, \sin^3 t) = -(x_0, y_0)$$

$$\varphi_4(t) = \varphi_3(t + \frac{\pi}{2}) = (\sin^3 t, -\cos^3 t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Calcolare la lunghezza di una curva

$$\varphi(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3) \quad t \in [0, 1]$$

$$1) [a, b] = [0, 1]$$

$$2) \varphi'(t) = (t, t^2)$$

$$3) \quad \| \varphi'(t) \| = \sqrt{t^2 + t^4} = \sqrt{t^2(1+t^2)} = t\sqrt{1+t^2}$$

$$4) \quad \ell(\varphi) = \int_0^1 t \sqrt{1+t^2} dt \stackrel{\substack{y=1+t^2 \\ dy=2t}}{=} \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{y} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_1^2 = \frac{1}{3} [2^{3/2} - 1]$$

Curva regolare, chiusa e sostegno

$$\varphi(t) = (1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{OSS 1} \rightarrow \varphi(t) = (1 - \cos t) \cdot (\cos t, \sin t)$$

$$\text{Regolare} \rightarrow \varphi \in C^1$$

$$\varphi'(t) = \overbrace{\sin t \cdot (\cos t, \sin t)}^u + \overbrace{(1 - \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)}^v = u + v$$

$$\| \varphi'(t) \| = 0 \text{ equiv. } \| \varphi'(t) \|^2 = \| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 + 2 \langle u, v \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \sin t (1 - \cos t) \langle (\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t) \rangle = \sin t (1 - \cos t) (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) = 0 \\ \text{ho usato } \langle \alpha(x, y), \beta(\bar{x}, \bar{y}) \rangle &= \alpha x \cdot \beta \bar{x} + \alpha y \cdot \beta \bar{y} = \alpha \beta (x\bar{x} + y\bar{y}) = \alpha \beta \langle (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \| u \|^2 + \| v \|^2 = \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) + (1 - \cos t)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = \sin^2 t + 1 + \cos^2 t - 2 \cos t = 2(1 - \cos t) \\ &= \underbrace{\sin^2 t}_{\alpha^2 \| u \|^2} + \underbrace{(1 - \cos t)^2}_{\beta^2 \| v \|^2} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \| \varphi'(t) \|^2 = 2(1 - \cos t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t \in \{0, 2\pi\}$$

dato che $t \in [0, 2\pi]$ e la norma del vettore tangente si annulla solo agli estremi dell'intervallo ma non all'interno $\Rightarrow \varphi$ è regolare

$$\text{Chiusa} \rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\varphi(0) \stackrel{?}{=} \varphi(2\pi)$$

$$(1 - \cos(0))(\cos(0), \sin(0)) \stackrel{?}{=} (1 - \cos(2\pi))(\cos(2\pi), \sin(2\pi))$$

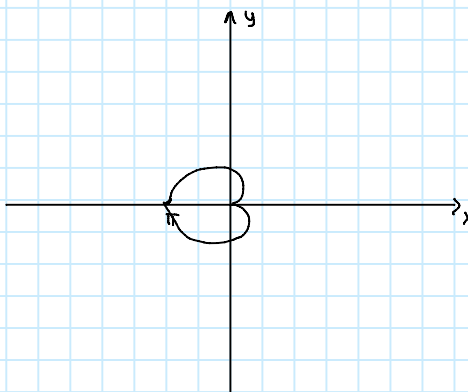
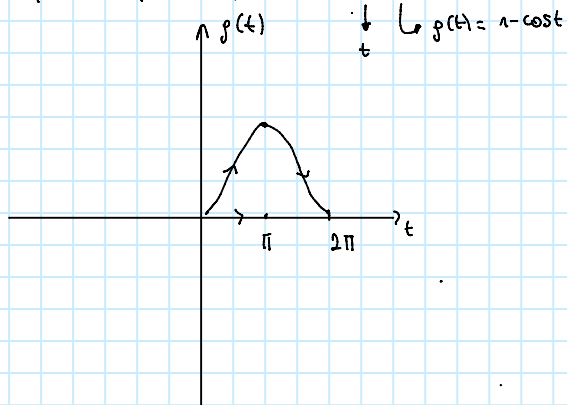
$$0 \cdot (1, 0) = 0 \cdot (1, 0) = 0$$

φ è chiusa

Grafico

Studiamo come varia la sua dist. dall'origine cioè $\| \varphi(t) \| = \| (1 - \cos t) \cdot (\cos t, \sin t) \| = (1 - \cos t) \underbrace{\| (\cos t, \sin t) \|}_{=1} = 1 - \cos t$.

Quindi passo in polari perché (θ, ρ)



Curva regolare e parametro d'arco

$$\varphi(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right) \quad t \in (-1, 1]$$

Regolare

$$\varphi \in C^1$$

$$\varphi'(t) = \left((1+t^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} 2t^2 (1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2} (1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t \right) = \left((1+t^2)^{-\frac{1}{2}} - t^2 (1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, -t (1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = \left(\frac{1+t^2 - t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\varphi'(t) = \left((1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, -t (1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(1+t^2)^{-3} + t^2 (1+t^2)^{-3}} = \sqrt{(1+t^2)^{-3} (1+t^2)} = \sqrt{(1+t^2)^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^2}} = \frac{1}{1+t^2} > 0$$

φ è regolare

$$\text{Parametro d'arco} \quad s(t) = \int_{-1}^t \|\varphi'(s)\| ds = \int_{-1}^t \frac{1}{1+s^2} ds = \left[\arctan(s) \right]_{-1}^t = \arctan t - \underbrace{\arctan(-1)}_{-\frac{\pi}{4}} = \arctan t + \frac{\pi}{4}$$

dubbio φ regolare se $\varphi'(t) \neq 0$ o se $\|\varphi'(t)\| \neq 0$?

In matematica, un integrale di linea (da non confondere con il calcolo della lunghezza di una curva usando l'integrazione) o integrale curvilineo è un integrale in cui la funzione da integrare è valutata lungo un cammino o una curva.

L'integrale di linea di un campo scalare è talvolta detto "di prima specie", mentre l'integrale di un campo vettoriale è "di seconda specie".

Talvolta l'integrale (di II specie) è anche detto lavoro lungo una curva del campo vettoriale considerato. Qualora la curva sulla quale si integra sia chiusa si parla di circuitazione

INTEGRALI CURVILINEI (DI LINEA DI I SPECIE)

Teoria

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ D aperto connesso, f una funzione scalare $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definita su D

Si definisce integrale di linea di I specie di f rispetto alla lunghezza d'arco e lungo una curva regolare a tratti $\gamma \subset D$, descritto dall'equazione $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$ il numero

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad \text{nota: il } ds \text{ indica che si tratta di int. curvilineo}$$

• In 3 dim cioè $D \subseteq \mathbb{R}^3$ avrò:
$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

• Se la curva è chiusa si usa il simbolo $\oint_{\gamma} f ds$

Casi particolari

• γ regolare a tratti in $I = [a_{i-1}, a_i]$
$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

• Se γ è equivalente a $\varphi \Rightarrow \int_{\gamma} f ds = \int_{\varphi} f ds$

Come fare gli esercizi

1 **Studio la curva γ** controllando la sua regolarità.

Se l'equazione della curva è espressa in forma cartesiana allora dovremo determinare una parametrizzazione

In questo passo determiniamo anche il dominio $[a, b]$ cioè data $\gamma(t) \rightarrow t \in [a, b]$

Calcoliamo $f(\gamma(t))$ sostituendo componente per componente

2 **Calcolare il vettore derivato $\gamma'(t)$** derivando rispetto a t le componenti di $\gamma(t)$

3 **Calcolare la norma** del vettore derivato cioè $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\text{somma dei } \square \text{ delle componenti del vettore derivato}}$

4 **Calcolo l'integrale**
$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

INTEGRALI DI LINEA DI II SPECIE

Teoria

- $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ F campo vettoriale \uparrow f che associa a un p.to del piano un vettore
definito da $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ dove Ω è un aperto e F_1 e F_2 sono f. scalari
- γ curva regolare $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$
- l'integrale della funzione F lungo $\gamma = \int_{\gamma} F d\gamma = \int_a^b F_1(x(t), y(t)) x'(t) + F_2(x(t), y(t)) y'(t) dt = \int_a^b \underbrace{F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{p. \text{ scalare}} dt$
- È importante il verso di percorrenza perché vale che $\int_{\gamma} F d\gamma = - \int_{\gamma^-} F d\gamma$
 γ^- \rightarrow curva percorsa in verso opposto

Come fare gli esercizi

- 1 Studiare la curva γ controllando la sua regolarità.

Se l'equazione della curva è espressa in forma cartesiana allora dovremo determinare una parametrizzazione

In questo passo determiniamo anche il dominio $[a,b]$ cioè data $\gamma(t) \rightarrow t \in [a,b]$

Calcolare $F(\gamma(t))$ sostituendo componente per componente

- 2 Specificare il verso di percorrenza

- 3 Calcolare il vettore derivata $\gamma'(t)$ derivando rispetto a t le componenti di $\gamma(t)$

- 4 Fare il p. scalare $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \rightarrow (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

- 5 Calcolare l'integrale $\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$

ES INTEGRALI CURVILINEI

giovedì 13 aprile 2023 10:39

Esercizio 1

$f(x, y) = 2x$ lungo la curva $\varphi(t) = (t, \frac{t^2}{2})$ $t \in [0, 1]$

$$0 \int_{\gamma} 2x \, ds = \int_0^1 f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt$$

$$1 \, f(\varphi(t)) = f(t, \frac{t^2}{2}) = 2t$$

$$2 \, \varphi'(t) = (1, t)$$

$$3 \, \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

$$4 \int_0^1 2t \sqrt{1+t^2} \, dt = \int_{\substack{y=1+t^2 \\ dy=2t}}^2 \sqrt{y} \, dy = \frac{2}{3} [y^{3/2}]_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

Esercizio 2

$\int_{\gamma} \sqrt{1-y^2} \, ds$ $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$0 \int_{\gamma} \sqrt{1-y^2} \, ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$1 \, f(\gamma(t)) = f(\sin t, \cos t) = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$2 \, \gamma'(t) = (\cos t, -\sin t)$$

$$3 \, \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = -[\cos t]_0^{\pi/2} = -(0-1) = 1$$

Esercizio 3

$\int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2} \, ds$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \pi/2]$

$$0 \int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2} \, ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$1 \, f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}$$

$$2 \, \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$3 \, \|\gamma'(t)\| = 1$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} \, dt = \int_{\substack{y=\sin t \\ dy=\cos t}}^1 \frac{1}{1+y^2} \, dy = [\arctan(y)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 4

$\int_{\gamma} y \cos x \, ds$ $\gamma(t) = (t, \sin t)$ $t \in [0, \pi/2]$

$$0 \int_{\gamma} y \cos x \, ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$1 \, f(\gamma(t)) = f(t, \sin t) = \sin t \cos t$$

$$2 \, \gamma'(t) = (1, \cos t)$$

$$3 \, \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+\cos^2 t}$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{1+\cos^2 t} \, dt = - \int_{\substack{y=\cos t \\ dy=-\sin t}}^0 y \sqrt{1+y^2} \, dy = \int_0^1 y \sqrt{1+y^2} \, dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{z} \, dz = \frac{1}{2} [\frac{2}{3} z^{3/2}]_1^2 = \frac{1}{3} [2\sqrt{2}-1]$$

Esercizio 5

$$\int_{\gamma} zy + \sqrt{x} \, ds \quad \gamma(t) = (0, \cos t, \sin t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$0 \int_{\gamma} zy + \sqrt{x} \, ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$1 f(\gamma(t)) = f(0, \cos t, \sin t) = \sin t \cos t$$

$$2 \gamma'(t) = (0, -\sin t, \cos t)$$

$$3 \|\gamma'(t)\| = \sqrt{0 + \sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt = \int_0^1 v \, dv = \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$v = \sin t$
 $dv = \cos t$

Esercizio 6

$$\int_{\gamma} yz e^{x^2} \, ds \quad \gamma(t) = (t, t, t) \quad t \in [0, 1]$$

$$0 \int_{\gamma} yz e^{x^2} \, ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$1 f(\gamma(t)) = f(t, t, t) = t^2 e^{t^3}$$

$$2 \gamma'(t) = (1, 1, 1)$$

$$3 \|\gamma'(t)\| = \sqrt{3}$$

$$4 \int_0^1 t^2 e^{t^3} \sqrt{3} \, dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 3t^2 e^{t^3} \, dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 e^z \, dz = \frac{\sqrt{3}}{3} [e^z]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3} (e - 1)$$

$z = t^3$
 $dz = 3t^2$

Esercizio 7

$$\int_{\gamma} 2z + 2uzy \, ds \quad \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^4}{4}, t \right) \quad t \in [0, 1]$$

$$0 \int_{\gamma} 2z + 2uzy \, ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$1 f(\gamma(t)) = f\left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^4}{4}, t\right) = 2t + 6t^5$$

$$2 \gamma'(t) = (t, t^3, 1)$$

$$3 \|\gamma'(t)\| = \sqrt{t^2 + t^6 + 1}$$

$$4 \int_0^1 (2t + 6t^5) \sqrt{t^2 + t^6 + 1} \, dt = \int_1^3 \sqrt{v} \, dv = \left[\frac{2}{3} v^{3/2} \right]_1^3 = \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$$

$v = t^2 + t^6 + 1$
 $dv = 2t + 6t^5$

FORME DIFFERENZIALI

Teoria

$$\dim n=2$$

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, $\alpha, \beta : A \rightarrow \mathbb{R}$ $\omega(x,y) = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$
↑ forma differenziale lineare
↓ coefficienti di ω
- ω è continua se lo sono α e β
- Siano ω f. diff. (n. continua) e $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ γ regolare a tratti
 $t \mapsto \gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$

- Il dominio di ω è dato da $\begin{cases} \text{dominio di } \alpha \\ \text{dominio di } \beta \end{cases}$

$$\dim n \geq 2$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$$

- ω si dice **esatta** se \exists f diff. t.c. $df = \omega$ f si chiama primitiva o potenziale
- ω si dice **chiusa** se le derivate miste coincidono cioè se $\frac{\partial}{\partial y} \alpha(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \beta(x,y)$

Come fare gli esercizi

chiusa \rightarrow calcolare le derivate parziali

esatta \rightarrow 1 Teorema di caratterizzazioni delle forme esatte

Sia ω f. diff. continua. ω esatta $\Leftrightarrow \forall \gamma$ curva regolare a tratti, chiusa vale $\int_{\gamma} \omega = 0$
viene usato per dim che ω non è esatta perché mi basta trovare γ t.c. $\int_{\gamma} \omega \neq 0$

2 Teorema condizione sufficiente per l'esattezza di una f. diff

Sia ω f. diff. C^1 . Se ω è esatta $\Rightarrow \omega$ è chiusa

Si usa in questo modo: Se ω non è chiusa $\Rightarrow \omega$ non è esatta
 ω chiusa $\nRightarrow \omega$ esatta

3 Teo di Poincaré

Sia ω è f. diff. con $[\alpha, \beta] : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se ω è chiusa e A è semplicemente connesso
 $\Rightarrow \omega$ è esatta
↑ se non ha buchi
aperto
(vale anche se A è stellato con ω è C^1)

ES FORME DIFFERENZIALI

giovedì 13 aprile 2023 13:50

Esercizio n° 1

Sia $w(x,y,z) = ydx + xdy + g(x,y,z)dz$ con $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

1) Determinare g in modo che w sia esatta

2) Fatta una scelta per g determinare una primitiva di w

Sol 1

$w(x,y,z)$ è def. su tutto \mathbb{R}^3 ed essendo \mathbb{R}^3 un dominio semplicemente connesso possiamo usare il Teorema della caratterizzazione delle forme esatte e cioè se w è chiusa in D (semplice conn) $\Rightarrow w$ è esatta.

Mi basta dunque determinare una g per cui w è chiusa: $\frac{\partial}{\partial y} (ydx) = \frac{\partial}{\partial x} (ydy)$

$$\frac{\partial}{\partial y} (ydx) = 1 \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x} (ydy) = 1 \quad \text{OK.}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (ydx) = 0 = \frac{\partial}{\partial x} (ydz) \Rightarrow g(x,y,z) = (c_1, y, z) \quad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (ydy) = 0 = \frac{\partial}{\partial y} (ydz) \Rightarrow g(x,y,z) = (c_1, c_2, z) \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R}$$

Quindi g non dipende né da x né da y

Sol 2

Sia $g(z) = z$ e $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$w = ydx + xdy + zdz$$

Stiamo cercando $f(x,y,z)$ t.c.: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \\ \frac{\partial f}{\partial z} = z \end{cases}$

dalla z si ha che:

$$f(x,y,z) = yx + h(y,z)$$

derivando rispetto a y e inserendo nella II

$$x + \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = x \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad h \text{ non dipende da } y \quad \text{cioè } f = xy + h(z)$$

derivando rispetto a z e inserendo nella III

$$\frac{\partial h}{\partial z} = z \quad (\Rightarrow) \quad h = \frac{z^2}{2} + C.$$

Conclusione:

$$f(x,y,z) = xy + \frac{z^2}{2} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2

Determinare tutte le $f \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $f(0)=0$ e $w(x,y) = y(f(x)+x)dx + f(x)dy$ sia esatta

$$\frac{\partial (y(f(x)+x))}{\partial y} = f(x)+x = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$$

f è sol. del seguente prob. di Cauchy.

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) + x \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$u'(x) = a(x)u(x) + b(x) \leadsto \text{sol } u(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s)ds} \left[u(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s a(s)ds} b(s)ds \right]$$

$$x_0 = 0, \quad a(x) = 1, \quad b(x) = x$$

$$f(x) = e^{\int_0^x 1ds} \left[\int_0^x e^{-\int_0^s 1ds} t \cdot dt \right] = e^x \left[\int_0^x t e^{-t} dt \right] = e^x [-e^{-t}(1+t)]_0^x = e^x (-e^{-x}(1+x) + 1) = -(1+x)e^x$$

$$\text{cerco una primitiva di } \int t e^{-t} = -e^{-t}t + \int e^{-t} = -e^{-t}(1+t)$$

Esercizio 3

Data $\omega = y dx - xy dy$ Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, contenuta nel semipiano superiore e percorsa in senso orario

Parametrizzo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$ $\gamma \sim \gamma$ ma ha orient. opposta

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} \alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) + \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t)$$

$$= \int_0^{\pi} -\sin^2 t - \sin t \cos^2 t dt = \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 t dt}_A + \underbrace{\int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t dt}_B =$$

Calcolo A

$$A = \left[-\sin t \cdot \cos t - \int_0^{\pi} \cos^2 t dt \right] = \left[-\sin t \cos t + \int_0^{\pi} 1 - \sin^2 t dt \right] = \frac{1}{2} \left[-\sin t \cos t + t \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Calcolo B

$$B = \int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t dt = - \int_{y=\cos t}^{y=-\sin t} y^2 dy = \int_{-1}^1 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\gamma} \omega = A + B = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3\pi + 4}{6}$$

Esercizio n° 4

Dire se $\omega(x, y, z) = (2zx + 2z) dx + (x^2 + 1) dz$ è esatta

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ lungo il segmento che congiunge il pto (0,0,0) con (1,1,1)

Sol 1

$$\frac{\partial(2zx+2z)}{\partial z} \stackrel{?}{=} \frac{\partial(x^2+1)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial(0)}{\partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial(2zx+2z)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial(0)}{\partial z} \stackrel{?}{=} \frac{\partial(x^2+1)}{\partial y}$$

\mathbb{R}^3 è semp. connesso.
 ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta

Sol 2

Troviamo un potenziale di ω .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2zx + 2z \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Dalla I ricavo che f non dipende da $y \Rightarrow f(x, z) = f(x, y, z)$
 Integro entrambi i membri della I rispetto a $x \Rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial x} = \int (2zx + 2z) dx = z x^2 + 2zx \Rightarrow f(x, y) = z x^2 + 2zx + h(y)$
 Derivo $f(x, z)$ rispetto a $z \Rightarrow x^2 + 2x + h'(z)$
 Sostituisco nella 3 $\Rightarrow x^2 + 2x + h'(z) = (x+1)^2 \Rightarrow h'(z) = 1 \Rightarrow h(z) = z$.

Quindi $f(x, y, z) = z x^2 + 2zx + z$

Adesso dalla Teoria so che se ω è esatta e f è una primitiva $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 4 - 0 = 4$.
 Cioè l'integrale non dipende dalla curva ma dal pto iniziale e dal pto finale

Esercizio 5

$$\omega(x, y, z) = 2x^2 dx + (2y - z) dy + (z + y) dz$$

1) Dire se è esatto

2) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è il segmento che congiunge il pto. $(0,0,0)$ al pto. $(1,1,1)$

Sol 1

Dato che ω è definita in \mathbb{R}^3 ed \mathbb{R}^3 è un dominio semplicemente connesso, posso usare il Teo della caratt. delle forme esatte.

Què ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta

se Dominio è semp. connesso

Verifico ω chiusa

$$\frac{\partial(2x^2)}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial(2y-z)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial(2x^2)}{\partial z} \stackrel{?}{=} \frac{\partial(z+y)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial(2y-z)}{\partial z} \stackrel{?}{=} \frac{\partial(z+y)}{\partial y}$$

$$0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad -1 \neq 1$$

OK

Quindi ω non è chiusa $\Rightarrow \omega$ non è esatto

Sol 2

In generale (dato che non posso usare le prop delle f. esatte) calcolo $\int_\gamma \omega$ con la def.

chiamo w_x, w_y, w_z le componenti di ω .

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma w_x(x(t)) x'_1(t) + w_y(x(t)) x'_2(t) + w_z(x(t)) x'_3(t) dt$$

Nel nostro caso $\gamma(t) = (t, t, t) \quad t \in [0, 1]$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 2t^2 + (2t-t) + (t+t) dt = \int_0^1 2t^2 + 3t dt = \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

Esercizio 6

Determinare tutte le coppie α, β t.c. $\omega(x, y) = \frac{\alpha x}{x^2 + y^2 - 1} dx + \frac{\beta y + \beta x}{x^2 + y^2 - 1} dy$

1) Sia chiusa

2) Sia esatta.

Sol

Dominio $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 = 1\}$

$$1) \text{ chiusa: } \frac{\partial(\frac{\alpha x}{x^2 + y^2 - 1})}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial(\frac{\beta y + \beta x}{x^2 + y^2 - 1})}{\partial x}$$

$$= \frac{\alpha(x^2 + y^2 - 1) - (8y + \beta x)(2x)}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = \frac{\beta x^2 + 4\beta y^2 - \beta - 16yx - 2\beta x^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = \frac{-\beta x^2 + 4\beta y^2 - \beta - 16yx}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$$

$$-8\alpha = -16 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$-\beta(x^2 + y^2 + 1) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ ω è chiusa e $\omega = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} dx + \frac{8y}{x^2 + y^2 - 1} dy$

ω esatta se $\exists f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ t.c. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{8y}{x^2 + y^2 - 1} \end{cases}$

$$f(x, y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} dx = \int \frac{1}{v} dv = \log(v) = \log|x^2 + y^2 - 1| + h(y)$$

$$h'(y) + \frac{8y}{x^2 + y^2 - 1} = \frac{8y}{x^2 + y^2 - 1} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) \text{ è costante}$$

$$f(x, y) = \log|x^2 + y^2 - 1|$$

Esercizio n°6

$$w(x, y, z) = x dx + (y+1) dy + (z+2) dz$$

1) dire se è esatta

2) $\int_\gamma w$ γ = segmento che congiunge il pto $(0,0,0)$ al pto $(2,-1,0)$

Sol

w ha dominio $\mathbb{R}^3 \Rightarrow w$ chiusa $\Rightarrow w$ esatta (\mathbb{R}^3 è s. connesso)

$$\begin{aligned} w \text{ chiusa} \quad \frac{\partial(x)}{\partial y} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial(y+1)}{\partial x} \quad \text{si } 0=0 \\ \frac{\partial(x)}{\partial z} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial(z+2)}{\partial x} \quad \text{si } 0=0 \\ \frac{\partial(y+1)}{\partial z} &\stackrel{!}{=} \frac{\partial(z+2)}{\partial y} \quad \text{si } 0=0 \end{aligned}$$

w chiusa $\Rightarrow w$ esatta

Cerco un potenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x & \text{Dalla 1. ho che } f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + h(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y+1 & \text{Derivo e sost. in } h'(y, z) = y+1 \Rightarrow \int y+1 dy = \frac{y^2}{2} + y + c(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = z+2 & \text{Derivo } f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y + c(z) \text{ der. e sost. nella 3. } \Rightarrow c'(z) = z+2 \quad c(z) = \frac{z^2}{2} + 2z \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y + \frac{z^2}{2} + 2z$$

$$\text{Dato che } w \text{ è esatta} \quad \int_\gamma w = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)) = f(2, -1, 0) - f(0, 0, 0) = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Esercizio n°8

$$w(x, y) = \left(2y + \frac{1}{x(1+x^2)} \right) dx + x dy$$

1) Mostrare che non è esatta

2) Sotto quali condizioni $g(x)w(x, y)$ è chiusa con $g \in C^1(\mathbb{R})$

3) Scegliamo g come sopra esibire una primitiva

Sol 1.

w esatta $\Rightarrow w$ chiusa.

Se w non è chiusa $\Rightarrow w$ non è esatta.

$$\frac{\partial \left(2y + \frac{1}{x(1+x^2)} \right)}{\partial y} = 2 \stackrel{?}{=} \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1 \quad \text{no } \Rightarrow w \text{ non chiusa} \\ \Rightarrow w \text{ non esatta}$$

Cerco g t.c. $g(x)w(x)$ è chiusa

$$\frac{\partial g(x) \left(2y + \frac{1}{x(1+x^2)} \right)}{\partial y} = 2g(x) = \frac{\partial (x \cdot g(x))}{\partial x} = g'(x) + xg'(x)$$

$$(\Rightarrow) xg'(x) + g(x) - 2g(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad xg'(x) = g(x)$$

Sol 3

Scelgo $g(x) = x$ infatti $xg'(x) = x = g(x)$

$$\text{Sia } w'(x, y) = \left(2xy + \frac{1}{1+x^2} \right) dx + x^2 dy$$

Cerco primitiva

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{cases} \Rightarrow f(x, y) = \int x^2 dy = x^2 y + h(x)$$

derivo rap. a x e sost. in x

$$2xy + h'(x) = 2xy + \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ \Rightarrow h(x) = \arctan(x)$$

$$f(x, y) = x^2 y + \arctan(x) + d \quad d \in \mathbb{R}.$$

FORME DIFFERENZIALI

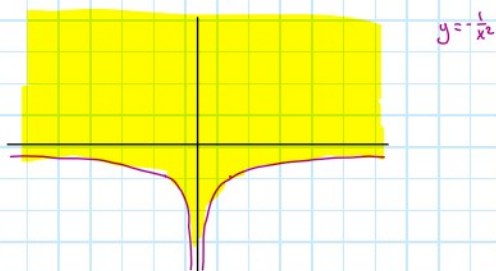
Data la forma differenziale:

$$w(x, y) = y \ln(1 + x^2 y) + \frac{2x^2 y^2}{1 + x^2 y} dx + x \ln(1 + x^2 y) + \frac{x^3 y}{1 + x^2 y} dy$$

Individuare l'insieme di definizione; verificare che su di esso la forma differenziale chiusa ed esatta, motivandone il perché e rappresentandola graficamente.

Condizioni del dominio

$$1 + x^2 y > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{x^2} \text{ se } x=0 \Rightarrow \text{non posso dividere} \quad \text{Dom } w = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y > -\frac{1}{x^2}\}$$



Dom f è un sott. di \mathbb{R}^2 semplice, connesso in quanto non ha buchi.
Dunque w è esatta $\Leftrightarrow w$ è chiusa

$$\begin{aligned} \text{Chiusa} \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} &\stackrel{?}{=} \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} &= \log(1 + x^2 y) + \frac{x^2 y}{1 + x^2 y} + \frac{4x^2 y(1 + x^2 y) - (2x^2 y^2)(x^2)}{(1 + x^2 y)^2} \\ &= \log(1 + x^2 y) + \frac{5x^2 y(1 + x^2 y) - 4x^4 y^2}{(1 + x^2 y)^2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} &= \log(1 + x^2 y) + \frac{2x^2 y}{1 + x^2 y} + \frac{3x^2 y(1 + x^2 y) - (x^3 y)(2xy)}{(1 + x^2 y)^2} = \\ &= \log(1 + x^2 y) + \frac{5x^2 y(1 + x^2 y) - 2x^4 y^2}{(1 + x^2 y)^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow w$ chiusa $\boxed{\Rightarrow} w$ è esatta
 \downarrow
 \Rightarrow Semp. connesso

Data la forma differenziale:

$$\omega(x, y) = [x^3 \sin(y)] dx + \left[\frac{x^4}{4} \cos(y) + 2y \right] dy$$

Individuare l'insieme di definizione, verificare se su di esso la forma differenziale sia chiusa ed esatta motivandone il perché e trovarne una primitiva

Dom $w = \mathbb{R}^2$ \mathbb{R}^2 sempl. connesso $\Rightarrow w$ chiusa $\Rightarrow w$ esatta

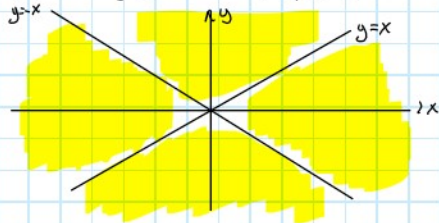
chiusa

$$\begin{aligned} x^3 \cos(y) &\stackrel{?}{=} x^3 \cos(y) \quad \text{si} \Rightarrow w \text{ chiusa} \Rightarrow w \text{ esatta} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} &\quad \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{aligned}$$

Grazie mille! L'esercizio mi chiede di studiare la forma differenziale e se possibile calcolare la primitiva che si annulla nel punto $(2, 0)$

$$\omega = \frac{2x}{x^2 - y^2} dx + \left(-\frac{2y}{x^2 - y^2} + e^y \right) dy$$

$$\text{Dom}(\omega) = x^2 - y^2 \neq 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) \neq 0 \wedge x \neq y \wedge x \neq -y$$



$$\text{Dom}(\omega) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x \neq \pm y\}$$

chiusa

$$+ 2x (x^2 - y^2)^{-2} 2y = 4xy (x^2 - y^2)^{-2} \stackrel{?}{=} + 4xy (x^2 - y^2)^{-2}$$

\Rightarrow ω chiusa

esatta

Cerco un potenziale \int integrale

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2} + e^y \end{cases} \quad \begin{aligned} U(x, y) &= \log(x^2 - y^2) + c(y) \\ \text{derivo risp a } y &\text{ e uguaglio} \\ -\frac{2y}{x^2 - y^2} + c'(y) &= -\frac{2y}{x^2 - y^2} + e^y \Rightarrow c'(y) = e^y \Rightarrow c(y) = e^y \end{aligned}$$

$$U(x, y) = \log(x^2 - y^2) + e^y + d \quad \text{con } d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si annulla in } (2, 0)? \quad U(2, 0) = \log(4) + 1 + d = 0 \Rightarrow$$

$$d = -\log(4) - 1$$

$$\tilde{U}(x, y) = \log(x^2 - y^2) + e^y - \log(4) - 1$$

Verificare per quale valore del parametro H la seguente forma differenziale lineare è esatta, spiegandone il motivo e rappresentarla graficamente.

$$\omega = (x^2 \sin(y) + 2xy) dx + \left(\frac{x^3}{3} \cos(y) - Hx^2 \right) dy$$

Individuare l'insieme di definizione, e trovare una primitiva che soddisfi la condizione: $f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Si sostituisca infine il valore trovato.

$$\text{Dom}(\omega) = \mathbb{R}^2 \text{ sempl. ammesso } \Rightarrow \omega \text{ chiusa } \Rightarrow \omega \text{ esatta}$$

chiusa

$$x^2 \cos(y) + 2x \stackrel{?}{=} \cos(y) x^2 - 2Hx \quad (\Rightarrow) H = -1$$

$\Rightarrow \omega$ esatta $\Leftrightarrow H = -1$

Cerco un potenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x^2 \sin(y) + 2xy \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^3}{3} \cos(y) + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} U(x, y) &= \frac{x^3}{3} \sin(y) + yx^2 + c(y) \\ \frac{x^3}{3} \cos(y) + x^2 + c'(y) &= \frac{x^3}{3} \cos(y) + x^2 \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = 0 \\ U(x, y) &= \frac{x^3}{3} \sin(y) + yx^2 + d \quad d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$U\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{basta scegliere } d = -\frac{1}{3}$$

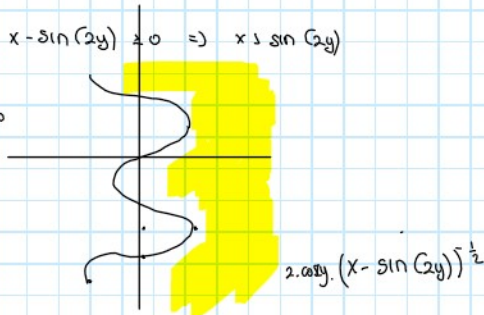
$$w = \frac{1}{\sqrt[2]{x - \sin 2y}} dx - \frac{2 \cos 2y}{\sqrt[2]{x - \sin 2y}} dy$$

Trovare l'insieme di definizione e rappresentarlo.

