CAMPI VETTORIALI TANGENTI

martedì 31 dicembre 2024 17:28

CAMPI VETTORIALI TANGENTI E INDICI

1) Campi vettoriali tangenti
2) problema della pettinabilità delle sfere. Una sfera è pettinabile se e solo se ha dimensione dispari
3) Indici di campi vettoriali su spazi euclidei
4) L'indice non dipende da ε
5) Campi vettoriali e indici su varietà.

CARATTERISTICA DI EULERO

6) Caratteristica di Eulero di varietà. (+def simplesso , faccia e complesso simpliciale)
7) Teorema di Poincaré-Hopf.
8) Zeri non degeneri di campi vettoriali e loro indici.
   Linea della dimostrazione della buona definizione dell'indice in uno zero isolato per un campo vettoriale su una varietà
9) Calcolo della caratteristica di Eulero di una sfera di dimensione qualunque.
10) Calcolo della caratteristica di Eulero di una superficie con il teorema di Poincaré-Hopf.
11) Lemma di Hopf.

CAMPI VETTORIALI

Def

$M \subseteq \mathbb{R}^K$ varieta' C^∞ con o senza bordo

Un campo vettoriale (tangente) su M e' una mappa $v: M \longrightarrow \mathbb{R}^K$, $x \longmapsto v(x) \in T_xM$ $\forall x \in M$, C^∞

$g: \underset{\cup}{\overset{\mathbb{R}^m}{U}} \longrightarrow g(U) \subseteq M \qquad T_uU = \mathbb{R}^m \longrightarrow T_x g(U) \subseteq T_xM$

$\boxed{T_xM = dg_u(\mathbb{R}^m)}$

Def (su S^n)

Un campo vettoriale su $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e' una mappa C^∞ $v: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tc $v(x).x = 0$ $\forall x \in S^n$

Pettinabilita' delle sfere.

Per quali $n \geq 1$ $\exists$ $v: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ campo vett. tang su S^n mai nullo?

Se un tale campo $\exists$ si dice che S^n e' pettinabile

Risposta 1:

S^n è pettinabile $\forall n \geq 1$ dispari

dim

Sia $v: S^{2K-1} \longrightarrow S^{2K-1} \subseteq \mathbb{R}^{2K}$ $K \geq 1$

$v(x_1, x_2, \ldots, x_{2K-1}, x_{2K}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2K}, -x_{2K-1})$

v e' un campo vett. tangente cioe' 1) v e' liscia

2) $v(x).x = 0 \rightarrow x_1.x_2 - x_1.x_2 + \ldots + = 0$

e inoltre $v(x) \neq 0$ $\forall x \in S^{2K-1}$ in quanto $v(x) = 0 \iff x = (0, \ldots, 0) \notin S^{2K-1}$

Risposta 2:

Se n e' pari $\Rightarrow$ S^n non e' pettinabile

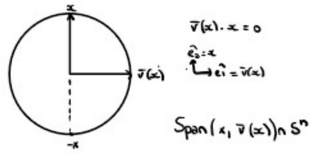
dim

Supp per assurdo che $\exists$ campo vett. tangente non nullo $v: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

definiamo: $\bar{v}(x): S^n \longrightarrow S^n$, $x \longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$

OSS: 1) $\bar v(x)\cdot x = \dfrac{v(x)}{\|v(x)\|}\cdot x = \dfrac{1}{\|v(x)\|}\underbrace{(v(x)\cdot x)}_{0}=0 \quad \forall x\in S^n$ v è un campo vettoriale tangente per hp.

2) Usando $\bar v$ costruisco un omotopia C^∞ tra id_{S_n} e $Ant: S^n \longrightarrow S^n$, $x \longmapsto -x$



Sia $F: S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n \qquad F(x,t) = \cos(\pi t)\, x + \sin(\pi t)\, \bar v(x)$ (l'ho scritta come comb di elt della base)

- $F(x,t)\cdot F(x,t) = \cos^2(\pi t)\underbrace{x\cdot x}_{1} + \sin^2(\pi t)\underbrace{\bar v(x)\cdot \bar v(x)}_{1} = 1 \qquad (F(x)\in S^n)$
- $F(x,0) = x$
- $F(x,1) = -x$
- F è C^∞

cioè ho trovato F omotopia C^∞ tra id_{S_n} e Antipodale

Assurdo in quanto $\deg(A) = (-1)^{n+1} \underset{n \text{ pari}}{=} -1 \neq \deg(id) = 1$

