VARIETA' CON BORDO

1) Definizioni
2) Spazi tangenti e differenziale
3) Proposizione: il bordo di una varietà con bordo è una varietà
4) Un insieme di sopralivello di un valore regolare di una mappa liscia è una varietà con bordo.
5) La controimmagine di un valore regolare per una mappa e per la sua restrizione al bordo è una varietà con bordo.
6) Classificazione delle varietà compatte di dimensione 1 .
7) Data una varietà con bordo M, non esiste una mappa liscia $M \to \partial M$ che estende l'identità sul bordo.
8) Ogni mappa liscia del disco D^n in sé ha almeno un punto fisso.
9) Teorema di Brower per mappe continue di D^n in sé

Obiettivo: dimostrare il teorema di Brower ma per far ciò devo estendere la classe delle varietà in modo da includere D^n

Definizioni

- $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\} =:$ semispazio superiore
- $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è una varietà con bordo se ogni pto di M ha un intorno diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{H}^m$
  $g: \underbrace{U \cap \mathbb{H}^m}_{\text{aperto in } H^m} \xrightarrow{\cong} g(U \cap H^m) \subseteq M$ si dicono par. locali
- $\partial M = \{ g(x) = y$ tc $x \in \partial H^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}$
- $M \setminus \partial M$ è una varietà

SPAZI TANGENTI E DIFFERENZIALE

Sia $g: U \cap H^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dove $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto
- se $u \in U \cap (\mathbb{H}^m \setminus \partial H^m) \Rightarrow g$ è def in un int. di x e dg_u è l'usuale differenziale
- se $u \in U \cap \partial H^m \Rightarrow dg_u$ è definita come $d\tilde{g}_u$ dove $\tilde{g}$ è un'estensione di g int a u.

proprietà

1) $d\tilde{g}_u$ non dipende dall'estensione scelta di g.
ovvero se $\tilde{\tilde{g}}$ è un'altra estensione di g
presa una successione $\{u_i\} \to u$ con $x_m(u_i) > 0$
allora $d\tilde{\tilde{g}}_{u_i} = d\tilde{g}_{u_i}$ $\forall i$ >>0 perchè $\tilde{g}$ e $\tilde{\tilde{g}}$ coincidono su intorni di u_i
passando ai limiti $\Rightarrow d\tilde{\tilde{g}}_u = \lim_{i \to +\infty} d\tilde{\tilde{g}}_{u_i} = \lim_{i \to +\infty} d\tilde{g}_{u_i} = d\tilde{g}_u$

2) $d\tilde{g}_u$ è inj
dim
$\tilde{g}: U \cap H^m \to M$ par locale
- se $u \in U \cap (H^m \setminus \partial M)$ ok ($H^m \setminus \partial H^m$ è una varietà)
- se $u \in U \cap (\partial H^m)$ preso $x = g(u) \in M$ e $g(U \cap \mathbb{H}^m) = W \cap M \Rightarrow$

la mappa g^{-1} essendo C^∞ si estende a $F: W' \to \mathbb{R}^m$ C^∞ tc $F_{|W' \cap M} = g^{-1}$
$g^{-1}: g(U \cap \mathbb{H}^m) \subseteq M \longrightarrow U \cap H^m$
$W \cap M \longmapsto U \cap \mathbb{H}^m$ aperto in $\mathbb{H}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$

Quindi abbiamo
$$\begin{tikzcd} & W' \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "?"] & \\ U\cap H^m \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, hook, "i"] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$i = F\circ g \longrightarrow di_{u_i} = dF_{g(u_i)} \circ dg_{u_i} \xrightarrow{u_i \to u} \underbrace{di_u}_{*} = dF_{g(u)=x} \circ \underbrace{d\tilde{g}_u}_{u\in U\cap\partial H^m}$

$di_u : T_u(U\cap H^m) \longrightarrow T_x\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$, $i: U\cap H^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $u \longmapsto u$ $\quad u\in U\cap \partial H^m$ opp $u\in U\cap(H^m\setminus\partial H^m)$

$di_u(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{i(u_i+t\varepsilon)-i(u_i)}{\varepsilon} = \dfrac{\cancel{u_i}+t\varepsilon-\cancel{u_i}}{\varepsilon} = t \Rightarrow di_u = id$

$\Rightarrow di_u$ e' inj $\Rightarrow d\tilde{g}_u$ e' inj

- $M\subseteq\mathbb{R}^k$ varietà con bordo di dim m, $x\in\partial M$,
  $g: U\cap H^m \longrightarrow M$ par. loc. int a x con $g(u)=x$ e $u\in U\cap\partial H^m$

Se $\tilde{g}$ e' estensione di g definiamo $T_xM = d\tilde{g}_u(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^k$

Prop.