Dimostrare che w è esatta in A e trovare la primitiva $F(x, y)$ tale che $F(5, \frac{\pi}{4}) = 1$.

$$\text{Dom}(w) = x - \sin(2y) > 0 \Rightarrow x > \sin(2y)$$

D. semp. connesso



$$w \text{ esatta} \Leftrightarrow w \text{ chiusa} \rightarrow (x - \sin(2y))^{-3/2} \cos(2y) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dy} (x - \sin(2y))^{-1/2} \quad \text{si}$$

Cerco primitiva

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x - \sin(2y)}} \quad \int (x - \sin(2y))^{-1/2} = 2(x - \sin(2y))^{1/2} + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-2 \cos(2y)}{\sqrt{x - \sin(2y)}} = - (x - \sin(2y))^{-1/2} \cos(2y) \cdot 2 + d$$

$$U(x, y) = 2(x - \sin(2y))^{1/2} + d \quad d \in \mathbb{R}$$

$$U(5, \frac{\pi}{4}) = 1 \quad d = -3$$

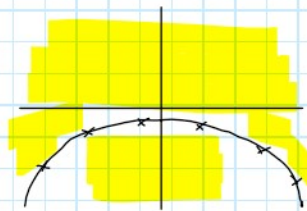
Dovrei studiare questa forma differenziale:

$$w = \frac{xdx + dy}{x^2 + 2y + 1}$$

e determinare la primitiva che si annulla nell'origine.

$$\text{dom}(w) = x^2 + 2y + 1 \neq 0 \quad x^2 \neq -1 - 2y$$

$$y \neq \frac{-1 - x^2}{2}$$



chiusa

$$-2(x^2 + 2y + 1)^{-2} = - (x^2 + 2y + 1)^{-2} \cdot (2x) \quad \text{si chiusa}$$

esatta cerco un potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + 2y + 1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + 2y + 1} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2 + 2y + 1} = \frac{1}{2} \log(x^2 + 2y + 1) + c(x)$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 2y + 1) + d \quad d \in \mathbb{R}$$

$$U(0, 0) = 0 \quad \text{basta } d = 0$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω si dice:

Convesso se $\forall x, y \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$

Stellato se $\exists x \in \Omega \quad \forall y \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$

Connesso se $\forall A, B$ aperti in $\Omega \quad A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega, A \neq \emptyset \Rightarrow A = \Omega \text{ e } B = \emptyset$

Semplicemente connesso se è connesso e vale uno dei seguenti fatti equivalenti

- 1 ogni curva chiusa è omotopa a una curva costante
- 2 Se γ_1 e γ_2 sono curve chiuse con gli stessi estremi \Rightarrow sono omotope a estremi fissati (cioè lascia fissi gli estremi)
- 3 Ogni $f: S^1 \rightarrow X^*$ si estende a tutto il disco D in modo continuo

In topologia, due funzioni continue da uno spazio topologico ad un altro sono dette **omotope** se una delle due può essere "deformata con continuità" nell'altra, e tale trasformazione è detta **omotopia** fra le due funzioni

Convesso \Rightarrow Stellato \Rightarrow SEMPL. connesso \Rightarrow connesso

Teo di base

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso

w C¹ chiusa

γ_1 e γ_2 curve omotope a estremi fissati

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w \end{array} \right\}$$

Poincaré segue da Teo base e dalla caratt. dell'esattezza

w esatta $\Leftrightarrow \int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$ a est. fissati

Ω s. conn. $\Rightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2$ con gli stessi estremi omotope

$$\begin{array}{c} \Downarrow w \text{ chiusa} \\ \int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w \end{array}$$

Una f. diff. importante chiusa ma non esatta

$$w_s(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

Sia w una f. diff. chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \Rightarrow w = w_s + w_e$
 \downarrow
 esatta.

INTEGRALE DI UNA FORMA DIFFERENZIALE LUNGO UNA CURVA

Definiamo integrale della f. diff. w lungo γ $\int_{\gamma} w := \int_a^b \left[\alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \right] dt$

In più dim

$$\int_{\gamma} w = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) dt \quad \text{dove } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad \text{con } w(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

- se γ è equiv. a $\varphi \Rightarrow \int_{\gamma} w = \int_{\varphi} w$ se hanno lo stesso verso

- Posso pensare $\int_{\gamma} \omega$ come a \int_{γ} funz. p. scalare tra campo associato e vettore tangente

⚠ Se percorro lo stesso supporto nel verso opposto $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega$
 Se faccio avanti e indietro viene 0

Come calcolare gli integrali curvilinei di una f. diff.

- 1 Uso la formula
- 2 Uso la formula dopo aver riparametrizzato la curva
- 3 Se la f. è esatta calcolo una primitiva e faccio la differenza tra i valori agli estremi
- 4 Se la curva è chiusa (esatta) sostituisco la curva con una omotopia a estremi fissati

Proposizione

Se ω è esatta e V è una primitiva $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$ cioè dipende solo dagli estremi della curva

Come calcolare il potenziale di una f. differenziale

metodo 1

Sia $\omega(x,y) = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$

- 1 Scelgo una delle due componenti di ω e la integro $\rightarrow \int [\alpha(x,y)] dx = \overbrace{f(x,y) + c(y)}^*$
 con $c(y)$ da determinare

- 2 Si deriva il risultato dell'integrale rispetto all'altra variabile e lo si pone uguale all'altra componente della f. differenziale $\rightarrow \frac{d}{dy} [f(x,y) + c(y)] = \beta(x,y)$
 Ottengo un'eq in $c'(y)$ che mi permetterà di trovare $c(y)$

- 3 Si sostituisce il valore trovato in * ed esse saranno una ^{potenziale} famiglia di primitive di ω

metodo 2

$f(x,y) - f(0,0) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega$ dal Teo. fond. del calcolo int.

modifico f in modo che $f(0,0) = 0 \Rightarrow f(x,y) = \int_0^x a(t,y) dt + \int_0^y b(x,t) dt$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

insieme connesso D dominio della riparametrizzazione

Cosa serve:

- 1 Superficie parametrizzata $\Sigma = r(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e limitata dove $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$
 $r(u,v) = (\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v))$ dove le funzioni $\alpha, \beta, \gamma \in C^1(D)$

- 2 La matrice Jacobiana associata a r $J_r(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \beta}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial \beta}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$

dove $\text{rank}(J_r) = 2$

$\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \neq (0,0,0)$

3 Una funzione scalare f a valori in \mathbb{R} contenente la superficie Σ , cioè $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Definiamo $\int_{\Sigma} f d\Sigma = \iint_D \underbrace{f(r(u,v))}_{A} \underbrace{\left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \right\|}_{B} du dv$

equivalentemente $\int_S f d\sigma = \iint_A f(\varphi(u,v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv =$

$= \iint_A f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} \right|^2 + \left| \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right|^2} du dv$

$A = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$B = \left\| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right\|$

- geometricamente $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$ sono **settori tangenti** a Σ
- $N(u_0, v_0) = \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0) =:$ **vettore normale** a Σ
- Si può riscrivere l'integrale così: $\int_{\Sigma} f d\Sigma = \iint_D f(r(u,v)) \|N(u,v)\| du dv$

Come calcolare gli integrali di superficie

1 Si determina una parametrizzazione r della superficie Σ e il suo dominio

1.a Se Σ si presenta come grafico di una funzione $z = g(x, y) \Rightarrow r(x, y) = (x, y, g(x, y))$ con $(x, y) \in D$

1.b Se Σ è una superficie sferica o parte di una sup. sferica \Rightarrow usiamo le coordinate sferiche

1.c Se Σ ha una simmetria assiale (cilindri o coni senza punte) \Rightarrow usiamo le coordinate cilindriche

2 Si calcolano le derivate parziali di r rispetto alle var. date $\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$
 $\frac{\partial r}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)$

3 Eseguo il p. vettoriale per $\det. N(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u, v)$

4 Calcolo la norma del vettore N

5 Impostiamo e risolviamo $\iint_D f(r(u,v)) \|N(u,v)\| du dv$

Esempio

$\int_{\Sigma} x^2 + y^2 d\Sigma$ dove Σ è la porzione di grafico della funzione $g(x, y) = xy \subseteq$ Cilindro $x^2 + y^2 = 1$

la sup. che ci interessa è il grafico della f. $g(x, y) = xy$ def. su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

1 Parametrizzo la sup. in modo naturale come $r(x, y) = (x, y, xy)$ con $(x, y) \in D$

2 Calcolo $\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = (1, 0, y)$ e $\frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = (0, 1, x)$

3 Calcolo $N \Rightarrow N(x, y) = \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = (0 \cdot x - y \cdot 1, 1 \cdot x - y \cdot 0, 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) = (-y, x, 1)$

4 Calcolo $\|N\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

$f(r(x, y)) = f(x, y, xy) = x^2 + y^2$

5 $\int_{\Sigma} x^2 + y^2 d\Sigma = \iint_D x^2 + y^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, \theta \in [0, 2\pi)\} \\ \det J_{\phi} = \rho \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho \, d\theta = \frac{4\pi}{15} (1+\sqrt{2})$$

AREA

$$\text{Area}(S) = \iint_D \|N(u,v)\| \, du \, dv \quad \text{così la f. integranda è uguale a 1}$$

- caso particolare \rightarrow Sup. dell'area di un grafico di una funzione $g(x,y)$ definita su un insieme D

$$\text{Area} = \int_D \sqrt{1 + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right]^2} \, dx \, dy$$

- la f. dell'area si può usare anche quando abbiamo superf. regolari a tratti (cioè $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i^{\text{regolare}}$)
In tal caso calcoleremo gli integrali di superficie su ciascuna di esse e ne sommeremo i contributi

ESEMPIO

Area della sup. di una sfera di raggio $R > 0$ e di eq. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

- 1 Parametrizzo la sup. con coord. sferiche

$$r(\theta, \phi) = (R \sin(\phi) \cos(\theta), R \sin(\phi) \sin(\theta), R \cos(\phi))$$

$$\phi \in [0, \pi] \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$2 \quad \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \phi) = (-R \sin(\phi) \sin(\theta), R \sin(\phi) \cos(\theta), 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (R \cos(\phi) \cos(\theta), R \cos(\phi) \sin(\theta), -R \sin(\phi))$$

$$\begin{aligned} 3 \quad N(\theta, \phi) &= \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial r}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -R^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \\ -R^2 \sin^2(\phi) \cos(\theta), -R \sin^2(\phi) \sin(\theta), -R^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \sin^2 \theta - R^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= (-R \sin^2(\phi) \cos(\theta), -R \sin^2(\phi) \sin(\theta), -R^2 \sin(\phi) \cos(\phi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \|N(\theta, \phi)\| &= \sqrt{R^4 [\cos^2(\theta) \sin^4(\phi) + \sin^4(\phi) \sin^2(\theta) + \cos^2(\phi) \sin^2(\phi)]} \\ &= \sqrt{R^4 [\sin^4(\phi) + \cos^2(\phi) \sin^2(\phi)]} \\ &= \sqrt{R^4 [\sin^2(\phi) (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))]} \\ &= \sqrt{R^4 \sin^2(\phi)} = R^2 |\sin(\phi)| = R^2 \sin \phi \quad \text{con } \phi \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$5 \quad \text{Area} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} R^2 [\cos \phi]_0^\pi \, d\theta = -R^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\theta = 2R^2 [\theta]_0^{2\pi} = 4\pi R^2$$

CAMPI VETTORIALI

Definizione

Un campo vettoriale è una f. a valori vettoriali def. su un insieme $A \neq \emptyset$ $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(x_0) = F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

⚠ dim insieme di partenza = dim insieme di arrivo

esempio

$$F(x, y) = (xy, y)$$

$$f_1(x, y) = xy \Rightarrow F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f_2(x, y) = y$$

$$F(x, y) = (x, y, xy) \text{ non è campo vett. } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Come trovare il dominio di un campo vettoriale?

1 Calcolo il dom. di ciascuna componente $A_i = \text{dom}(f_i)$

2 Interseco i domini trovati nel pto 1 $\Rightarrow \text{dom}(F) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$

CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detto campo vett. conservativo $(\Rightarrow) \exists$ U f. scalare $U: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. F ha per componenti le deriv. parziali di U con

dim 1 $F(x) = \nabla U(x) \quad \forall x \in A$

dim 2 $F(x, y) = \nabla U(x, y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right)$

dim 3 $F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) \right)$

U si chiama **potenziale**

nota

Se F è irrotazionale in un dominio semplicemente connesso allora F è conservativo

F è irrotazionale se il suo rotore è 0

F è irrotazionale se: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$

Rappresentazione dei campi vettoriali

1 Si disegnano le curve di livello di $U(x, y)$

2 Il ∇ è puntual. \perp alle curve di livello del pto.

3 \Rightarrow Possiamo tracciare il campo di vettori

FLUSSO

Casi di cui ho bisogno

1 Funz. vettoriale $F: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

2 Superficie $\Sigma \subseteq D$ espressa in forma parametrica $r: S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^3$

Negli es. la Σ può essere espressa in forma:

- a parametrica $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
- b esplicita $z = g(x, y)$
- c implicita $G(x, y, z) = 0$

3 $n: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vettore normale alla superficie al variare del pto (x, y, z)

ROTORE

Nel calcolo differenziale vettoriale, il rotore di un campo vettoriale tridimensionale è un operatore differenziale che ad un campo vettoriale tridimensionale F fa corrispondere un altro campo vettoriale solitamente denotato da $\nabla \times F$

In termini intuitivi, esso esprime una rotazione infinitesima del vettore dato, associando a ogni punto dello spazio un vettore.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

op. diff.

vettore

Esempio

$$F = (e^y, x+y, z^2) \quad \text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^y \\ x+y \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x+y), -(\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(e^y)), \frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - e^y \end{pmatrix}$$

⚠ al verso della normale $\begin{bmatrix} + \\ - \\ n \end{bmatrix}$ legato al concetto di **orientazione**

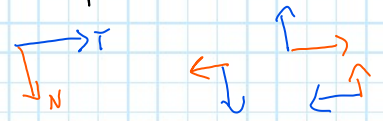
• in f. parametrica $N = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ il versore $n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\|} = \frac{N}{\|N\|}$

• Non tutte le sup. sono orientabili.

⚠ il vettore \vec{n} sta sempre a dx del vett. τ

Se il vett. \vec{n} è uscente dalla sup. \Rightarrow

∂sup è orient. positivamente



4 $\Phi = \iint_S F \cdot n \, d\vec{\Sigma} = \iint_S F(r(u,v)) \cdot \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\|} \, du \, dv = \iint_S F(r(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \, du \, dv$

caso particolare

Se Σ è grafico di una funt. $z = f(x,y) \Rightarrow \Phi = \iint_S F(x,y,f(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \, dx \, dy$

il vett. normale è rivolto verso le quote crescenti di z perchè il terzo elt. di N è 1

Se Σ è in f. implicita allora parametrizzo e procedo come al pto 4

Teorema della divergenza

• $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato da una sup chiusa ∂Q suff. regolare con normale in esterna alla superficie.

• Se $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ hanno le der parziali prime continue in $Q \Rightarrow$

$\iint_{\partial Q} F \cdot n \, d\vec{\Sigma} = \iiint_Q \text{div} F(x,y,z) \, dV$

dove $\text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$\int_{\partial Q} \text{div} F = \int_{\partial Q} F \cdot \vec{n} \, d\sigma$

• $\phi(F, \Sigma) = \int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_Q \text{div} F - \text{qualcosa}$

Si usa per calcolare il flusso • $\phi(F, \partial \Sigma) = \int_{\partial \Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma} \text{div} F$

la divergenza è un campo scalare che misura la tendenza di un campo vettoriale a divergere o a convergere verso un punto dello spazio.

$\nabla \cdot F$

Teorema di Gauss - Green

Leggi l'integrale di linea di Π specie lungo una curva chiusa con gli integrali doppi aventi dominio di integrazione la parte di piano delimitata da tale curva.

$G_1 - G_2$ nel piano con forme diff.

D dom regolare, lim, connesso di \mathbb{R}^n avente frontiera ∂D data da una curva semplice, chiusa regolare a tratti e positivamente orientata

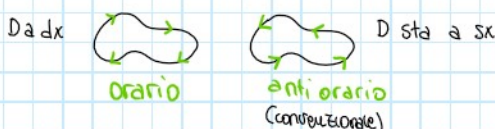
$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ è una forma diff. definita su D aperto contenente \bar{D} e A, B sono $C^1(D)$

Allora $\oint_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \int_{\partial D} \omega$

$D = \bigcup_{k=1}^n D_k$ D_k normale regolare rispetto a x o y

serve perchè così $\partial D = \bigcup_{i=1}^n$ di curve regolari a tratti

indica il verso positivo di percorrenza



dipende dalla parametrizzazione



ha orient. pos. sup

Regola Le curve che limitano il dominio sono orientate positivamente (\Rightarrow i pti del dominio D stanno a sx rispetto alla ∂D)

AREA CON GAUSS GREEN

D dom. regolare di \mathbb{R}^2

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy$$

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial^+ D} -y dx$$

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} -y dx + x dy$$

G - G per campi vettoriali

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dom. regolare

Sia $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vettoriale $\ni \partial D$ $F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ t.c. A, B abbiano der. continue

$$\text{Allora } \oint_{\partial^+ D} F \cdot dP = \iint_D \left(\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} \right) dx dy$$

Formule di Gauss - Green

Introduzione

Sia A un dominio regolare di \mathbb{R}^2 , cioè un insieme limitato di \mathbb{R}^2 , coincidente con la chiusura del suo interno, con frontiera ∂A costituita da una curva generalmente regolare.

La frontiera di A , come curva generalmente regolare, ammette vettore tangente τ in tutti i suoi punti, con l'eventuale eccezione di un numero finito di essi.

In corrispondenza è definita la retta normale, o perpendicolare, alla retta tangente alla frontiera ∂A .

Secondo convenzione, si orienta la retta normale verso l'esterno dell'insieme A e si considera il corrispondente vettore normale esterno n .

Si orienta poi la retta tangente in modo che la coppia (n, τ) sia congruente all'orientamento degli assi x, y (cioè, con un movimento rigido piano, costituito da una rotazione ed una traslazione, tale da sovrapporre il vettore n con il vettore dell'asse x , risulti che il vettore τ venga a coincidere con il vettore dell'asse y).

In corrispondenza all'orientamento del vettore tangente, viene indotto un orientamento della frontiera ∂A che, per convenzione, viene detto positivo; la frontiera così orientata si indica con $\partial^+ A$.

ESEMPIO

In figura è rappresentato un insieme A la cui frontiera è unione di due curve γ_1, γ_2 ; l'orientazione positiva di ∂A corrisponde al verso antiorario della curva γ_2 .

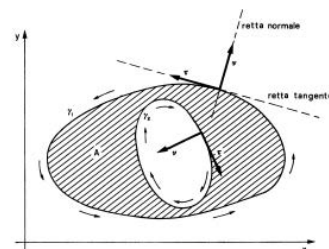


figura 6.9

Sia $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$ una rappresent. parametrica della sua parte

Tale rappresentazione stabilisce un orientamento di ∂A ; se, ad esempio, si cambia parametro con la sostituzione $s = -t$, si ottengono le equazioni parametriche

$$x = x(-s),$$

$$y = y(-s),$$

$$s \in [-b, -a],$$

che rappresentano la stessa curva ∂A , ma orientata nel verso opposto al precedente.

Supponiamo che assegnati il verso positivo a ∂A

$$\tau = \left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{-y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \quad n = \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{-x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right)$$

Per mezzo delle notazioni introdotte possiamo ora ricordare le formule di Gauss-Green.

Tali formule sono utili per il calcolo di integrali doppi estesi a domini A definiti tramite equazioni parametriche della frontiera; ∂A

in tal caso, tramite le formule di Gauss-Green l'integrale doppio è ridotto ad un integrale curvilineo di una forma differenziale estesa alla frontiera A .

Oltre a ciò, le formule di Gauss-Green hanno un'importanza teorica notevole nello studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

$\forall A$ dominio regolare di \mathbb{R}^2 e $f \in C^1(A)$

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial^+ A} f dy$$

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\partial^+ A} f dx$$

LA FORMULA DI STOKES E IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Teo Stokes

def

Sia $V = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\text{rot } V = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \quad \text{rot } V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

formula di Stokes

$$\omega = v_1(x, y, z) dx + v_2(x, y, z) dy + v_3(x, y, z) dz \quad \text{f. differenziale}$$

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S (\text{rot } V, n) d\sigma = \int_S \text{rot } V \cdot \vec{n} d\sigma$$

↳ p. scalare

cioè l'integrale curvilineo di ω lungo il bordo di S (orientato positivamente) è uguale all'integrale di superficie del prodotto scalare tra il vettore $\text{rot } V$ ed il versore normale n a S .

def

$$\text{div}(V) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Teo della divergenza

$$\iiint_B \text{div } V(x, y, z) dx dy dz = \int_{\partial B} (V, n) d\sigma = \int_{\partial B} V \cdot n d\sigma$$

↓
p. scalare

Cioè sia B un dominio regolare di \mathbb{R}^3 , cioè B è chiusura di un aperto limitato e connesso con frontiera ∂B costituita da una superficie regolare. L'integrale triplo della divergenza di V esteso a B è uguale all'integrale di superficie del prodotto scalare (V, n) dove n è il versore normale esterno a B .

Il teorema della divergenza si interpreta dicendo che il flusso di un vettore V attraverso una superficie chiusa ∂B , bordo di un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^3$ è uguale all'integrale della divergenza di V estesa al solido B .

Invece la formula di Stokes stabilisce che la circuitazione di un vettore V lungo una curva chiusa ∂S , bordo di una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è uguale al flusso del rotore di V attraverso la superficie S .

Teo del rotore

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana liscia a tratti che sia anche una curva semplice chiusa (curva di Jordan): ovvero, se t e s sono nell'intervallo (a, b) allora $\gamma(s) = \gamma(t)$ implica $t = s$ (cioè la curva è semplice), e per cui si abbia $\gamma(a) = \gamma(b)$ (cioè la curva è chiusa). Detto D il dominio di \mathbb{R}^2 la cui frontiera è γ , sia inoltre $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione liscia e F un campo vettoriale su \mathbb{R}^3 .

Denotando con $S = \psi(D)$ l'immagine di D tramite ψ e con Γ la curva definita dalla relazione $\Gamma(t) = \psi(\gamma(t))$, il teorema stabilisce che:

$$\oint_{\Gamma} F \cdot d\Gamma = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS$$

Il termine a sinistra è l'integrale di linea di F lungo Γ ed il termine a destra è l'integrale di superficie del rotore $\nabla \times F$ di F .

STOKES

TEO DIVERGENZA

TEO ROTORE

GREEN

TEO FOND. CALC. INTEG.

Il teorema di Stokes è un enunciato riguardante l'integrazione delle forme differenziali che generalizza diversi teoremi di calcolo vettoriale, quali il teorema della divergenza o il teorema del rotore.

Consente di passare da un integrale superficiale a un integrale curvilineo o viceversa. Cioè sotto opportune hp puoi eliminare una dimensione nel calcolo integrale

Il teorema della divergenza n -dimensionali del teorema fondamentale del calcolo integrale.

A sua volta, esso è un caso speciale del più generale teorema di Stokes. Talvolta il teorema è meno propriamente detto teorema di Gauss da non confondere col teorema di Gauss-Green.

Permette di passare da un integrale di superficie a un integrale di volume

Il teorema del rotore afferma che il flusso del rotore di determinati campi vettoriali attraverso superfici regolari dotate di bordo è uguale alla circuitazione del campo lungo la frontiera della superficie. Si tratta pertanto di un caso particolare del teorema di Stokes.

Il teorema di Green è un caso speciale del teorema del rotore che considera superfici appartenenti a \mathbb{R}^2

Cioè puoi passare dal calcolo di un integrale di superficie al calcolo di un integrale lungo la frontiera della superficie.

Esprime l'equivalenza del flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie e della circuitazione del campo vettoriale lungo la frontiera della superficie

Stabilisce che la circuitazione di un campo vettoriale attraverso una curva è uguale al flusso del rotore del campo attraverso la superficie delimitata da tale curva

Il teorema di Green pone in relazione un integrale di linea attorno a una curva chiusa semplice e un integrale doppio su di una regione piana limitata dalla medesima curva.

Il teorema del flusso, noto anche come teorema di Gauss, nella teoria dei campi vettoriali, afferma che i campi vettoriali radiali dipendenti dal reciproco del quadrato della distanza dall'origine hanno un flusso attraverso una qualunque superficie chiusa che dipende solo dalle sorgenti di campo in essa contenute ed è indipendente dalla posizione interna delle sorgenti che lo generano.

L'enunciato ha due espressioni, una integrale e una differenziale, legate tra di loro dal teorema della divergenza.

ES INTEGRALI DI SUPERFICIE E FLUSSO

giovedì 13 aprile 2023 11:23

Esercizio n° 1

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} d\sigma \quad \text{dove } \Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } z = x + \frac{y^2}{2} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad y \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \right\}$$

1 Parametrizzo Σ 1A $\varphi(u, v) = (u, v, u + \frac{v^2}{2})$ dove $\begin{cases} x=u \\ y=v \end{cases}$

1B $\varphi: D \rightarrow \Sigma$ dove $D = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } u \in [0, \frac{\pi}{2}], v \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \}$

2 $\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} d\sigma = \int_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$

3 $f(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

4 $\|\varphi_u \times \varphi_v\| \Rightarrow$ 4A $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) = (1, 0, 1)$
 $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) = (0, 1, v)$

4B $\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot v - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot v - 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$

4C $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{(-1)^2 + v^2 + 1} = \sqrt{2 + v^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{v^2}{2}}$

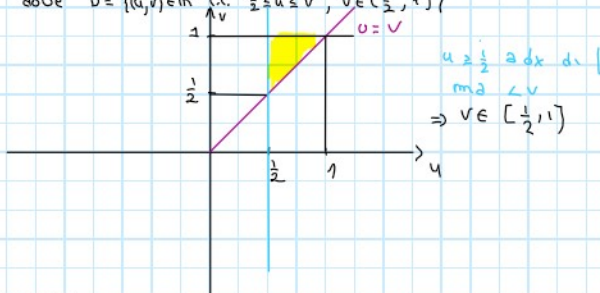
5 $\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} d\sigma = \int_D \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{v^2}{2}} du dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-v^2}} dv du = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} du \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} [\arcsin v]_0^{1/\sqrt{2}} du = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{4} du = \frac{\sqrt{2} \pi}{4} \int_0^{\pi/2} du = \frac{\sqrt{2} \pi}{4} [u]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2} \pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} \pi^2}{8}$

Esercizio 2

$$\int_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2}{z^3} d\sigma \quad \Sigma = \left\{ (x, y, z) = (\sin(uv), \cos(uv), u) \text{ con } \frac{1}{2} \leq u \leq v, v \in [0, 1] \right\}$$

1 Parametrizzo Σ 1A $\varphi(u, v) = (\sin(uv), \cos(uv), u)$

1B $\varphi: D \rightarrow \Sigma$ dove $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \frac{1}{2} \leq u \leq v, v \in [\frac{1}{2}, 1]\}$



2 $\int_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2}{z^3} d\sigma = \int_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$

3 $f(\varphi(u, v)) = f(\sin(uv), \cos(uv), u) = \frac{\sin^2(uv) + \cos^2(uv)}{u^3} = \frac{1}{u^3}$

4 $\|\varphi_u \times \varphi_v\| \Rightarrow$ 4A $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (v \cos(uv), -v \sin(uv), 1)$
 $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (u \cos(uv), -u \sin(uv), 0)$

4B $\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -v \sin(uv) \cdot 0 + u \sin(uv) \\ -(v \cos(uv) \cdot 0 - u \cos(uv)) \\ -v u \cos(uv) \sin(uv) + v u \sin(uv) \cos(uv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \sin(uv) \\ u \cos(uv) \\ 0 \end{pmatrix}$

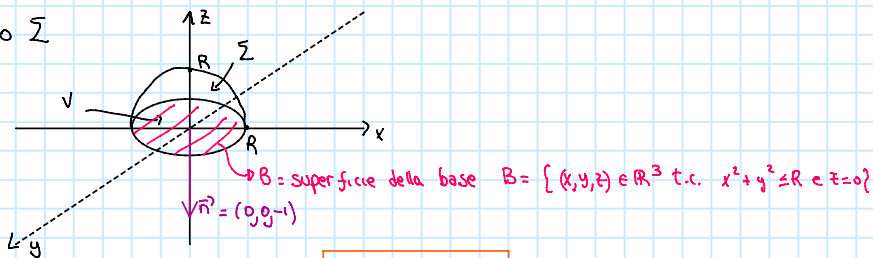
4C $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{u^2 (\sin^2(uv) + \cos^2(uv))} = |u| = u$ perché u è sempre positiva

5 $\int_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2}{z^3} d\sigma = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^v \frac{1}{u^3} u du dv = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^v \frac{1}{u^2} du dv = \int_{1/2}^1 \left[-\frac{1}{u} \right]_{1/2}^v dv = \int_{1/2}^1 \left(-\frac{1}{v} + 2 \right) dv = \left[-\log v \right]_{1/2}^1 + 2 \left[v \right]_{1/2}^1 = -\log 2 + 1$

Esercizio 3

Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x+y^2, y+z\arctan x, z+e^{xy}\sin x)$ uscente dalla semisfera $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x^2+y^2+z^2=R^2, z \geq 0\}$

1 Disegno Σ



2 Useremo il Teo della divergenza

$$\int_V \text{div } F = \int_{\partial V} F \cdot \vec{n} = \int_{\Sigma} F \cdot \vec{n} + \int_B F \cdot \vec{n}$$

In particolare

$$\phi(F, \Sigma) = \int_{\Sigma} F \cdot \vec{n} = \int_V \text{div } F - \int_B F \cdot \vec{n}$$

Calcolo α

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\int_V \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_V 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \int_V 1 \, dx \, dy \, dz = 3 \text{ Volume}(V) = 3 \left(\frac{1}{2} \pi R^3 \cdot \frac{1}{2} \right) = 2\pi R^3$$

sto integrando la funz. 1 che quindi mi dà il Volume

calcolo β

$$\int_B F \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$F \cdot \vec{n} = (x+y^2, y+z\arctan x, z+e^{xy}\sin x) \cdot (0,0,-1) = 0+0-z-e^{xy}\sin x$$

$$\int_B -z - e^{xy}\sin x \, d\sigma = \int_B -e^{xy}\sin x \, d\sigma = - \int_B e^{xy}\sin x \, dx \, dy = 0$$

per come è def. B. y è dispari e sto integrando su tutto il dominio

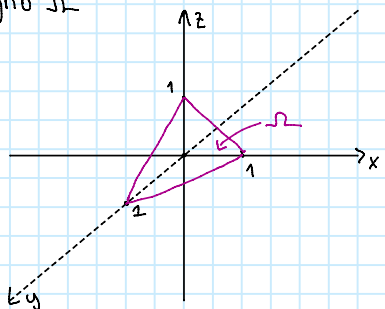
3 Conclusione

$$\phi(F, \Sigma) = \int_V \text{div } F - \int_B F \cdot \vec{n} = \int_V \text{div } F = 2\pi R^3$$

Esercizio n°4

Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x,y,z)$ uscente dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

1 Disegno Ω



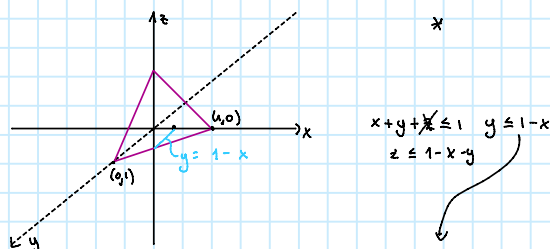
$$\begin{aligned} x=y=0 &\Rightarrow z=1 \\ x=z=0 &\Rightarrow y=1 \\ z=y=0 &\Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

2 Useremo il Teo della divergenza

$$\phi(F, \partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F$$

$$\text{Calcolo } \operatorname{div} F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\int_{\Omega} 3 dx dy dz = 3 \int_{\Omega} dx dy dz = 3 \underset{\text{volume}}{\text{misura}(\Omega)} \underset{\text{perché siamo in 3D.}}{=} \frac{1}{2}$$



$$\Omega = \{ x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y \}$$

$$\begin{aligned} \chi &= 3 \int_{\Omega} dx dy dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} dy = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = 3 \int_0^1 \left[(y)_0^{1-x} - x(y)_0^{1-x} - \frac{(y^2)_0^{1-x}}{2} \right] dx = \\ &= 3 \int_0^1 \left(1-x - x + x^2 - \frac{1-x^2}{2} \right) dx = 3 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = 3 \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 Conclusione

$$\phi(F, \partial\Omega) = \frac{1}{2}$$

Esercizio n° 5

$$\text{Data } \Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } 1 \leq z \leq 2, x^2+y^2=z^2 \}$$

1) Calcolare $\int_{\Sigma} (x^2+y^2)^4 d\sigma$

2) Calcolare $\phi(F, \Sigma)$ dove $F(x,y,z) = (e^{yz} + ux, \cos(z^2), 3)$
flusso uscente da Σ

Sol 1

$$\int_{\Sigma} (x^2+y^2)^4 d\sigma = \int_D f(\varphi(u,v)) \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$$

dove $\varphi(u,v) = (u \cos v, u \sin v, u)$

$$\varphi: D \rightarrow \Sigma \quad \text{con } D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } v \in [0, 2\pi], u \in [1, 2] \}$$

$$f(\varphi(u,v)) = (u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v)^4 = u^8$$

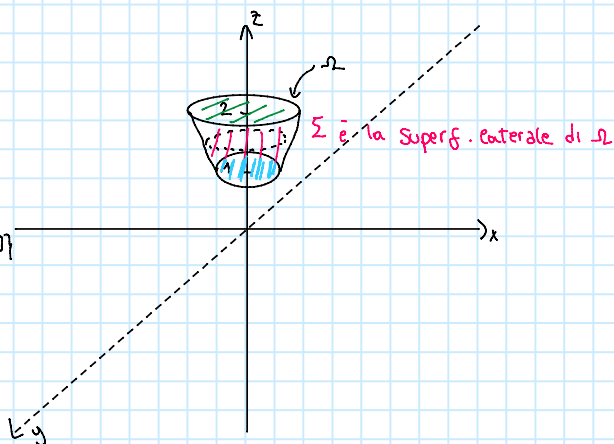
$$\varphi_u \times \varphi_v \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u \cos^2 v + u \sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2} = \sqrt{u^2(1+1)} = u\sqrt{2}$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} u^8 \cdot u\sqrt{2} dv du = 2\sqrt{2}\pi \int_1^2 u^9 du = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{u^{10}}{10} \right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{10} (2^{10} - 1)$$



sol 2

Usiamo Teo divergenza

$$\phi(F, \Sigma) = \int_{\Sigma} F \cdot \vec{n} \, d\sigma = \underbrace{\int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} \, d\sigma}_{(I)} - \underbrace{\int_{B_1} F \cdot \vec{n}_1}_{(II)} - \underbrace{\int_{B_2} F \cdot \vec{n}_2}_{(III)}$$

$$* \phi(F, \partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

Calcolo (I)

$$\operatorname{div} F = 4 + 0 + 0 = 4.$$

$$\int_{\Omega} 4 \, dx \, dy \, dz = 4 \int_{\Omega} dx \, dy \, dz = 4 \operatorname{Volume}(\Omega) = 4 \int_1^2 \overbrace{\pi z^2}^{\text{area di ogni cerchio}} \, dz = 4\pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_1^2 = 4\pi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{28}{3} \pi$$

Calcolo II

$$\int_{B_1} F \cdot \vec{n}_1 = \int_{B_1} -3 \, dx \, dy = -3 \operatorname{Area}(B_1) = -3\pi \cdot 1^2$$

$\hookrightarrow \vec{n}_1 = (0, 0, -1)$
 $F \cdot \vec{n}_1 = -3$

Calcolo III

$$\int_{B_2} F \cdot \vec{n}_2 = \int_{B_2} 3 \, dx \, dy = 3 \operatorname{Area}(B_2) = 3\pi \cdot 2^2 = 12\pi$$

$\hookrightarrow \vec{n}_2 = (0, 0, 1)$
 $F \cdot \vec{n}_2 = 3$

Conclusione

$$\phi(F, \Sigma) = \frac{28}{3} \pi - (-3\pi) - 12\pi = \frac{28}{3} \pi - 9\pi = \frac{1}{3} \pi$$

Esercitarmi di più su questa!!!
e su disegnare grafici.