$\Rightarrow$ tale campo v non può $\exists$

Quindi S^n è pettinabile $\Leftrightarrow$ n è dispari

Indici di campi vettoriali su $\mathbb{R}^m$

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ ap, $\quad v: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ c. v. $\qquad$ Preso U int di z $U \not\ni$ {zeri isolati}

Se $z\in U$ e $v(z)=0$ e z è uno zero isolato di v

$\Rightarrow \overline{B_\varepsilon(z)}$ non contiene altri zeri isolati oltre a z per ε piccolo

Sia $\bar v_\varepsilon := \left.\dfrac{v}{\|v\|}\right|_{\partial B_\varepsilon(z)} : \partial B_\varepsilon(z) \longrightarrow S^{m-1} \overset{!}{=} \partial B_1(0)$

Def

L'indice di v in z è $\boxed{i(v,z) := \deg(\bar v_\varepsilon)}$

dove le sfere $\partial B_\varepsilon(z) \in S^{m-1}$ sono orientate come bordi dei dischi

L'indice non dipende da ε

Data $\varphi_\varepsilon: \partial B_1(0) \xrightarrow{\cong} \partial B_\varepsilon(z)$, $\quad x \longmapsto z+\varepsilon x$ che cons. le orient.

$\deg(\bar v_\varepsilon) = \deg(\bar v_\varepsilon \circ \varphi_\varepsilon)$

$$d(v_\varepsilon\circ\varphi_\varepsilon)(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_\varepsilon(x+th) - \varphi_\varepsilon(x)}{h} = \frac{\cancel{z} + \cancel{\varepsilon x} + th\varepsilon - \cancel{z} - \cancel{\varepsilon x}}{h} = t\varepsilon$$

$\Rightarrow d\varphi_\varepsilon(t) = t\varepsilon \qquad$ la matrice è $\begin{pmatrix}\varepsilon & \\ & \ddots \\ & & \varepsilon\end{pmatrix} \qquad \det(d(\bar v_\varepsilon\circ\varphi_\varepsilon)(t)) = \varepsilon^n \underset{\varepsilon>0}{>0}$

Se $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ $\quad \boxed{\bar{v}_{t\varepsilon+(1-t)\varepsilon'} \circ \psi_{t\varepsilon+(1-t)\varepsilon'}}^{\,*}$ è omot C^∞ da $\bar{v}_{\varepsilon'} \circ \psi_{\varepsilon'}$ a $\bar{v}_{\varepsilon} \circ \psi_{\varepsilon}$

$$H : S^{m-1} \times [0,1] \longrightarrow S^{m-1}$$
$$(x, t) \longmapsto *$$
$$H(x,0) = \bar{v}_{\varepsilon'} \circ \psi_{\varepsilon'} \qquad H(x,1) = \bar{v}_{\varepsilon} \circ \psi_{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \deg(\bar{v}_\varepsilon) \underset{\substack{\downarrow \\ \psi \text{ conserva} \\ \text{le orien}}}{=} \deg(\bar{v}_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lemma di} \\ \text{omotopia}}}{=} \deg(\bar{v}_{\varepsilon'} \circ \psi_{\varepsilon'}) \underset{\substack{\downarrow \\ \psi_{\varepsilon'} \text{ cons} \\ \text{le orient.}}}{=} \deg(\bar{v}_{\varepsilon'})$$

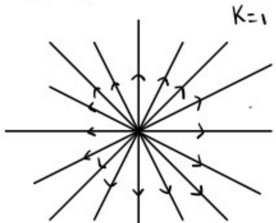
Esempio

$$v_K : U = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad 0 \in \mathbb{C} \text{ è uno zero isolato}$$
$$z \longmapsto z^K$$

$$\Rightarrow i(v_K, 0) = \deg\left(\frac{v_K}{|v_K|}\Big|_{\partial B_1(0)} \right) = \deg\left(\begin{array}{l} f_K : S^1 \longrightarrow S^1 \\ \quad z \longmapsto z^K \end{array} \right) = K$$