M var. con bordo, $\dim M = m \Rightarrow \partial M$ e' una varietà (senza bordo) di dim $m-1$

dim

$\partial H^m = \{x\in\mathbb{R}^m \text{ tc } x_m = 0\} = \{x\in\mathbb{R}^m\ x=(x_1,\dots,x_{m-1},0)\} \cong \mathbb{R}^{m-1}$

sia $x\in\partial H^m$ e sia $g: U\cap H^m \xrightarrow{\cong} M$ par. locale con $g(u)=x$ e $u\in U\cap\partial H^m$

$g_{|U\cap\partial H^m} : U\cap\partial H^m \longrightarrow g(U\cap\partial H^m)\subseteq M$ e' diffeo (poiche' restrizione di g che e' $\cong$)

quindi se dim che $g(U\cap\partial H^m) = g(U\cap H^m)\cap\partial M \Rightarrow \partial M$ e' una varietà di dim $m-1$

la mia carta locale per ∂M $\tilde{g}^{-1}_{|U\cap\partial H^m}: W\cap\partial M \longrightarrow U\cap\partial H^m$ aperto in ∂H^m perche' !
$W = g(U\cap H^m)$ ap in M

Dimostro le due inclusioni

$\boxed{\subseteq}$

sia $g(u) = x\in g(U\cap\partial H^m) \Leftrightarrow u\in U\cap\partial H^m \Rightarrow u\in\partial H^m$

Per def di $\partial M = \{g(u) \text{ tc. } \underset{\{u_m=0\}}{u\in\partial H^m}\} \Rightarrow \underset{\{g(u)\text{ tc } u\in U\cap H^m\}}{g(U\cap H^m)} \cap \underset{\{g(u)\text{ tc } u\in\partial H^m\}}{\partial M} = \{g(u) \text{ tc } u\in U\cap\partial H^m\}$

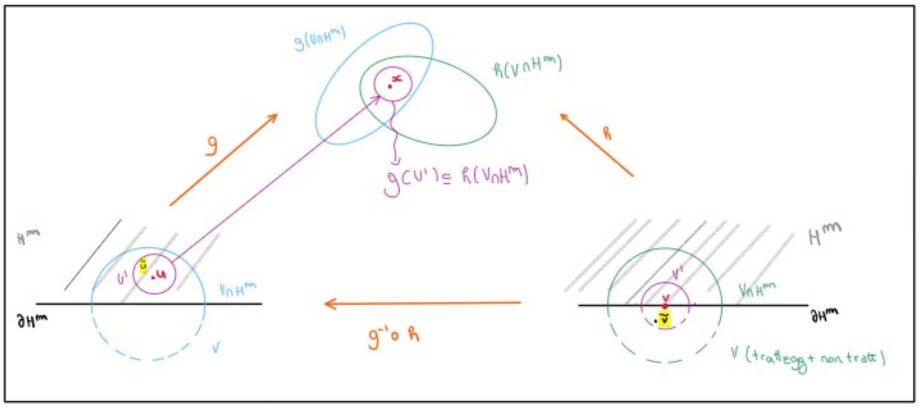
$\partial H^m \subseteq H^m$

$\boxed{\supseteq}$ per assurdo.

Sia $x\in g(U\cap H^m)\cap\partial M$ tc $x\notin g(U\cap\partial H^m)$

Per def di ∂M $\exists$ par loc $h: V\cap H^m \longrightarrow M$ $h(v)=x$ e $v\in V\cap\partial H^m$

poiche' $x\notin g(U\cap\partial H^m) \Rightarrow x = g(u)$ co $u\in U\cap(H^m\setminus\partial H^m)$



$g^{-1}\circ h : V\cap H^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è C^∞
$v \longmapsto u$

$d(g^{-1}\circ h)_v = dg^{-1}_{h(v)} \circ dh_v = \underbrace{dg^{-1}_x}_{\text{ISO}} \circ \underbrace{d\tilde{h}_v}_{\text{inj}}$ $\quad h(v) = x$ + spazi di arrivo e partenza hanno la stessa dim