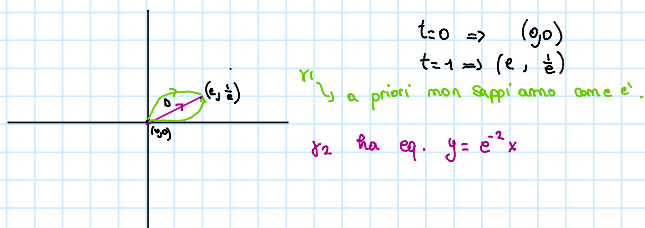
ES GAUSS-GREEN E TEO DI STOKES

mercoledì 19 aprile 2023 09:56

Esercizio 1

Usare le formule di Gauss-Green per calcolare l'area della regione delimitata dal concatenamento della curva $\gamma_1(t) = (te^t, te^{-t})$ con il segmento γ_2 che congiunge gli estremi di γ_2 con $te \in [0,1]$

Capire come è fatta la regione



Prendo una stessa x e calcolo la y di γ_2 e di γ_1 e vediamo quale è più grande

$$y_{\gamma_2} = e^{-2}x(t) = e^{-2}te^t \stackrel{?}{<} y_{\gamma_1} = te^{-t} \quad (\Rightarrow) \quad e^{-2}e^t < e^{-t} \quad (\Leftrightarrow) \quad e^{t-2} < e^{-t} \quad (\Rightarrow) \quad t-2 < -t \quad (\Rightarrow) \quad 2t < 2 \quad (\Rightarrow) \quad t < 1$$

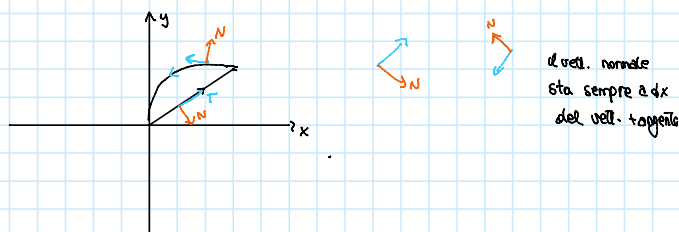
Ma $t \in [0,1] \Rightarrow$ la disug. è vera quindi γ_1 sta sempre sopra γ_2

Calcolo l'area di D

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial D} x dy$$

Il bordo è orientato posit. se la normale è rivolta all'esterno di D

Ricordiamo che $(n, T) \sim (x, y)$



$$\partial^+ D = \gamma_2 \cup (-\gamma_1)$$

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial^+ D} x dy = \int_{\gamma_2} x dy + \int_{-\gamma_1} x dy = \int_{\gamma_2} x dy - \int_{\gamma_1} x dy =$$

$$\gamma_1 = (te^t, te^{-t}) \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2 = (t, e^{-2}t) \quad t \in [0,e]$$

$$\hookrightarrow y = e^{-1} = e^{-2}x \Rightarrow 1 = e^{-2}e \cdot x \Rightarrow 1 = e^{-1}x \Rightarrow x = e$$

$$\text{Area}(D) = \int_0^e t e^{-2} dt - \int_0^1 te^t (e^{-t} - te^{-t}) dt =$$

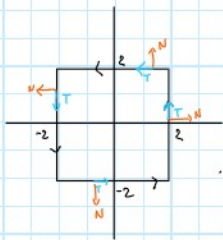
$$= e^{-2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^e - \int_0^1 (t - t^2) dt =$$

$$= e^{-2} \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2

Usare il Teo di Stokes per calcolare l'integrale di $w(x,y) = (x^3 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$

Lungo il bordo del quadrato di raggio 2 percorso in senso antiorario



è un'orient. positiva

Usiamo Stokes nel piano

$$\int_{\partial D} w(x,y) = \iint_D \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{con } (w_1, w_2) = w$$

nel nostro caso

$$\int_{\partial A} (x^3 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_A (-2y + 3xy^2) dx dy \stackrel{\text{dom. normale}}{=} \int_0^2 \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dx dy = \int_0^2 [-2yx + \frac{3}{2}xy^2]_0^2 dy = \int_0^2 (-4y + 6y^2) dy = -4[\frac{y^2}{2}]_0^2 + 6[\frac{y^3}{3}]_0^2 = -8 + \frac{48}{3} = 8$$

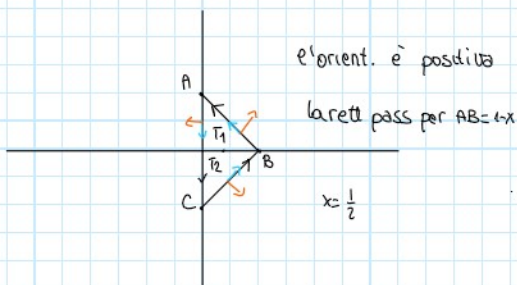
Conclusione $\int_{\partial A} w dx dy = 8$

Esercizio 3

Usare Stokes per $\int_{\partial T} w$ dove $w = (\arctan y)dx - (xy)dy$

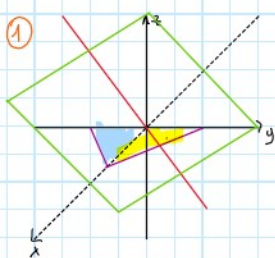
T è il Triangolo di vertici $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$

percorso in senso antiorario



$$\int_{\partial T} w dx dy = \iint_T \left(-y - \frac{1}{1+y^2} \right) dx dy = \iint_T -y dx dy - \iint_T \frac{1}{1+y^2} dx dy$$

Osservazioni



Rappresento la f y in \mathbb{R}^3

T

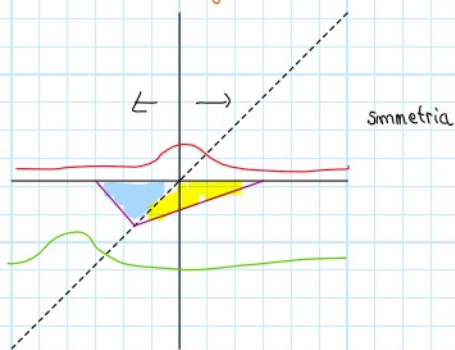
$z = f(x,y) = -y$ non dipende da x $z = -y$ è una bisell.

formo in \mathbb{R}^3 $\forall x$ fisso ottengo lo stesso disegno \rightarrow ho un piano

$|\text{yellow}| = |\text{blue}|$ ma yellow ha sign opposto perché $z=0$ proprio sull'asse x

$$\Rightarrow \iint_T -y dx dy = 0$$

2. Rappresento $\frac{1}{1+y^2}$ in \mathbb{R}^2



$$\int_{\mathbb{R}^2} w(x,y) dx dy = - \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1+y^2} dx dy = -2 \int_{\mathbb{T}_1} \frac{1}{1+y^2} dx dy$$

Come è fatto $\mathbb{T}_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1-x \}$

$$\iint_{\mathbb{T}_1} w(x,y) dx dy = -2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{1+y^2} dy dx = -2 \int_0^1 [\arctan y]_0^{1-x} dx = -2 \int_0^1 \arctan(1-x) dx \stackrel{\text{part.}}{=} -2 \left[x \arctan(1-x) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_{x=0}^{x=1} \frac{x+1-1}{1+(1-x)^2} dx$$

$$= -2 \left[\int_0^1 \frac{x-1}{1+(1-x)^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+(1-x)^2} dx \right]$$

$$= - \int_0^1 \frac{-2(1-x)}{1+(1-x)^2} dx + 2 \int_0^1 \frac{-1}{1+(1-x)^2} dx$$

$$= \left[-\log(1+(1-x)^2) + 2 \arctan(1-x) \right]_0^1$$

$$= +\log(2) - \frac{\pi}{2}$$

Esercizi sui teoremi di Green, Stokes, Gauss

Esercizio 1. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(x^2y + e^{\arctan(\sin x + \log(1+x^2))}, xy^3 - \cos e^{\sin(y^4+y^2+1)} \right)$$

lungo il bordo del triangolo di vertici $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ percorso in senso antiorario.

Esercizio 2. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\sin(e^{x^8}) + 15yz, x^2y + \frac{1}{3y^4+7} + xz, e^{\cos(6z^4+5)} + 8xy \right)$$

lungo il bordo della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9 - x^2 - y^2, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z .

Esercizio 3. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (5x^2 - 1 + \cos(e^{xz} - 1), 5y^2 - \log(1 + \arctan^2(xz)), 2y - \sin(xz))$$

attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x \geq 0, z \geq 0\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z .

Esercizio 4. Calcolare il flusso entrante del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^3 + y \log(z^2 + 1), 4y + xz \log(1 + x^2z^2), z^3 + x \log(y^2 + 1))$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$.

Esercizio 5. Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (2x^2 + e^{y^6} - 3z^{10}, xy + e^{z^6} - 3x^{10}, 3x^6y^{10} - xz)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 - y^2 - z^2 \leq x \leq 6 - 4\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 < 9, z \leq 0\}$.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = (7y - e^{3\sin x}, 2\cos(e^{3y+1}) - x^2y + 7x)$$

lungo il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq x + 3\}$ percorso in senso orario.

Esercizio 7. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (3yz + \sin^8 x, xz + \log^6(1 + y^2), 2xy + e^{z^2})$$

lungo il bordo della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$, orientato positivamente rispetto ad un osservatore posto come il vettore uscente dal paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Esercizio 8. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y \sin(x + \cos z^4) - 3z, y^8 e^{x+z}, 3x + 5x^2 z)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, y \geq 0\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse y .

Esercizio 9. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x, y) = (e^{\sin x} - 3x^2 y, 2xy - \sqrt{2 + \cos y})$$

lungo il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ percorso in senso antiorario.

SVOLGIMENTO

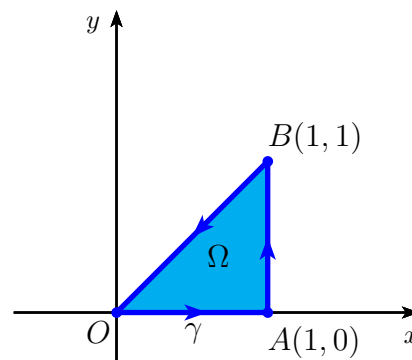
Esercizio 1. Il campo vettoriale F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

Denotato con Ω il triangolo OAB , calcoliamo l'integrale $\int_{\partial\Omega} F \cdot dP$.

Osserviamo che $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \\ &= \int_{\Omega} (y^3 - x^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x (y^3 - x^2) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}y^4 - x^2y \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$



Esercizio 2. Si ha che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n d\sigma,$$

dove $\text{rot}F$ è il rotore del campo vettoriale F definito dalla scrittura formale

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \text{rot}F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(e^{x^8}) + 15yz & x^2y + \frac{1}{3y^4+7} + xz & e^{\cos(6z^4+5)} + 8xy \end{vmatrix} = \\ &= (7x, 7y, 2xy - 14z). \end{aligned}$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

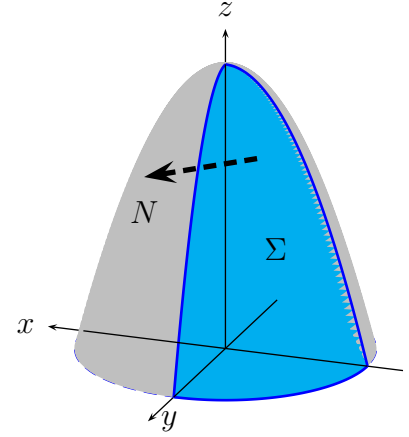
Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$. Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z . Un vettore normale a Σ è

$$N_{\sigma}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (2x, 2y, 1).$$

Questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z . Quindi un vettore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z è $N(x, y) = -N_{\sigma}(x, y) = (-2x, -2y, -1)$.



Si ha che

$$\begin{aligned} \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \text{rot}F(x, y, 9 - x^2 - y^2) \cdot (-2x, -2y, -1) = \\ &= (7x, 7y, 2xy - 126 + 14x^2 + 14y^2) \cdot (-2x, -2y, -1) = 126 - 28x^2 - 28y^2 - 2xy. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K (126 - 28x^2 - 28y^2 - 2xy) \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano xy

$$= \int_{K'} (126 - 28\rho^2 - 2\rho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta) \rho \, d\rho \, d\vartheta = \int_{K'} (126\rho - 28\rho^3 - 2\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta =$$

dove $K' = [0, 3] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$

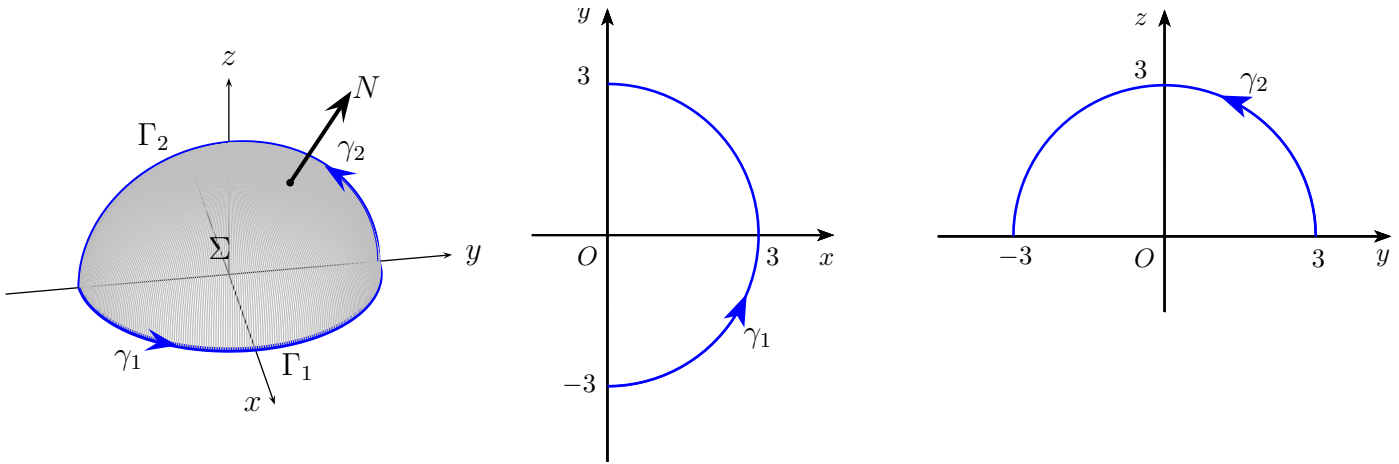
$$\begin{aligned} &= 7\pi \left(\int_0^3 (9\rho - 2\rho^3) \, d\rho \right) - 2 \left(\int_0^3 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ &= 7\pi \left[\frac{9}{2}\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^4 \right]_0^3 - 2 \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^3 \left[\frac{1}{2}\sin^2 \vartheta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Si ha che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP.$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9, z = 0, x \geq 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 9, x = 0, z \geq 0\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve parametriche che parametrizzano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ , che deve formare un angolo **acuto** con il versore fondamentale dell'asse z .

Si ha che $\gamma_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_1(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0)$. Quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt,$$

dove

$$\begin{aligned} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) &= F(3 \cos t, 3 \sin t, 0) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = (45 \cos^2 t, 45 \sin^2 t, 6 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t, 0) = \\ &= -135 \sin t \cos^2 t + 135 \cos t \sin^2 t. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt = 135 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t \cos^2 t + \cos t \sin^2 t) \, dt =$$

$$= 135 \left[\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 90.$$

Inoltre si ha che $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\gamma_2(t) = (0, 3 \cos t, 3 \sin t)$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt,$$

dove

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) &= F(0, 3 \cos t, 3 \sin t) \cdot (0, -3 \sin t, 3 \cos t) = (0, 45 \cos^2 t, 6 \cos t) \cdot (0, -3 \sin t, 3 \cos t) = \\ &= -135 \sin t \cos^2 t + 18 \cos^2 t. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F \cdot dP &= \int_0^\pi F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt = \int_0^\pi (-135 \sin t \cos^2 t + 18 \cos^2 t) dt = \\ &= \left[45 \cos^3 t + 9(t + \sin t \cos t) \right]_0^\pi = 9\pi - 90. \end{aligned}$$

In conclusione si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 90 + 9\pi - 90 = 9\pi.$$

Esercizio 4. Si ha che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per le proprietà degli integrali di flusso, il flusso entrante di F da $\partial\Omega$ è l'opposto del flusso uscente di F da $\partial\Omega$.

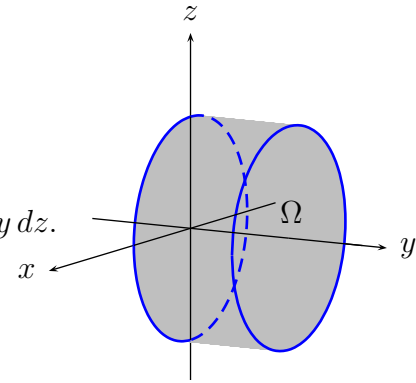
Per il Teorema di Gauss si ha che il flusso uscente di F da $\partial\Omega$ è

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot n d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\operatorname{div} F(x, y, z) = 3(x^2 + z^2) + 4$ e

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} [3(x^2 + z^2) + 4] \, dx \, dy \, dz.$$



Osserviamo che Ω è l'insieme dei punti del cilindro retto di equazione $x^2 + z^2 = 4$ e dei punti interni ad esso, compresi fra i piani $y = 0$ e $y = 2$. Passiamo in coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse y . Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = y \\ z = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad y \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, y)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y, z) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + z^2 \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Quindi $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \{(\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\}.$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Omega^+} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} [3(x^2 + z^2) + 4] \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} (3\rho^3 + 4\rho) \, d\rho \, d\vartheta \, dy =$$

essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi ρ , ϑ e y e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ , una di ϑ e una di y , si ottiene

$$= 4\pi \left(\int_0^2 (3\rho^3 + 4\rho) \, d\rho \right) = 4\pi \left[\frac{3}{4}\rho^4 + 2\rho^2 \right]_0^2 = 80\pi.$$

In conclusione, il flusso entrante di F da $\partial\Omega$ è

$$\int_{\partial\Omega^-} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{\partial\Omega^+} F \cdot n \, d\sigma = -80\pi.$$

Esercizio 5. Si ha che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che $\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$.

Quindi $\operatorname{div} F(x, y, z) = 4x$ e

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 4x \, dx \, dy \, dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse x .

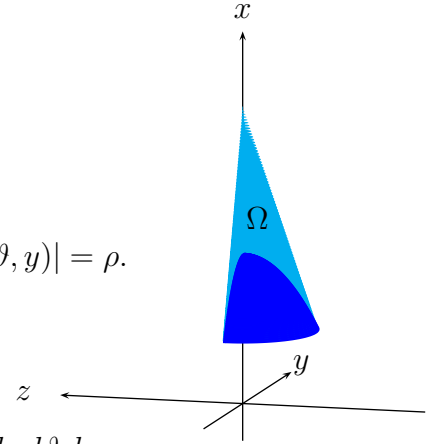
Si ha che

$$\Phi : \begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \vartheta, x)| = \rho.$$

Si ottiene che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega} 4x \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega'} 4x \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx,$$

dove $\Omega' = \{(\rho, \vartheta, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, \pi \leq \vartheta \leq 2\pi, 3 - \rho^2 \leq x \leq 6 - 4\rho\}$.



Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma &= \int_{\Omega'} 4x \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dx = \pi \int_0^1 \rho \left(\int_{3-\rho^2}^{6-4\rho} 4x \, dx \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho \left[x^2 \right]_{3-\rho^2}^{6-4\rho} d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho [(6-4\rho)^2 - (3-\rho^2)^2] d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho (22\rho^2 - 48\rho + 27 - \rho^4) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 (22\rho^3 - 48\rho^2 + 27\rho - \rho^5) d\rho = 2\pi \left[\frac{11}{2}\rho^4 - 16\rho^3 + \frac{27}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^1 = \frac{17}{3}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Il campo vettoriale F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

Per le proprietà degli integrali di linea, l'integrale di linea del campo F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso orario è l'opposto dell'integrale di linea di F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso antiorario.

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che l'integrale di linea di F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso antiorario è

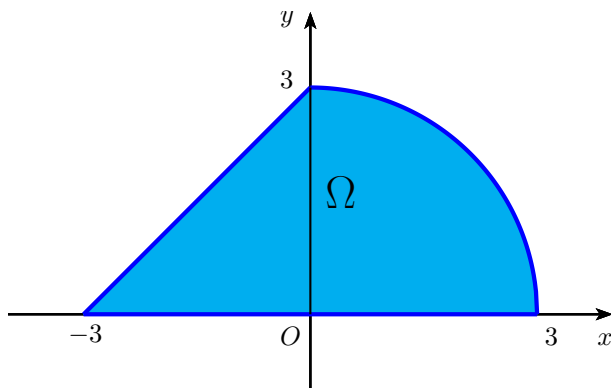
$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega^+} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \\ &= -2 \int_{\Omega} xy dx dy.\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3, y - 3 \leq x \leq \sqrt{9 - y^2} \right\}.$$

Quindi è un insieme x -semplice. Procedendo con l'integrazione si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega^+} F \cdot dP &= -2 \int_0^3 \left(\int_{y-3}^{\sqrt{9-y^2}} xy dx \right) dy = \\ &= -2 \int_0^3 y \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{y-3}^{\sqrt{9-y^2}} dy = -2 \int_0^3 (3y^2 - y^3) dy = \\ &= -2 \left[y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^3 = -\frac{27}{2}.\end{aligned}$$



In conclusione l'integrale di linea del campo F lungo $\partial\Omega$ percorso in senso orario è

$$\int_{\partial\Omega^-} F \cdot dP = \int_{\partial\Omega^+} F \cdot dP = \frac{27}{2}.$$

Esercizio 7. Si ha che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n d\sigma.$$

dove $\text{rot} F$ è il rotore del campo vettoriale F definito dalla scrittura formale

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \text{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3zy + \sin^8 x & xz + \log^6(1 + y^2) & 2xy + e^{z^2} \end{vmatrix} = (x, y, -2z).$$

La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, dove

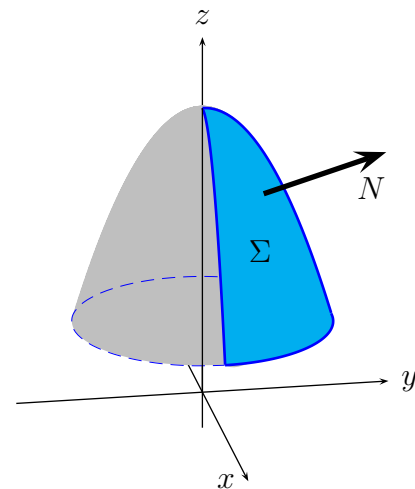
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$.

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale uscente dal paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$.



Un vettore normale al piano tangente a Σ è

$$N(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = (2x, 2y, 1).$$

Questo vettore è uscente dal paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$. Si ha che

$$\begin{aligned} \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) &= \text{rot} F(x, y, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) = \\ &= (x, y, 2x^2 + 2y^2 - 8) \cdot (2x, 2y, 1) = 4(x^2 + y^2) - 8. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy = \int_K [4(x^2 + y^2) - 8] \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= \int_{K'=[0, \sqrt{3}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} (4\rho^2 - 8) \rho \, d\rho \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (4\rho^3 - 8\rho) \, d\rho = \frac{\pi}{2} [\rho^4 - 4\rho^2]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{3}{2}\pi.$$

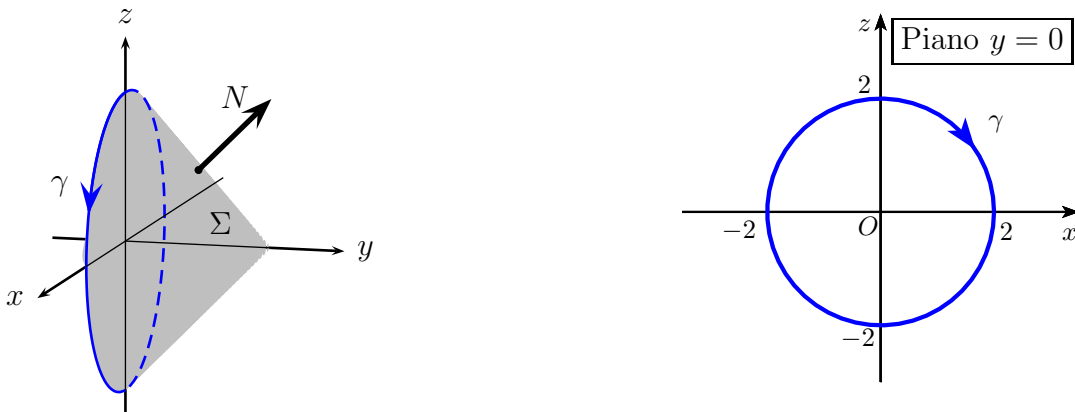
Esercizio 8. Si ha che F è di classe C^1 su \mathbb{R}^3 . Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP,$$

dove il bordo di Σ è orientato in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse y che è \mathbf{j} .

Si ha che

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, y = 0\}.$$



Una curva parametrica γ che parametrizza $\partial\Sigma$ inducendo tale verso di percorrenza è ad esempio $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 0, -2 \sin t).$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

Per ogni $t \in [0, 1]$ si ha che

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= F(2 \cos t, 0, -2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 0, -2 \cos t) = \\ &= (6 \sin t, 0, 6 \cos t - 40 \cos^2 t \sin t) \cdot (-2 \sin t, 0, -2 \cos t) = \\ &= 80 \cos^3 t \sin t - 12 \sin^2 t - 12 \cos^2 t = 80 \cos^3 t \sin t - 12. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (80 \cos^3 t \sin t - 12) \, dt = -24\pi.$$

Esercizio 9. Il campo vettoriale F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Green si ha che

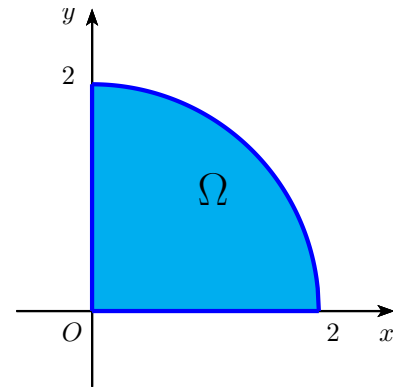
$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dP &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \\ &= \int_{\Omega} (2y + 3x^2) dx dy = \end{aligned}$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$= \int_{\Omega'} (2\rho^2 \sin \vartheta + 3\rho^3 \cos^2 \vartheta) d\rho d\vartheta =$$

essendo $\Omega' = [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha

$$\begin{aligned} &= 2 \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \right) + 3 \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) = \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^2 \left[-\cos \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2} (\vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} + 3\pi. \end{aligned}$$



Esercizi svolti e assegnati sulle formule di Gauss-Green

Esercizio 1. Calcolare l'area di

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

dove $a > 0$, $b > 0$ sono fissati.

Svolgimento. Si consideri la curva regolare Γ che percorre in senso antiorario, una volta sola, il bordo della regione E , cioè l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Una parametrizzazione di Γ è

$$\vec{r}(t) = a \cos(t) \vec{i}_1 + b \sin(t) \vec{i}_2, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Applichiamo la formula di Gauss-Green per l'area

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma,$$

dove $\vec{F} = -y \vec{i}_1 + x \vec{i}_2$, e calcoliamo l'integrale curvilineo. Essendo

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= -a \sin(t) \vec{i}_1 + b \cos(t) \vec{i}_2 \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) &= -b \sin(t) \vec{i}_1 + a \cos(t) \vec{i}_2 \end{aligned}$$

si ha

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t)) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\oint_{\Gamma} (x^3 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$$

dove Γ è il perimetro del quadrato $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ percorso in senso antiorario.

Svolgimento. Non conviene calcolare direttamente l'integrale curvilineo: dovrei “spezzarlo” in 4 integrali, essendo Γ dato dall'unione delle quattro curve corrispondenti ai lati del quadrato. È invece opportuno usare la formula di Gauss-Green “al rovescio”: riportare l'integrale curvilineo all'integrale doppio su Q .

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \left[(x^3 - xy^3) \vec{i}_1 + (y^2 - 2xy) \vec{i}_2 \right] \cdot d\Gamma = \iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial x} (y^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - xy^3) \right] dx dy \\ &= \iint_Q (-2y + 3xy^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy \right] dx \\ &= \int_0^2 [-y^2 + xy^3]_0^2 dx = \int_0^2 (-4 + 8x) dx = 8 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare l'area del dominio E limitato dai grafici delle funzioni

$$f_1(x) = x(1-x) \quad x \in [0, 1], \quad f_2(x) = x(x^2 - 1) \quad x \in [0, 1].$$

Svolgimento. Si noti che $f_2(x) \leq 0 \leq f_1(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$, quindi

$$(1) \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x(x^2 - 1) \leq x(1 - x)\}.$$

Applichiamo il teorema di Gauss-Green: il bordo Γ di E , percorso in senso antiorario, è dato dall'unione delle due curve $\Gamma_1 = \text{graf}(f_1)$ e $\Gamma_2 = \text{graf}(f_2)$, orientate in senso antiorario. Denotando con $\tilde{\Gamma}_1$ la curva che percorre $\text{graf}(f_1)$ in senso orario (cioè $\tilde{\Gamma}_1 = -\Gamma_1$, per la formula di G.G. si ha

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (x \, dy - y \, dx) - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} (x \, dy - y \, dx).$$

Osserviamo che una parametrizzazione di Γ_2 è

$$\gamma_2(t) = t \vec{i}_1 + t(t^2 - 1) \vec{i}_2 \Rightarrow \gamma_2'(t) = \vec{i}_1 + (3t^2 - 1) \vec{i}_2$$

quindi

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{4}.$$

Allo stesso modo si ha

$$\gamma_1(t) = t \vec{i}_1 + t(1 - t) \vec{i}_2 \Rightarrow \gamma_1'(t) = \vec{i}_1 + (1 - 2t) \vec{i}_2$$

e si calcola

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (x \, dy - y \, dx) = -\frac{1}{6}.$$

Allora

$$\text{area}(E) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}.$$

Procedimento alternativo: si sarebbe anche potuto procedere direttamente al calcolo dell'area di E , tenendo conto della (1)

$$\text{area}(E) = \int_0^1 \left(\int_{x(x^2-1)}^{x(1-x)} 1 \, dy \right) dx = \dots = \frac{5}{12}.$$

Esercizi assegnati. Usando le formule di Gauss-Green, calcolare

1. l'integrale curvilineo di seconda specie

$$I = \oint_{\Gamma} x^3 y \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$$

ove Γ è il perimetro del triangolo di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ e $C = (2, 0)$, **percorso in senso orario.**

Risposta: $I = -\frac{1}{2}$.

2. l'integrale curvilineo di seconda specie

$$I = \oint_{\Gamma} xy \, dx - (1 + x^2) \, dy$$

ove Γ è il perimetro del triangolo di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$, **percorso in senso antiorario.**

Risposta: $I = -\frac{1}{2}$.

3. l'integrale curvilineo di seconda specie

$$I = \oint_{\Gamma} \arctan(y) \, dx - xy \, dy$$

ove Γ è il perimetro del triangolo di vertici $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (0, -1)$, **percorso in senso orario.**

Risposta: $I = \frac{\pi}{2} - \ln(2)$.

