VARIETA'

DEFINZIONI DI BASE

1. Definizione di mappa C^∞
2. Definizione di diffeomorfismo + proprietà
3. Definizione di varietà + esempi

SPAZI TANGENTI E DIFFERENZIALE

4. **APERTI**
   i. Spazio tangente in un punto a un aperto di $\mathbb{R}^k$
   ii. Definizione di differenziale (f: U--> V aperti) + proprietà+ proposizione su quando df_x è isomorfismo
5. **VARIETA'**
   i. Spazio tangente a un punto di una varietà M + Proposizione su $dim\ T_xM$
   ii. Differenziale di mappe C^∞ tra varietà + proprietà

PUNTI CRITICI E REGOLARI

6. Definizione di punti critici e regolari + proposizione(con due punti)
7. Lemma della pila di dischi

TEOREMI DI SARD E BROWN

8. Definizioni preliminari +lemma
9. Teorema (Sard) + teorema (Sard applicato alle varietà)
10. Corollario(Brown)

$\boldsymbol{f^{-1}(y)}$

11. Le controimmagini di valori regolari $f^{-1}(y)$ sono varietà
12. Spazi tangenti di $f^{-1}(y)$
13. Dimostrazione che il gruppo ortogonale è una varietà.

VARIETA'

Def.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $X, Y \neq \emptyset$

$f: X \longrightarrow Y$ e' C^∞ se $\forall x \in X$ • $\exists$ W int aperto di x in $\mathbb{R}^n$
• $\exists$ $F: W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞ tale che $F|_{W\cap X} = f|_{W \cap X}$

Def

$f: X \xrightarrow{\cong} Y$ è diffeomorfismo se f è omeomorfismo e f, f^{-1} sono C^∞

f è bigettiva, cont, f^{-1} cont.

proprieta'

1) composizione di diffeomorfismi e' diffeomorfismo
2) restrizione di diffeomorfismo e' diffeomorfismo
3) $f: X \xrightarrow{\cong} Y \Rightarrow f: X \xrightarrow{\cong} f(X)$

Def

Una varieta' C^∞ di dim $m > 0$ e' un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ tale che:

$\forall x \in M$ • $\exists$ W int. aperto di x in $\mathbb{R}^k$

• $\exists$ $f: W \cap M \xrightarrow{\cong} U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto (f diffeo.) (carta locale)

$f^{-1}: U \xrightarrow{\cong} W \cap M$ (parametrizzazione locale)

Esempi

1) U aperto $\subseteq \mathbb{R}^K$ è una varietà di dim K
2) Σ superficie $\subseteq \mathbb{R}^3$ è una varietà di dim 2.

dim

la tesi è: $\forall p \in \Sigma$ $\exists$ W int aperto di p in $\mathbb{R}^3$ ed $\exists$ $f: W \cap \Sigma \xrightarrow{\cong} U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

1) Sia $p \in \Sigma$. Sappiamo che intorno a p Σ è loc grafico rispetto a una proiezione $\pi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. spg. $\pi_{xy}: (x,y,z) \longmapsto (x,y)$

Quindi $\exists$ U aperto in $\mathbb{R}^2$ ed $\exists$ $f: U \to \mathbb{R}$ C^∞ t.c. $\underline{x}: U \to \underline{x}(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ è par. reg. intorno a p.
$(u,v) \longmapsto (u,v,f(u,v))$

2) Sia $\pi^{-1}(U) = W_\varepsilon$ $\quad W_\varepsilon$ è aperto in $\mathbb{R}^3$ perchè controimm di aperto tramite f. continua

$\pi: W_\varepsilon \longrightarrow U$ è C^∞ (proiezione)

$\pi|_{W \cap \Sigma}: W \cap \Sigma \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ è C^∞ perchè restrizione di π che è C^∞

l'inversa di $\pi|_{W\cap\Sigma}: U \longrightarrow \underline{x}(U) = W \cap \Sigma$ è $\underline{x}$ che è C^∞
($\underline{x}$ par. reg)

Quindi $\pi|_{W\cap\Sigma}$ è diffeo cercato e Σ è una varietà di dim 2

SPAZI TANGENTI E DIFFEOMORFISMI

Def (aperti)

$U \subseteq \mathbb{R}^K$ aperto, $x \in U$ $\quad T_x U = \mathbb{R}^K$

Def

$U \subseteq \mathbb{R}^K$, $V \subseteq \mathbb{R}^e$ $\quad U, V$ aperti.

$f: U \to V$ C^∞

$x \in U$, $h \in \mathbb{R}^K$

Allora $\boxed{df_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}}$

$df_x: \mathbb{R}^K = T_x U \longrightarrow \mathbb{R}^e = T_{f(x)} V$ è lineare e $Jac(f)_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_x$

proprietà

1) $f: U \to V$ $\quad g: V \to W$ $\quad g \circ f: U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ ($x \longmapsto y \longmapsto z$) $\Rightarrow d(g\circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x : T_x U \to T_z W$

2) $id_U: U \to U$ $\quad d(id_U)_x = id_{\mathbb{R}^K}: T_x U = \mathbb{R}^K \longrightarrow T_x U = \mathbb{R}^K$ $\quad U \subseteq \mathbb{R}^K$