$\Rightarrow d(g^{-1}\circ h)$ è iso $\underset{\text{PROP, Teo in}}{\Rightarrow}$ $g^{-1}\circ h$ si estende a un diffeo $F : \underset{\tilde v}{V'} \xrightarrow{\cong} \underset{\tilde u}{U'}$ $\quad F_{|V'\cap H^m} = g^{-1}\circ h_{|V'\cap H^m}$

con $U' \subseteq U \cap (H^m \setminus \partial H^m)$ e $g(U') \subseteq \underline{h(V\cap H^m)} \cap g(U\cap H^m)$

Questo è assurdo perchè $\exists\ \tilde u \in U'$ proveniente da $V'\setminus H^m$ poichè $\tilde u = F(\tilde v)$ con $\tilde v \in V'\setminus H^m$ $\quad V' \cong U'$ (big $\Rightarrow$ surg. $\forall \tilde u \in U'\ \exists \tilde v \in V'$ t.c. $\tilde u = F(\tilde v)$)'

ma per costr. tutti i pti di U' provengono da $V\cap H^m$ ovvero $F = g^{-1}\circ h$ e $g(U') \subseteq h(V\cap H^m)$

Lemma

M varietà, $g : M \to \mathbb{R}$ C^∞
$0 \in \mathbb{R}$ valore regolare di g
Allora $\{x\in M \text{ tc } g(x) \geq 0\}$ è una varietà con bordo $g^{-1}(0)$

dim

$\{x\in M \text{ tc } g(x) > 0\} \subset M$ è un aperto

Sia $g : U \xrightarrow{\cong} W\cap M$ $\quad g\ C^\infty \Rightarrow \exists\ W'$ ap $\subseteq W$ $\quad W' = \{x\in M \text{ tc } g(x) > 0\}$ $\quad W'$ ap in $M\cap W$

$\Rightarrow g^{-1}(W')$ è ap in $\underset{U \text{ ap}}{U}$ $\Rightarrow$ aperto in aperto è aperto.

$\Rightarrow g_{|g^{-1}(W')} : g^{-1}(W') \xrightarrow{\cong} M$

Ovvero le carte locali per W' sono date dalle intersezioni con le carte locali di M

Sia ora $x \in g^{-1}(0)$, 0 è valore reg di $g \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} dg_x = \overset{\dim M}{m} - \underset{\dim \mathbb{R}}{1}$

Sia $L : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ lineare con $L_{|\operatorname{Ker} dg_x} : \operatorname{Ker} dg_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{m-1}$ iso

Sia $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ $\quad$ dF_x e' iso (inj + lineare + spazi della stessa dim)

$\qquad x \longmapsto (L(x), g(x))$

Teo inverso

$\Rightarrow$ F induce un diffeo tra
$$\begin{array}{ccc} M & & \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ U & \xrightarrow{\cong} & V \\ \Psi & & \Psi \\ x & & (L(x), 0) \end{array}$$

F induce carta locale int. a x

$$F^{-1}(V \cap \{g \geq 0\}) \xrightarrow{\cong} V \cap \{g \geq 0\}$$
$$F^{-1}(V \overset{\shortparallel}{\cap} (\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}))$$
$$F^{-1}(V \overset{\shortparallel}{\cap} H^m)$$
$$F^{-1}(V) \cap F^{-1}(H^m) = U \cap \{g \geq 0\}$$

Lemma

M, N varietà $\dim M = m$, $\dim N = n$

$f : M \longrightarrow N$ C^∞

Se M ha bordo ∂M e y e' un valore reg per $f|_{\partial M}$ (f)

$\Rightarrow$ $f^{-1}(y)$ e' una varietà di dim $m-n$ con bordo

$\quad \partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$

dim

(nota se $df|_{\partial M}$ è surj $\Rightarrow$ $df|_H$ lo è perchè sto allargando il dominio)

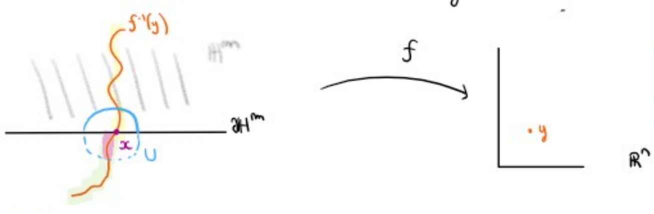
1) $M = \mathbb{H}^m$, $N = \mathbb{R}^m$ (xendo in carte)