ES CAMPI VETTORIALI

giovedì 13 aprile 2023 18:16

Esercizio 1

Sia $F(x,y) = (e^{-x} + 3, e^y)$

1) Stabilire se F è conservativo

2) Sia $\gamma(t) = (t, \log t)$ $t \in (1, 2]$ calcolare il lavoro del campo lungo la curva

Sol 1

F è def su \mathbb{R}^2 che è sempl. connesso

Se F è irrotazionale su un dom. sempl. conn $\Rightarrow F$ è conservativo

F è irrotazionale se il suo rotore è nullo cioè se $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \quad \text{si}$$

Dunque F è conservativo cioè \exists un potenziale

Sol 2.

A) Trovo potenziale

B) Calcolo il lavoro

Sol A)

$$F(x,y) = \nabla U \quad \text{con } U: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^{-x} + 3 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^y \end{cases} \Rightarrow U(x,y) = e^y + c(x)$$
$$c'(x) = e^{-x} + 3 \Rightarrow c(x) = -e^{-x} + 3x$$

$U(x,y) = e^y - e^{-x} + 3x + d$ sono tutte le primitive del campo F .

Sol B)

Scelgo una primitiva con $d=0$ $U(x,y) = e^y - e^{-x} + 3x$

Quando il campo è conservativo il lavoro dipende solo dal pto di arrivo e dal pto di partenza

$$\gamma(1) = (1, 0)$$

$$\gamma(2) = (2, \log(2))$$

$$L(F, \gamma) = U(\gamma(2)) - U(\gamma(1)) = U(2, \log(2)) - U(1, 0) = e^{\log(2)} - e^{-2} + 6 - (e^0 - e^{-1} + 3) = 2 - \frac{1}{e^2} + 6 - 1 + \frac{1}{e} - 3 = 4 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$$

Es 2

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3y^2}}, \frac{3y}{\sqrt{2x^2+3y^2}} \right)$$

1) Stabilire se F è conservativo

2) Detti $\gamma(t) = (3 \cos t, 4 \sin t)$ $t \in (0, 2\pi]$ calcolare $L(F, \gamma)$

1) Dominio $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

F è conservativo se $\exists U: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3y^2}} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 = \frac{3y}{\sqrt{2x^2+3y^2}} \end{cases} \Rightarrow U(x,y) = \int \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3y^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} (2z^{\frac{1}{2}}) = z^{\frac{1}{2}} + c(y)$$
$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$dz = 4x dx$$

$$U(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2} + c(y)$$

derivo risp a y \Rightarrow

$$\frac{1}{2} (2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}} (6y) + c'(y) = \frac{3y}{\sqrt{2x^2+3y^2}}$$

$$\Rightarrow 3y + c'(y) = 3y \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = \text{cost.}$$

$$U(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2} \quad \text{è un potenziale}$$

$\Rightarrow F$ è conservativo

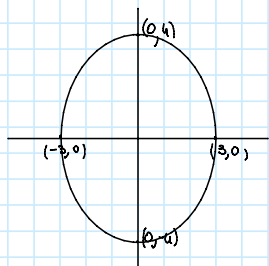
Sol 2

$$R(F, \gamma) = U(\underbrace{\gamma_f(t)}_{(3,0)}) - U(\underbrace{\gamma_i(t)}_{(3,0)}) = \sqrt{18} - \sqrt{18} = 0$$

alternat.

Se γ è chiusa ed F è cons. $\Rightarrow L(F, \gamma) = 0$

nel nostro caso γ è chiusa perché $\gamma(t)$ è un'ellisse



Esercizio 3

Dato $F(x,y) = (1, x^2+y^2)$ e la curva $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t)$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Dire se F è conservativo e calcolare il lavoro del campo lungo la curva γ

F è conservativo se \exists un potenziale cioè $\exists U: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1(t) = 1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2(t) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

quindi $U(x,y) = x + c(y)$, derivo rispetto a y. \Rightarrow

$$c'(y) = x^2 + y^2 \Rightarrow c(y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + d \quad \text{con } d \in \mathbb{R}$$

Quindi $U(x,y) = x + x^2 y + \frac{y^3}{3} + d$ \nexists perché se derivo rispetto a y la cond è rispett. ma se derivo rispetto a x ho $\frac{\partial U}{\partial x} = 1 + 2xy \neq 1$

Quindi \nexists un potenziale $\Rightarrow F$ non è conservativo

alternativamente

F è def su \mathbb{R}^2 che è sempre connesso

Se F è irrotazionale su un dom. sempl. conn $\Rightarrow F$ è conservativo

F è irrotazionale se il suo rotore è nullo cioè se $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \quad \text{no} \Rightarrow F \text{ non è irrotazionale} \Rightarrow F \text{ non è conservativo}$$

Sol 2

F non è conservativo \Rightarrow non posso usare l'en potenziale \Rightarrow uso la def.

Faccio un cambio di variabile per $\gamma(t)$ cioè $\sin t = s \Rightarrow \gamma(s) = (s, s^2)$ con $s \in [0, 1]$

$$L(F, \gamma) = L(F, \gamma) = \int_0^1 F(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds$$

$$F(\gamma(s)) = (1, s^2 + s^4)$$

$$\gamma'(s) = (1, 2s)$$

$$F(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) = 1 + (s^2 + s^4)(2s) = 1 + 2s^3 + 2s^5$$

$$\int_0^1 1 + 2s^3 + 2s^5 = [s]_0^1 + 2\left[\frac{s^4}{4}\right]_0^1 + 2\left[\frac{s^6}{6}\right]_0^1 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Esercizio 4

Dato $F(x,y) = \left(15x^2y - e^x \sin(e^x) + \frac{4xy^2}{1+(xy)^2}, 5x^3 + \frac{4x^2y}{1+(xy)^2} \right)$

Dim che il campo è conservativo

Calcolare $\int_C (F, \gamma)$ dove γ è il segmento che congiunge i pt $(0,0)$ e $(0,1)$

Sol 1

Dato che $\text{dom } F = \mathbb{R}^2$ (perché deve valere $1+(xy)^2 \neq 0 \Rightarrow (xy)^2 \neq -1$ vera $\forall x,y \in \mathbb{R}$)
 \mathbb{R}^2 è sempl. connesso
 F irrot. su un sempl. connesso $\Rightarrow F$ conserv.

Vediamo se F è irrot. $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 15x^2 + \frac{8xy(1+(xy)^2) - (4xy^2)(2xy)}{(1+(xy)^2)^2} \stackrel{?}{=} 15x^2 + \frac{8xy(1+(xy)^2) - (4x^2y)(2xy)}{(1+(xy)^2)^2}$

Si

Quindi F è conservativo

$\int_C (F, \gamma) = U(\underbrace{\gamma_f(t)}_{(0,1)}) - U(\underbrace{\gamma_i(t)}_{(0,0)})$

$y + 12x^4y^3 - 10x^4y - 8x^4y^2$

Troviamo un potenziale

$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 15x^2y - e^x \sin(e^x) + \frac{4xy^2}{1+(xy)^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 5x^3 + \frac{4x^2y}{1+(xy)^2} \end{cases}$

$U(x,y) = 5x^3y + \int \frac{4xy^2}{1+(xy)^2} dy = 5x^3y + \int \frac{4xy^2}{1+x^2y^2} dy = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan(1+(xy)^2) + 5x^3y + c(x)$

derivato rispetto a x

$15x^2y + c'(x) + 2 \cdot \frac{2xy^2}{1+(xy)^2} \Rightarrow c'(x) = -e^x \sin(e^x) \Rightarrow c(x) = - \int e^x \sin(e^x) dt = - \int \sin(t) dt = \cos(t) + \cos t$

$U(x,y) = 2 \arctan(1+(xy)^2) + 5x^3y + \cos(e^x) + d \quad d \in \mathbb{R}$

$\int_C (F, \gamma) = U(\underbrace{\gamma_f(t)}_{(0,1)}) - U(\underbrace{\gamma_i(t)}_{(0,0)})$
 $\cos(1) - \cos(1) = 0$

Esercizio n°5

Dato $F(x,y,z) = (e^y, x+y, z^2)$

Calcolare $\text{Rot } F$ e $\text{div } F$

$\int_C (F, \partial \Sigma)$ dove $\Sigma = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } z=xy+2x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Calcolare il flusso di F uscente dalla superficie della sfera di raggio 1 e centro l'origine

Sol 1

$\text{div } F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) = 0 + 1 + 2z = 2z + 1$

$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^y \\ x+y \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y(z^2)}{\partial x} - \frac{\partial z(x+y)}{\partial x} \\ -(\frac{\partial x(z^2)}{\partial y} - \frac{\partial z(e^y)}{\partial y}) \\ \frac{\partial x(x+y)}{\partial z} - \frac{\partial y(e^y)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - e^y \end{pmatrix}$

Sol 2

Chi è Σ ? $z=xy+2x$ è un piano limitato da $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

Usiamo Teo Stokes

$\int_C (F, \partial \Sigma) = \int_{\partial \Sigma} F \cdot \underbrace{\vec{T}}_{\text{vett. tang.}} ds \stackrel{!}{=} \int_{\Sigma} \underbrace{\text{rot}(F)}_{\text{int. di superficie}} \cdot \underbrace{\vec{n}_{\Sigma}}_{\text{vett. tang.}} d\sigma$

$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - e^y \end{pmatrix}$

parametrizzo Σ

$$\varphi(u, v) = (u, v, 3u + 2v) \quad u \in [0, 1] \quad v \in [0, 1]$$

$$\varphi: D \rightarrow \Sigma$$

$$[0, 1] \times [0, 1]$$

$$(u, v) \rightarrow (u, v, 3u + 2v)$$

$$\int_{\Sigma} f \, d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \int_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv$$

Nel nostro caso $f = \text{rot } F \cdot \vec{n}_{\Sigma}$

$$\vec{n}_{\Sigma} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_u = (1, 0, 3) \\ \varphi_v = (0, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_u \times \varphi_v = (-3, -2, 1)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\vec{n}_{\Sigma} = \frac{(-3, -2, 1)}{\sqrt{14}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right)$$

$$f = \text{rot } F \cdot \vec{n}_{\Sigma} = (0, 0, 1 - e^u) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right) = (1 - e^u) \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$f(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{14}} (1 - e^u)$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\sigma = \int_{[0, 1] \times [0, 1]} \frac{1}{\sqrt{14}} (1 - e^u) \frac{1}{\sqrt{14}} \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^1 (1 - e^u) \, du \, dv = \int_0^1 (1 - e^u) \, du = [u - e^u]_0^1 = 1 - e - (-1) = 2 - e.$$

Sol3

Teo. div.

$$\phi(F, \partial B_1(0)) \stackrel{\text{Teo. div.}}{=} \int_{B_1(0)} \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_{B_1(0)} (1 + 2z) \, dx \, dy \, dz = \int_{B_1(0)} 1 \, dx \, dy \, dz + 2 \int_{B_1(0)} z \, dx \, dy \, dz$$

$$B_1(0) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

misura della sfera
volume della sfera
 $= \frac{4}{3} \pi$

Un integrale su un dominio simmetrico rispetto all'origine di una funzione che prende sia valori positivi che negativi nello stesso modo = 0

$$\phi(F, \partial B_1(0)) = \frac{4}{3} \pi.$$

ARGOMENTI DI CARATTERE TEORICO

CONVESSITA'

giovedì 8 dicembre 2022 12:32

Definizione

In sp. vettoriale, se $\vec{x}, \vec{y} \in V$ $[\vec{x}, \vec{y}] = \{t\vec{y} + (1-t)\vec{x} : 0 \leq t \leq 1\}$ è un segmento che congiunge due pti.

Definizione

$C \subseteq V$ è convesso $\Leftrightarrow \forall x, y \in C$ $[x, y] \subseteq C$ cioè se due pti $\in C \Rightarrow$ anche tutti i pti del segmento che li congiunge $\in C$

Definizione

$C \subseteq V$ si dice strettamente convesso $\Leftrightarrow \forall x, y \in C$ $]x, y[= \{t\vec{y} + (1-t)\vec{x} : 0 < t < 1\} \subseteq C$

Osservazione

convesso \nRightarrow strett. convesso strett. conv \Rightarrow convesso

Operazioni tra convessi

- \cap convessi è convesso
- Somma di convessi è convessa $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$
- $L: V \rightarrow W$ è lineare e $C \subseteq V$ conv $\Rightarrow L(C)$ è convesso

Proposizione

C chiuso per combinazioni convesse

C convesso $\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_m \in C, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ in \mathbb{R} t.c. $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C$
combinazione convessa degli x_i

Definizione

Sia $B \subseteq V$, $\bigcap_{\substack{B \subseteq C \\ C \text{ convesso}}} C = \text{inviluppo convesso di } B$

$\text{co}(B) = \{y \in V \mid y \text{ è comb. convessa di pti di } B\}$

Definizione

$\Omega \subseteq V$ sp. v. Ω convesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa $\Leftrightarrow \forall x, y \in \Omega$ $\forall \lambda \in [0, 1]$ si ha che $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
strett. conv. $\lambda \in (0, 1)$ $<$

Definizione

$\text{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq \lambda\}$
 \hookrightarrow epigrafico = {pti che stanno sopra al grafico, bordo compreso}

Proposizione Relazione tra $\text{epi}(f)$ e f convessa

f convesso $\Leftrightarrow \text{epi}(f) \subseteq V \times \mathbb{R}$ è convesso

Osservazione

La convessità è una proprietà che si verifica sulle rette cioè se Ω convesso $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f|_r$ è convessa \forall retta r allora f è convessa
Vale anche che se f è convessa $\Rightarrow f|_r$ convessa

Proposizione

f convessa $\Rightarrow f$ loc. limitata

Proposizione

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convessa $\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_m \in \Omega$ e $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0 \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ si ha che $f(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$

Proposizione Relazione tra convessità e derivate seconde

a Se $f \in C^1(\Omega)$ allora f è convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in \Omega$ si ha che $(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0))(x_1 - x_0) \geq 0$

b Se $f \in C^2(\Omega)$ allora f è convessa \Leftrightarrow b1 $H_f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$

$$b2 \quad \forall x_0, x \in \Omega \quad f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

ossia f sta sopra al piano tangente

Proposizione

Una f strett. convessa se ha max \Rightarrow è unico

Proposizione

Se la matrice hessiana è def. positiva $H_f(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è strett. convessa

Il viceversa è falso in generale

Controesempio

$f(x, y) = x^4 + y^4 \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e f è strett. convessa

TEORIA DELLA MISURA

giovedì 1 dicembre 2022 09:43

Obiettivo \mapsto Misurare il volume di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$
Integrare funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con nozioni stabili per passaggio al limite

Setting $\mapsto \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, X insieme, $m: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$, (X, \mathcal{E}, m)

Definizione

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice **σ -algebra** se:

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$
2. $E \in \mathcal{E} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{E}$ ($X \in \mathcal{E}$)
3. $E_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_i E_i \in \mathcal{E}$ ($\bigcap_i E_i \in \mathcal{E}$)

Osservazione

$\{\bigcap_i \sigma_i : \sigma_i \text{ è una } \sigma\text{-algebra}\} = \text{una } \sigma\text{-algebra}$

Definizione

Dato $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ **$\sigma A(\mathcal{J}) = \{ \bigcap \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ è } \sigma\text{-algebra} \wedge \mathcal{J} \subseteq \mathcal{E} \}$ = **σ -algebra generata da \mathcal{J}** (cioè esiste la min σ -alg. che contiene \mathcal{J})**

Definizione

X spazio metrico, $\mathcal{A} = \{\text{aperti in } X\}$ **$\mathcal{B}(X) = \sigma A(\mathcal{A})$ è la σ -algebra dei Boreliani** e **$\mathcal{B}(X)$ è l'insieme di Borel**

Osservazione

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ per $n \mapsto |\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$ e $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{A}| = c = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$

Definizione

\mathcal{E} σ -algebra, $m: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$

$\left. \begin{array}{l} \bullet m \text{ è } \sigma\text{-subadditiva se } m(\bigcup_i E_i) \leq \sum_i m(E_i) \quad \forall E_i \in \mathcal{E} \\ \bullet m \text{ è } \sigma\text{-additiva se } m(\bigcup_i E_i) = \sum_i m(E_i) \text{ se } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \end{array} \right\} \Rightarrow m \text{ si dice misura su } X$
 (X, \mathcal{E}, m) si dice **spazio di misura**

Proposizione

m misura allora:

- $m(\emptyset) = 0$
- m è σ -subadditiva
- m monotona $\Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$
- $E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow m(\bigcup_i E_i) = \lim_i m(E_i) = \sup_i m(E_i)$
- $E_i \supseteq E_{i+1} \Rightarrow m(\bigcap_i E_i) = \lim_i m(E_i) = \inf_i m(E_i)$

Definizione

$N \in \mathcal{E}$, N si dice **trascurabile** se $m(N) = 0$

Proposizione

$N' \subseteq N$ trascurabile e $N' \in \mathcal{E} \Rightarrow N'$ trascurabile

Definizione

(X, \mathcal{E}, m) si dice **completo** se $N' \subseteq N$, N trascurabile $\Rightarrow N' \in \mathcal{E}$

SLOGAN

Tutti i sottoinsiemi di un insieme trascurabile sono trascurabili

Metodo di Carathéodory

Permette di ricavare uno sp. di misura quando si ha una misura esterna

Definizione

$m: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ si dice **misura esterna** se:

- $m(\emptyset) = 0$
- m è monotona
- m è subadditiva

$\left. \begin{array}{l} \bullet m(\emptyset) = 0 \\ \bullet m \text{ è monotona} \\ \bullet m \text{ è subadditiva} \end{array} \right\} m \text{ è } \sigma\text{-subadditiva}$

Definizione

X insieme, m misura esterna, $E \subseteq X$ si dice **misurabile** per la misura esterna m se: $m(A) = m(E \setminus A) + m(A \cap E) \quad \forall A$

Allora $\mathcal{E}_m = \{E \in \mathcal{X} \mid E \text{ misurabile}\}$ è una σ -algebra. Inoltre: $m|_{\mathcal{E}_m}$ è una misura

$(X, \mathcal{E}_m, m|_{\mathcal{E}_m})$ è uno spazio completo

Teorema

(X, \mathcal{E}, m) sp. di misura. $m^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ definita da $m^*(E) = \inf \{m(F) \mid F \supseteq E, F \in \mathcal{E}\}$ = misura esterna generata da m

Inoltre: $m^*|_{\mathcal{E}} = m$

$(X, \mathcal{E}_m^*, m^*|_{\mathcal{E}_m^*})$ con $\mathcal{E}_m^* \supseteq \mathcal{E}$ è uno sp. completo che estende (X, \mathcal{E}, m)

m^* si dice **completamento** di m

Proprietà

$\bar{\mathcal{E}} = \{E \cup N' \mid E \in \mathcal{E}, N' \subseteq N \text{ trascurabile}\}$ è una σ -algebra $\supset \mathcal{E}$

$\bar{m}: \bar{\mathcal{E}} \rightarrow [0, +\infty]$ $\bar{m}(E \cup N') = m(E)$ che estende m

$(X, \bar{\mathcal{E}}, \bar{m})$ è la più piccola estensione completa

Non è detto che $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_m^*$

Misura di Lebesgue

Definizione

Un **rettangolo** in \mathbb{R}^n è un sottoinsieme della forma $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ con $a_i < b_i$

Un **plurirettangolo** P è un insieme della forma $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ dove R_j rettangoli con $R_i \cap R_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Definizione

Se R è rettangolo $\Rightarrow m^*(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Se P è plurirettangolo $\Rightarrow m^*(P) = \sum_i m^*(R_j)$

Se E è un insieme generico $\Rightarrow m^*(E) = \inf \{m^*(P) \mid E \subseteq P\}$

m^* si chiama **misura esterna di Lebesgue** ed è σ -sottadditiva

Definizione

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_m^* \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo L

$L = m^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ **misura di Lebesgue**

Proprietà

L è completa

L è una misura di Borel (posso scrivere ogni aperto come plurirettangolo) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

$|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{A}| = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$

$|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|$

Basta trovare insiemi misurabili secondo Lebesgue che $\notin \sigma$ -alg. dei Boreliani in \mathbb{R}^n
Tutti i sottoinsiemi dell'insieme di Cantor sono misurabili

Proposizione

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Definizione

(X, \mathcal{E}, μ) sp. di misura, μ misura di Borel. $\Rightarrow \mu$ è regolare se $\mu(E) = \inf \{\mu(A) \mid A \supseteq E \text{ aperto}\} = \sup \{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ cpt}\}$

Proposizione

La misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n è regolare

Definizione

$P = \bigcup_{i=1}^N R_i$ $R_i \cap R_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$L(P) = \sum_{i=1}^N L(R_i) \quad \forall P$

- $\mathcal{L}(A) = \sup \{ \mathcal{L}(P) \mid P \subseteq A, P \text{ plurirettangolo finito e } A \text{ aperto} \}$
- $\mathcal{L}(K) = \inf \{ \mathcal{L}(P) \mid P \supseteq K, P \text{ plurirettangolo finito e } K \text{ cpt} \}$
- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo $\mathcal{L}^*(E) = \inf \{ \mathcal{L}(A) \mid A \supseteq E, A \text{ aperto} \} = \text{misura esterna di Lebesgue}$
 $\mathcal{L}_*(E) = \sup \{ \mathcal{L}(K) \mid K \subseteq E, K \text{ cpt} \} = \text{misura interna di Lebesgue}$

Proprietà

$$\mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E) \quad \forall E$$

Definizione

- E misurabile se $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}_*(E) = \mathcal{L}(E)$
- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{ E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E \text{ misurabile} \}$

Teorema

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è una σ -algebra che contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e coincide con quella def. da Carathéodory.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ è misura di Lebesgue σ -additiva

Proprietà

- $m_j^*(E) = \inf \{ \mathcal{L}(P) \mid P \supseteq E \text{ pluri} \}$
- $m_{j*}(E) = \sup \{ \mathcal{L}(P) \mid P \subseteq E \text{ pluri} \}$
- $m_j^*(E) \geq \mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E) \geq m_{j*}(E)$
- se $m_j^*(E) = m_{j*}(E) \Rightarrow E$ è misurabile secondo Jordan.

FUNZIONI MISURABILI

Definizione

- $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ sp. di misura $f: X \rightarrow Y$ è **misurabile** se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$
- Se $Y = \mathbb{R}^n, \nu = \mathcal{L} \Rightarrow f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ è **Lebesgue-misurabile** se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
- Se $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n \quad p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ misurabile $\Rightarrow f$ è Lebesgue-misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
- $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ con E di Borel è **Boreliana** se $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{M}(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} \}$
- $f \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ misurabile $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow \{ f > t \} \in \mathcal{M}$ è misurabile.

Proposizione

- $\mathcal{M}(X)$ è \mathbb{R} -vettoriale su $\mathbb{R} \rightarrow f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f+g \in \mathcal{M} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $f, g \in \mathcal{M}(X) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$ se $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$
 $\hookrightarrow \forall x \in X \cap \mu(\{0\}) = 0$
- $\{f_n\} \in \mathcal{M}(X) \quad \forall n \Rightarrow \sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n \in \mathcal{M}(X)$
 se $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow f \in \mathcal{M}$

Definizione

(X, \mathcal{E}, μ) sp. di misura $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una **f. semplice** se $\exists E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ t.c. $s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$ con $c_j \in \mathbb{R}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$
 cos'è una f. misurabile la cui immagine è finita

Le f. semplici sono usate come primo passo nello sviluppo della Teoria dell'integrazione perché è molto semplice creare una def. di integrale per una f. semplice, ed è facile approssimare f. generali con una suc. di f. semplici

Proposizione

l'approssimazione di una f. misurabile con una f. semplice

$f \in \mathcal{M}(X), f \geq 0 \Rightarrow \exists$ una suc. s_n di f. semplici con $s_{n+1} \geq s_n \geq 0$ t.c. $\lim s_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Proposizione

Approssimazione di una f misurabile con una f semplice

$f \in \mathcal{M}(X)$, $f \geq 0 \Rightarrow \exists$ una sua S_n di f semplici con $S_{n+1} \geq S_n \geq 0$ t.c. $\lim S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Proprietà

- Se f_n è limitata $\Rightarrow S_n \rightarrow f$ unif. cioè $0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \underbrace{\frac{1}{2^n} + \max_x (0, \sup_x f - n)}_{\downarrow 0 \text{ in } n}$
- Se f_n è positiva $\Rightarrow f = f^+ - f^- \quad \exists$ S_n semplice t.c. $S_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$

Integrazione

Definizione

- $\exists \geq 0$, se \mathcal{M} , S semplice $\Rightarrow \int S d\mu = \sum_i c_i \mu(E_i)$
- se $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ è una generica f misurabile $\Rightarrow \int f d\mu = \sup \left\{ \int S d\mu \mid 0 \leq S \leq f \wedge S \text{ semplice} \right\}$

Definizione

- $f \in \mathcal{M}$ è integrabile se $\int |f| d\mu < +\infty$ in tal caso poniamo $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$
- Se f è misurabile $\Rightarrow |f|, f^+, f^-$ sono misurabili
- $\int |f| = \int f^+ + \int f^- < +\infty$ e la sottrazione è ben definita

Proprietà

- linearità $\rightarrow \int f+g = \int f + \int g$; $\int cf = c \int f \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- monotonia $\rightarrow f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
 $a \leq f \leq b \quad \forall x, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \mu(X) \leq \int f \leq b \mu(X)$
- v. assoluto $\rightarrow |\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$
- restrizione $\rightarrow \int_A f = \int f|_A$ con $A \in \mathcal{E}$
- Sp. di misura nulla $\rightarrow N \in \mathcal{E} \mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f = 0$
- additività rispetto al dominio $\rightarrow A \cap B = \emptyset \quad \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

Definizione

$\mathcal{L}^1(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è integrabile}\}$ è sp. vettoriale

$\mathcal{L}^1(X) = \mathcal{L}^1(X)/\sim$ dove $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$ è sp. vettoriale, normato con $\| \cdot \|_1$ dove $\|f\|_1 = \int |f|$ ed è completo (Banach)

Teoremi di passaggio al limite sotto al segno di integrale

Proposizione

$f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \nu(f) = \int f d\mu$ ed è una misura su (X, \mathcal{E})

Corollario

$E_n \in \mathcal{E}$, $E_n \subseteq E_{n+1}$, $f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0 \Rightarrow \int_{E_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f$

Teorema Beppo-Levi / Convergenza dominata

- 1 Sia $f_n \in \mathcal{M}$ suc. dif. ms.
 - 2 $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ crescente
 - 3 $f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x)$
 - 4 $f \in \mathcal{M}$
- $$\Rightarrow \int f = \lim_n \int f_n = \sup_n \int f_n$$

Corollario

$f_n \in \mathcal{M}$, $f_n \geq 0 \Rightarrow \int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$

Lemma di Fatou

- 1 $f_n \in \mathcal{M}$
 - 2 $f_n \geq 0$
 - 3 $f(x) = \liminf_n f_n(x)$
- $$\Rightarrow \liminf_n \int f_n \geq \int f(x) = \int \liminf_n f_n$$

non vale in generale
 $f_n = \begin{cases} n & x \in (0, 1/n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \Rightarrow 1 = \liminf_n \int f_n > \int \liminf_n f_n = 0$$

$$\begin{aligned}
 1 \quad f_n \geq 0 \\
 2 \quad f(x) = \liminf f_n(x) & \quad \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n \\
 & \quad \int \limsup f_n \geq \limsup \int f_n \\
 & \quad \int \lim f_n = \lim \int f_n \\
 & \quad \text{non vale in generale} \\
 & \quad f_n = \begin{cases} n & x \in (0, 1/n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\
 f_n(x) \rightarrow 0 & \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \Rightarrow 1 = \inf \int f_n > \int \lim f_n = 0
 \end{aligned}$$

Teorema Lebesgue/convergenza dominata

- 1 $f \in \mathcal{M}$
 - 2 $g \in \mathcal{M}$
 - 3 $f_n \in \mathcal{M}$
 - 4 $g \geq 0$
 - 5 $\int g < +\infty$
 - 6 $|f_n| \leq g \quad \forall n$
 - 7 $\exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x$
- $$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \quad \text{cioè } f_n \rightarrow f \text{ in } L^1$$
- Inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$

Proposizioni

- 1 Se A è un insieme misurabile e $\text{con } |A| > 0 \Rightarrow A - A$ è intorno di 0
- 2 Se X è sp. metrico c.p.t. e m è una misura di Borel finita $\Rightarrow m$ è una misura regolare
- 3 In \mathbb{R}^n tutte le misure di Borel finite sui c.p.t. sono regolari
- 4 Una misura finita sui c.p.t. è invariante per traslazioni è un multiplo della misura di Lebesgue

Teorema

Se μ è una misura di Borel (regolare) su \mathbb{R}^n t.c. $\mu(K) < +\infty \quad \forall K \text{ c.p.t.} \Rightarrow \forall f$ misurabile con $\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu < +\infty, \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \underbrace{C_c(\mathbb{R}^n)}_{\text{funzioni continue a supporto c.p.t.}} \text{ t.c. } \int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi| d\mu < \varepsilon$

$= \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } \exists K \text{ c.p.t. } f(x) = 0 \quad \forall x \notin K\}$

SLOGAN

Ogni f misurabile è approssimabile con f continue a supporto c.p.t.

Lemma

Se A è (misurabile) boreliano cioè $A \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi$ continua t.c. $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_A| d\mu < \varepsilon$

Osservazione

- Se A è limitato φ può essere presa a supporto c.p.t.
- Se $A = B_R(0)$ basta prendere $G \cap B_R(0)$ che è ancora un aperto $\supset A$
La sua misura sarà più mano a K

IDEA

Le $f \in L^1$ le approssimo con f semplici.

\hookrightarrow sono comb. lineari di f carat.

Absoluta continuità dell'integrale

\hookrightarrow che sono approssimabili con f continue a supp. c.p.t.

(X, μ) spazio di misura, f misurabile e $\int_X |f| d\mu < +\infty$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. A misurabile $\left. \begin{matrix} \mu(A) < \delta \\ A \text{ misurabile} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon$

Criterio di Borel-Cantelli

generalizza \uparrow

Se (X, \mathcal{M}, μ) sp. di misura, A_j mis. $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < +\infty \Rightarrow \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$

Spazi L^p

Definizione

• (X, \mathcal{M}, μ) spazio di misura, $L^p(X, \mu) \doteq \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } f \text{ misurabile e } \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$

• definiamo \sim

$f \sim g \Leftrightarrow \exists A \text{ t.c. } \mu(A) = 0 \text{ e } f(x) = g(x) \quad \forall x \notin A$

• $L^p(X, \mu) / \sim = \underline{L}^p(X, \mu)$ è uno spazio vettoriale, normato e completo rispetto alla norma $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad p \in [1, +\infty)$



Punto chiave

Se $(f_n)_n \in L^p(\mathbb{R}^n)$ è di Cauchy per $\|\cdot\|_p \Rightarrow \exists (n_k)_k, \exists f, g \in L^p$ t.c. $f_{n_k} \rightarrow f$ q.o. e $\|f_{n_k}\| \leq g$

Cioè una successione convergente in L^p ha una sottosuccessione convergente q.o. e in modo dominato

conseguenze

- $f_{n_k} \rightarrow f$ in L^p e anche $f_n \rightarrow f$ in L^p
- Se $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists$ s.succ $f_{n_k} \rightarrow f$ q.o. e $\exists g^* \in L^p$ $|f_{n_k}| \leq g^*$
- $f \in C_c(\mathbb{R})$, $f \geq 0$, $\int f > 0$, $f_n(x) = f(x/n)$ si ha che $f_n(x) \rightarrow 0$ ma $f_n \not\rightarrow 0$ in L^1
- $f_n \rightarrow f$ in $L^p \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o.

- Se $p = +\infty \Rightarrow L^\infty(X) = \{f \text{ misurabili t.c. } \exists c > 0 \mu(\{x: |f(x)| > c\}) = 0\}$

$\|f\|_\infty = \inf \{c > 0 \mid \mu(\{x: |f(x)| \geq c\}) = 0\}$ e $L^\infty(X) = L^\infty/\sim$; L^∞ è uno sp.v. normato e completo

Definizione

f funzione continua, $\text{Supp}(f) = \overline{\{x: f(x) \neq 0\}}$

Osservazione

$C_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ se μ misura di Borel t.c. $\mu(K) < +\infty \forall K$ cpt

Proposizione

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $C_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$

Proposizione

$f \in L^p(\Omega)$ $p \in [1, +\infty)$ Allora: se $\varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f\varphi \in L^p(\Omega)$

se $\int_\Omega \varphi f = 0 \forall \varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f = 0$ q.o.

Proposizione

$\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \text{ continue in } \mathbb{R}^n \text{ ass } f \in C(\mathbb{R}^n), \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$

Cioè la chiusura nella norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ delle f a supp. cpt in \mathbb{R}^n sono le f che tendono a 0 all'inf.

Definizione

Siano (X, A, μ) e (Y, B, ν) spazi di misura, definiamo $A \otimes B$ (σ -algebra prodotto) la σ -algebra su $X \times Y$ generata dai rettangoli $E \times F$ con $E \in A$ e $F \in B$.
Cioè $A \otimes B$ è la più piccola σ -algebra che contiene i rettangoli.