$v\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ha indice 1 in 0

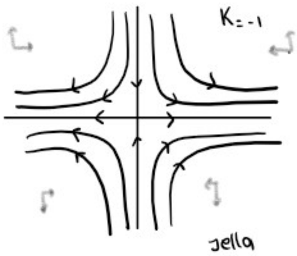
K=1



0 max

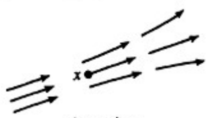
deg v = +1

K=-1



sella

A *vector field* on a manifold X in R^N is a smooth assignment of a vector tangent to X at each point x—that is, a smooth map $\vec{v} : X \longrightarrow R^N$ such that $\vec{v}(x) \in T_x(X)$ for every x. From a local point of view, all the interesting behavior of $\vec{v}$ occurs around its *zeros*, the points $x \in X$ where $\vec{v}(x) = 0$. For if $\vec{v}(x) \neq 0$, then $\vec{v}$ is nearly constant in magnitude and direction near x (Figure 3-17). However, when $\vec{v}(x) = 0$, the direction of $\vec{v}$ may change radically in any small neighborhood of x. The field may circulate around x; it may have a source, sink, or saddle; it may spiral in toward x or away; or it may form a more complicated pattern (Figure 3-18).



$\vec{v}(x) \neq 0$

Figure 3-17

Try drawing a number of vector fields on several compact surfaces; first determine patterns around the zeros and then interpolate the remainder of the field smoothly. You will quickly discover that the topology of the manifold limits your possibilities. For example, on the sphere it is easy to create fields with exactly two zeros, as long as each zero is a sink, source, spiral, or circulation. A field with just one zero of type (f) is also readily found. None of these patterns exists on the torus. Similarly, patterns admissible on the torus, like one saddle plus one source, are prohibited on the sphere. In particular, the torus has a vector field with no zeros, a situation that common experience shows is impossible on the sphere.

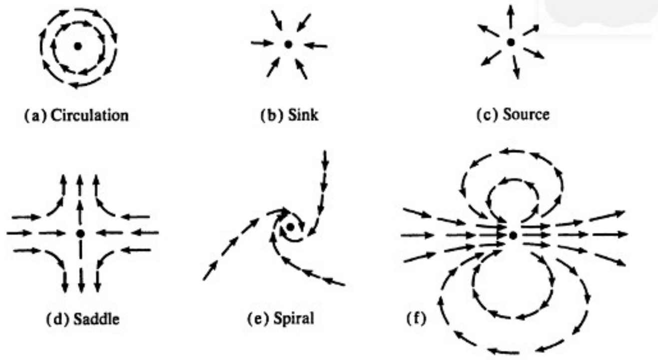


Figure 3-18

Indice di un campo vettoriale su una varietà

$M \subseteq \mathbb{R}^K$ varietà $\qquad w : M \longrightarrow \mathbb{R}^K$ campo vett. tang.

$z \in M$ zero isolato, $\dim M = m$

$g : \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cup\!\!\!\;|}{U}} \longrightarrow g(U) \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^K$ par loc intorno a z $\qquad w(g(U)) : U \longrightarrow \mathbb{R}^K$

definiamo $\xi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ t.c. $\boxed{\xi(u) = (dg^{-1})_u \, (w(g(u)))}$

↳ campo vettoriale

$dg^{-1} : T_x M \longrightarrow T_x U = \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} w(x) \in T_x M \\ w(g(u)) \in T_{g(u)} M \end{cases}$$

z zero isolato di $w \Rightarrow g^{-1}(z)$ è zero isol per ξ.

↓ dim

$0 = dg^{-1}_{g^{-1}(z)} \, (\underset{0}{\underbrace{w(z)}}) = \xi(z) \qquad g^{-1}(z)$ è zero isol per ξ.

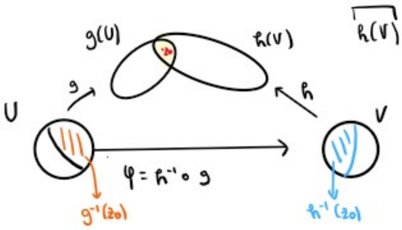
definiamo $\boxed{i(w, z) = i(\xi, g^{-1}(z))}$ indice di w in z

dim che $i(w, z)$ non dipende da g

Sia $g: U \to g(U) \subseteq M$ e $h: V \to h(V) \subseteq M$ p. loc int a z_0 isolato di w