2) $\bar{x} \in f^{-1}(y)$ se $\bar{x} \in \mathrm{Int}(H^m)$ $\Rightarrow$ Tesi $\Rightarrow$ $f^{-1}(y)$ e' una varietà

3) $\bar{x} \in f^{-1}(y) \cap \partial H^m$

step 3.1

f e' C^∞ $\Rightarrow$ $\exists$ U aperto di x in $\mathbb{R}^m$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ C^∞ t.c $g|_{U \cap H^m} = f|_{U \cap H^m}$



g ed f coincidono sul pezzo giallo compreso ∂H^m

$g^{-1}(y) \supseteq f^{-1}(y)$ ($f^{-1}(y)$ è "la curva arancione $\cap H^m$", g^{-1} è tutto)

step 3.2

Voglio mostrare che y è un valore regolare per g.

y reg per $f|_{\partial H^m}$ $\Rightarrow$ $df|_{\partial H^m} : T_x \partial H^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è surg

f, g coincidono anche sul ∂H^m $\quad \shortparallel$

$dg_{\bar{x}}|_{\partial H^m} : T_x \partial H^m \to \mathbb{R}^n$ è surg $\Rightarrow$ $dg_{\bar{x}}$ è surgettivo $\Rightarrow$ $\bar{x}$ è un pto reg. per g.

sto allargando il dominio $\quad dg_x : T_x U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\qquad T_x U = \mathbb{R}^m$ $\quad (m \geq n)$

step 3.3

A meno di restringere U posso supporre che g non contenga pti critici in U

perché

$$dg_{\bar{x}} : \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\shortparallel}{T_{\bar{x}}U}} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ è surgettiva} \Rightarrow \text{Sia } B = M(n,m) \text{ la matrice associata}$$

poiché $dg_{\bar{x}}$ è surgettiva $\Rightarrow rk(B)$ è max $\Rightarrow \exists\ A_x$ minore di $M(n,m)$ t.c. $\det A_x \neq 0$ A_x è invertibile

A(n,n)		B(n,m)

Sia $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \longmapsto A_{\bar{x}} \longmapsto \det A_{\bar{x}}$ φ è C^1 perché comp di f. continue

$A_{\bar{x}}$ dipende in modo continuo da $\bar{x}$ (g è C^∞ in part è C^1)

quindi $\forall\ x' \in U$ int di $\bar{x}$ $\det A_{x'} \neq 0$

Quindi tutti i pti y di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sono valori regolari ovvero $\det A_y \neq 0$

Sia $\underbrace{\varphi^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{aperto}})}_{\text{aperto}} = V \subseteq U$ con $\bar{x} \in V$.

Quindi a meno di restringere U a V tutti i pti in V sono regolari ($\det \neq 0$)

step 3.4

$$g : U \to \mathbb{R}^n$$

$g^{-1}(y) \subseteq U$ è una varietà perché y è regolare per g, di dim $m-n = \dim g^{-1}(y)$

Questo mostra che $g^{-1}(y)$ è una varietà.

step 3.5

Sia $\pi : H^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1,\dots,x_m) \longmapsto x_m$ $\quad \mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \text{ t.c. } x_m \geq 0\}$ $\quad$ Sia $\pi|_{g^{-1}(y)} : g^{-1}(y) \longrightarrow \mathbb{R}$

Osservo che $f^{-1}(y) \cap U = \{x \in g^{-1}(y) \text{ t.c. } \underset{x_m \geq 0}{\overset{\shortparallel}{\pi(x) \geq 0}}\} = \{x \in g^{-1}(y) \text{ t.c. } x_m \geq 0\}$

Siamo quasi nelle hp del lemma precedente:

1) $\pi|_{g^{-1}(y)}$ è C^∞ (restr. di mappa C^∞)

2) $\pi|_{g^{-1}(y)} : g^{-1}(y) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g^{-1}(y)$ varietà e $\pi|_{g^{-1}(y)}$ C^∞

