OMOTOPIE

1) Omotopie C∞ di mappe.
2) Lemma di omotopia ($|f^{-1}(y)| = |g^{-1}(y)| \ mod\ 2 \quad se \ \ y\ è\ regolare\ per\ f\ e\ g\ e\ \ f\ e\ g\ sono\ omotope$)
   Proprietà delle controimmagini di un valore regolare condiviso da due mappe C∞-omotope.
3) Isotopia.
4) Lemma di omogeneità.
5) Teorema due mappe C∞-omotope da una varietà chiusa ad una connessa hanno lo stesso grado modulo due.

Def

M, N varietà

f, g C^∞ sono **C^∞-omotope** se $\exists$ $F: M \times [0,1] \longrightarrow N$ C^∞ tale che
- $F(x,0) = f(x)$
- $F(x,1) = g(x)$

$\forall x \in M$

(cioè F è omotopia tra f e g)

Lemma (di omotopia)

- M, N varietà $\dim M = \dim N$
- M CPT
- $f, g: M \to N$ C^∞ omotope
- $y \in N$ valore regolare per f e g

Allora $\boxed{|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \ \ mod\ 2}$

dim

Poiché f, g sono C^∞ omotope $\exists$ $F: M \times [0,1] \longrightarrow N$ C^∞ omotopia

Sia $V_1 \subseteq N$ int. di y tc $|f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y')|$ $\forall y' \in V_1$ (per il lemma della pila di dischi)

Sia $V_2 \subseteq N$ int di y tc $|g^{-1}(y)| = |g^{-1}(y')|$ $\forall y' \in V_2$

Basta mostrare che la tesi vale in un pto di $V_1 \cap V_2$

Sia $y \in V_1 \cap V_2$ valore regolare per $F \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} F^{-1}(y)$ è una varietà con bordo

$\dim F^{-1}(y) = \underset{\overset{\parallel}{m}}{\dim M} + \underset{1}{\dim [0,1]} - \underset{m}{\dim N} = 1$

$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0,1]) \overset{\partial(M \times [0,1]) = M\times\{0\} \cup M \times \{1\}}{=} F^{-1}(y) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = (F^{-1}(y) \cap M \times \{0\}) \cup (F^{-1}(y) \cap M \times \{1\}) \overset{F|_{\partial(M\times[0,1])} = (f,g)}{=} f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)$$

$F^{-1}(y)$ è una varietà CPT perché $\{y\}$ è chiuso, $F^{-1}(y) \subseteq M \times [0,1]$ che è CPT $\Rightarrow F^{-1}(y)$ è CPT

siamo in spazi T_3 e i singoletti sono chiusi. Controimmagine di un chiuso tramite F continua è chiuso

chiuso in CPT ⇒ CPT

Quindi $F^{-1}(y)$ è una varietà CPT di dim $1 \overset{\text{Classificazione}}{\Longrightarrow} F^{-1}(y)$ ha un numero pari di punti di bordo

cioè $0 \equiv |\partial F^{-1}(y)| = |f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)| \quad mod\ 2 \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \ mod\ (2)$

Def

$F(x,0) = f$
$F(x,1) = g$

$F: M \times [0,1] \longrightarrow N$ omotopia C^∞ tra f, g diffeo $: M \longrightarrow N$ è **isotopia** se:

$\forall\, t \in [0,1]$ $\quad F_t : M \longrightarrow N$ è diffeo

$\qquad\qquad x \longmapsto F(x,t)$

Teo

M, N varietà $\quad \dim M = \dim N$

M CPT

N connessa

$y, z \in N$ valori regolari di $f : M \to N$ C^∞

Allora **1)** $|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(z)| \mod 2$