Sia $\varphi = h^{-1} \circ g : U \to h(V)$

$\underbrace{h(V)}_{ap.} \cap \underbrace{g(U)}_{ap}$ ap in M



- $\varphi : g^{-1}(z_0) \xrightarrow{\cong} h^{-1}(z_0)$
- $\xi(u) = (dg^{-1})_u \, w(g(u)) \overset{dg_u}{\Rightarrow} dg_u(\xi(u)) = w(g(u))$ attorno a $g^{-1}(z_0)$

* • $\eta(v) = (dh^{-1})_v (w(h(v)) \overset{dh_v}{\Rightarrow} dh_v(\eta(v)) = w(h(v))$ attorno a $h^{-1}(z_0)$

$$\boxed{d\varphi_u(\xi(u)) = \eta(\varphi(u))}$$

1 membro $d\varphi_u(\xi(u)) = d(h^{-1}\circ g)_u(\xi(u)) = (dh^{-1}_{\underset{z_0}{\overset{\shortparallel}{g(u)}}} \circ dg_u)(\xi(u)) = dh^{-1}_{z_0}(dg_u(\xi(u))) = dh^{-1}_{z_0}(w(g(u))) = dh^{-1}_{z_0}(w(z_0))$

2 membro $\eta(\varphi(u)) \overset{*}{=} (dh^{-1})_{\varphi(u)}(w(h(\varphi(u))) = dh^{-1}_{z_0}(w(g(u)) = dh^{-1}_{z_0} \, w(z_0)$

//

Dim che ξ, η sono c.v. su aperti di $\mathbb{R}^m$

u_0 = zero isolato di ξ, v_0 = zero isolato di η

$\varphi : \underset{u_0}{U_0} \xrightarrow{\cong} \underset{v_0}{V_0}$ $\varphi(u_0) = v_0$ e per quanto detto $d\varphi_u(\xi(u)) = \eta(\varphi(u))$

$\Rightarrow i(\xi, u_0) = i(\eta, v_0)$ (*)

step 1 : ci si riduce a meno di traslare a $u_0 = v_0 = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$

step 2 : φ e' C^∞-omotopa a $d\varphi_{\underline{0}}$ in un int di 0

step 3 : 1) se $d\varphi_{\underline{0}}$ conserva l'orient $\Rightarrow$ si deforma all' id. $\Rightarrow$ fine

2) altrimenti si dim che vale * per una riflessione ρ
e per il caso precedente per 1 vale per $\varphi \circ \rho$
si conclude che vale per $\varphi = (\varphi \circ \rho) \circ \rho$

dim 2

step a

$$\varphi(x) = x_1 g_1(x) + x_2 g_2(x) + \quad + x_m g_m(x)$$

dove $g_i(x)$ C^∞ t.c. $g_i(0) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0)$ dove $x = (x_1, \dots, x_m)$

Infatti $\varphi(x_1, \dots, x_m) = \underbrace{\varphi(x_1, \dots, x_m) - \varphi(x_1 \dots, x_{m-1}, 0)}_{\varphi(0, \dots, 0, x_m)} +$

$$\underbrace{\varphi(x_1, \dots x_{m-1}, 0) - \varphi(x_1, \dots, x_{m-2}, 0, 0)}_{\varphi(0, \dots, 0, x_{m-1}, 0)} + \dots + \varphi(x_1, 0, \dots, 0)$$

esempio

$$\varphi(x_1, 0 \dots, 0) + \varphi(x_1, t x_2, 0) + \varphi(x_1, x_2, t x_3) \Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \varphi(x_1, 0, \dots, 0) + \varphi(x_1, x_2, 0) + \varphi(x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, 0, 0) - \varphi(x_1, x_2, 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_1, \dots, t x_i, 0, \dots, 0) \Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, t x_i, 0, \dots, 0)\, dt}_{g_i(x)} = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x) \quad *$$

$$g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0)\, dt = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0)\, t\right]_0^1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0)$$

step b

$$F(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(xt)}{t} & \text{se } t > 0 \\ d\varphi_0(x) & \text{se } t = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

$$\text{se } t > 0 \Rightarrow \frac{\varphi(xt)}{t} \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{t x_i\, g(t x_i)}{t} = \sum_{i=1}^{m} x_i\, g(t x_i)$$

$F(x, t)$ omot C^∞ da $d\varphi_0$ a φ su un int di 0

CARATTERISTICA DI EULERO

Data una varietà M con o senza bordo, la $\chi(M) =:$ caratteristica di Eulero è un invariante del suo tipo di omotopia che definiamo nel seguente modo:

Def

generano uno sp. affine di dim m

Un m-simplesso in $\mathbb{R}^K$ è l'inviluppo convesso di m+1 pti affinemente indipendenti $P_0, \dots, P_m$

$$\Delta^m = \left\{ \sum_{i=0}^{m} t_i p_i \quad \text{con } t_i \in [0,1] \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^K$$

Definizione [modifica | modifica wikitesto]

Una definizione matematica rigorosa di simplesso si basa sulle nozioni di inviluppo convesso e di punti in *posizione generale*.