Definizione

$\mu \times \nu$ è una misura prodotto di μ e ν se è definita su $A \otimes B$ e $\mu \times \nu(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F) \quad \forall E \in A \text{ e } F \in B$

Proposizione

\exists una misura prodotto

dim


$(\mu \times \nu)(E)^* = \inf \left\{ \sum_i \mu(E_i) \nu(F_i) \mid (E_i, F_i)_i \text{ t.c. } E \subseteq \bigcup_i E_i \times F_i \right\} \quad E \subseteq X \times Y$


1 $(\mu \times \nu)^*$ è una misura esterna

2 \exists un σ -algebra dei misurabili t.c. $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura completa (Usa Carathéodory)

3 $A \otimes B \subseteq \mathcal{M}$ e $(\mu \times \nu)^*(E \times F) = \mu(E) \nu(F)$

Osservazione

$(\mu \times \nu)^*|_{A \otimes B}$ è la misura prodotto massimale ed è anche l'unica misura prodotto se μ e ν sono σ -finite 

$(\mu \times \nu)^*|_{A \otimes B}$ è la **misura prodotto massimale** ed è anche l'unica misura prodotto se μ e ν sono σ -finite 

Esempio in cui la misura prodotto non è unica

$X = ([0,1], \mathcal{L})$; $Y = ([0,1], \mathcal{P}(Y), \nu)$ dove $\nu(F) = \#F$ $F \subseteq Y$ (ν è una misura che conta i pti fa quasi sempre + ∞)

$X \times Y = [0,1]^2$ $\mathcal{M}([0,1]) \otimes \mathcal{P}([0,1])$ non è unica

Osservazione

In generale la misura prodotto $(\mu \times \nu)^*|_{A \otimes B}$ non è completa (neppure se le due misure di partenza lo sono)

In generale $A \otimes B \subsetneq \mathcal{M}$

esempi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$$

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m})$$

\hookrightarrow dim

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ non misurabile, $F \subseteq \mathbb{R}^m$ trascurabile $\Rightarrow V \times F \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m})$ in quanto $\mathbb{R}^n \times F$ è un insieme di misura nulla in \mathbb{R}^{n+m} ma $V \times F \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ perchè manca la proprietà delle sezioni

Definizione

$$\begin{aligned} E \in X \times Y, & \quad 1 \quad \forall x \in X \quad E_x = \{y \mid (x,y) \in E\} \subseteq Y \\ & \quad 2 \quad \forall y \in Y \quad E^y = \{x \mid (x,y) \in E\} \subseteq X \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} E \in X \times Y, \\ 1 \quad \forall x \in X \quad E_x = \{y \mid (x,y) \in E\} \subseteq Y \\ 2 \quad \forall y \in Y \quad E^y = \{x \mid (x,y) \in E\} \subseteq X \end{aligned}} \right\} \text{Sezioni}$$

$$\begin{aligned} f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} & \quad 1 \quad \forall x \quad f_x(y) = f(x,y): Y \rightarrow \mathbb{R} \\ & \quad 2 \quad \forall y \quad f^y(x) = f(x,y): X \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \\ 1 \quad \forall x \quad f_x(y) = f(x,y): Y \rightarrow \mathbb{R} \\ 2 \quad \forall y \quad f^y(x) = f(x,y): X \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}} \right\} \text{Restrizioni}$$

Proposizione

$$\begin{aligned} E \in A \otimes B & \Rightarrow 1 \quad E_x \in B \quad \forall x \in X \\ & \quad 2 \quad E^y \in A \quad \forall y \in Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X \times Y, A \otimes B, \mu \times \nu) & \Rightarrow 1 \quad f_x \in \mathcal{M}(Y, B, \nu) \quad \forall x \\ & \quad 2 \quad f^y \in \mathcal{M}(X, A, \mu) \quad \forall y \end{aligned}$$

Osservazione

Se $(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$ è un completamento di $(X \times Y, A \otimes B, \mu \times \nu)$ allora vale la tesi sostituendo $\#$ con $\bar{\#}$

Proposizione

$$\begin{aligned} \mu, \nu \text{ } \sigma\text{-finite}, E \in A \otimes B & \Rightarrow 1 \quad X \rightarrow \nu(E_x) \text{ è misurabile in } (X, A, \mu) \\ & \quad 2 \quad Y \rightarrow \mu(E^y) \text{ è misurabile in } (Y, B, \nu) \\ \text{è una sorta di caso base di} & \quad 3 \quad \mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \\ \text{Fubini-Tonelli} & \end{aligned}$$

Esempio

$$X = Y = [0,1] \quad \mu = \mathcal{L} \quad \nu(E) = \#E$$

$$X \times Y = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \quad D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$$

$$\int_0^1 \nu(E_x) d\mathcal{L} = 1 > \int_0^1 \mathcal{L}(E^y) d\nu = 0$$

ν conta i pti e E_x è un pto

Si ha che $(\mu \times \nu)^*(D) = +\infty$

Teorema Fubini-Tonelli

(X, A, μ) e (Y, B, ν) spazi di misura σ -finite

$(X \times Y, A \otimes B, \mu \times \nu)$ sp. prodotto (unico)

• Se $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$, $f \geq 0 \Rightarrow 1 \quad f_x$ e f^y sono misurabili

- Se $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$, $f \geq 0 \Rightarrow 1. f_x$ e f_y sono misurabili

Tonelli

$$2. \begin{cases} x \mapsto \int_Y f_x & \text{è misurabile } \forall (x,y) \\ y \mapsto \int_X f_y & \text{è misurabile } \forall (x,y) \end{cases}$$

$$3. \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f_y d\mu \right) d\nu$$

- Se $f \in L^1(X \times Y) \Rightarrow$ vale la stessa cosa con \tilde{f} al posto di f .

Fubini

Osservazione

Per vedere che $f \in \mathcal{M}(X \times Y) \Rightarrow f \in L^1(X \times Y)$ basta controllare che $\int_{X \times Y} |f| < +\infty$ cioè $\int_X \int_Y |f| d\nu d\mu < +\infty$ o $\int_Y \int_X |f| d\mu d\nu < +\infty$

Osservazione

Il teo vale anche per sp. prodotti completi con \tilde{f} al posto di f

Osservazione

In \mathbb{R}^n possiamo iterare n -volte il Teorema

Proposizione

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}) \Leftrightarrow S_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid y \perp f(x)\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m})$$

se $f \geq 0$ si può $\int_{\mathbb{R}^n} f = \mathcal{L}^m(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ questa è anche una def. equivalente dell'integrale di Lebesgue.

Osservazione

Insieme misurabile \Rightarrow sezioni misurabili

Funzione misurabile \Rightarrow restrizioni di f. misurabili



non vale il

controesempio con hp del continuo

Definizione (operatori di composizione)

$$u = T(u) = f(x,y) \text{ u mis.}$$

In generale non è vero che o di funzioni misurabili è misurabile

Definizione

(X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice di Carathéodory se

- $f(\cdot, t)$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$
- $f(x, \cdot)$ è continua $\forall x \in X$

Proposizione

$f: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f. di Carathéodory. $|f(x,t)| \leq h(x) + C|t|$ con $C \geq 0$ e $h \geq 0$ mis. con $\int_X h < +\infty$

Allora vale che: 1. $\forall u \in \mathcal{M}(X)$ $T(u)(x) = f(x, u(x))$ è misurabile

2. $\Gamma: L^1 \rightarrow L^1$ con continuità

Osservazione

Se $\mu_n \rightarrow \mu$ in $L^1(X) \Rightarrow \exists g_n \geq 0, g_n \in L^1(X)$ t.c. $u_{g_n}(x) \rightarrow u(x) \quad \forall x \in X$ e $|u_{g_n}(x)| \leq g_n(x) \quad \forall x \in X$

Teorema del cambio di variabile negli integrali multipli

Sia $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi \in C^1$, ϕ inj. Allora

1. $E \subseteq \Omega$ misurabile $\Rightarrow \phi(E)$ misurabile e $|\phi(E)| = \int_E |J\phi(x)| dx$ dove $J\phi = \det(D\phi)$

2. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \int_{\phi(E)} f(y) dy = \int_E (f \circ \phi)(x) |J\phi(x)| dx$

Teoremi di passaggio al limite sotto al segno di integrale.

Per passaggio al limite sotto al segno di integrale si intende la possibilità di calcolare il limite di una successione di integrali come l'integrale del limite della successione delle funzioni integrande.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Teorema di convergenza monotona o Beppo-Levi

Lo scambio tra le operazioni di limite e di integrazione è possibile se le funzioni sono non negative e se la successione è monotona crescente.

Teorema della convergenza dominata

Si applica nel caso di funzioni dominate da una funzione integrabile ovvero in cui esiste una funzione g , ad integrale finito tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$

Lemma di Fatou

$$\int_E \liminf_n f_n(x) dx \leq \liminf_n \int_E f_n(x) dx$$

Esercizio tipico

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$

1 Chiamo $f_n(x) = f(x)$; $f_n(x)$ def. per $x \in [a, b]$

2 Fisso x e calcolo $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = l$

3 Trovo una funzione integrabile $g(x)$ maggiorante delle f_n

3A Fare delle minorationi e maggiorazioni

3B $m \leq f_n(x) \leq M$

3C chiamo $g(x) = M$

3D Verifico che $g(x)$ sia integrabile cioè $\int_a^b |g(x)| dx = \int_a^b M dx = p < +\infty \Rightarrow g$ è integrabile

4 Sono nelle hp del Teo di convergenza $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b l dx = q \in \mathbb{R}$

Nel passo 3A posso maggiorare col \max di $f(x)$ studiando $f_n(x)$ lasciando fisso n . (viceversa posso minorare col \min)

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{n x^a + 1} dx \text{ con } a > 0$$

1 $f_n(x) = \frac{1}{n x^a + 1}$ per $x \in [0, 1]$ perché gli estremi di integrazione sono 0 e 1

2 Fisso x
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n x^a + 1} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1] \text{ (x fissato)} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \text{ q.o.}$

3A Trovo una maggiorante integrabile

3B $0 \leq \frac{1}{1+n x^a} \leq 1 \quad \forall n$
 \downarrow
 $x \in [0, 1] \quad \frac{1}{1+n x^a} \leq 1$

3C $\Rightarrow |f_n(x)| = f_n(x) \leq g(x) = 1$ con $g(x)$ integrabile cioè $\int_0^1 |g(x)| dx = \int_0^1 1 dx = 1 < +\infty$

4 Siamo nelle hp del Teo di conv. dominata \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+n x^a} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+n x^a} dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

SPAZI METRICI E SPAZI DI BANACH

lunedì 27 febbraio 2023 09:37

- 1) SPAZI METRICI
- 2) SUCCESIONI IN UNO SPAZIO METRICO.
- 3) SPAZI NORMATI
- 4) SPAZIO NORMATO \mathbb{R}^n
- 5) SPAZI ℓ^p
- 6) SPAZI METRICI COMPLETI E SPAZI DI BANACH
- 7) FUNZIONI LIPSCHITZIANE. IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI
- 8) INSIEMI COMPATTI. FUNZIONI CONTINUE SU INSIEMI COMPATTI
- 9) CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME

SPAZI METRICI

Definizione

(X, d) è uno spazio metrico se: 1. X è un insieme
2. $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ è una distanza

Definizione

$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ è una distanza se:
1. $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ disuguaglianza triangolare

Osservazione

$Y \subseteq X$ sp. metrico allora $(Y, d|_Y)$ è uno spazio metrico

Definizioni di Topologia

(X, d) sp. metrico

- $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r, \text{ con } r > 0\}$ = palla di raggio r e centro x
- $A \subseteq X$ è aperto se $\forall x \in A \exists r \text{ t.c. } B_r(x) \subseteq A$ "A aperto se è intorno di ogni suo punto" equiv. "A aperto se ogni suo pto è centro di una palla $\subseteq A$ "
- $C \subseteq X$ è chiuso se $X \setminus C$ è aperto
- Una topologia su X è $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ aperto}\}$ cioè topologia = insieme di tutti gli aperti di uno sp. metrico (X, d) ed è generata dalla metrica d

Proprietà degli aperti e dei chiusi

1. \emptyset, X sono aperti e chiusi

dim
aperti

\emptyset non contiene pti

X contiene tutti i suoi pti quindi tutte le palle

chiusi

\emptyset è chiuso se $X \setminus \emptyset = X$ è aperto

X è chiuso se $X \setminus X = \emptyset$ è aperto

2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ (\cap finita)

dim

Siano A e B due aperti. Sia $x \in A \cap B \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0$ t.c. $B_{r_1}(x) \subseteq A$ e $B_{r_2}(x) \subseteq B$. Pongo $r = \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow B_r(x) \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cap B$ è aperto.

3. $\{A_i\}_{i \in I}$ A_i aperti $\Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

dim

$\{A_i\}_{i \in I}$ famiglia di aperti. Sia $x \in \bigcup_i A_i \Rightarrow \exists i \in I$ t.c. $x \in A_i$, ma A_i è aperto $\Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_i A_i \Rightarrow \bigcup_i A_i$ è aperto

4. La palla è un aperto

dim

Per dim che $B_r(x_0)$ è un aperto devo dim che $\forall x \in B_r(x_0) \exists s > 0$ t.c. $B_s(x) \subseteq B_r(x_0)$.

Pongo $s = r - d(x, x_0)$ vale allora $d(y, x) < s \Rightarrow d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r$ da cui $y \in B_s(x) \Rightarrow y \in B_r(x_0)$

- 2'. $\bigcup_i C_i$ chiusi $\Rightarrow C \cup B$ chiuso (\cup finita)

- 3'. $\{C_i\}_{i \in I}$ C_i chiusi $\Rightarrow \bigcap_i C_i$ è chiuso

dim 2', 3'

Mediante le relazioni di De Morgan ho che $\bigcap_{i \in I} (X - A_i) = X - \bigcup_i A_i$

Definizioni

- $x \in X, U \subseteq X$ U è un intorno di x se $\exists A$ aperto t.c. $x \in A \subseteq U$
- Un p.to x si dice **interno** a $Y \subseteq X$ se Y è intorno di x $\overset{\circ}{Y} =:$ interno di $Y = \{ \text{insieme dei p.ti interni a } Y \}$
- $\overset{\circ}{Y} \subseteq Y$ e' il più grande aperto contenuto in Y
 $\lim_{x \in \overset{\circ}{Y}} \Rightarrow \exists A$ aperto, $A \subseteq Y$ t.c. $x \in A$. Quindi l'interno di Y e' l'aperto contenuto in Y . \Rightarrow Tesi
- Y è aperto $\Leftrightarrow Y = \overset{\circ}{Y}$
- Un p.to x si dice **esterno** a $Y \subseteq X$ se x è interno al complementare $X \setminus Y$
- Un p.to x si dice di **accumulazione** per Y se $\forall I$ int di x si ha $I \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ cioè se ogni int di x contiene p.ti di Y diversi da x
- Un p.to x e' **isolato** se non e' di accumulazione cioè se $\exists I$ int di x t.c. $I \cap Y = \{x\}$
- $Y \cup \{ \text{pti di accum.} \} =$ chiusura di $Y =: \bar{Y} = Y \cup D(Y)$
 $D(Y) =$ derivato di Y
- Un insieme è chiuso \Leftrightarrow contiene i suoi p.ti di accum. $\Leftrightarrow Y = \bar{Y}$
- Un p.to x si dice di **frontiera** per Y se in ogni int. di x cadono sia p.ti di Y che p.ti del complementare $X \setminus Y$ $\partial Y =:$ frontiera di Y
- $\partial Y = \bar{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$ • $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$
- Y chiuso $\Leftrightarrow Y$ contiene i suoi p.ti di frontiera

Esempi di spazi metrici

$$\mathbb{R}^n \quad d_n(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{con } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ e } y = (y_1, \dots, y_n)$$

\hookrightarrow distanza euclidea in \mathbb{R}^n

$$n=1 \Rightarrow d_1(x, y) = |x_1 - y_1| = |x - y| \quad C \text{ è aperto} \Leftrightarrow A = \cup \text{intervalli aperti}$$

$$n=2 \Rightarrow \text{cerchi senza circonferenza}$$

$$n=3 \Rightarrow \text{sferi aperte prive della superficie}$$

$$C^0([a, b]) = \{ \text{insieme delle f. continue su } [a, b] \} \quad d(f, g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \}$$

SUCCESIONI IN UNO SPAZIO METRICO

definizione

$$\{x_n\}_n \text{ successione in } X, \text{ allora } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ o } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ se:}$$

1. $\lim_n d(x, x_n) = 0$
2. $\forall U$ int. di $x \exists n_0$ t.c. $x_n \in U \quad \forall n \geq n_0$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $x_m \in B_\varepsilon(x) \quad \forall m > m_\varepsilon$

} Sono equivalenti

Una succ. converg. ammette un solo limite cioè vale unicità del lim.

Proposizione Caratterizzazione dei chiusi per successione

$$C \text{ chiuso} \Leftrightarrow \nexists \{x_n\} \in C \text{ con } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ con } x \in X \text{ si ha } x \in C$$

\lim
Per assurdo.

\Rightarrow
Hp. C chiuso e $\{x_n\} \subseteq C$ convergente con $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
Tesi $x \in C$

Per R.A.A. sia $x \in A \setminus C$. Dato che per hp C è chiuso $\Rightarrow X \setminus C$ è aperto. Allora (prop aperto) $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$
 Inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow \{x_n\} \in B_r(x) \subseteq A$ def. in n e $x_n \notin C$ assurdo.

\Leftarrow
Per R.A.A. C non chiuso $\Rightarrow A \setminus C$ non è aperto $\Rightarrow \exists x \in A$ t.c. $\forall r > 0 \quad B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ cioè ogni int di x contiene p.ti di C

Scelgo $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C$. Ottengo una succ. $\{x_n\}$ t.c. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in C$ $\underbrace{\text{per hp}}$ perché avevo supposto $x \in A$

Definizione

$C \subseteq X$ sp. metrico C è compatto (per successioni) se $\forall \{x_n\} \in C \exists x_{n_k}$ sottosuccessione ed $\exists x \in C$ t.c. $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$

SPAZI NORMATI

Definizione

$(E, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato se:

- 1 E è uno spazio vettoriale su \mathbb{R}
- 2 $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, +\infty)$ è una norma

In tal caso $(E, d_{\|\cdot\|})$ è uno sp. metrico con $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y$

Definizione

$\|\cdot\|$ è una norma se:

- 1 $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- 2 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$
- 3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "Subadditività" (equivalente alla convessità della funzione $\|\cdot\|$)

La norma è una funzione che assegna ad ogni vettore una lunghezza positiva

Esempio

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è sp. normato

Osservazioni

- Ogni norma sullo sp. vett. V definisce una metrica su V cioè $d(x, y) = \|x - y\|$
- Poiché uno spazio normato è anche metrico è def. la nozione di succ. convergente cioè $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x\|_V = 0$
- dist. equivalente \iff norme equivalenti
 $\hookrightarrow \|\cdot\|_1$ equiv. a $\|\cdot\|_2$ se $\exists m, M$ t.c.
 $m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$
- Se due norme sono equivalenti allora $x_k \rightarrow x$ in norma $\|\cdot\|_1 \iff x_k \rightarrow x$ in norma $\|\cdot\|_2$

Esempi

1 \mathbb{R}^n

2 $(C[a, b])$ con $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ è un max per la continuità di f
 $\|f\|_\infty$ = norma del sup

La conv. di $f_k \in (C[a, b])$ def. dalla norma del sup coincide con la convergenza uniforme delle succ. di funzioni f_k

SPAZIO NORMATO \mathbb{R}^n

Proprietà

- Tutte le norme $\|\cdot\|_p$ su \mathbb{R}^n sono equivalenti a l.l. per $1 \leq p \leq \infty$
- norme equivalenti inducono la stessa topologia cioè $\exists m, M$ t.c. $m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$
- La CPT non dipende dalla norma e neanche dalle succ. di Cauchy

1 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ con $p \geq 1$ } sono norme su \mathbb{R}^n

2 $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$ diventa $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ se f è continua su un CPT per Weierst.

• $\|x\|_2 = \|x\|$

• $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Proposizione 1

$x \in \mathbb{R}^n$ fissato, $p \mapsto \|x\|_p$ è debolm. decr. in particolare $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

Proposizione 2

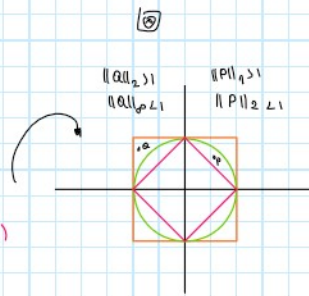
$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

Conseguenza

$$B_1(x_0, r) \subset B_p(x_0, r) \subset B_\infty(x_0, r)$$

$$B_\infty(x_0, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subset B_2(x_0, r) \subset B_1(x_0, r\sqrt{n})$$



Lemma di Holder

$$x, y \in \mathbb{R}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad \text{dove} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Disuguaglianza di Young

$$a, b \geq 0 \quad a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Disuguaglianza di Minkowski

$$\forall p \in [1, +\infty] \quad \text{e} \quad \forall x, y \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Spazi ℓ^p

E' una generalizzazione di \mathbb{R}^n considerando $\forall p \in [1, +\infty]$ lo spazio ℓ^p delle successioni $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

Cioè è lo spazio infinito-dimensionale delle successioni reali (o complesse) a p-esima potenza sommabili.

↳ è una norma in ℓ^p

- ℓ^1 è lo spazio delle successioni la cui serie converge assolutamente;
- ℓ^2 è lo spazio delle successioni a quadrato sommabile
- ℓ^∞ è lo spazio delle successioni limitate.

$$\text{Sommabile} \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i < +\infty$$

$$\text{assolut. sommabile} \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$$

Proprietà

- lo spazio ℓ^p $1 \leq p < \infty$ è uno spazio di Banach
- $\ell^p \subset \ell^q \quad \forall \quad p < q \leq \infty$

Lo spazio ℓ^2 è lo spazio delle successioni reali quadrato sommabili, ovvero:

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

A seconda del contesto, si può considerare ℓ^2 come lo spazio delle successioni complesse quadrato sommabili. In tal caso, posto $x_n \in \mathbb{C}$, la definizione è analoga. Lo spazio ℓ^2 è uno spazio vettoriale reale, ed è anche uno spazio vettoriale complesso, se lo si pensa come uno spazio di successioni complesse. In entrambi i casi, è uno spazio metrico se si definisce la distanza come

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Di più, ℓ^2 è uno spazio di Banach, la cui norma associata è

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

La dimostrazione si effettua utilizzando la disuguaglianza di Minkowski. Avendo definito tale norma, possiamo ridefinire ℓ^2 come

$$\ell^2 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\| < \infty\}$$

La norma poc'anzi introdotta è quella associata al prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Tale prodotto scalare si estende, nel caso complesso, al prodotto interno

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n$$

Pertanto, ℓ^2 è uno spazio di Hilbert. Inoltre, ℓ^2 è uno spazio separabile, ovvero ammette un sottoinsieme numerabile denso.

Lo spazio delle **successioni** di numeri reali a quadrato sommabile:

$$l^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_i \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

dotato del **prodotto scalare**:

$$\langle (x_n)_{n \in \mathbb{N}} | (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

è uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita. Lo stesso vale per l'analogo complesso:

$$l^2(\mathbb{C}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_i \in \mathbb{C} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

dotato del **prodotto hermitiano**:

$$\langle (x_n)_{n \in \mathbb{N}} | (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* y_k.$$

Uno **spazio di Hilbert** è uno spazio vettoriale completo secondo la norma indotta da un certo prodotto scalare.

Grazie alla definizione di spazio di Hilbert è possibile formalizzare la teoria delle serie di Fourier e generalizzarla a basi arbitrarie.

SPAZI METRICI COMPLETI E SPAZI DI BANACH

Definizione

$C \subseteq X$ è **limitato** se $C \subseteq B_r(x)$ per qualche r ed x

Proposizione

$C \text{ CPT} \Rightarrow C$ chiuso e C limitato

Osservazione

Il viceversa vale solo se $X = \mathbb{R}^n$

In generale \exists spazi chiusi e limitati non CPT

Controesempio

$C = \overline{B_1(0)}$ = la palla chiusa unitaria in uno sp. normato di dim. ∞

Sia $X = C([0,1])$ con $\|f\| = \max |f(x)|$

$B_1 = \{ f: [0,1] \rightarrow [-1,1] \text{ continua} \}$

Considero la succ. in X $f_n = \begin{cases} nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2-nx & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

$f_n(x) \in \partial B_1$

Allora $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \ \forall x \in [0,1]$ ma $d_{\mathcal{P}}(f_n, 0) = \|f_n - 0\| = 1 \ \forall n$

$\Rightarrow f_n$ non ammette nessuna sotto succ. convergente $f_n \rightarrow 0$ in (X, d)

Quindi B_1 e ∂B_1 sono chiusi e limitati non CPT

Proposizione

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato $\Rightarrow C$ CPT

(chiuso + limitato = CPT \Leftrightarrow spazi finiti)

Definizione

x_n succ. in X è di Cauchy se $\forall \varepsilon \exists n_{\varepsilon}$ t.c. $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \ \forall n, m \geq n_{\varepsilon}$

Definizione

(X, d) si dice spazio completo se tutte le succ. di Cauchy convergono cioè $\forall x_n$ succ. di Cauchy $\exists x \in X$ t.c. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Definizione

$(X, \|\cdot\|)$ sp. normato, completo si dice spazio di Banach

Esempi

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è sempre completo $\forall \|\cdot\|$.

$(X, \|\cdot\|_p)$ è spazio di Banach

$(X, \|\cdot\|_p)$ non è completo.

$$\hookrightarrow f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{n}{2} - nx & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

f_n è di Cauchy ma $f_n \rightarrow f$ non continua $f_n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases} \notin X$

$C^0([a,b])$ è sp di Banach rispetto alla norma del sup

$C^1([a,b])$ è sp di Banach rispetto alla norma $\|f\|_{C^1} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

$C^k([a,b])$ è sp di Banach con $\|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^k \sup_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)|$

FUNZIONI LIPSCHITZIANE E TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Definizione

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f: X \rightarrow Y$.

f è Lipschitziana se $\exists L$ costante t.c. $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X$

Osservazioni

f Lip $\Rightarrow f$ continua

Se $X=Y$ e $L < 1 \Rightarrow f$ è contrazione

Teo delle contrazioni

Sia (X, d) sp metrico completo.

Sia $f: X \rightarrow X$ contrazione

Allora $\exists!$ pto fisso $x \in X$ t.c. $f(x) = x$

Inoltre la successione per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a $\bar{x} \quad \forall x_0 \in X$

Lemma

(X, d) sp metrico

A sottoinsieme di X

Allora ogni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ L-Lip può essere prolungata su tutto X tramite $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ L-Lip

INSIEMI CPT. FUNZIONI CONTINUE SU INSIEMI CPT

Definizione

Siano (X, d) , (Y, d) sp metrici

$f: X \rightarrow Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

equivalentemente se $\forall V$ int di $f(x_0) \exists U$ int di x_0 t.c. $f(U) \subseteq V$

Teorema di Heine-Cantor

Se X è sp metrico cpt } $\Rightarrow f$ è unif. continua

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\hookrightarrow f$ è u.c. se $\forall \epsilon \exists \delta$ t.c. $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \epsilon \quad x, y \in X$

Teorema di Weierstrass

Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, X sp metrico cpt

Allora f ha max e min in X cioè $\exists x_m, x_n \in X$ t.c. $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_n) \quad \forall x \in X$

Osservazione

In uno sp metrico la distanza è sempre continua

CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME

Definizioni

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite nell'intervallo I di \mathbb{R}

- Si dice che (f_n) converge puntualmente in I verso la funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$
cioè se $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x \in I \quad \exists \delta_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ t.c. per $n > \delta_{\varepsilon, x}$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

In generale $\delta_{\varepsilon, x}$ dipende anche da x

- Se invece $\forall \varepsilon > 0$, $\delta_{\varepsilon, x}$ è indipendente da x , si parla di convergenza uniforme

f_n converge uniformemente in I verso f se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \delta_{\varepsilon}$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

convergenza uniforme \Rightarrow convergenza puntuale

$$\hookrightarrow M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\}$$

- Se le funzioni f_n, f sono limitate in I , allora f_n conv. unif. verso f in $I \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$
- La successione f_n si dice equilimitata in I se \exists una cost. $K > 0$ t.c. $|f_n(x)| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I$
- La successione f_n si dice equicontinua in I se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon} > 0$ t.c. $|x - y| < \delta_{\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Teoremi

Ascoli-Arzelà

Se f_n è una successione di funzioni equilimitate ed equicontinue nell'intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$ allora essa ammette un'estratta convergente uniformemente in I \hookrightarrow una sotto succ. converg. unif. nella norma del max (che rende $C(K)$ uno sp di Banach)

Enunciato

$(C(K), \|\cdot\|_{\infty}) \quad K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ c.p.t.} \quad K \text{ generalizza } [a, b]$

Sia $f_n \in C(K)$ successione t.c.:

- $\|f_n\|_{\infty} \leq C \quad \forall n$ cioè la succ. è limitata in qualunque sp. di Banach
- f_n equicontinue, cioè $\forall \varepsilon \exists \delta > 0$ t.c. $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall |x - y| < \delta \quad \forall n$
 $\hookrightarrow \delta$ non dipende da $\delta \in \varepsilon$

Nota

l'equicontinuità in X delle funzioni della succ $\{f_n\} \Rightarrow$ continuità unif. in X di ogni funt. della succ $\{f_n\}$

Condizione di Cauchy - uniforme

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione f_n converga uniformemente a f in I è che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall p, q > \delta \quad \text{sia } |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Continuità del limite uniforme di f_n continue

Se f_n converge unif. verso f e tutte le f_n sono continue allora anche f lo è

Passaggio al limite sotto al segno di integrale

Sia f_n una successione di funzioni continue in $I = [a, b]$ ed ivi converg. unif. verso f .

$$\text{Allora si ha } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Passaggio al limite sotto al segno di derivata

Sia f_n una successione di funt. derivabili in $I = (a, b)$ ed ivi conver. puntualmente verso f

Se la succ. $\{f'_n\}$ conv. unif. in $I \Rightarrow f$ è deriv. in I e si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x) \quad \forall x \in I$

DISTANZA DI HAUSDORFF

Serve a misurare la distanza tra due sottoinsiemi di uno spazio metrico

Definizione preliminare

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) =: \text{distanza di un pto dall'insieme } A$$

definizione

Dato (X, d) spazio metrico, sia $\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A \text{ cpt}\}$

$$\text{Dati } A, B \in \mathcal{P} \quad \partial(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

↳ dist. di Hausdorff

Proposizione

I cpt con la dist. di Hausdorff sono uno sp. metrico cioè $(\mathcal{P}(X), \partial)$ è sp. metrico

def.

↳ intorno tubolare

$$\text{Dato } A \subset X \text{ con } (X, d) \text{ sp. metrico} \quad \mathcal{N}_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

L'idea di un int. tubolare è quello di ricoprire A con piccole palle centrate in ogni pto del sottoinsieme

Proprietà

$\mathcal{N}_\varepsilon(A)$ è aperto

$$\mathcal{N}_\varepsilon(A \cup B) = \mathcal{N}_\varepsilon(A) \cup \mathcal{N}_\varepsilon(B)$$

$$\overline{\mathcal{N}_\varepsilon(A)} \subset \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

$$\mathcal{N}_{\varepsilon_1}(\mathcal{N}_{\varepsilon_2}(A)) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(A)$$

Lemma

$$\sup_{x \in A} d(x, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \}$$

Proposizione caratterizzazione della distanza di Hausdorff con intorno tubolare

$$\partial(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \text{ e } B \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(A) \}$$

definizione

Un insieme si dice X totalmente limitato se \exists una succ. x_1, \dots, x_m di elt di X che lo ricopre

$$\text{cioè } X \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)$$

La succ. prende il nome di ε -net

Teorema ereditarietà per ∂

- 1 Se (X, d) completo $\Rightarrow (\mathcal{P}(X), \partial)$ è completo
- 2 Se (X, d) è totalm. limit. $\Rightarrow (\mathcal{P}(X), \partial)$ è tot. limit.
- 3 Se (X, d) è cpt $\Rightarrow (\mathcal{P}(X), \partial)$ è cpt

Teorema 1.74.

Dati $\mu \in (0, 1)$ ed $\alpha \in [1, m]$ e posti $S_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $|S_\alpha(x) - S_\alpha(y)| \leq \mu|x - y|$,

$\Phi(A) = \bigcup_{m=1}^\alpha S_\alpha(A)$ allora si ha:

- $\partial(\Phi(A), \Phi(B)) \leq \mu \partial(A, B)$;
- $\exists! A_\infty \in \mathcal{F} : \Phi(A_\infty) = A_\infty$;
- Dato $A_0 \in \mathcal{F}$, $\partial(\Phi^n(A_0), A_\infty) \rightarrow 0$.

Le mappe come $\Phi = \bigcup$ di contrazioni sono dette sistemi di funzioni iterate (IFS) vengono usate nello studio dei frattali

SPAZI L^p

funzioni p -integrabili

Come per \mathbb{R}^n e gli spazi di successione ℓ^p possiamo provare a dotare le funzioni integrabili della struttura di spazi di Banach definendo delle norme p .

definizione

Sia (X, \mathcal{E}, μ) sp. di misura. Pongo $L^p(X, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}, \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$

definizione

Considero la rel. di eq. $f \sim g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) = g(x)$ def. $L^p(X, \mu) = L^p(X, \mu) / \sim$

L^p sarà munito della norma $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.
spazi L^p

Oss

$p=1 \Rightarrow$ funzioni Lebesgue-integrabili

$L^\infty(X) = L^\infty(X) / \sim$ dove $L^\infty(X) = \{f \text{ misurabile} \mid \exists c > 0 \text{ t.c. } \mu(\{x \mid |f(x)| > c\}) = 0\}$

L^p e L^∞ sono sp. di Banach

Gli spazi ℓ^p sono un caso molto speciale di spazi L^p , dove lo spazio di misura associato è $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, con \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle parti di \mathbb{N} , $\nu(A) = \#A$ che conta il numero di elementi di un insieme (assegnando infinito a insiemi infiniti). Facciamo osservare che, poiché i punti hanno misura unitaria, allora ogni successione modulo la relazione d'equivalenza quasi ovunque.