$\qquad \qquad \overset{\shortparallel}{\deg_2(f)} =:$ grado di f mod 2

2) $g : M \to N$ C^∞ g omotopa a $f \Rightarrow \deg_2(f) = \deg_2(g)$

dim 1

Dal lemma di omogeneità $\exists\, h : N \to N$ diffeo isotopo a id_N tc. $h(y) = z$

y regolare per $f \Rightarrow z$ regolare per $h \circ f$

> y è regolare per $f \Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y)$ df_x è surg.
>
> $\Rightarrow d(h \circ f)_x = \underbrace{dh_y}_{\text{è iso perché } h_y \text{ è diffeo}} \circ \underbrace{df_x}_{\text{surg.}} \Rightarrow d(h\circ f)_x$ è surg $\Rightarrow x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{h} z$
>
> z è un valore reg per $h \circ f$

$$M \times [0,1] \xrightarrow{f \times id} N \times [0,1] \xrightarrow{H} N$$
$$(x, t) \longmapsto (f(x), t) \longmapsto H(f(x), t)$$

$K = H \circ f \times id$ è omotopia C^∞ da $h \circ f$ a f

$H(e,0) = h(e)$

$K : M \times [0,1] \to N$ con $K(x,0) = H(f\times id)(x,0) = H(f(x),0) \overset{}{=} h(y) = h \circ f(x)$

$K(x,1) = H(f \times id)(x,1) = H(f(x),1) = f(x)$

$\forall x \in M$ $\qquad H(e,1) = e$

Per il lemma di omotopia $|f^{-1}(z)| = |(h \circ f)^{-1}(z)| = |f^{-1}(\underbrace{h^{-1}(z)}_{= y})| = |f^{-1}(y)|$ mod 2

dim 2

Sia $g : M \to N$ C^∞- omotopa ad f

Dim che $f(R)$ è aperto in N

> L'insieme dei pti regolari R è un aperto in M
>
> infatti sia x un pto regolare per $f \Rightarrow \exists\, U$ int di x tc $f_{|U} : U \overset{\simeq}{\to} V$
>
> x regol $\Rightarrow df_x$ è surg. Considero la sottomatrice B_x invertibile
>
> e $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.
>
> $\qquad x \mapsto B_x \mapsto \det B_x \neq 0$ (x regolare)
>
> $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è aperto $\Rightarrow \alpha^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ è aperto $\Rightarrow \forall\, x \in \alpha^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ $\exists\, U$ aperto tc $x \in U \subseteq \alpha^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$
>
> {pti regolari} è un aperto $\Rightarrow C = \{$pti critici$\}$ è chiuso in M $\Rightarrow$ chiuso in CPT è CPT
>
> . $f(C)$ è CPT perché immagine di CPT tramite f cont.
>
> $\quad \cap$
>
> $\quad N$
>
> $\Rightarrow N \setminus f(C) = \{$valori regolari$\}$ è aperto in N

I valori regolari di $g \overset{g(R)}{\ulcorner}$ sono densi in $N \Rightarrow g(R) \cap \overset{\curvearrowright \text{aperto}}{W} \neq \emptyset \Rightarrow g(R) \cap \overset{\text{aperto}}{\overline{f(R)}} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists$ valore regolare y sia per f che per $g \Rightarrow$ per il lemma di omotopia $deg_2(g) = |g^{-1}(y)| \bmod 2 = |f^{-1}(y)| \bmod 2 = deg_2(f)$

Lemma di omogeneità

N varietà connessa , $y, z \in N$

Allora $\exists\, h: N \xrightarrow{\cong} N$ diffeo tc 1) $h(y) = z$

2) h isotopo a id_N tramite un'isotopia a supporto cpt

$\exists\, K \subseteq N$ cpt tc $y, z \in K$ e $h_t|_{N \setminus K} = id_{N \setminus K}$ $\forall t \in [0,1]$

dim

step 1

Diciamo che $y, z \in N$ sono isotopi se $\exists$ h diffeo $h: N \to N$ isotopo a id_N tramite isotopia a supporto cpt tc $h(y) = z$

L'essere isotopi e' una rel di equivalenza

riflessività

1) y e' isotopo a y $\forall y \in N$ infatti prendo $h =: id$

simmetria

2) se y e' isotopo a $z \Rightarrow z$ e' isotopo a y

$H: N \times [0,1] \to N$ isotopia da h a id_N $\Rightarrow K: N \times [0,1] \xrightarrow{\tilde{H}} N \times [0,1] \xrightarrow{H} N \xrightarrow{h^{-1}} N$