In uno spazio vettoriale, $n+1$ punti $x_1, \dots, x_{n+1}$ sono in *posizione generale* se i vettori

$$x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_1$$

sono linearmente indipendenti. Analogamente, sono in posizione generale se il più piccolo sottospazio affine che li contiene ha dimensione n.

Un **simplesso *n*-dimensionale** è l'inviluppo convesso di $n+1$ punti $x_1, \dots, x_{n+1}$ in posizione generale in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^m$. Gli $n+1$ punti sono i **vertici** del simplesso, che è spesso indicato con

$$[x_1, \dots, x_{n+1}].$$

Lo spazio euclideo ha necessariamente dimensione $m \geq n$.

Esempi [modifica | modifica wikitesto]

- Un simplesso 1-dimensionale è l'inviluppo di due punti, ossia un segmento.
- Un simplesso 2-dimensionale è l'inviluppo di tre punti non allineati, ossia un triangolo.
- Un simplesso 3-dimensionale è l'inviluppo di quattro punti non complanari, ossia un tetraedro.
- Un simplesso 4-dimensionale ha 5 vertici ed è chiamato ipertetraedro.

Una faccia di Δ^m è un simplesso dato dall'inviluppo convesso di un sottoinsieme dei pti che generano Δ^m

Facce di un simplesso [modifica | modifica wikitesto]

Se $x_1, \dots, x_{n+1}$ sono in posizione generale, anche $k+1$ di questi punti, presi in modo arbitrario (con $k < n$) sono in posizione generale; il simplesso k-dimensionale da essi generato è chiamato **faccia** k-dimensionale dell'originario simplesso n-dimensionale. In particolare, i vertici sono le 0-facce del simplesso.

Ad esempio, tra i 4 vertici di un tetraedro si possono individuare 4 diversi sottoinsiemi composti da 3 vertici ciascuno, corrispondenti a 4 facce triangolari.

In generale, il numero di k-facce in un simplesso n-dimensionale è uguale al coefficiente binomiale $\binom{n+1}{k+1}$, cioè al numero di sottoinsiemi di $k+1$ elementi di un insieme di $n+1$ elementi.

Un complesso simpliciale è un unione di simplessi $\subseteq \mathbb{R}^K$ tc

Complesso simpliciale $= \bigcup_i \Delta_i^{(m)}$ tc $\Delta_i^{(m)} \cap \Delta_j^{(m)} = \phi$ oppure $\Delta_i^{(m)} \cap \Delta_j^{(m)} =$ faccia 

Fatto

Ogni varietà M è omeo a un complesso simpliciale

Se M è CPT è omotop. equivalente a un complesso simpliciale finito

Sia $S_i(C) = \#$ i-simplessi di C

$$\Rightarrow \boxed{\chi(M) = \sum_i (-1)^i S_i(C)}$$

- è una buona def.
- $\chi(M)$ dipende solo dal tipo di omotopia di M
  se $M \cong M' \Rightarrow \chi(M) = \chi(M')$

Teorema di Poincare' - Hopf

M varieta' CPT con bordo (anche vuoto)
$w : M \to \mathbb{R}^k$ campo vett. tangente con zeri isolati
$w|_{\partial M}$ esterno in ogni pto (se $\partial M \neq \emptyset$)

Allora $\boxed{\sum_{z \in \{\text{zeri di } w\}} \operatorname{ind}(w, z) = \chi(M)}$

Def

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto
$v : U \to \mathbb{R}^m$ c.v.
Uno zero $z \in v^{-1}(0)$ e' detto non deg. per v se $dv_z : T_z U = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e' non singolare
$\det J(dv)_z \neq 0$

oss: $z \in v^{-1}(0)$ non deg per v $\Rightarrow$ $v|_{\operatorname{int}(z) = U}$ e' diffeo $\Rightarrow$ z e' zero isolato di v