In maniera analoga a quella descritta, a partire da un qualunque insieme numerabile S (ad esempio gli interi), si può definire $\ell^p(S)$ come lo spazio delle successioni $s: S \rightarrow \mathbb{R}$ a finora usata, $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$. Notare che $\ell^p(\{1, \dots, n\})$, o più stringatamente $\ell^p(n)$, non è altro che lo spazio euclideo \mathbb{R}^n con la norma p .

SERIE DI FOURIER

Una funzione $f(x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$, si dice *periodica di periodo T* , se

$$(8.1) \quad f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se una funzione è periodica di periodo T , essa è anche periodica di periodo $2T, 3T, \dots, kT, \dots$

Siano a, b due numeri reali e sia $k \in \mathbb{N}$. La funzione

$$(8.2) \quad f(x) = a \cos kx + b \sin kx$$

è periodica di periodo 2π . più precisamente, essendo

$$(8.3) \quad \cos kx = \cos(kx + 2\pi) = \cos\left(k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)\right),$$

e analogamente per $\sin kx$, la funzione $f(x)$ in (8.2) verifica la relazione

$$(8.4) \quad f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ed è perciò periodica di periodo $2\pi/k$.

Particolarmente interessanti, anche per le applicazioni alla Fisica, sono combinazioni lineari di funzioni del tipo in (8.2), cioè della forma

$$(8.5) \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che prendono il nome di *polinomi trigonometrici*, ove a_0 e a_k, b_k , per $k=1, 2, \dots, n$, sono numeri reali, detti *coefficienti* del polinomio trigonometrico. Evidentemente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $s_n(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π .

Supponiamo che la successione (di somme parziali) $s_n(x)$ in (8.5) converga per ogni $x \in \mathbb{R}$. In altre parole, fissati $a_0 \in \mathbb{R}$ e a_k, b_k , con $k \in \mathbb{N}$, supponiamo che la serie, detta *serie trigonometrica* di coefficienti a_0, a_k, b_k ,

$$(8.6) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

sia convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora, per la periodicità di $s_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, anche la somma $f(x)$ sarà una funzione periodica di periodo 2π .

Inversamente, data una funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π , ci si può domandare se essa sia *svilupicabile in una serie trigonometrica*, cioè se si possono determinare dei coefficienti a_0, a_k, b_k , con $k \in \mathbb{N}$, tali che la serie (8.6) converga per ogni $x \in \mathbb{R}$, avendo per somma $f(x)$.

Supposto che $f(x)$ sia svilupicabile nella serie trigonometrica (8.6), cioè che risulti

$$(8.7) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e supposto inoltre che la serie (8.6) sia integrabile termine a termine in un intervallo di ampiezza 2π (per il teorema di integrazione per serie del Paragrafo 5, una condizione sufficiente affinché ciò si verifichi è che la serie converga uniforme-

mente in tale intervallo), è possibile seguire un procedimento, dovuto a Fourier, per determinare i coefficienti a_0, a_k, b_k . Precisamente, consideriamo la (8.7) per esempio per $x \in [-\pi, \pi]$, moltiplichiamo ambo i membri della (8.7) per $\cos mx$ o per $\sin mx$, con m fissato in \mathbb{N} , e integriamo tra $-\pi$ e π . Si ottiene così

$$(8.8) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \\ + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos mx \, dx \right) ;$$

$$(8.9) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \\ + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx \, dx \right) .$$

Osservando che

$$(8.10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ \pi & \text{se } m = k \neq 0, \end{cases}$$

$$(8.11) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx \, dx = 0 ,$$

$$(8.12) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ \pi & \text{se } m = k \neq 0, \end{cases}$$

dalla (8.8) si ricava la relazione

$$(8.13) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx , \quad m = 0, 1, 2, \dots ,$$

(anche per $m = 0$, grazie al fattore $1/2$ che figura nella (8.7), a moltiplicare a_0) e dalla (8.9) segue

$$(8.14) \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx , \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

In ogni caso, qualunque sia la funzione $f(x)$ integrabile tra $-\pi$ e π , le costanti definite per $m = 0, 1, 2, \dots$, dalla (8.13), e per $m = 1, 2, \dots$ dalla (8.14), si chiamano *coefficienti di Fourier* di $f(x)$. La serie (8.6), quando i suoi coefficienti sono i coefficienti di Fourier (8.13), (8.14) di $f(x)$, si chiama *serie di Fourier* di $f(x)$.

Si osservi che se $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione *pari*, cioè tale che $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$, la serie di Fourier di f ha tutti i coefficienti b_k nulli. Viceversa, se f è *dispari*, cioè se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$, la serie di Fourier di f si riduce a una serie di soli seni.

In questo paragrafo e nel seguente, data una funzione f integrabile tra $-\pi$ e π , periodica di periodo 2π , studieremo il problema della sua sviluppabilità in serie di Fourier, cioè il problema di stabilire quando essa sia uguale alla somma della sua serie di Fourier.

A tale scopo introduciamo alcune notazioni. Sia $f(x)$ una funzione definita in \mathbb{R} ; se per $x \in \mathbb{R}$ esiste il limite,

$$(8.15) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$$

lo indicheremo con $f(x+)$. Se esiste il limite

$$(8.16) \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h)$$

lo indicheremo con $f(x-)$.

Diremo poi che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è *regolare a tratti* in $[a, b]$ se esistono un numero finito di punti x_i , $i = 0, 1, \dots, N$, con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, tali che f è derivabile con derivata continua in ogni intervallo (x_{i-1}, x_i) e la restrizione di f' a (x_{i-1}, x_i) è prolungabile per continuità all'intervallo chiuso $[x_{i-1}, x_i]$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che è *regolare a tratti* su \mathbb{R} se è regolare a tratti in ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

Il seguente risultato, relativo alla *convergenza puntuale* delle serie di Fourier, è provato nel Paragrafo 9.

TEOREMA SULLA CONVERGENZA PUNTUALE DELLE SERIE DI FOURIER. Sia f una funzione periodica di periodo 2π , regolare a tratti su \mathbb{R} . Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge a

$$(8.17) \quad \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

cioè alla media fra il limite destro e il limite sinistro di f in x . In particolare la serie di Fourier di f converge a $f(x)$ nei punti x in cui è continua.

ESEMPIO 1 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su \mathbb{R} la funzione $x \in [-\pi, \pi] \rightarrow |x|$ (si veda la Figura 1.6).

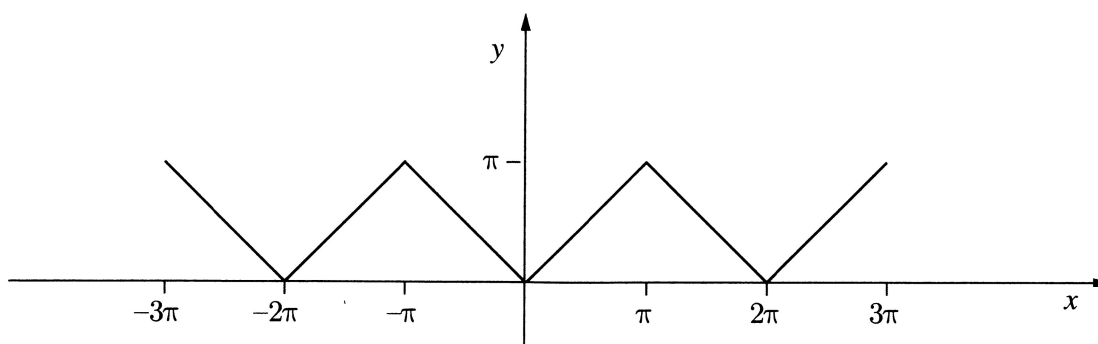


Figura 1.6.

Poiché f è pari, per quanto osservato in precedenza risulta $b_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, mentre con facili calcoli si ha $a_0 = \pi$ e, per $k = 1, 2, \dots$

$$(8.18) \quad \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{k} x \sin kx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right\} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}. \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è dunque

$$(8.19) \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

e, per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché la serie in (8.19) è totalmente convergente, in questo caso la serie di Fourier di f converge anche uniformemente su \mathbb{R} (si veda anche l'Esempio 3 seguente). Ponendo $x = 0$ nella (8.19), si ricava anche la seguente notevole relazione

$$(8.20) \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

ESEMPIO 2 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando su \mathbb{R} la funzione g data da

$$(8.21) \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

I coefficienti di Fourier di f sono allora

$$(8.22) \quad a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e quindi la serie di Fourier di f è data da

$$(8.23) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier tale serie converge a $f(x)$ per ogni x di \mathbb{R} diverso da $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Si osservi che per $x = 0$ la serie di Fourier di f ha come somma $1/2$ e che tale valore è la media dei limiti destro e sinistro di f in 0 .

Ponendo $x = \pi/2$ nella (8.23) otteniamo la seguente formula di rappresentazione per π

$$(8.24) \quad \pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

che coincide con la serie di Taylor della funzione $\arctg x$, nel punto $x = 1$ (si veda la (7.31)).

Occupiamoci ora di stabilire delle condizioni sufficienti per la *convergenza uniforme* di una serie di Fourier.

Anche il seguente risultato è provato nel paragrafo che segue.

TEOREMA SULLA CONVERGENZA UNIFORME DELLE SERIE DI FOURIER. *Sia f una funzione periodica di periodo 2π , regolare a tratti e continua su \mathbb{R} . Allora la serie di Fourier di f converge totalmente in \mathbb{R} , e quindi uniformemente, alla funzione f .*

ESEMPIO 3 Consideriamo di nuovo la funzione f dell'Esempio 1, cioè la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su \mathbb{R} la funzione $x \in [-\pi, \pi] \rightarrow |x|$ (si veda il grafico in Figura 1.6).

Abbiamo già osservato che la sua serie di Fourier converge uniformemente. Alla stessa conclusione si può subito pervenire applicando il teorema sopra enunciato sulla convergenza uniforme.

Citiamo, senza riportarne la dimostrazione, una utile generalizzazione del teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier.

TEOREMA. *Sia f una funzione periodica di periodo 2π , regolare a tratti. La serie di Fourier di f converge uniformemente a f in ogni intervallo $[a, b]$ in cui f è continua.*

ESEMPIO 4 Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che

$$(8.25) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

I coefficienti di Fourier di f sono

$$(8.26) \quad a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \quad b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

e quindi la serie di Fourier di f è data da

$$(8.27) \quad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{k}.$$

Poiché f è continua in tutti i punti di \mathbb{R} distinti da $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, per il teorema precedente la serie (8.27) converge uniformemente a f in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$. Nella Figura 1.7 sono rappresentati i grafici dei primi polinomi di Fourier della serie (8.27).

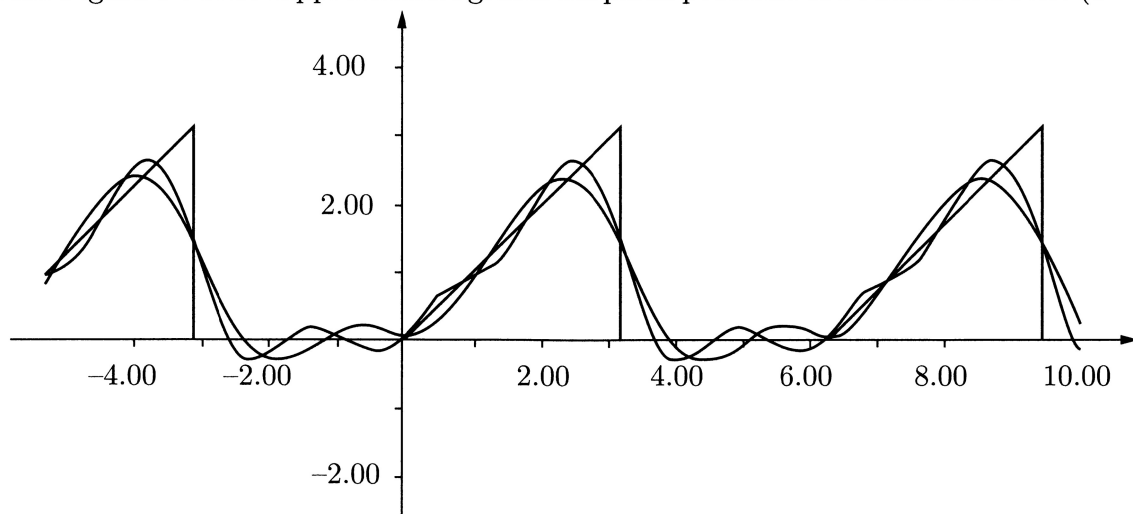


Figura 1.7.

Si noti che, se $x = \pi$, la serie (8.27) si riduce a

$$(8.28) \quad \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2};$$

per la (8.20) tale somma è uguale a

$$(8.29) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} [f(\pi+) + f(\pi-)],$$

in accordo con quanto afferma il teorema sulla convergenza puntuale e la (8.17).

Concludiamo segnalando che in taluni casi, anche se non è noto che una data serie di Fourier di una funzione f regolare a tratti converge uniformemente (od anche puntualmente) a f , si può però affermare ugualmente che vale la formula di integrazione termine a termine.

La dimostrazione del seguente teorema di integrazione per serie è proposta nel paragrafo successivo.

TEOREMA SULL'INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE DELLE SERIE DI FOURIER. Sia f una funzione periodica di periodo 2π regolare a tratti. Fissati $x_0, x \in [-\pi, \pi]$, vale la formula

$$(8.30) \quad \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} (x - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt.$$

CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER

In questo paragrafo dimostreremo alcuni risultati di convergenza delle serie di Fourier enunciati nel paragrafo precedente. In particolare dimostreremo il teorema sulla convergenza puntuale, il teorema sulla convergenza uniforme e il teorema sull'integrazione termine a termine delle serie di Fourier.

Cominciamo col provare la *disuguaglianza di Bessel* (9.2), che esprime un'importante proprietà dei coefficienti di una serie di Fourier.

DISUGUAGLIANZA DI BESSEL. Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile. Se s_n è la somma parziale n -esima della serie di Fourier di f , si ha

$$(9.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right],$$

e inoltre

$$(9.2) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Dimostrazione: osserviamo subito che la (9.2) è conseguenza della (9.1); infatti, poiché l'integrale a primo membro della (9.1) è non negativo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$(9.3) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

da cui, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, segue la (9.2).

Per provare la (9.1) notiamo che

$$(9.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx &= \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \frac{b_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right] = \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Analogamente, utilizzando le (8.10), (8.11) e (8.12), si ottiene

$$(9.5) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Da questa relazione e dalla (9.4) si deduce

$$(9.6) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \end{aligned}$$

cioè la tesi (9.1).

Dalla (9.2) si deduce in particolare che

$$(9.7) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0;$$

possiamo allora enunciare il seguente

COROLLARIO. Se $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata e integrabile, si ha

$$(9.8) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0.$$

Allo scopo di dimostrare il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, cominciamo col provare un lemma tecnico.

LEMMA 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$(9.9) \quad \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Inoltre se f è una funzione periodica di periodo 2π , integrabile in $[-\pi, \pi]$ e se s_n è la somma parziale n -esima della sua serie di Fourier, si ha

$$(9.10) \quad s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Dimostrazione: la (9.9) si ottiene sommando, per k che varia da 1 a n , ambo i membri dell'identità elementare (prostaferesi)

$$(9.11) \quad \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) x \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx.$$

Per provare la (9.10) osserviamo che dalla (9.9) segue

$$\begin{aligned}
 s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx) \right] dy = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y-x) \right] dy = \\
 (9.12) \quad &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.
 \end{aligned}$$

La (9.10) segue da questa relazione ricordando che se g è una funzione periodica di periodo T e $a \in \mathbb{R}$, si ha

$$(9.13) \quad \int_a^{a+T} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt.$$

Dimostrazione del teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier. fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Poiché dalla (9.9) segue

$$(9.14) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2},$$

per la (9.10) si ha allora

$$\begin{aligned}
 s_k(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] &= \\
 (9.15) \quad &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right) dt + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x-)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right) dt.
 \end{aligned}$$

Posto

$$(9.16) \quad F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0, \\ \frac{f(x+t) - f(x-)}{2 \sin \frac{t}{2}} & -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

dato che f è regolare a tratti, dal teorema di L'Hôpital si deduce che

$$(9.17) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = f'_+(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = f'_-(x),$$

dove $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ indicano rispettivamente la derivata destra e la derivata sinistra della funzione f nel punto x . Da ciò segue che F è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e quindi integrabile e limitata.

Dalla (9.15) si ottiene poi

$$(9.18) \quad \begin{aligned} s_k(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \operatorname{sen} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos \frac{t}{2} \operatorname{sen} kt dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos kt dt. \end{aligned}$$

La tesi segue allora passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ e applicando le relazioni di limite in (9.8).

Per il corollario precedente, è evidente che il teorema sulla convergenza puntuale continua a valere se si sostituisce l'ipotesi che f sia regolare a tratti con quella più debole che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione F , definita dalla (9.16), sia limitata e integrabile in $[-\pi, \pi]$.

Iniziamo ora la dimostrazione del teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier. Cominciamo col provare il seguente lemma.

LEMMA 2. *Sia f una funzione periodica di periodo 2π , continua in \mathbb{R} e regolare a tratti. Si ha allora*

$$(9.19) \quad ka_k = -b'_k, \quad kb_k = a'_k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

dove a'_k e b'_k sono i coefficienti di Fourier della funzione derivata f' , dati dalle formule

$$(9.20) \quad a'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx, \quad b'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen} kx dx.$$

Dimostrazione: essendo f continua e regolare a tratti, integrando per parti si ottiene

$$(9.21) \quad \begin{aligned} ka_k &= \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \operatorname{sen} kx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen} kx dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen} kx dx = -b'_k. \end{aligned}$$

Analogamente si prova la seconda uguaglianza in (9.19).

Dimostrazione del teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier: per provare la tesi basta mostrare che risulta

$$(9.22) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty.$$

Dalla disuguaglianza elementare $2ab \leq a^2 + b^2$, valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, segue

$$(9.23) \quad 2|a_k| = 2k|a_k| \frac{1}{k} \leq k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2};$$

analogamente si maggiora $2|b_k|$. Per avere la (9.22) è sufficiente allora verificare che

$$(9.24) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) < +\infty.$$

Ma quest'ultima affermazione segue dalla (9.19), applicando la disuguaglianza di Bessel ai coefficienti di Fourier di f' , che è limitata e integrabile in $[-\pi, \pi]$. Infatti si ha

$$(9.25) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} [(a'_k)^2 + (b'_k)^2] \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx < +\infty.$$

Chiudiamo il paragrafo con la dimostrazione del teorema sull'integrazione termine a termine delle serie di Fourier: indichiamo con F la funzione integrale, estesa a \mathbb{R} in modo periodico con periodo 2π , definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$(9.26) \quad F(x) = \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

La funzione F è continua in $[-\pi, \pi]$; inoltre si annulla agli estremi di tale intervallo; infatti $F(-\pi) = 0$ e, in base alla definizione del coefficiente di Fourier a_0 in (8.13), si ha

$$(9.27) \quad F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \pi a_0 = 0.$$

Pertanto F è continua in tutto \mathbb{R} . Per il teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier, la serie di Fourier di F converge a F uniformemente. Per $k \in \mathbb{N}$, indichiamo con

$$(9.28) \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx dx,$$

i coefficienti di Fourier di F . Essendo $F' = f$, per il Lemma 2 si ha

$$(9.29) \quad k\alpha_k = b_k, \quad k\beta_k = a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fissati quindi $x_0, x \in [-\pi, \pi]$, risulta

$$(9.30) \quad \begin{aligned} & \int_{x_0}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = F(x) - F(x_0) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k (\cos kx - \cos kx_0) + \beta_k (\sin kx - \sin kx_0)] = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-b_k \frac{\cos kx - \cos kx_0}{k} + a_k \frac{\sin kx - \sin kx_0}{k} \right] = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k \int_{x_0}^x \sin kt dt + a_k \int_{x_0}^x \cos kt dt \right] \end{aligned}$$

e quindi la tesi (8.30) risulta provata.

Esercizi con Fourier

- 1) Trovare i coefficienti di Fourier
- 2) Scrivere la serie di Fourier
- 3) Dire se converge

Cose da sapere

Se f è $2L$ -periodica la serie di Fourier di f è:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}_{\text{parte pari di } f} + \underbrace{b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}_{\text{parte dispari di } f}$$

dove $a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$

$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$

Se f è pari \Rightarrow parte dispari = 0 $\Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k$

Se f è dispari \Rightarrow parte pari = 0 $\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k$

La serie di Fourier converge a $f(x)$ in ogni punto in cui f è continua

Se in x_0 f ha un salto \Rightarrow la serie di Fourier converge a $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{f(x_0+\epsilon) + f(x_0-\epsilon)}{2}$

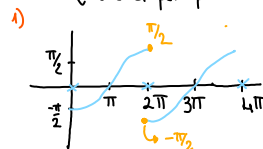
cosa fa ad x cosa fa a x

Come svolgere gli esercizi

- 1) Disegnare il grafico di f
- 2) Trovare il periodo, quindi L
- 3) Scrivere la formula generale della serie di Fourier
- 4) Vedere se f è pari o dispari
- 5) Trovare i coefficienti di Fourier
- 6) Riscrivere la serie con i coefficienti
- 7) Studiare la convergenza

Esempio

$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\pi}{2} & \text{in } [0, 2\pi) \\ \text{estesa per periodicità su tutto } \mathbb{R} \end{cases}$



2) Periodo di $f = 2\pi \Rightarrow L = \pi$

3) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$

5) Trovo i coefficienti

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2} \cos(kx) dx$

$k=0 \Rightarrow a_0 = 0$ conti

$k \neq 0 \Rightarrow a_k = 0$ conti

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2} \sin(kx) dx = \frac{\downarrow}{-1/k} = -\frac{1}{k}$

6) $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k} \sin(kx)$

7) La serie di Fourier conv. a $f \quad \forall x \neq 2m\pi \text{ me } 2L$

Per $x = 2\pi m$ la f ha un salto $\Rightarrow \sum$ converge a

$\frac{f(2\pi m + \epsilon) + f(2\pi m - \epsilon)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0 \text{ per } x = 2\pi m$

CONVOLUZIONI

Definizione

Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$

definiamo $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$

$f * g$ è detta f convoluta g oppure convoluzione di f e g .

Teorema

La convoluzione di f e g è ben definita per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Osservazione

$f * g = g * f$

Proposizione

$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ continua a supporto c.p.t. e $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in C(\mathbb{R}^n)$

Oss:

La prop sopra funziona anche per $g \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$

però in questo caso la continuità uniforme di $f * g$ non è garantita

Proposizione

Se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$

Definizione

Una funzione ρ è detta mollificatore se:

- $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $\rho \geq 0$
- $\exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.c. $\text{supp}(\rho) \subseteq B_{\frac{1}{m}}(0)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$

Sia $\rho = \rho_1$ un mollificatore t.c. $\text{supp}(\rho) \subseteq B_1(0)$

Def. la successione $\rho_n(x) = \rho(nx)n^{\frac{n}{2}}$

ρ_n è un mollificatore

Proposizione

Sia $f \in L^1$ e considero la succ. $\rho_n * f$.

Si ha che $\rho_n * f \in L^1$.

ESERCIZI DI CARATTERE TEORICO

RIPASSO DI ALGEBRA LINEARE

venerdì 19 maggio 2023 09:52

RIPASSO DI ALGEBRA LINEARE

Determinante

$n=2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \quad \det(A) = ad - bc$$

$n > 3$

Laplace

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n [a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \det(A_{ij})] \quad \text{ci si muove lungo la } i\text{-esima riga o la } j\text{-esima colonna}$$

Esempio

→ sviluppo rispetto alla 3 colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = +5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5(-4+7) = 15$$

Matrice inversa

$$A \text{ invertibile } (\Rightarrow \det(A) \neq 0)$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) $\det(A) = -5 \neq 0$
- 2) Calcolo dei cofattori

$$\text{Cof}(a_{11}) = (-1)^{1+1} C_{11} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -14$$

$$\text{Cof}(a_{12}) = (-1)^{1+2} C_{12} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\text{Cof}(a_{13}) = (-1)^{1+3} C_{13} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 9$$

$$\text{Cof}(a_{21}) = (-1)^{2+1} C_{21} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\text{Cof}(a_{22}) = (-1)^{2+2} C_{22} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Cof}(a_{23}) = (-1)^{2+3} C_{23} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -4$$

$$\text{Cof}(a_{31}) = (-1)^{3+1} C_{31} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Cof}(a_{32}) = (-1)^{3+2} C_{32} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

$$\text{Cof}(a_{33}) = (-1)^{3+3} C_{33} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

- 3) Matrice dei complementi algebrici

$$B = \begin{pmatrix} -14 & -1 & 9 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B =$$

- 4) Traspongo B

$$\begin{pmatrix} -14 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix} = B^T$$

- 5) Moltiplico B^T per $\frac{1}{\det(A)}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{Cof}(a_{11}) & \text{Cof}(a_{12}) & \dots & \text{Cof}(a_{1n}) \\ \text{Cof}(a_{21}) & \text{Cof}(a_{22}) & \dots & \text{Cof}(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cof}(a_{n1}) & \text{Cof}(a_{n2}) & \dots & \text{Cof}(a_{nn}) \end{pmatrix}^T$$

$$\text{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} C_{ij} \quad \text{dove } C_{ij} \text{ è il det. della matrice ottenuta eliminando la } i\text{-esima riga e la } j\text{-esima colonna}$$

Mat. Inversa 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rango di una matrice

DEFINIZIONI

- Massimo numero di righe linearmente indipendenti di A
- Massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A
- La dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ $L_A(x) = Ax$
- Ordine massimo dei minori nulli che si possono estrarre da A, cioè l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate che si possono estrarre da A con determinante non nullo
- Il numero di pivot di una riduzione a scalini di A attraverso l'eliminazione gaussiana
- La dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle righe o dalle colonne di A

Metodo 1 → criterio dei minori

Metodo 2 → Teorema degli orlati

Metodo 3 → eliminazione gaussiana

← esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{3}R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 + 2R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 + \frac{5}{3}R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -3$ sono i pivot $\Rightarrow \text{rk}(A) = 2$

Matrice cambiamento di base

$$B = \{(1, 2), (3, 4)\} \quad B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

da B a B'

$$(1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1)$$

$$(3, 4) = 3 \cdot (1, 0) + 4 \cdot (0, 1)$$

$$M_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

base canonica

$$B = \{(0, 2, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

$$B' = \{(1, 0, 2), (2, 3, 0), (0, 4, 4)\}$$

da B' a B

devo scrivere i vettori della base di partenza come una combinazione dei vettori della base di arrivo

$$(1, 0, 2) = a_1(0, 2, 0) + b_1(1, 1, 0) + c_1(0, 1, 1) = (0, 2a_1, 0) + (b_1, b_1, 0) + (0, c_1, c_1) = (b_1, 2a_1 + b_1 + c_1, c_1) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ 2a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ c_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ a_1 = -\frac{3}{2} \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

$$(2, 3, 0) = a_2(0, 2, 0) + b_2(1, 1, 0) + c_2(0, 1, 1) = (0, 2a_2, 0) + (b_2, b_2, 0) + (0, c_2, c_2) \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 2 \\ 2a_2 + b_2 + c_2 = 3 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 2 \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$(0, 4, 4) = a_3(0, 2, 0) + b_3(1, 1, 0) + c_3(0, 1, 1) = (0, 2a_3, 0) + (b_3, b_3, 0) + (0, c_3, c_3) \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 0 \\ 2a_3 + b_3 + c_3 = 4 \\ c_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 0 \\ a_3 = 0 \\ c_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = M_{B' \rightarrow B}$$

Autovettori e autovalori

es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) + (2-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-1] = (2-\lambda) + (2-\lambda)[5-5\lambda+\lambda^2] =$$

$$= \lambda - 2 + 10 - 5\lambda - 10\lambda + 5\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = 0 \quad 1, 2, 4 \text{ sono gli autovalori.}$$

Autovalori $(A - \lambda I)v = 0$

$$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y+z=0 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=a \\ x=-a \\ z=-a \end{cases} \quad a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+y+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-z \quad \begin{cases} x=-a \\ y=0 \\ z=a \end{cases} \quad a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ x-y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x-x+z=0 \\ 2x-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ y=2a \\ z=a \end{cases} \quad a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovalori $\det(A - \lambda I)$

autovalori $(A - \lambda I)v = 0$

Multiplicità algebrica e molteplicità geometrica

$m_a(\lambda) = e$ con e = quante volte λ annulla il polinomio

$m_g(\lambda) = n - \text{rk}(A - \lambda I)$
dim. spazio

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad m_a(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad m_a(\lambda_2) = 1$$

$$m_g(\lambda_1) = m_g(1) = 3 - \text{rk}(A - \lambda_1 I) = 3 - \text{rk}(A - I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk} = 1$$

$$m_g(\lambda_2) = 3 - \text{rk}(A + I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Diagonalizzabilità

A è diagonalizzabile se

$$1) m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$$

$$2) \sum_{i=1}^k m_a(\lambda_i) = n$$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1) \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i$$

In \mathbb{R} non è diagonalizzabile in \mathbb{C} sì

es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) (4-\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2) = (2-\lambda) (\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$$

$$m_A(\lambda_1) = 2 \quad m_A(\lambda_2) = 1$$

$$m_g(\lambda_1) = 3 - \text{rk}(A - 2I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \quad m_g(\lambda_2) = 1$$

$\Rightarrow A$ non è diag.

Come diagonalizzare una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \text{ autovalori} \rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) (\lambda^2 - 2\lambda) = (2-\lambda) \lambda (\lambda - 2) \rightarrow \lambda = 2$$

$$\textcircled{2} \text{ criterio diag} \rightarrow m_A(\lambda_1) = 2 \quad \text{con } \lambda_1 = 2$$

$$m_A(\lambda_2) = 1 \quad \text{con } \lambda_2 = 0$$

$$m_g(\lambda_1) = 3 - \text{rk}(A - 2I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \Rightarrow m_A(\lambda_1) = m_g(\lambda_1)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rk}=1}$$

$$m_g(\lambda_2) = 3 - \text{rk}(A - 0I) = 3 - \text{rk}(A) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_2) = m_A(\lambda_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk}=2$$

A è diagonalizzabile

$$\textcircled{3} D = P^{-1}AP \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\textcircled{4}$ Per trovare P mi serve una base di V_{λ_2} } autospazi relativi a λ_2 e λ_1
una base di V_{λ_1}

$$\begin{cases} (A - \lambda_2 I)v = 0 \\ Av = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2y=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-z \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (A - \lambda_1 I)v = 0 \\ (A - 2I)v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ 0=0 \\ -x-2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{5} P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP$$

Jordan

$n=2$

A matrice 2×2 λ_1, λ_2 autovalori di A

\textcircled{A} se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow m_A(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = 1$ per $i=1,2 \Rightarrow A$ è diag.

$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ogni autovalore ha un blocco di J di ordine 1

$\textcircled{B1}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ solo un blocco di J di ordine 2

\textcircled{B} se $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow m_A(\lambda) = 2 \quad m_g(\lambda) = \begin{cases} 1 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ 2 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ 2 blocchi di Jordan di ordine 1

$\textcircled{B2}$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

autovalori $\rightarrow \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 6 - 5\lambda + \lambda^2 \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 3 \\ \searrow \lambda_2 = 2 \end{matrix}$

osservazioni $\rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad m_A(\lambda_1) = m_A(\lambda_2) = 1 = m_A(\lambda_2) = m_A(\lambda_2) \Rightarrow$

Jordan $\rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

n=3

A matrice 3×3 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori di A

(A) se $m_A(\lambda_1) = m_A(\lambda_2) = 1$
 $m_A(\lambda_2) = m_A(\lambda_2) = 1$
 $m_A(\lambda_3) = m_A(\lambda_3) = 1 \Rightarrow$ caso A diagonalizzabile

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(B) se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ chiamo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$m_A(\lambda_3) = m_A(\lambda_3) = 1 \rightarrow$ blocco di J di ordine 1

$m_A(\lambda) = 2, m_A(\lambda) = \begin{cases} 1 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ a } \lambda \text{ è associato un blocco di J di ordine 2} \\ 2 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ a } \lambda \text{ sono associati 2 blocchi di J di ordine 1} \end{cases}$

(C) se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ che chiamo λ

$m_A(\lambda) = 3, m_A(\lambda) = \begin{cases} 1 \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ un solo blocco di Jordan di ordine 3} \\ 2 \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ 2 blocchi di J uno di ordine 2 e l'altro di ordine 1} \\ 3 \Rightarrow \text{A diagonalizzabile } J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ 3 blocchi di J associati a } \lambda \text{ di ordine 1} \end{cases}$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

\downarrow

(1) autovalori $\rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 9 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(7-\lambda) + 9(1-\lambda) =$

$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)(7-\lambda) + 9] = (1-\lambda)[7-\lambda-7\lambda+\lambda^2+9] = (1-\lambda)[16-8\lambda+\lambda^2] = (1-\lambda)(\lambda-4)^2$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{con } m_A(\lambda_2) = 2 \quad \text{e } m_A(\lambda_1) = 1$

(2) $m_A(\lambda_2) = n - \text{rk}(A - 4I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk} = 2$

$R_3 = R_3 + \frac{5}{3}R_2$

Sono nel caso $m_A(\lambda_1) = m_A(\lambda_1) = 1$ con $\lambda_1 = 1$

$m_A(\lambda_2) = 1$ e $m_A(\lambda_2) = 2$ con $\lambda_2 = 4$

(3) $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

caso $m \geq 3$

Sia 2 autov. di A di taglia $m \geq 3$

$$\text{Sia } r_k = \text{rank}(A - \lambda \text{Id})^k$$

dei blocchi di ordine 1 relativi a λ è $m - 2r_1 + r_2$

$$2 \quad \text{è } r_1 - 2r_2 + r_3$$

$$3 \quad \text{è } r_2 - 2r_3 + r_4$$

\vdots

$$m \quad \text{è } r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1}$$

Proprietà

- A è Jordanizzabile $\Leftrightarrow \exists P$ invertibile t.c. $P^{-1}AP$ è una mat. di Jordan
- la forma di Jordan è unica a meno di permutazione dei blocchi
- A e B sono simili $\Leftrightarrow J_A = J_B$
- $J_A \sim A$ cioè J_A è una mat. triang. sup. simile ad A

M. ortogonali

$$A^T A = A A^T = \text{Id}$$

Se A è ortogonale $\Rightarrow A^T$ è ortogonale

$$\det(A) = \pm 1$$

Ogni mat. ortog. è invertibile e $A^{-1} = A^T$

A, B ortogonali $\Rightarrow (AB)(AB)^T = \text{Id}$ cioè il prodotto di mat. ortogonali è ortogonale

Ogni mat. simmetrica può essere diagonalizzata da una mat. ortogonale

Nello sp. euclideo le mat. ortogonali definiscono un'isometria

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

venerdì 19 maggio 2023 15:46

CONCETTI PRELIMINARI

- Notazioni
- Come riconoscere equazioni differenziali lineari e non.