$(x, t) \longmapsto (x, 1-t)$

$K = h^{-1} \circ H \circ \tilde{H}$ $\Rightarrow K(x,0) = h^{-1}(H(\tilde{H}(x,0))) = h^{-1}(H(x,1)) = h^{-1}(x)$

$H(x,1) = x$

$K(x,1) = h^{-1}(H(\tilde{H}(x,1))) = h^{-1}(H(x,0)) = h^{-1}(h(x)) = x$

$H(x,0) = h(x)$

K e' isotopia tra h^{-1} e l'id

transitività

3) y isotopo a z , z isotopo a $w \Rightarrow y$ isotopo a w

Sia $N \times [0,1] \xrightarrow{H} N$ isotopia a s.c. $h \to id_N$ tc $h(y) = z$

Sia $N \times [0,1] \xrightarrow{G} N$ isotopia a sc. $g \mapsto id_N$ tc $g(z) = w$

Allora $N \times [0,1] \xrightarrow{H \times id} N \times [0,1] \xrightarrow{G} N$ e' isotopia a s.c tra $g \circ h$ e id_N tc $g(h(y)) = w$

$(y, t) \longmapsto H(y,t) \longmapsto G(H(y,t))$

$H(y,0) = (h(y), 0) \longmapsto g(h(y)) = w$

$H(y,1) = (y, 1) \longmapsto y$

Quindi l'isotopia tra pti e' una rel. di equivalenza su N

step 2 chiedere !

Se dim che ogni classe di equivalenza e' un aperto di N, concludo usando la connessione di N

Sia $U(x) = \{ y \mid \exists\, \varphi: N \to N$ tc $\varphi(x) = y$ e $\varphi \sim id_N \}$

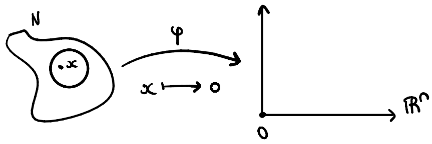
se $x \neq y \Rightarrow$ o $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ o $U(x) = U(y)$. Quindi gli $\{U(x)\}_{x \in M}$ formano una partizione di N

Ma N e' connessa $\Rightarrow N = U(x)$

Idea intuitiva

voglio trovare un omotopia che presi $x, y \in K$ cpt porti x in y. e poi porti pti vicini a x in pti vicini a y. Invece voglio che fuori da K faccia l'id

osserviamo che possiamo passare in carte e lavorare in $\mathbb{R}^n$



$\forall x \in N \ \exists \ g : \underbrace{N \cap W_x}_{U_x \text{ aperto in } N} \xrightarrow{\cong} U \subseteq \mathbb{R}^n$ carta locale (tramite φ $U \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow W \cap M \cong \mathbb{R}^m$)

N è una varietà connessa (posso assumere connessa per archi)

$\Rightarrow \exists \ \gamma_{xy} : [0,1] \longrightarrow N$ tc $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$

$\underbrace{\gamma^{-1}(N \cap W)}_{\text{aperto in } [0,1]} \longleftarrow \underbrace{N \cap W_x}_{\text{aperto in } N} = U_x$

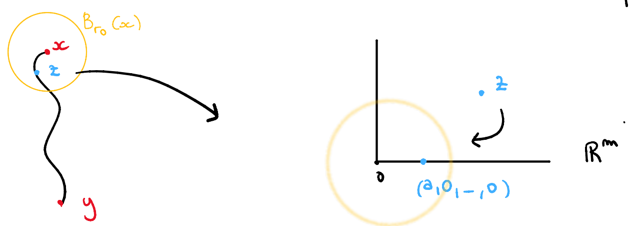
$\forall z \in \gamma_{xy}$ $[0,1] = \bigcup_{x_i \in \gamma_{xy}} \gamma^{-1}(U_{x_i})$ quindi ho scritto $[0,1]$ come $\bigcup$ di aperti che lo ricoprono

Ma $[0,1]$ è cpt $\Rightarrow$ posso estrarre un sottoricoprimento finito.