$v|_U : U \xrightarrow{\cong} W$ $v|$ INJ $\nexists$ $z' \in U$ tc $v(z') = 0$ poiche' $v(z) = 0$

Lemma

$U \subseteq \mathbb{R}^m$, $v : U \to \mathbb{R}^m$ c.v., $z \in v^{-1}(0)$ zero isolato
Allora $i(v, z) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

dim

$$i(v, z) = \deg \bar{v}_\varepsilon = \sum_{z \in \bar{v}_\varepsilon^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(d\bar{v}_\varepsilon) = \operatorname{sgn}(d\bar{v}_\varepsilon)_z = \begin{cases} +1 & \text{se } \det(dv_z) > 0 \\ -1 & \text{se } \det(dv_z) < 0 \end{cases}$$

z isolato $\exists$ V' int di z tc. z e' l'unico zero isolato di V

Lemma

$M \subseteq \mathbb{R}^k$ varieta', $w : M \to \mathbb{R}^k$ campo vett
$z_0 \in M$ zero isolato
Allora $dw_{z_0} : T_{z_0} M \to T_{z_0} M$ $\quad i(w, z_0) = \begin{cases} +1 & \text{se } \det(dw_{z_0}) > 0 \\ -1 & \text{se } \det(dw_{z_0}) < 0 \end{cases}$

dim

$h : U \to h(U)$, $u_0 \mapsto z_0$ par locale int a z_0

* $\cdot$ $v(u) = dh_u^{-1}(w(h(u)))$ c.v su U (per costr) (pullback di w)
- $u_0 = h^{-1}(z_0)$ e' uno zero isolato di v
- $i(w, z_0) = i(v, u_0)$

$v(u) = \sum_{j=1}^{m} v_j(u) e_j \qquad v_j : U \to \mathbb{R}$

molt pe dh

$* \quad dh_u(v(u)) = w(h(u))$

$$dh_u\left(\sum_{j=1}^{m} v_j(u) e_j\right) \qquad \text{chiamo } t_j = dh_{u_0}(e_j)$$

applico dw_{z_0} a t_j

$$dw_{z_0}(t_j) = dw_{z_0}(dh_{u_0}(e_j)) = d(w \circ h)_{u_0}(e_j) = \frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_{u=u_0}(w \circ h) \overset{*}{=} \frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_{u=u_0} dh_u(v(u)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_{u=u_0}\left(\sum v_j(u)\, dh_u(e_j)\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v_j(u)}{\partial u_j}\Big|_{u=u_0} t_j \in T_{z_0}M$$

Quindi

$$dw_{z_0}(T_{z_0}M) \subseteq T_{z_0}M$$

Quindi

$$\det(dw_{z_0}) = \det\left(\frac{\partial v_j(u)}{\partial u_j}\Big|_{u=u_0}\right) = \det(dv_{u_0}) \underset{\text{lemma precedente}}{=} \begin{cases} >0 & \text{se } i(v,u_0) = 1 \\ <0 & \text{se } i(v,u_0) = -1 \end{cases}$$

Applicazione

Calcolo di $\chi(S^m)$ con P-H.

$$v : S^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

$$x \longmapsto p - (p \cdot x)x \qquad p \in S^m$$

se $x \in S^m \Rightarrow v(x) \cdot x = (p - (p \cdot x)x) \cdot x = p \cdot x - (p \cdot x)\underbrace{x \cdot x}_{1} = 0 \Rightarrow v$ e' c.v tang

$v(x) = 0 \Leftrightarrow p = (p \cdot x)x \Rightarrow 1 = p \cdot p = (p \cdot x)^2 \Rightarrow p \cdot x = \pm 1 \overset{!}{\Rightarrow} x = \pm p \Rightarrow v^{-1}(0) = \{\pm p\}$

Gli zeri di v sono non deg. dim

sia $\xi \in TS^m$

$$dv_{\pm p}(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{v(\pm p + t\xi) - \overbrace{v(\pm p)}^{0}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\overset{p\,-\,p\cdot x}{p - [p \cdot (\pm p + t\xi)][\pm p + t\xi]}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{p - [\pm 1 + \overset{\xi \perp p}{0}][\pm p + t\xi]}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{p - (\pm(\pm p + t\xi))}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\mp t\xi}{t} = \mp \xi$$

$dv_{\pm p}(\xi) = \mp \xi = \mp id_{T_{\pm p}S^n} \neq 0 \Rightarrow \pm p$ zeri non deg.