3) Resta da dim che $0 \in \mathbb{R}$ è valore reg per $\pi|_{g^{-1}(y)}$

step 3.6

Dim che $0 \in \mathbb{R}$ è un valore reg per $\pi|_{g^{-1}(y)}$ chiamo $P = g^{-1}(y)$

$$(\pi|_P)^{-1}(0) = \{x \in P \text{ t.c. } x_m = 0\} = f^{-1}(y) \cap \partial\mathbb{H}^m$$

$\pi|_P^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow g^{-1}(y) = P$, $0 \longmapsto x$ $\quad \pi(\underline{x}) = 0 \iff x_m = 0$

Lemma visto (P è varietà $P = g^{-1}(y)$)

Sia $\bar{x} \in f^{-1}(y) \cap \partial H^m \Rightarrow T_{\bar{x}} P = \operatorname{Ker} dg_{\bar{x}} = \operatorname{Ker} df_{\bar{x}}$ ha dim $m-n$

$f = g$ per $x \in f^{-1}(y) \cap \partial H^m$

step 3.7

Considero

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^m \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \\ \partial H^m \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "f|_{\partial H^m}"'] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd} \qquad f|_{\partial H^m} = f \circ i$$

Si ha che

$$\operatorname{Ker} df_{\bar{x}}|_{T_x \partial H^m} = \operatorname{Ker}\left(d(f|_{\partial H^m})_x\right) = K$$

$df_{\bar{x}} : T_{\bar{x}} H^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{rest.}} df_{\bar{x}}|_{T_x \partial H^m} : T_{\bar{x}} \partial H^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f|_{\partial H^m} : \partial H^m \to \mathbb{R}^n \xrightarrow{d} d(f|_{\partial H^m})_{\bar{x}} : T_{\bar{x}} \partial H^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\dim K = \overbrace{m-1}^{\dim \partial H^m} - \overset{\dim \mathbb{R}^n}{\overset{\shortparallel}{n}} = m-n-1$$

Step 3.8

Si ha che $T_{\bar{x}} \partial \mathbb{H}^m = \mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}}$

perché

$\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\partial \mathbb{H}^m = \{ x = (x_1, \dots, x_{m-1}, 0) \} \cong \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \overset{*}{\cong} \mathbb{R}^{m-1}$

$T_{\bar{x}} \partial \mathbb{H}^m \overset{*}{\cong} \mathbb{R}^{m-1}$

$* \quad \pi_x : \mathbb{H}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathrm{Ker}\, \pi_x = \{ x \in \mathbb{H}^m \;\; x = (x_1, \dots, x_m) \text{ t.c. } x_m = 0 \} = \partial \mathbb{H}^m$

$\mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}} \overset{\pi \text{ lineare}}{=} \mathrm{Ker}\, \pi_x \overset{*}{=} \partial \mathbb{H}^m \overset{*}{\cong} \mathbb{R}^{m-1} \overset{*}{=} T_{\bar{x}} \partial \mathbb{H}^m$

Step 3.9

Usando 1) $T_{\bar{x}} \partial H^m = \mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}}$ 2) $K = \mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}}|_{T_{\bar{x}} \partial H^m}$

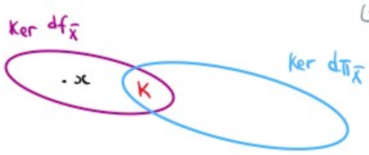
$\underset{②}{K} = \mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}}|_{T_{\bar{x}} \partial H^m} = \mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}} \cap \underbrace{T_{\bar{x}} \partial H^m}_{= \mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}}}$ ①

$\Rightarrow K \overset{\text{sp}}{\subsetneq} \mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}}$ perché $\dim K = m-n-1$ e $\dim \mathrm{Ker}\, d f_{\bar{x}} = m-n$

$K = \mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}}|_{T_{\bar{x}} \partial H^m}$

Quindi $\mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}} \not\subseteq \mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}}$

perché



se per assurdo $\mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}} \subseteq \mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}} \Rightarrow \underbrace{K}_{\dim\; m-n-1} = \mathrm{Ker}\, df_x \cap \mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}} \overset{\text{lo sto supponendo}}{=} \underbrace{\mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}}}_{m-n}$ ↯

($\mathrm{Ker}\, df_x \subseteq \mathrm{Ker}\, d\pi_x$)