NOTAZIONI

- Le equazioni differenziali ordinarie sono equazioni in cui l'incognita è una funzione i cui termini sono le derivate della funzione stessa
- forma implicita $\rightarrow F(t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0$
- ordine \rightarrow è l'ordine massimo di derivazione che compare
 $y' - y^2 = 0$ ordine 1
 $y'' - y' = 0$ ordine 2
- in forma normale \rightarrow se è scritta in forma esplicita rispetto alla derivata di ordine max
 $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$

Come riconoscerle?

Lineari

$$y^{(k)} + a_{k-1}(t)y^{(k-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

se $g(t) = 0 \rightarrow$ eq omogenea

se $a_i(t) \forall i$ sono costanti \rightarrow a coeff. costanti

esempi

$$y''' + t^2 y' + y = 0$$

lineare (y e le sue derivate hanno esponente 1)

ordine 3 (c'è y''')

non è a coeff. costanti (c'è t^2 che non è un numero)

è omogenea ($g(t) = 0$)

$$y'' + y^2 - t^3 - 1 = 0$$

non è lineare (c'è y^2)

ordine 2 (c'è y'')

a coeff. costanti (coeff di y'' e y^2 sono 1)

non è omogenea ($g(t) = t^3 + 1$)

RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Non lineari

- ORDINE I

- A variabili separabili
 - Non lineari Omogenee (*)
 - Del tipo $y'(t) = g\left(\frac{at + by(t) + c}{a't + b'y(t) + c'}\right)$ (*)
 - Esatte (cioè riconducibili a forme differenziali)

- Di ordine superiore al primo

- Per sostituzione (*)
 - Equazioni autonome (*)
 - Equazioni della forma $y''(t) = f(t)$ (*)
 - Di Bernoulli (*)

- Lineari

- ORDINE I

- Del primo ordine

- ORDINE II

- Omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine
 - Metodo delle variazioni delle costanti per non omogenee del II ordine a coefficienti costanti
 - Metodo di somiglianza per non omogenee del II ordine a coefficienti costanti

- ORDINE K

- Omogenee e non omogenee a coefficienti costanti di ordine n con somiglianza (*)
 - Metodo delle variazioni delle costanti per non omogenee di ordine n a coefficienti costanti (*)

Su quelle (*) devo fare esercizi perché non ne ho mai fatti (11)

EQUAZIONI NON LINEARI DEL I ORDINE

VARIABILI SEPARABILI

$$y'(t) = a(t) b(y(t))$$

- $y'(t) = \frac{dy}{dt}$
- $\frac{dy}{dt} = a(t) b(y(t))$
- $\frac{1}{b(y(t))} = a(t) d(t)$
- $\int \frac{1}{b(y(t))} dy = \int a(t) d(t)$

esempio

$$y' = y^2 t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = t^2 dt$$

$$\frac{1}{y^2} dy = t^2 dt$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int t^2 dt$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{t^3}{3} + c \Rightarrow y = \frac{-3}{t^3 + 3c} \quad c \in \mathbb{R}$$

algoritmo per risolvere queste eq. diff.

Step 1. Moltiplico ambo i membri di $y' = a(x)y + b(x)$ per $e^{-A(x)}$

$$e^{-A(x)} y' = a(x)y e^{-A(x)} + b(x) e^{-A(x)}$$

Step 2. $A'(x) = a(x)$

$$e^{-A(x)} y' - e^{-A(x)} A'(x) y = b(x) e^{-A(x)}$$

Step 3. $\frac{d}{dx} [e^{-A(x)} y(x)] = b(x) e^{-A(x)}$

Step 4. Integro ambo i membri

$$e^{-A(x)} y(x) = \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

Step 5. Divido per $e^{-A(x)}$ cioè moltiplico per $e^{A(x)}$

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ESATTE

$$y'(x) = \frac{a(x, y(x))}{b(x, y(x))} \quad (*)$$

- Scrivere la f. differenziale associata
 $w = a(x, y) dx + b(x, y) dy$
- Verificare che w sia esatta
- Troviamo una primitiva $U(x, y)$
- Le soluzioni di $*$ saranno date da $U(x, y) = c$

esempio

$$y'(x) = \frac{e^{2x} - x y^2(x)}{x^2 y(x)} \quad (*)$$

$$w(x) = (x y'(x) - e^{2x}) dx + x^2 y dy$$

↳ Po cambiato di sign perché mi serve la -

$\text{dom}(w) = \mathbb{R}^2$ s. connesso (chiusa \Rightarrow esatta)

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial w_2}{\partial x} = 2xy \Rightarrow w \text{ è esatta}$$

$$\text{Cerco una primitiva} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x y^2 - e^{2x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 y \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(x, y) = \int x^2 y dy = \frac{x^2 y^2}{2} + c(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x y^2 + c'(x) = e^{2x} \Rightarrow c'(x) = e^{2x}$$

$$\text{Sol di } (*) \rightarrow U(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} e^{2x} = c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL TIPO

$$y'(t) = g\left(\frac{at + by(t) + c}{a't + b'y(t) + c'}\right)$$

- idea pensare ad $at + by(t) + c$ e $a't + b'y(t) + c'$ come 2 rette
- incidenti ($\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$)
- parallele ($\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$) $a' = Ra$ $b' = Rb$ $R \in \mathbb{R}$

Caso rette parallele mi ricordo a variabili separabili

esempio

$$y'(t) = \frac{t + 2y(t) + 2}{2t + 4y(t) + 3}$$

$$a=1 \quad b=2 \quad a'=2 \quad b'=4$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad a' = 2a \quad b' = 2b$$

$$y'(t) = \frac{t + 2y(t) + 2}{2(t + 2y(t) + \frac{3}{2})}$$

$$2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y'(t) = \frac{t + 2y(t) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2(t + 2y(t) + \frac{3}{2})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(t + 2y(t) + \frac{3}{2})} \quad *$$

pongo ora $z = t + 2y(t) + \frac{3}{2}$ $z' = 1 + 2y'(t) \Rightarrow y'(t) = \frac{z'(t) - 1}{2}$

sostituisco $*$ $\frac{z'(t) - 1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2z(t)}$

$z'(t) = \frac{z(t) + 1}{z(t)}$ che è a var separabili

Secondo caso: "rette incidenti". In questo caso avremo:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

ovvero le due rette si intersecano in un punto. Come si procede?

Si trova il punto di intersezione (t_0, y_0) e si pone:

$$\xi = t - t_0$$

$$\eta(t) = y(t) - y_0$$

da cui:

$$t = \xi + t_0$$

$$y(t) = \eta(t) + y_0$$

Ricordando che il punto trovato è di intersezione, esso soddisfa le equazioni delle due rette, ovvero $at_0 + by_0 + c = 0$ e quindi:

$$at + by(t) + c = at_0 + by_0 + c = a(\xi + t_0) + b(\eta(t) + y_0) + c =$$

$$= a\xi + b\eta(t) + \overbrace{at_0 + by_0 + c}^{=0} = a\xi + b\eta(t)$$

analogamente:

$$a't + b'y(t) + c' = a'\xi + b'\eta(t)$$

Sostituiamo quanto ottenuto nell'equazione di partenza, avremo

$$y'(t) = \eta'(t) = \frac{a\xi + b\eta(t)}{a'\xi + b'\eta(t)}$$

dividiamo per ξ e otteniamo un'equazione differenziale non lineare omogenea. :)

A proposito: come mai $y'(t) = \eta'(t)$? Ricordiamo che avevamo posto

$$y(t) = \eta(t) + y_0 \quad \text{da cui derivando: } y'(t) = \eta'(t).$$

esempio

$$y'(t) = \frac{t + y(t) + 2}{3t + y(t) + 3}$$

$$a=1 \quad b=1 \quad a'=3 \quad b'=1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rette incidenti}$$

Trovo il pto di intersezione

$$\begin{cases} t + y + 2 = 0 \\ 3t + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 - t \\ 3t - 2 - t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 - t \\ 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(t_0, y_0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

pongo $\xi = t - t_0 = t + \frac{1}{2}$, $\eta(t) = y(t) - y_0 = y(t) + \frac{3}{2}$

$$t + y(t) + 2 = \xi + \eta(t) \quad \text{numeratore} = a\xi + b\eta(t)$$

$$3t + y(t) + 3 = 3\xi + \eta(t) \quad \text{denominatore} = a'\xi + b'\eta(t)$$

Sostituisco nell'eq. di partenza $\Rightarrow y'(t) = \eta'(t) = \frac{\xi + \eta(t)}{3\xi + \eta(t)}$

divido per $\xi \neq 0 \Rightarrow \eta'(\xi) = \frac{1 + \frac{\eta(\xi)}{\xi}}{3 + \frac{\eta(\xi)}{\xi}}$

che è un'eq. differenziale non lineare omogenea

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI OMOGENEE

$$y'(t) = \frac{P(t, y(t))}{Q(t, y(t))}$$

con P e Q polinomi omogenei dello stesso grado
 ↓
 i monomi sono dello stesso grado

$$(*) \quad y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right) \quad (\text{ho diviso per } t^k, \text{ la potenza di grado max})$$

$$\text{pongo } z(t) = \frac{y(t)}{t} \Rightarrow y(t) = t \cdot z(t)$$

$$\text{derivando } y'(t) = 1 \cdot z(t) + t z'(t)$$

$$\text{Sostituisco in } (*) \Rightarrow t z'(t) + z(t) = g(z(t))$$

$$\Rightarrow z'(t) = [g(z(t)) - z(t)] \cdot \frac{1}{t} \quad (\text{var. separabili})$$

esempio

$$4t^2 y'(t) - (t + y(t))^2 = 0$$

$$y'(t) = \frac{(t + y(t))^2}{4t^2}$$

$$\text{divido per } t^2 \quad y'(t) = \frac{1 + \frac{y^2(t)}{t^2} + 2 \frac{y(t)}{t}}{4}$$

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \quad y'(t) = t z'(t) + z(t)$$

$$z(t) + t z'(t) = \frac{1 + z^2(t) + 2 z(t)}{4}$$

$$t z'(t) = \frac{1 + z^2(t) + 2 z(t) - 4 z(t)}{4} = \frac{1 + z^2(t) - 2 z(t)}{4}$$

$$z'(t) = \frac{(z(t) - 1)^2}{4t} \quad \text{è a var. sep.}$$

$$\int \frac{dz}{(z(t) - 1)^2} = \int \frac{1}{4t} dt \Rightarrow -\frac{1}{z-1} = \frac{1}{4} \log(t) + C \Rightarrow z(t) = \frac{\log(t) + 4K - 4}{\log(t) + 4K}$$

EQUAZIONI NON LINEARI DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

PER SOSTITUZIONE

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

nota + idea \rightarrow manca il termine $y(t)$, questo ci permette di ridurci a un'eq. diff. non lineare del I ordine

pongo $y'(t) = z(t)$

derivo $y''(t) = z'(t)$

Sostituisco nell'eq. di partenza $z'(t) = f(t, z(t))$ non lineare del I ordine. con sol $z(t; c)$

$$y(t) = \int z(t; c) dt \quad \text{avendo fatto la sostituzione } y'(t) = z(t)$$

esempio

$$y''(t) = (y'(t))^2 + 1$$

$$y'(t) = z(t)$$

$$z'(t) = z^2(t) + 1$$

$$\int \frac{1}{z^2+1} dz = \int 1 dt \Rightarrow \arctan z = t + c$$

$$z(t) = \tan(t+c)$$

$$y(t) = \int \tan(t+c) dt = \int \frac{\sin(t+c)}{\cos(t+c)} dt = -\log(\cos(t+c)) + d \quad \text{con } g, d \in \mathbb{R}$$

EQUAZIONI AUTONOME

Vediamo ora come procedere per la **risoluzione delle equazioni differenziali autonome**. Siamo di fronte ad un'equazione del tipo:

$$(\spadesuit) \quad y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Il trucco sta nel pensare alla variabile $y(t)$ come se fosse una variabile indipendente, ponendo:

$$y'(t) = z(y(t))$$

da cui, derivando e utilizzando il teorema di **derivazione della funzione composta**

$$y''(t) = z'(y(t)) \cdot y'(t) = z'(y(t)) \cdot \overbrace{z(y(t))}^{=y'(t)}$$

ovvero (\spadesuit) si trasforma in un'equazione differenziale del primo ordine

$$z'(y(t))z(y(t)) = f(y(t), y'(t))$$

in cui dobbiamo pensare a $y(t)$ come se fosse una variabile indipendente (come alla classica t per intenderci).

Trovata una soluzione $z(y(t))$ di quest'ultima equazione differenziale del primo ordine, per risalire alla soluzione dell'equazione differenziale (\spadesuit) ci ricordiamo della sostituzione effettuata in precedenza: $y'(t) = z(y(t))$. Si tratta allora di risolvere l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y'(t) = z(y(t))$$

EQUAZIONI DELLA FORMA

$$y''(t) = f(y(t))$$

moltiplico ambo i membri per $y'(t) \Rightarrow y'(t)y''(t) = f(y(t))y'(t)$

moltiplico e divido a sx per 2 $\Rightarrow \frac{1}{2}(2y'(t)y''(t)) = f(y(t))y'(t)$

adesso $2y'(t)y''(t) = \frac{d}{dt}[y'(t)^2]$

\Rightarrow sostituisco $\frac{1}{2}y'(t)^2 = f(y(t))y'(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}[y'(t)^2] = 2f(y(t))y'(t)$

$$(y'(t))^2 = 2 \int f(y(t))y'(t) dt$$

$$y'(t) dt = dy \Rightarrow (y'(t))^2 = 2 \int f(y(t)) dy = 2F(y(t))$$

quindi devo risolvere $y'(t) = \sqrt{2F(y)}$ che è a var. sep. $\rightarrow F$ è una primitiva di $f(y)$

esempio

$$y''(t) = (y(t))^2$$

$$y''(t)y'(t) = (y(t))^2 y'(t)$$

$$\frac{1}{2}(2y''(t)y'(t)) = (y(t))^2 y'(t)$$

$$\int \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(y'(t))^2] = \int y(t)^2 y'(t)$$

$$(y'(t))^2 = 2 \int y(t)^2 \underbrace{y'(t) dt}_{dy} = 2 \int y(t)^2 dy = \frac{2}{3} y^3(t) + c$$

$$y'(t) = \sqrt{\frac{2}{3} y^3(t) + c} \text{ che è a var. separabili}$$

DI BERNOULLI

Per risolvere le equazioni differenziali che si presentano nella forma:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^\alpha(t)$$

con $\alpha \neq 0, 1$. Vediamo il metodo di risoluzione passo-passo:

(1) Dividere ambo i membri per y^α ottenendo

$$\frac{y'(t)}{y^\alpha(t)} = a(t) \frac{y(t)}{y^\alpha(t)} + b(t)$$

ossia

$$(\clubsuit) \quad \frac{y'(t)}{y^\alpha(t)} = a(t)y^{1-\alpha}(t) + b(t)$$

(2) Porre $y^{1-\alpha}(t) = z(t)$.

(3) Derivare entrambi i membri dell'uguaglianza (2), ricavando

$$z'(t) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t)$$

ossia

$$z'(t) = (1-\alpha) \frac{y'(t)}{y^\alpha(t)}$$

per cui

$$\frac{y'(t)}{y^\alpha(t)} = \frac{z'(t)}{(1-\alpha)}$$

(4) Sostituire i risultati ottenuti ai punti (3) e (4) in (\clubsuit) ottenendo:

$$\underbrace{\frac{z'(t)}{1-\alpha}}_{=\frac{y'(t)}{y^\alpha(t)}} = a(t) \underbrace{z(t)}_{=y^{1-\alpha}(t)} + b(t)$$

che è un'equazione differenziale lineare, non omogenea, del primo ordine, di cui conosciamo la formula risolutiva.

(5) Tornare alla variabile $y(t)$ ricordandosi dell'imposizione fatta al punto (2), ovvero: $y^{1-\alpha}(t) = z(t)$

Potrebbe sembrare qualcosa di difficile, ma non è così! Con il seguente esempio vi risulterà tutto più chiaro!

EQUAZIONI LINEARI

DEL I ORDINE

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

La sol. generale è $y(t) = e^{-A(t)} \left[c_1 + \int g(t) e^{A(t)} dt \right]$ con $A(t) = \int a_0(t) dt$

Osservazioni

La formula vale anche per eq. omogenee $y' + a_0(t)y(t) = 0$ la sol. è $y(t) = c_1 e^{-A(t)}$ con $A(t) = \int a_0(t) dt$

Per poter usare dirett. la formula l'eq. deve essere scritta come $y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$

Se abbiamo un p.c. $\begin{cases} y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $y(t) = e^{-A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^t g(s) e^{A(s)} ds \right]$ con $A(t) = \int_{t_0}^t a_0(s) ds$

esempio

$$y'(t) - 2y(t) = 1$$

$$a_0(t) = -2, g(t) = 1$$

$$A(t) = -2t$$

$$y(t) = e^{-A(t)} \left[c_1 + \int g(t) e^{A(t)} dt \right]$$

$$y(t) = e^{2t} \left[c_1 + \int 1 e^{-2t} dt \right] = e^{2t} \left[c_1 - \frac{1}{2} e^{-2t} \right] = c_1 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI DEL SECONDO ORDINE

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Scrivere il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ e troviamo le radici

caso 1 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

caso 2 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$

caso 3 λ_1, λ_2 rad. complesse coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta \Rightarrow y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

esempio

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -3 \quad m_\lambda(\lambda) = 2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$$

METODO DELLE VARIAZIONI DELLE COSTANTI PER NON OMOGENEE DEL II ORDINE

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t)$$

1) Si trova una soluzione dell'eq. omogenea associata $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$ che chiamo $y_0(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

2) Si trova una soluzione particolare della non omogenea $y_p(t)$

3) La soluzione sarà $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

Questo metodo funziona per tutti i tipi di eq. diff. lineari, non omogenee II ordine, a coeff. costanti

e il metodo delle variazioni delle costanti

$$y_0 = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad y_1, y_2 \text{ sono due sue soluzioni}$$

Cerco una sol particolare della mom omogenea del tipo $y_p(t) = x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t)$ (*)

Imposto il sistema
$$\begin{cases} x_1'(t)y_1(t) + x_2'(t)y_2(t) = 0 \\ x_1'(t)y_1'(t) + x_2'(t)y_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

Trovate x_1' e x_2' integro e ottengo $x_1 = \int x_1'(t) dt$ e $x_2 = \int x_2'(t) dt$

x_1 e x_2 e sostituisco (*)

esempio

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

risolvo $y''(x) + y(x) = 0$ $\lambda^2 + 1 = 0$ $\lambda = \pm i$

$$y_0(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Imposto il sistema
$$\begin{cases} x_1' \cos(x) + x_2' \sin(x) = 0 \\ -x_1' \sin(x) + x_2' \cos(x) = \frac{1}{\sin(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{-x_2' \sin(x)}{\cos(x)} \\ \frac{x_2' \sin(x)}{\cos(x)} \cdot \sin(x) + x_2' \cos(x) = \frac{1}{\sin(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{-x_2' \sin(x)}{\cos(x)} \\ \frac{x_2' \sin^2(x) + x_2' \cos^2(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{-x_2' \sin(x)}{\cos(x)} \\ \frac{x_2'}{\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{-\cos(x) \sin(x)}{\cos(x) \sin(x)} = -1 \\ x_2' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{cases}$$

$$x_1 = \int x_1' = \int -1 = -x$$

$$x_2 = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \log|\sin(x)| \Rightarrow y_p(x) = -x \cos(x) + \log|\sin(x)| \sin(x)$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \log|\sin(x)| \sin(x) - x \cos(x)$$

METODO DI SOMIGLIANZA PER NON OMOGENEE DEL II ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t)$$

dove $g(t)$ è del tipo: A) $e^{\lambda t} Q(t)$ C) $\cos(\beta t) Q(t)$ E) $e^{\lambda t} \cos(\beta t) Q(t)$

B) $Q(t)$ D) $\sin(\beta t) Q(t)$ F) $e^{\lambda t} \sin(\beta t) Q(t)$

G) Somma algebrica di uno o più dei precedenti termini

1) Si trova una soluzione dell'eq. omogenea associata $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$ che chiamo $y_0(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

2) Si trova una soluzione particolare della non omogenea $y_p(t)$ con metodo della somiglianza

3) Calcolo $y_p''(t)$, $y_p'(t)$

4) Le sostituisco nell'eq. di partenza così $y_p''(t) + a_1 y_p'(t) + a_0 y_p(t) = g(t)$

5) Impongo uguali i termini simili

6) La soluzione sarà $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

Soluzioni che posso avere al pto 1

- $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $y_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$ se $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cos(\beta_1 t)$ $y_2(t) = e^{\lambda_1 t} \sin(\beta_1 t)$ se $\lambda = \alpha \pm i\beta_1$ e $\bar{\lambda}$ sono radici in \mathbb{C}

• Se $g(t)$ è del tipo A, B cioè $Q(t) e^{\lambda t}$

• caso 1 se $\lambda = \lambda_1$ \vee $\lambda = \lambda_2 \Rightarrow y_p = t e^{\lambda t} \bar{Q}(t)$

• caso 2 se $\lambda = \lambda_0 \Rightarrow y_p = t^2 e^{\lambda t} \bar{Q}(t)$

• caso 3 se λ non coincide con nessuna delle radici del pol. caract $\Rightarrow y_p(t) = e^{\lambda t} \bar{Q}(t)$

$$\deg(\bar{Q}(t)) = \deg(Q(t))$$

• Se $g(t)$ è del tipo C, D $\cos(\beta t) Q(t)$, $\sin(\beta t) Q(t)$

• caso 1 se $i\beta$ è radice del pol. caract cioè $p(i\beta) = 0 \Rightarrow y_p(t) = t [\cos(\beta t) \bar{Q}(t) + \sin(\beta t) R(t)]$ con $\deg(\bar{Q}(t)) = \deg(Q(t))$

• caso 2 se $i\beta$ non è radice del pol. caract cioè $p(i\beta) \neq 0 \Rightarrow y_p(t) = \cos(\beta t) \bar{Q}(t) + \sin(\beta t) R(t)$ con $\deg(\bar{Q}(t)) = \deg(Q(t))$

• Se $g(t)$ è del tipo E, F $e^{\lambda t} \cos(\beta t) Q(t)$, $e^{\lambda t} \sin(\beta t) Q(t)$

• caso 1 se $\lambda = \alpha \pm i\beta_1$ e $\beta = \beta_1 \Rightarrow y_p(t) = t e^{\lambda t} [\cos(\beta t) \bar{Q}(t) + \sin(\beta t) R(t)]$

• caso 2 se λ e β non coincidono con α e $\beta_1 \Rightarrow y_p(t) = e^{\lambda t} [\cos(\beta t) \bar{Q}(t) + \sin(\beta t) R(t)]$ con $\deg(\bar{Q}(t)) = \deg(Q(t))$

esempio

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \quad \lambda_2 = \frac{6-4}{2} = 1$$

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^x$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$t^2 - 2t + 2 = 0 \quad \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = \frac{1-i}{2} = \frac{1-i}{2}$$

LINEARE OMOGENEE E NON OMOGENEA DI ORDINE n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad \text{omogenea} \quad \textcircled{A}$$

$$= f(x) \quad \text{non omogenea} \quad \textcircled{B}$$

Teorema vale per B

Se i coeff a_i ed $f(x)$ sono continui nell'interv. $[a, b] \Rightarrow \forall x_0 \in [a, b]$ e $\forall (y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$,

$\exists!$ sol y in $[a, b]$ t.c. $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

$\left\{ \begin{array}{l} B \\ \text{condizioni} \end{array} \right.$ prob. di Cauchy. di cui y è sol.

Analogamente al caso $n=2$ se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ sono n sol. particolari dell'eq. A \Rightarrow anche una loro comb. lineare del tipo $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ è sol. part. di A.

$$W(x) = \text{Wronskiano} = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$W(x) \neq 0 \Leftrightarrow y_i$ sono lin. indep.

Teorema

Se y_1, \dots, y_n sono sol. part. di A lin. ind. \Rightarrow una quals. sol. di A è del tipo $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$

Per det. le n sol. basta conoscere le radici di $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$

Caso 1 Se le n radici dell'eq. caratteristica sono tutte distinte \Rightarrow le funzioni $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ sono n soluzioni lin. indep. di A

Caso 2 Se λ è una radice multipla di ordine r dell'eq. caract. \Rightarrow le funzioni $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}$ sono r sol. lin. indep. di A

Osservazione

Se $\lambda = \alpha + i\beta$ è radice $\Rightarrow \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ è radice.

$$\begin{aligned} \text{Le 2 sol. complesse } e^{\lambda x} &= e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \xrightarrow{\text{somma}} e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2} \\ e^{\bar{\lambda} x} &= e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \xrightarrow{\text{somma}} e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2} \\ e^{\lambda x} &= e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \xrightarrow{\text{differenza}} e^{\alpha x} \sin \beta x = \frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x}}{2i} \end{aligned}$$

Esempio

$$y''' + y = 0$$

$$\lambda^3 + 1 = 0 \quad \text{radici } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} + c_3 e^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

EQUAZIONI LINEARI NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI D ORDINE n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (*)$$

Teorema 1

Sia v_0 una sol. particolare dell'eq. sopra; siano y_1, y_2, \dots, y_n n sol. particolari l'n. indep. dell'omogenea associata

Allora la sol. generale dell'eq. sopra sarà $y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + v_0(x)$

Sia $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ eq. carad. dell'eq. omog. associata

caso $f(x) = e^{\lambda x} p_m(x)$ con p_m = polinomio di grado m

Se $P(\lambda) \neq 0 \Rightarrow (*)$ ammette sol. particolare $e^{\lambda x} q_m(x)$ con q = pol. di grado m

Se $P(\lambda) = 0$ e λ ha molteplicità $h \Rightarrow (*)$ ammette sol. particolare $x^h e^{\lambda x} q_m(x)$

caso $f(x) = e^{\lambda x} [p_m(x) \cos \mu x + r_k(x) \sin \mu x]$

Se $P(\lambda \pm i\mu) \neq 0 \Rightarrow (*)$ ammette sol. particolare del tipo $e^{\lambda x} [\bar{q}_t(x) \cos \mu x + S_t(x) \sin \mu x]$ con $t = \max\{m, k\}$

Se $P(\lambda \pm i\mu) = 0$ e $\lambda \pm i\mu$ ha molteplicità $h \Rightarrow (*)$ ammette sol. particolare del tipo $x^h e^{\lambda x} [\bar{q}_t(x) \cos \mu x + S_t(x) \sin \mu x]$
con $t = \max\{m, k\}$

esempio

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$$

omogenea $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \quad \lambda_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \lambda_2 = 1$

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$ è sol. dell'omogenea

Det. una sol. particolare

$g(x)$ è un polinomio di grado 3 $\lambda = 0$ non è radice di $g(x) \Rightarrow$

$$v_0(x) = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$$

$$v_0'' - 3v_0' + 2v_0 = 2x^3 - x^2 + 1$$

$$v_0' = 3b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2$$

$$v_0'' = 6b_0 x + 2b_1$$

$$6b_0 x + 2b_1 - 9b_0 x^2 - 6b_1 x - 3b_2 + 2b_0 x^3 + 2b_1 x^2 + 2b_2 x + 2b_3 = 2x^3 - x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 2b_0 = 2 \\ 2b_1 - 9b_0 = -1 \\ 6b_0 - 6b_1 + 2b_2 = 0 \\ 2b_1 - 3b_2 + 2b_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 4 \\ 6 - 24 + 2b_2 = 0 \\ 8 - 3b_2 + 2b_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 4 \\ b_2 = 9 \\ b_3 = 10 \end{cases}$$

$$v_0(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10 + c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

TIPI DI SOLUZIONE

sabato 20 maggio 2023 16:26

PROBLEMA DI CAUCHY

Definizione: siano

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto,

$f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una **funzione continua**,

$(t_0, y^0) \in A$, ossia $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y^0 \in \mathbb{R}^n$.

Si dice Problema di Cauchy e si indica brevemente con **PdC** la coppia di equazioni:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

Trovare una soluzione (o integrale generale) del PdC vuol dire individuare una funzione y tale che:

y è una soluzione dell'equazione differenziale $y'(t) = f(t, y(t))$;

$y(t_0) = y^0$ che viene detta solitamente **condizione iniziale del PdC**.

In generale t_0 si dice **punto iniziale** e y^0 **valore iniziale**.

TUTTI I TIPI DI SOLUZIONI

Sia

$(\diamond) f : A \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto

Definizione (soluzione locale)

Una funzione y si dice *soluzione locale dell'equazione differenziale*

$$y^{(k)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$$

se:

A) il suo dominio è un **intervallo**, ovvero $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

B) $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **derivabile** k volte in I

C) Per ogni $t \in I$ risulta che $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) \in A$

D) Per ogni $t \in I$ risulta che $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$.

Definizione (prolungamento di una soluzione)

Una funzione

$$z : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

si dice un *prolungamento della soluzione locale*

$$y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

se:

A) z è a sua volta una soluzione locale, ovvero verifica tutte le condizioni della definizione precedente.

B) $I \subseteq J$

C) $\forall t \in I : y(t) = z(t)$

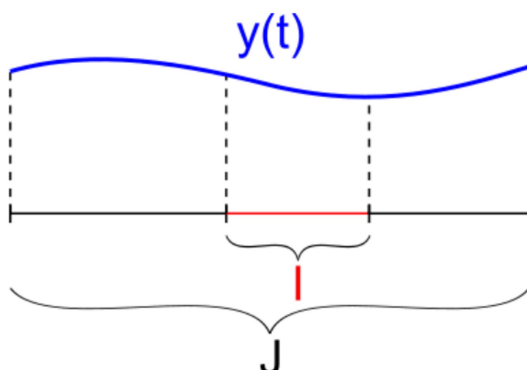
In particolare se in luogo della B) risulta che $I \subset J$ (l'**sottoinsieme proprio** di J) allora z si dice *prolungamento proprio*.

Osservazione

Prima di procedere con la definizione di soluzione massimale e globale, soffermiamoci un istante sulla definizione appena data.

La definizione di prolungamento di una soluzione ci dice che una soluzione z è il prolungamento di un'altra soluzione y se z è definita in un intervallo J che contiene l'intervallo di definizione I di y , e se nell'*intervallo comune* I risulta $z(t) = y(t)$.

Questo semplicissimo grafico ci aiuta a capire ancor meglio la situazione



Definizione (soluzione massimale)

Una funzione y si dice **soluzione massimale** dell'equazione differenziale

$$y^{(k)} = f(t, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

se **non** esistono prolungamenti **propri** di y .

Pensate ad esempio ad una soluzione $y : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che presenti sia in a che in b **asintoto verticale**. In questo caso y sarebbe una soluzione massimale in quanto non sarebbe prolungabile. In parole povere non potremmo estenderla né a destra né a sinistra.

Prima di definire il concetto di soluzione globale, ai fini di una maggiore chiarezza, supponiamo che l'intervallo A di definizione della funzione (\diamond) sia del tipo:

$$A = I \times \mathbb{R}^k, \text{ con } I \subseteq \mathbb{R}$$

ovvero A sia un aperto ottenuto dal **prodotto cartesiano** di \mathbb{R}^k con un intervallo I di \mathbb{R}

ossia

$$f : (I \times \mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Definizione (soluzione globale)

Una funzione y si dice **soluzione globale** dell'equazione differenziale

$$y^{(k)} = f(t, y', y'', \dots, y^{(k-1)})$$

se:

A) y è una soluzione locale;

B) il dominio di y coincide con I , ossia $y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Osserviamo che nulla vieta che I coincida con \mathbb{R} e soprattutto che

una soluzione globale è anche una soluzione massimale (segue subito dalla definizione), ma in generale **non** vale il viceversa!

Esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

In questo caso, la nostra $f : (I \times \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ definita in (\diamond) sarà:

$$f(t, y) = y^2$$

ovvero

$$f : \overbrace{\mathbb{R}}^I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dove \mathbb{R} sopraindicato con I è l'intervallo della definizione di soluzione globale. Pertanto, in base alla definizione, una soluzione del problema di Cauchy sarà globale se avrà come dominio $I = \mathbb{R}$.

Se stai leggendo per ripassare e hai già studiato il metodo di risoluzione per le **equazioni differenziali a variabili separabili**, continua a leggere; in caso contrario, se stai seguendo l'ordine delle nostre lezioni, traslascia la parte relativa alla risoluzione dell'equazione differenziale che segue.