$i(v, p) = \det(dv_p) = (-1)^m$

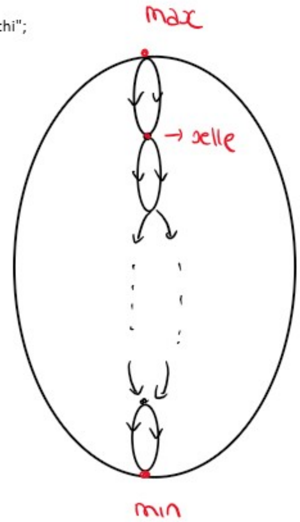
$i(v, -p) = \det(dv_{-p}) = id_{T_{-p}S^n} = 1$

P-H

$$\Rightarrow \chi(S^m) = \sum_{z \in v^{-1}(0)} i(v, z) = \underset{(-1)^m}{i(v,p)} + \underset{1}{i(v,-p)} = (-1)^m + 1 = \begin{cases} 2 & \text{se } m \text{ e' pari} \\ 0 & \text{se } m \text{ e' dispari} \end{cases}$$

Calcolo di $\chi(\Sigma)$ con P-H

In topologia, il genere di una superficie viene definito come il numero più grande di curve semplici chiuse disgiunte che possono essere disegnate sulla superficie senza separarla in due componenti connesse distinte
Nel caso in cui la superficie sia orientabile, il genere può essere pensato più informalmente come il "numero di buchi"; questa però non è una definizione matematicamente rigorosa



$\Sigma_g \subseteq \mathbb{R}^3$

posiziono Σ_g in modo che ∇h abbia $\underset{\underset{-1}{\downarrow}}{2g} + \underset{\underset{+1}{\downarrow}}{2}$ zeri isolati

$h: \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{R} \quad h(x,y,z) = z$

di cui $2g$ di indice -1 e 2 di indice 1.

Per P-H $\quad \chi(\Sigma_g) = \sum_{z \in \nabla h^{-1}(0)} i(\nabla h, z) = 2-2g$

$\nabla h(p).v = df_p(v) \in T_p\Sigma_g$

lemma di Hopf

$X \subseteq \mathbb{R}^m$ CPT senza bordo, $\dim X = m$

$v: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ c.v tang con zeri isolati e $v_{|\partial X}$ mai nullo

Allora

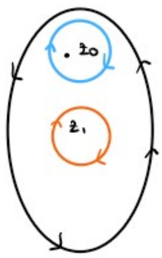
$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} \operatorname{ind}(v,z) = \deg\left(\frac{v}{\|v\|}\Big|_{\partial X} : \partial X \longrightarrow S^{m-1} \right)$$

dim

Tolgo dischi disgiunti intorno agli zeri di v

$W = X \setminus \bigcup_j B_\varepsilon(z_j) \quad , \quad \partial W = \partial X \cup \bigcup_j \left(-\partial B_\varepsilon(z_j)\right)$

nel bordo dei dischi cambio orient.



sia $\bar v(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \qquad \bar v: W \longrightarrow S^{m-1} \quad C^\infty$

$$0 \overset{*}{=} \underbrace{\deg \bar v_{|\partial W}}_{\parallel} = \deg \bar v_{|\partial X} + \underbrace{\deg \bar v_{|\partial B_\varepsilon(z_i)}}_{\parallel} \Rightarrow \deg \bar v_{|\partial X} = \sum_{z \in v^{-1}(0)} \operatorname{ind}(v,z)$$

$$\sum_{z \in (\bar v_{|\partial W})^{-1}(0)} \operatorname{sgn} d(\bar v_{|\partial W})_z = \sum_{z \in \bar v_{|\partial X}^{-1}(0)} \operatorname{sgn} + \sum_{z \in \bar v_{|\partial B_\varepsilon}^{-1}} \operatorname{sgn} \qquad -\sum_j i(v, z_j)$$

posso spezzare perche' disgiunti $\quad \partial X \cap \bigcup B_\varepsilon(z_j) = \emptyset$

$*$ v e' def per restrizione su W $\Rightarrow$ se $\bar v$ e' il campo norm

$\Rightarrow \deg \bar v_{|\partial W} = 0$

Visto che due campi unitari uscenti al bordo di una varietà sono sempre omotopi (ad esempio tramite una rotazione), segue la tesi

guardare da Sara