Quindi

$\exists\, v \in \underbrace{\mathrm{Ker}\, df_{\bar{x}}}_{= \mathrm{Ker}\, dg_{\bar{x}} = T_{\bar{x}} P = T_{\bar{x}} g^{-1}(y)}$ t.c. $\underbrace{v \notin \mathrm{Ker}\, d\pi_{\bar{x}}}_{= \mathrm{Ker}\, \pi_{\bar{x}};\;\; d\pi_{\bar{x}}(v) \neq 0}$

ovvero

$\exists\, v \in T_{\bar{x}} g^{-1}(y)$ t.c. $d\pi_{\bar{x}}(v) \neq 0 \iff d\pi|_{T_x g^{-1}(y)}(v) \neq 0 \Rightarrow 0$ è regolare per π

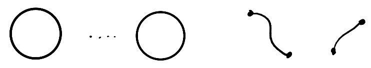
step finale

Conclusione

$\underset{\dim\, m-n}{f^{-1}(y) \cap U}$ è una varietà con bordo e $f^{-1}(y) \cap \partial H^m = \underset{\text{di dim } m-n-1}{\pi^{-1}(0)}$

Fatto

Ogni varietà CPT di dim 1 è diffeomorfa ad unione finita di copie di S^1 e di intervalli chiusi di $\mathbb{R}$



Lemma

M var CPT con $\partial M \neq \emptyset \Rightarrow \nexists\, f\ C^\infty : M \to \partial M$ tc $f|_{\partial M} = id_{\partial M}$ cioè $f(x) = x\ \forall x \in \partial M$

(cioè $\nexists$ una retrazione di M a ∂M)

dim

Per ass $f: M \to \partial M$ C^∞ tc $f(x) = x\ \forall x \in \partial M$

$f(R)$ è denso in ∂M (Sard).

sia $y \in \underbrace{\partial M \cap f(R)}_{f(R)}$. Poiché $\boxed{f|_{\partial M} = id_{\partial M}} \Rightarrow$ y è reg per $f|_{\partial M}$

perché $d(id_{\partial M}) := id_{T_x \partial M}$ che è surg $\Rightarrow df|_{\partial M}$ è surg

Lemma

$\Rightarrow f^{-1}(y)$ è una varietà con bordo $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M \underset{f = id_{\partial M}}{=} \{y\}$

$f: M \to \partial M$

$\dim f^{-1}(y) = \overset{\dim}{\cancel{\text{Ker}}}\ df = \dim m - \dim \partial M = m - (m-1) = 1$

Quindi $|f^{-1}(y)| = 1$

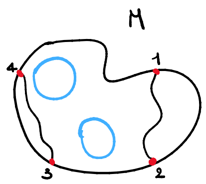
Ora M CPT, $f^{-1}(y)$ è chiuso perché $\{y\}$ è chiuso $\subseteq \partial M$ è T_3

$f^{-1}(y) \subseteq M$ è chiuso in un CPT $\Rightarrow$ CPT

Quindi $f^{-1}(y)$ è varietà CPT di dim 1 $\overset{\text{Fatto}}{\Rightarrow}$

$f^{-1}(y)$ è diffeomorfa ad unione finita di copie di S^1 e di intervalli chiusi di $\mathbb{R}$

Ma I bordi delle varietà di dim 1 hanno sempre un numero pari di pti di bordo



S^1 ha 0 punti di bordo, [0,1] ne ha 2

Lemma Brower

Ogni mappa C^∞ $g: D^m \to D^m$ ha almeno un pto fisso

$\exists x \in D^m$ t.c. $g(x)=x$

dim

Supp. per assurdo che $g: D^m \to D^m$ non abbia pti fissi $\Rightarrow g(x) \neq x \ \forall x \in D^m$

$$u = \frac{x - g(x)}{\|x-g(x)\| \neq 0}$$

Costruisco $f: D^m \longrightarrow S^{m-1}$ $\quad f(x) = x + tu$

$f(x) \in S^{m-1} \iff f(x) \cdot f(x) = 1 \iff 1 = (x+tu)\cdot(x+tu) = x\cdot x + t^2 \underbrace{u\cdot u}_{1} + 2x\cdot ut \Rightarrow$

$t^2(u.u) + 2x.ut + x.x - 1 = 0 \Rightarrow t = -x.u \pm \sqrt{(x.u)^2 - x.x + 1}$ (scelgo il +)

serve $(x.u)^2 - x.x + 1 = h(x) > 0$ in quanto se $h(x)=0 \Rightarrow f(x) = x + tu = 0$ ⚡ $\overset{f(x)}{\overset{\|}{0}} \notin S^{m-1}$

f non sarebbe ben def.