Dunque mi bastano un numero finito di $x_i \in \gamma_{xy}$

Dunque mi basta dim che fissato r $\exists$ $0 < r_0 < r$ tc $\forall z \in B_{r_0}(\underline{0})$ $(x \longrightarrow 0)$

$\exists$ h_t isotopia $: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tc $h_0 = id_{\mathbb{R}^m}$ e $h_1(0) = z$ e $h_t|_{\mathbb{R}^m \setminus B_{r_0}(0)} = id_{\mathbb{R}^m \setminus B_r(0)}$



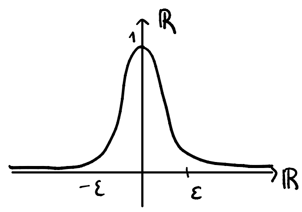
a meno di traslare posso supporre $z = (a, 0, \ldots, 0) \in B_{r_0}(\underline{0})$, $\|z\| = (a, 0, \ldots, 0)$

step 3

bump function

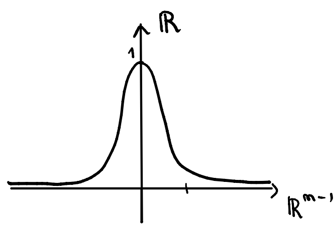
$\exists \ \rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tc

- $0 \le \rho(x) \le 1$
- $\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > \varepsilon \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$\exists \ \sigma : \mathbb{R}^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tc

- $0 \le \sigma(x) \le 1$
- $\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\| > \delta \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

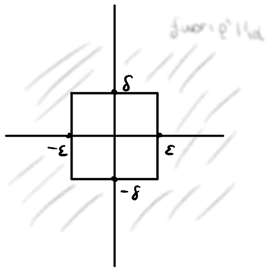


Ora scelgo $a < \delta < r$ e ε tc $\varepsilon^2 + \delta^2 < r^2$

pongo $$h_t : \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$$
$$(x, y) \longmapsto (\underbrace{x + t\sigma(y)\rho(x)a}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{m-1}})$$

h_t definisce un'omotopia C^∞ da $id_{\mathbb{R}^m}$ a h_1

infatti $\begin{cases} \text{se } t=0 \quad h_0(x,y)=(x,y) \\ \text{se } |x| > \varepsilon \Rightarrow \rho(x)=0 \quad e \quad h_t(x,y)=(x,y) \\ \text{se } \|y\| > \delta \Rightarrow \sigma(y)=0 \quad e \quad h_t(x,y)=(x,y) \end{cases}$ e' l'id



se $t=1$ $\quad h_1(0,0) = (0 + \rho(0)\sigma(0)a, 0) = (a, \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^{m-1}}) = z$

Verifichiamo che h_t e' isotopia

1) h_t e' bigettiva $\longrightarrow$ $h_t|_{\{y = \text{costante}\}} : x \longmapsto x + t\sigma(\text{cost})\rho(x)a$

deriva risp a $x \Rightarrow h'_t|_{\{y=\text{cost}\}} = 1 + t\sigma(\text{cost})\rho'(x)a$

se $|t\sigma(\text{cost})\rho'(x)a| < 1 \Rightarrow h'_t(x) \geq 0$

poiche' $|\rho'(x)|$ e' limitata, se $a < r_0$ e' abb piccolo la disug. vale

h_t e' big ristretta alle rette $\Rightarrow$ glob bigettiva

2) h_t e' diffeo locale $\longrightarrow$ $dh_t = \left(\begin{array}{c|c} 1 + t\sigma(y)\rho'(x)a & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \end{array}\right)$

$\det dh_t \neq 0 \ \forall t$ per a piccolo $\Rightarrow$ h_t e' diffeo locale $\Rightarrow$ h_t e' diffeo.