Procediamo con la risoluzione analitica: per $y \neq 0$, separando le variabili e integrando abbiamo:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dt$$

da cui:

$$-\frac{1}{y(t)} = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

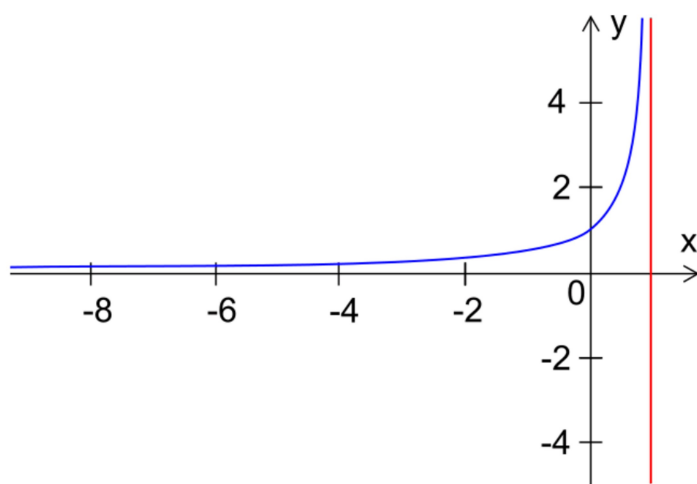
Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ ricaviamo

$$-\frac{1}{1} = 0 + c, \text{ da cui } c = -1$$

quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Ora ci chiediamo: **è una soluzione massimale?** Sì. Per rendersene conto basta rappresentare graficamente la soluzione (ovviamente vista la condizione iniziale siamo nel semipiano $y > 0$)



infatti, evidentemente, la nostra soluzione a sinistra va a $-\infty$, a destra presenta un asintoto verticale e quindi non potrà avere prolungamenti propri. In accordo con la definizione data precedentemente, **la soluzione è massimale**.

È una soluzione globale? No. Infatti prendendo in considerazione la definizione $y :]-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ si vede immediatamente che $]-\infty, 1) \neq I = \mathbb{R}$.

Notiamo che questo esempio fornisce anche un controesempio all'affermazione fatta precedentemente: una soluzione globale è anche una soluzione massimale, ma in generale non vale il viceversa! :)

Intervallo massimale di esistenza

L'intervallo massimale di esistenza è l'insieme in cui è definita la soluzione $y(t)$ che contiene il tempo iniziale.

Esempio

Se la soluzione è

$$y(t) = \frac{-2}{t^2 - 1}$$

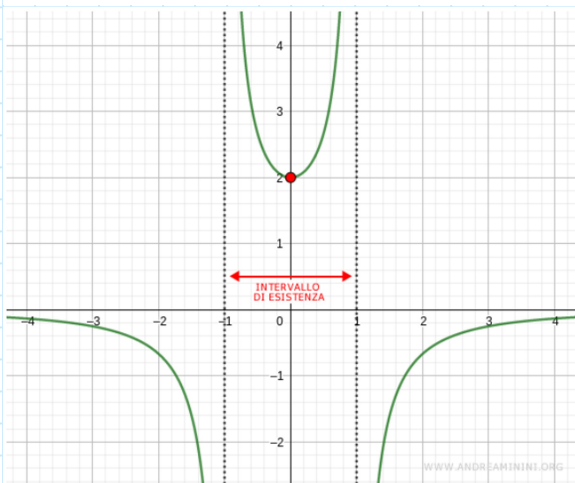
e la condizione iniziale è $y(0)=2$

$$y(0) = 2$$

il dominio della funzione è

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

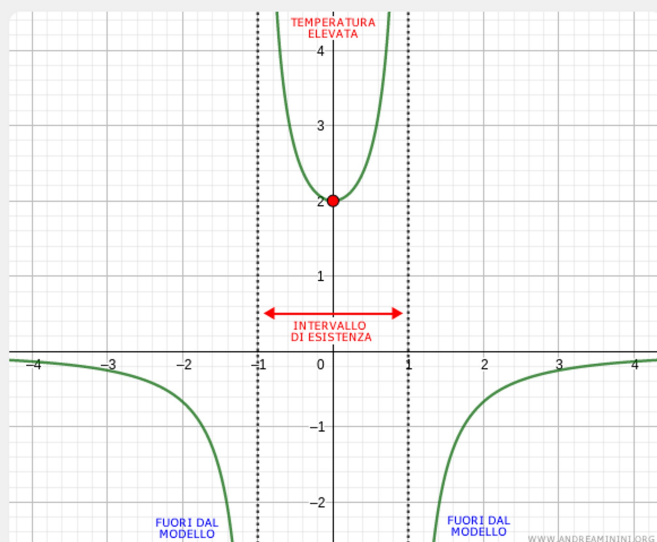
In questo caso l'intervallo massimale di esistenza è $(-1;1)$ perché in questo intervallo è contenuto il tempo iniziale.



Nell'istante iniziale $t=0$ la funzione vale $y(t)=2$

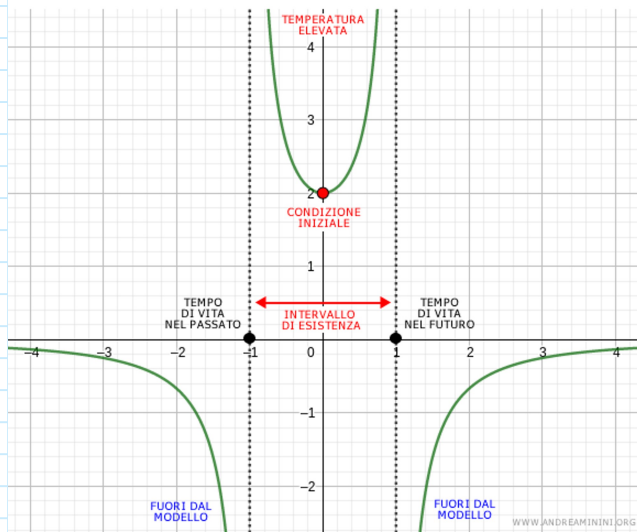
Al di fuori dell'intervallo di esistenza il modello non ha significato.

Esempio. Per $t=1$ o $t=-1$ la funzione $y(t)$ tende a infinito. Questo potrebbe voler dire che il calore del circuito è talmente alto da fonderlo. Non ha alcun senso sapere che negli altri due intervalli $(-\infty; -1)$ e $(1; \infty)$ la temperatura sia infinitamente fredda a sinistra di -1 e a destra di $+1$, perché sono solo aspetti matematici. Al di fuori dell'intervallo massimale di esistenza $(-1;1)$ si va al di fuori del modello



Tempo di vita nel futuro o nel passato

Il **tempo di vita nel futuro e nel passato** sono rispettivamente l'estremo superiore e inferiore dell'intervallo di esistenza



Nota. In questo esempio il tempo di vita nel futuro è 1 mentre il tempo di vita nel passato è -1

E' importante notare che il tempo di vita dipende dalla condizione iniziale.

Tipo di morte

Una volta studiato il tempo di vita studio se il sistema tende a morire oppure no nel corso del tempo.

Se il tempo di vita nel futuro è infinito il sistema non collassa mai, continua a esistere in qualsiasi istante futuro.

Viceversa, se il tempo di vita nel futuro è un numero finito si possono verificare due **tipi di morte**

■ blow up (esplosione)

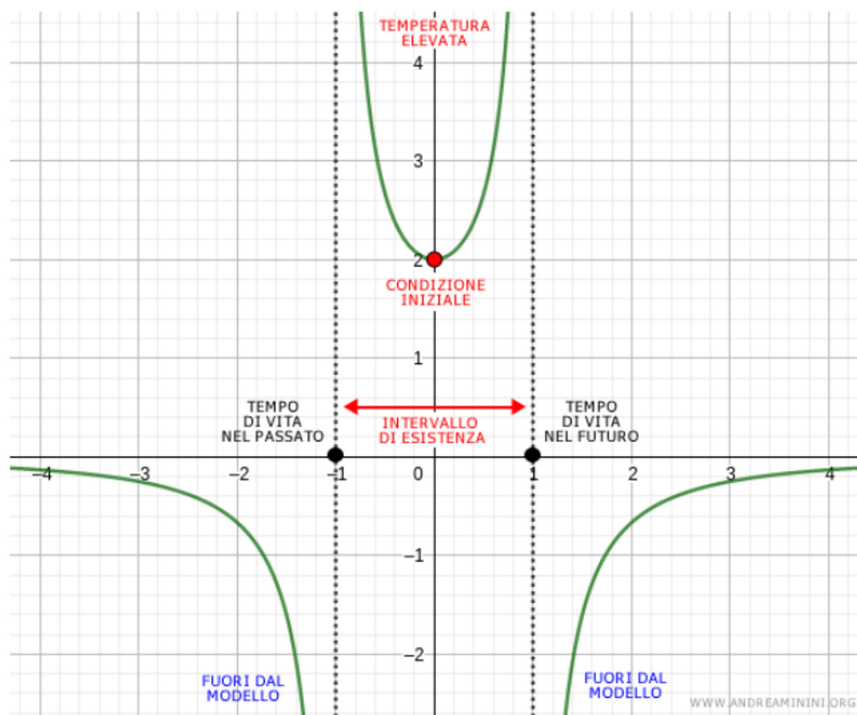
Si verifica quando il limite della funzione incognita per t che tende al tempo di vita nel futuro è più o meno infinito. Ad esempio, è il caso in cui il circuito si brucia per l'eccessivo calore causato dal prolungato utilizzo nel tempo.

■ break down

Si verifica quando la soluzione $y(t)$ fa uscire il lato destro dell'equazione differenziale dal campo di definizione.

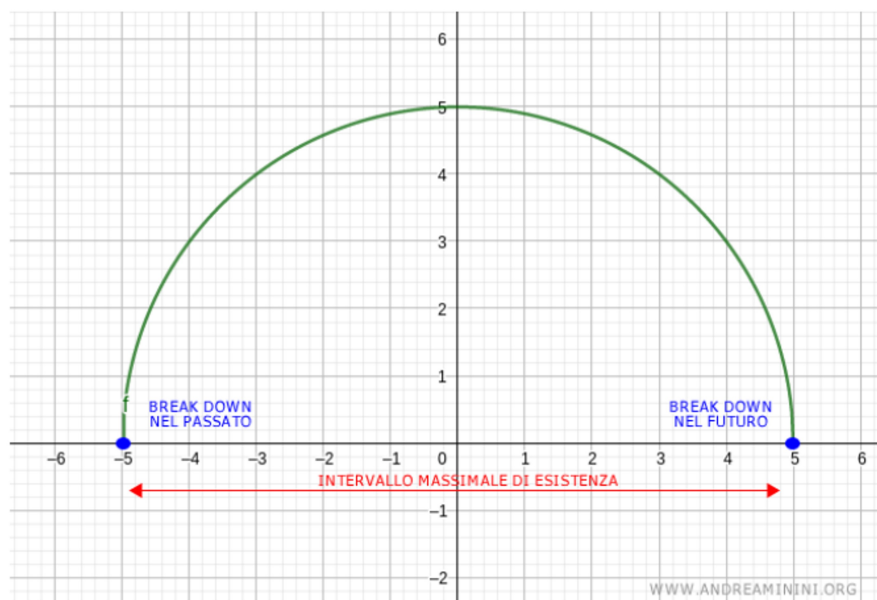
Esempio

In questo caso il sistema tende a un tipo di morte **blow up**



In quest'altro caso, invece, il tipo di morte è del tipo **break down**

In pratica il sistema si rompe, smette di funzionare e di produrre effetti



A2 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

sabato 20 maggio 2023 17:16

1) Teoremi di esistenza e unicità

- a. Problema di Cauchy
- b. Teorema di Cauchy-Lipschitz
- c. Teorema dell'asintoto
- d. Teorema di Peano
- e. Soluzioni Massimali
- f. Soluzioni globali
- g. Dipendenza continua dal dato iniziale

2) Sistemi Lineari

- a. Caso lineare a coefficienti costanti
 - Esponenziale di matrici
 - Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti
 - Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti
- b. Caso bidimensionale omogeneo (fuochi, selle, moti, nodi, centro)
- c. Caso lineari (non a coefficienti costanti)
 - Caso omogeneo
 - Matrice Wronskiana + proprietà
 - Caso non omogeneo

3) Sistemi autonomi

- a. Definizione
- b. Traiettorie + proprietà
 - Integrale primo
 - Sistemi hamiltoniani
- c. Punti stazionari e di equilibrio
 - Soluzioni stabili
 - Bacini di attrazione
 - Teorema di Poincaré-Bendixon
 - Funzioni di Lyapunov
 - Stabilità degli equilibri
 - Criterio di instabilità
- d. Sistema linearizzato
 - Definizione di punto stazionario iperbolico
 - Teorema di linearizzazione (Hartman-Grobman) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 - Teorema di linearizzazione per punti di equilibri
- e. Sistemi bidimensionali autonomi
 - Sistemi esatti
- f. Sistemi bidimensionali lineari
 - $u'' - (a + d)u' + (ad - bc)u = 0$ (con traccia e $\det(A)$)

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \text{dato iniziale}$$

$$\text{Setting} \rightarrow f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^n \\ I_a = (x_0 - a, x_0 + a) \text{ con } (x_0, y_0) \in I \times A \\ \text{con } A = B_r(y_0) \\ a > 0, r > 0$$

Teoremi di Esistenza

Teorema di Cauchy-Lipschitz, 3.1. locale

Supponiamo f continua
 f limitata
 f uniformemente Lipschitziana in y (cioè $\exists L > 0$ t.c. $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \forall (x, y_1), (x, y_2) \in I_a \times B_r(y_0)$)

Allora $\exists \delta \in (0, a)$ e $\exists! y \in C^1(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ soluzione del problema di Cauchy
 $I_\delta(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Osservazioni

Senza l'ip di Lipschitzianità in y c'è una non unicità (Baffo di Peano)

Osservazione 6.10 (Estensione di soluzioni).

Sia $y: I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$ una soluzione del problema di Cauchy. Osserviamo che y è M -Lipschitziana per $M = \|f\|_\infty$:

$$|y'(x)| = |f(x, y(x))| \leq \|f\|_\infty = M,$$

dunque esistono i limiti (1.43)¹

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm \delta} y(x) = y^\pm.$$

Se $y^+ \in B_r(y_0)$, cioè $|y^+ - y_0| < r$ allora posso riapplicare il **Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz** ed estendere la soluzione a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta + \delta')$ con $\delta' > 0$. Analogamente per $y^- \in B_r(y_0)$.

Definizione 6.11 (Soluzione massimale).

Dato un problema di Cauchy. Una soluzione

$$y: (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow B_r(y_0)$$

è massimale se

- $\delta_2 < a \implies \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} y(x) \in \partial B_r(y_0)$
- $\delta_1 < a \implies \lim_{x \rightarrow x_0 - \delta_1} y(x) \in \partial B_r(y_0)$

Osservazione 6.12 (Teorema degli asintoti / Fuga dai Compatti).

Se $a = r = +\infty$ e y è una soluzione massimale del problema di Cauchy definita su $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ allora $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ implica che se δ_1 è finito allora $\lim_{y \rightarrow x_0 - \delta_1} |y(x)| = +\infty$ e similmente per δ_2 finito.

Osservazione 6.13.

Consideriamo l'equazione differenziale data da $f: I_a \times B_r(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supponiamo che f sia L -Lipschitziana nelle y e poniamo $M = \|f\|_\infty$. Sia y una soluzione massimale, la quale è M -Lipschitz e sia $(x_0 - \delta - 1, x_0 + \delta_2) \subseteq I_a$ il suo dominio. Allora

$$r = |y(x_0 + \delta_2) - y_0| \leq M\delta_2,$$

cioè $a > \delta_2 > \frac{r}{M}$. Similmente $a > \delta_1 > \frac{r}{M}$. Dunque l'intervallo di esistenza della soluzione massimale dipende da a e M ma NON da L .

Definizione 6.14 (Inf-Convoluzione).

Sia X uno spazio normato e siano $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$. La loro **inf-convoluzione** è data da

$$x \mapsto \inf_{y \in X} \{f(x - y) - g(y)\}.$$

Teorema di Peano

Se f è solo continua $\implies \exists \delta \leq \min(a, \frac{r}{M})$ ed \exists una sol $y: I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$ del P.D.C. (manca l'unicità)

Teorema di Esistenza globale

Sia $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua

- $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$ con f ha crescita lineare $a, b \geq 0$ e \mathbb{R}

Allora ogni sol massimale del P.D.C. è globale (cioè è def su tutto \mathbb{R})

Dipendenza continua dal dato iniziale

Sia f continua

- f lip in y
- $y(x) = \phi(x_0, y_0)(x)$ sol. del P.D.C.

Allora ϕ è lip in y_0 e $|\phi(x_0, y_0)(x) - \phi(x_0, y_1)(x)| \leq |y_0 - y_1| e^{L|x-x_0|}$

(Sotto le ip di Cauchy-Lip se ci spostiamo di poco anche la sol. si sposta di poco)

Sistemi lineari

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$$

$$\begin{cases} \text{con } A: I \rightarrow M_{n,n} \\ b: I \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases} \text{ continue}$$

Se $A(x) = A \Rightarrow$ il sistema è a coeff. costante

Se $b(x) = 0 \Rightarrow$ il sistema si dice omogeneo

- Le soluzioni $\exists!$ globalmente
- Le sol. formano uno sp. affine di dim n
- Le sol. del sistema omogeneo sono uno sp. vettoriale di dim n
- Una sol del sistema si scrive come $y_0(x) + y_p(x)$
 \downarrow sol. omog. \downarrow sol part.

Caso lineare a coeff. costante

Esponenziale di matrice

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Proprietà

- La serie è ass. conv.
- Se $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$
- $e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} (Id + \frac{A}{n})^n$
- $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)} > 0$, e^A è sempre invertibile con inversa e^{-A}
- M invertibile $e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M$
- $\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax}$

Come si calcola e^{Ax}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) autovalori $\rightarrow \det(A - \lambda I) \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 \quad \lambda = 2 \quad m_a(\lambda) = 2$

1A) molteplicità algebrica $\Rightarrow m_a(\lambda) = 2$

2) molteplicità geometrica $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = n - \text{rk}(A - \lambda I)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(A - 2I) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda) = \frac{n}{2} - 1 = 1$$

2A) $m_g(\lambda) = 1 \neq m_a(\lambda) = 2 \Rightarrow$ ho un solo blocco di Jordan di ordine 2

3) forma di Jordan $\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4) Cerco una base $V_\lambda: (A - 2I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y \neq 0 \\ x = 0 \end{matrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Costruisco $M \rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tr. $J_A = M^{-1}AM$

$$\text{Calcolo } M^{-1} \rightarrow \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6) $e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M \Rightarrow e^A = M e^{M^{-1}AM} M^{-1} = M e^{J_A} M^{-1} \Rightarrow e^A = M e^{J_A} M^{-1}$

$$e^{J_A} = \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

6A) $e^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t e^{2t} & e^{2t} \\ e^{2t} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ t e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

autovalori $\rightarrow \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda) \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$

$$m_A(\lambda_1) = m_A(\lambda_2) = 1$$

$$m_A(\lambda_i) = n - \text{rk}(A - \lambda_i I)$$

$$\text{rk}(A - I) = \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 1 \quad m_A(\lambda_1) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{rk}(A + 2I) = \text{rk} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad m_A(\lambda_2) = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow m_A(\lambda_i) = m_A(\lambda_i) \quad \forall i$$

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

autovettori $(A - I)v = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = x = a \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} 3x = 0 \\ y = a \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M \Rightarrow e^A = M e^{M^{-1}AM} M^{-1} = M e^J M^{-1}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Sistema lineare omogeneo a coeff. costanti

La sol di $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è $y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0$

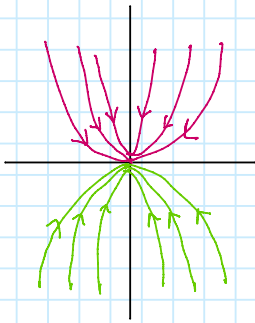
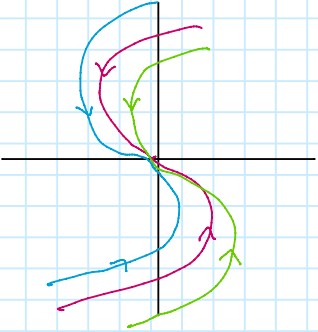
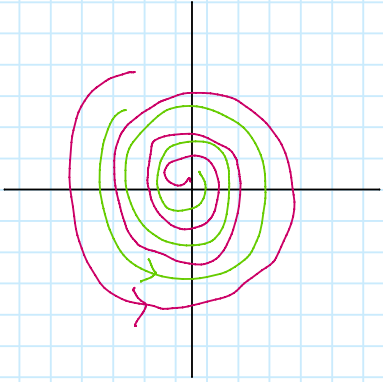
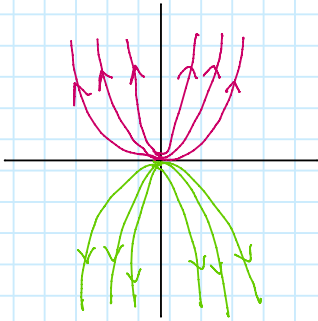
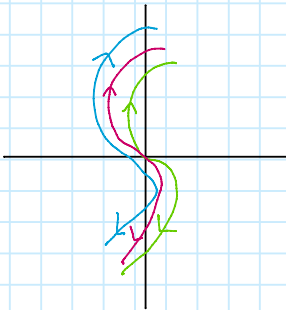
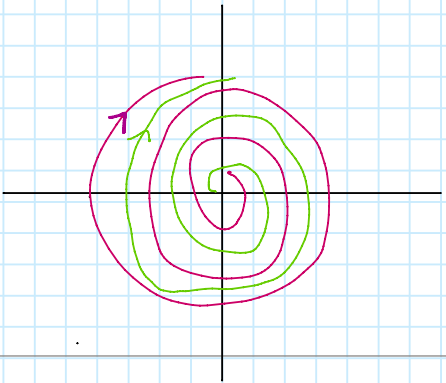
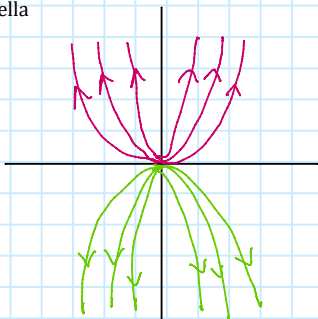
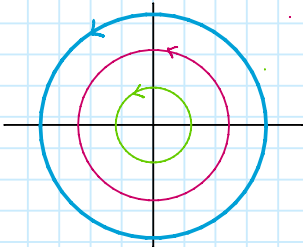
Sistemi lineari non omogenei a coeff. costanti

$$\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{la sol è } y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 + \underbrace{e^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-As} b(s) ds}_{y_p(x) \text{ con } y_p(x_0) = 0}$$

caso bidimensionale omogeneo $y' = Ay$

Studio del comportamento del sistema al variare di $\lambda A = M^{-1}AM$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}, c_2 e^{\lambda_2 x}$	$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ λ $y(x) = e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x, c_2)$	$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ $\alpha + i\beta \quad \alpha - i\beta$ $y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x), -c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x))$
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ Nodo stabile 	$\lambda < 0$ Moto improprio stabile 	$\alpha < 0$ Fuoco stabile 
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ Nodo instabile 	$\lambda > 0$ Moto improprio instabile 	$\alpha > 0$ Fuoco instabile 
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ Sella 	\backslash	$\alpha = 0$ Centro 

Caso lineare con coeff. costanti

$$y' = A(x)y + b(x) \quad \text{con } A, b \text{ continue su } I \subseteq \mathbb{R}$$

Caso omogeneo

$$b(x) = 0 \quad \text{corrisponde al sistema } y' = A(x)y$$

Definizione

Dati n sol. y_1, \dots, y_n $W(x) = (y_1 | y_2 | \dots | y_n)$ si dice matrice Wronskiana

$w(x) = \det W(x)$ è il det wronskiano

Proprietà

$$W'(x) = A(x)W(x)$$

$$w'(x) = [\text{tr } A(x)] w(x)$$

Osservazione 6.34 (Wronskiana nel caso di coefficienti costanti).

Se A è costante allora le soluzioni sono della forma $y = e^{xA}y_0$. In particolare Scegliendo $y_i = e_i$ si ha che $e^{xA}e_i$ sono soluzioni del sistema, dunque e^{xA} è una matrice Wronskiana.

Caso non omogeneo

Se y_1, \dots, y_n sono soluzioni di $y' = A(x)y$ e $y_p' = A(x)y_p + b(x)$ allora

$$y' = A(x)y + b(x) \implies y = y_p + \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad \text{con } c_i \in \mathbb{R}.$$

Proposizione (Soluzione particolare di un sistema lineare).

Data una matrice wronskiana W con $\det W \neq 0$ ⁴, si ha che

$$y_p(x) = W(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds$$

è la soluzione particolare che verifica $y_p(x_0) = 0$.

Sistemi non lineari autonomi

$$y' = f(y) \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ aperto e } f \in C^1(A)$$

Il sistema si dice autonomo quando f dipende solo da y

Def

Se t.c. $f(y_0) = 0$ si dice **pto. stazionario**

Traiettorie

Sia $u: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una sol. massimale di $u' = F(u)$

L'insieme $\{u(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$ si dice traiettoria o orbita di u

↳ ha un'orientazione in maniera naturale

Proprietà

- 1 Se u è sol. di $u' = F(u)$ e $c \in \mathbb{R} \implies v(t) = u(t-c)$ è sol. di $v' = F(v)$
- 2 Se u e \tilde{u} sono sol. di $u' = F(u)$ e $u(t_0) = \tilde{u}(t_1) \implies$ hanno la stessa traiettoria ($\tilde{u}(t) = u(t+t_0-t_1)$)
- 3 Se u è una sol. non costante di $u' = F(u)$ t.c. $u(t_0) = u(t_1) \implies u$ è periodica con periodo $T \neq 0$

Interazione tra traiettorie

- 1) Ad ogni traiettoria corrisponde una famiglia di traslate della stessa soluzione dell'equazione
- 2) Due traiettorie si intersecano se e solo se coincidono
- 3) Ω è foliato dalle traiettorie, cioè è unione disgiunta di traiettorie

Le traiettorie dipendono solo da direzione e verso del campo

Siano $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\lambda(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ con $\lambda(x) > 0$

Se $G(x) = \lambda(x)F(x)$

Allora i sistemi $u' = F(u)$ e $v' = G(v)$ hanno le stesse traiettorie

Derivata lungo una traiettoria

Proposizione 6.45 (Derivata lungo una traiettoria).

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $E \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Consideriamo il sistema $u' = F(u)$. La derivata di E lungo le traiettorie del campo F è data da

$$\frac{d}{dt}(E(u(t))) = \nabla E(u(t)) \cdot u'(t) = \nabla E(u(t)) \cdot F(u(t)).$$

Definizione 6.46 (Derivata lungo le traiettorie puntuale).

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $E \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Consideriamo il sistema $u' = F(u)$. Definiamo la **derivata lungo le traiettorie** (del sistema) **puntuale** come

$$\dot{E}(x) = \nabla E(x) \cdot F(x)$$

Integrale primo

Una f. scalare $E \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ è un integrale del moto per il campo F (o integrale primo) del sistema $u' = F(u)$ se $\dot{E} = 0$

Sistemi Hamiltoniani

Sia $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ di classe C^1

$$\begin{cases} p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{cases} \quad \text{è un sistema Hamiltoniano}$$

I S.H. ammettono integrale primo, infatti $\dot{H}(p, q) = 0$

Punti stazionari e di equilibrio

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\text{Sia } P.D.C \quad \begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = f \end{cases}$$

Sia $\varphi_f(t)$ la sol.

Def.

Un pto f_0 è detto punto di equilibrio (o stazionario) se $F(f_0) = 0$

Un pto f_0 è detto punto di equilibrio stabile se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall f \in B_\delta(f_0)$ e $\forall t > 0$ si ha $|\varphi_f(t) - f_0| < \epsilon$

Un pto f_0 è detto punto di equilibrio asintoticamente stabile se: 1. f_0 è stabile
2. $\exists r > 0$ t.c. $\forall f \in B_r(f_0)$ si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_f(t) = f_0$

Un pto f_0 è detto pto di equilibrio instabile se: f_0 è pto di equilibrio ma non è stabile

Intuitivamente un punto di equilibrio stabile è un punto per il quale posso scegliere un intorno abbastanza piccolo per il quale tutte le traiettorie passanti per questo intorno non vi si allontanano troppo. La stabilità asintotica implica non solo che le orbite rimangano limitate ma anche che convergano nel punto.

Definizione 6.53 (Soluzioni stabili).

Una soluzione φ_{ξ_0} soluzione del problema di Cauchy $u' = F(u)$, $u(0) = \xi_0$ è detta **stabile** se per ogni $R > 0$ esiste $r > 0$ tale che per ogni $\xi \in B_r(\xi_0)$ è definita la soluzione $\varphi_\xi(t)$ in ogni t e

$$\|\varphi_\xi - \varphi_{\xi_0}\|_\infty < R, \quad \text{cioè } |\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| < R \quad \forall t > 0.$$

Similmente φ_{ξ_0} è **asintoticamente stabile** se è stabile ed esiste $r > 0$ tale che per ogni $\xi \in B_r(\xi_0)$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| = 0$$

Osservazione 6.54.

ATTENZIONE. Anche se due traiettorie sono vicine non è detto che la differenza tra le loro immagini NELLO STESSO ISTANTE siano vicine, cioè $\inf_{s \in \mathbb{R}} |\varphi_{\xi_0}(t_0) - \varphi_\xi(s)|$ piccolo non implica $|\varphi_{\xi_0}(t) - \varphi_\xi(t)|$ piccolo.

Definizione

Sia g_0 un equilibrio asintoticamente stabile

def. il bacino di attrazione come $\Omega_{g_0} = \left\{ g \in \Omega \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_g(t) = g_0 \right\}$

Ω_{g_0} è intorno di g_0 , ed è un aperto

Teorema di Poincaré-Bendixon permette di stabilire se le traiettorie sono limitate

Teorema 6.58 (Teorema di Poincaré-Bendixon).

Sia $n = 2$, $y' = f(y)$, $f \in C^1(A)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Supponiamo che

1. esiste $K \subseteq A$ compatto invariante, cioè $y(x_0) \in K \implies y(x) \in K$ per ogni $x > x_0$
2. $f(y) \neq 0$ per ogni $y \in K$

Allora esiste una soluzione periodica di $y' = f(y)$ a supporto in K .

funzioni di Lyapunov

Dato Ω aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $g_0 \in \Omega$ e $F(g_0) = 0 \implies \forall u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ si dice f. di Lyapunov per il P.D.C. $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = g \end{cases}$ se:

$$V(g_0) = 0$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq g_0$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot F(x) \leq 0$$

Proposizione (stabilità degli equilibri)

Dato Ω aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\xi_0 \in \Omega$ e $F(\xi_0) = 0$ allora

- se ξ_0 ammette una funzione di Lyapunov V allora è stabile e
- se siamo nel caso precedente ξ_0 è tale che

$$\forall x \neq \xi_0 \quad \dot{V}(x) < 0$$

allora ξ_0 è anche asintoticamente stabile.

Criterio di instabilità

Sia ξ_0 un punto di equilibrio per il sistema $u' = F(u)$. Se esiste $W \in C^1(\Omega)$ tale che

1. $W(\xi_0) = 0$ ed esiste una successione $\xi_k \rightarrow \xi_0$ tale che $W(\xi_k) > 0$
2. $\dot{W}(x) > 0$ per ogni $x \neq \xi_0$

allora ξ_0 è instabile.

Sistema linearizzato

Osservazione

Il sistema $y' = f(y)$ vicino a y_0 si comporta come il sistema linearizzato $z' = Df(y_0)z$ dove $z(x) = y(x) - y_0$

Teorema di linearizzazione

Teorema 6.63 (Teorema di Linearizzazione / Hartman-Grobman).

Consideriamo il sistema $u' = F(u)$ con $F \in C^1(\Omega)$. Sia ξ_0 un punto stazionario iperbolico. Allora esiste un intorno U di ξ_0 e $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ omeomorfismo tale che $\Phi(\xi_0) = 0$ e

$$z_{\Phi(\xi)}(t) \doteq \Phi(\varphi_\xi(t)) \text{ risolve il sistema } \begin{cases} z' = DF(\xi_0)z \\ z(0) = \Phi(\xi) \end{cases}$$

Intuitivamente il Teorema di Linearizzazione ci dice che un sistema si comporta come il suo linearizzato in un intorno di un punto stazionario iperbolico.

Definizione

y_0 t.c. $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda$ si dice pto **stazionario iperbolico**

Teorema di linearizzazione per pti di equilibrio

Consideriamo il sistema $u' = F(u)$ e sia ξ_0 un punto di equilibrio ($F(\xi_0) = 0$). Poniamo $A = DF(\xi_0)$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A . Allora

1. Se $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ per ogni λ_i allora ξ_0 è asintoticamente stabile.
2. Se esiste λ_i tale che $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ allora ξ_0 è instabile.

Sistemi bidimensionali autonomi

Sistemi esatti

f, g continue, $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ è un sistema esatto se $\omega = gdx - fdy$ è esatto

Proposizione

Se l'eq. è esatta $\Rightarrow \exists U$ (potenziale) t.c. $g(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $f(x, y) = -\frac{\partial U}{\partial y}$

e inoltre $U(x(t), y(t))$ è costante

Sistemi bidimensionali lineari

$$\text{Sia } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Le componenti $(x(t), y(t))$ della sol. del P.D.C. rispettano l'eq. diff. $u'' - \underbrace{(a+d)}_{\operatorname{tr}(A)} u' + \underbrace{(ad-bc)}_{\det(A)} u = 0$

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se il sistema ha traccia $(a+d)=0 \Rightarrow$ è esatto

L'equazione $u'' - (a+d)u' + (ad-bc)u = 0$ ammette più soluzioni del sistema originale. Per risolvere un problema di Cauchy potrebbe essere necessario calcolare anche $x'(0)$ e $y'(0)$