$h(x) = 0 \iff \underline{x.u = 0}$ e $x.x = 1 \iff x \in \partial D^m = S^{m-1}$

$x \in D^m \iff x.x \leq 1 \iff 0 \leq 1 - x.x$

$$x.u = x \cdot \frac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|} = \frac{\overset{1}{\overline{x.x}} - x.g(x)}{\|x-g(x)\|} = \frac{1 - x.g(x)}{\|x-g(x)\| \neq 0} = 0 \iff x.g(x) = 1 \underset{x \in D^m}{\overset{\|}{x.x}}$$

$\iff x = g(x)$ ⚡

$h(x) > 0$ perchè $x \in \partial D^m$, e $x.u > 0$ perchè $x \neq g(x)$

f è ben def ed è C^∞.

$$f|_{\partial D^m} = f|_{S^{m-1}}$$

$|f(x)| = 1 \Rightarrow (x+tu).(x+tu) = 1 \Rightarrow f(x) = x + tu \underset{t=0}{=} x$

$\underbrace{x.x}_{1} + t^2 + 2x.ut \iff t = 0$

$f|_{\partial D^m} = id|_{S^{m-1}}$ ⚡ per il lemma.

Teo Brower

$G : D^m \to D^m$ cont. ha almeno un pto fisso

dim

D^m CPT , G cont su CPT $\overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow}$

In analisi matematica, il **teorema di approssimazione di Weierstrass** è un risultato che afferma che ogni funzione reale continua definita in un intervallo chiuso e limitato può essere approssimata a piacere con un polinomio di grado opportuno

$\exists \; P_1 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ tc. $\|P_1(x) - G(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in D^m$

$\forall x \in D^m \quad \|P_1(x)\| \underset{\Delta}{\leq} \underbrace{\|P_1(x) - G(x)\|}_{\wedge \atop \varepsilon} + \underbrace{\|G(x)\|}_{\wedge\| \atop 1} < \varepsilon + 1$ $\quad G(x) \in D^m$

Sia $P(x) = \frac{P_1(x)}{\varepsilon+1}$ e considero $P_{|_{D^m}} : D^m \longrightarrow D^m \quad P \; C^\infty$

Supp per assurdo che non abbia pti fissi cioè

$G(x) - x \neq 0 \quad \forall x \in D^m$.

$\mu = \min_{x \in D^m} \| G(x) - x \| > 0$

μ esiste per W $\qquad$ vale $=$ $\Leftrightarrow$ $g(x) = x$

Scelto ε tc $\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} < \mu$ si ha che

$\| P(x) - G(x) \| = \| \frac{P_1(x)}{1+\varepsilon} - G(x) \| = \frac{1}{1+\varepsilon} \| P_1(x) - (\varepsilon+1) G(x) \|$

$\leq \frac{1}{\varepsilon+1} \left(\underbrace{\|P_1(x) - G(x)\|}_{\wedge \atop \varepsilon} + \varepsilon \underbrace{\|G(x)\|}_{\wedge\| \atop \varepsilon \cdot 1} \right) < \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} < \mu$

$\Rightarrow \|P(x) - G(x)\| < \mu = \min \|G(x) - x\| \Rightarrow P(x) \neq x$

se $P(x) = x \Rightarrow \|G(x) - \overset{x}{\overset{\shortparallel}{P(x)}}\| \underset{\text{per def di min}}{\geq} \mu$ ma io so che $\leq \mu$.

Quindi ho trovato

$P : D^m \longrightarrow D^m \; C^\infty$ che non ha pti fissi $\not\exists$ lemma.

Esempio

$D^m = \{x \in \mathbb{R}^m$ tc $\sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^m$ è una varietà con bordo

$\partial D^m = S^{m-1}$

In fatti $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad g(x) = 1 - \sum x_i^2$ è C^∞

$D^m = \{g \geq 0\}$ e $0 \in \mathbb{R}$ è un valore reg per g

$g^{-1}(0) = S^{m-1}$

Fatto

$id_{S^{m-1}} : S^{m-1} \longrightarrow S^{m-1}$ non si estende a un'applicazione $C^\infty : D^m \to S^{m-1}$