3) $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^K$ $\quad i: U' \hookrightarrow U$ $\quad d(i)_x = id_{\mathbb{R}^K}$ $\quad \forall x \in U'$

4) $L: \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^e$ lineare $\quad dL_x = L$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^K$

Proposizione

$f: \underset{\mathbb{R}^k}{\overset{\cap}{U}} \xrightarrow{\cong} \underset{\mathbb{R}^e}{\overset{\cap}{V}}$ diffeo. Allora $k = e$ e df_x è iso $\forall x \in U$

dim

f è diffeo $\exists$ l'inversa $g: V \to U$ tc $g \circ f = id_U$ e $f \circ g = id_V$

$$id_{\mathbb{R}^k} \underset{(2)}{=} d(id_U)_x \underset{g\circ f = id_U}{=} d(g \circ f)_x \underset{(1)}{=} dg_{f(x)} \circ df_x$$

Analogamente

$$id_{\mathbb{R}^e} \underset{(2)}{=} d(id_V) \underset{f\circ g = id_V}{=} d(f\circ g)_{f(x)} \underset{(2)}{=} df_{g(f(x))} \circ dg_{f(x)}$$

$\Rightarrow df_x$ e $dg_{f(x)}$ sono l'una l'inversa dell'altra

$df_x : T_xU = \mathbb{R}^k \longrightarrow T_{f(x)}V = \mathbb{R}^e$? è inj + surj $\Rightarrow df_x$ è iso e $k = e$

Def (Varietà)

$M \subseteq \mathbb{R}^k$ varietà C^∞, $\dim M = m$

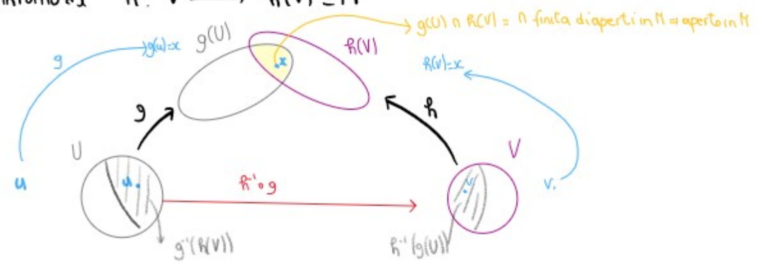
g par. locale $g: \mathbb{R}^m \underset{\text{aperto}}{\supseteq} U \longrightarrow W \cap M \subseteq \mathbb{R}^k$ (ap. in $\mathbb{R}^k$)

$u \longmapsto g(u) = x$

$T_xM = dg_u(T_xU) \subseteq \mathbb{R}^k$, $T_xU = \mathbb{R}^m$

dim che $T_xM = dg_u(\mathbb{R}^m)$ è ben definito. cioè non dipende dalla param. g.

Siano p. loc. intorno a x $g: U \xrightarrow{\cong} g(U) \subseteq M$, $h: V \xrightarrow{\cong} h(V) \subseteq M$ $\quad U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ e $h(V), g(U) \subseteq \mathbb{R}^k$



$h^{-1} \circ g$ è diffeo perché composizione di diffeo.

$g = h \circ (h^{-1} \circ g) \xrightarrow{\text{passo ai differenziali}} dg_u = dh_v \circ \underbrace{d(h^{-1}\circ g)_u}$ è iso poiché $h^{-1}\circ g$ è diffeomorfismo

$Imm(dg_u) = Imm(dh_v)$ perché

$$dg_u(\mathbb{R}^m) = (dh_v \circ \underbrace{d(h^{-1}\circ g)_u)(\mathbb{R}^m)}_{\mathbb{R}^m} = dh_v(\underbrace{d(h^{-1}\circ g)_u(\mathbb{R}^m)}_{\mathbb{R}^m}) = dh_v(\mathbb{R}^m)$$

$dg_u : T_uU \longrightarrow T_x g(U) = \mathbb{R}^k$, $T_uU = \mathbb{R}^m$ $\qquad dh_v : T_vV = \mathbb{R}^m \longrightarrow T_x h(V) = \mathbb{R}^k$

$d(h^{-1}\circ g)_u : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Prop:

$M \subseteq \mathbb{R}^K$ varieta', $\dim M = m \Rightarrow \forall x \in M \quad \dim T_x M = m$

dim

$\dim T_x M = \dim dg_u(\mathbb{R}^m) \overset{*}{\leq} m \qquad dg_u : \boxed{\mathbb{R}^m} \longrightarrow \mathbb{R}^K$

$\leq \min(m, K)$ se min e' $K \Rightarrow K \leq m$

se min e' $m \Rightarrow m \leq m$

oppure osservo $\quad \underset{\underset{m}{\parallel}}{\dim \mathbb{R}^m} = \dim \operatorname{Im} dg_u + \dim \operatorname{Ker} dg_u$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} dg_u = m - \dim \operatorname{Ker} dg_u \leq m$

Se dim che dg_u e' inj $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} dg_u = 0$ e $\dim \operatorname{Im} dg_u = T_x M = m$

sia $g : \underset{\underset{\mathbb{R}^m}{\cup\!\shortmid}}{U} \xrightarrow{\cong} W \cap M$ par locale

$\Rightarrow g^{-1}$ e' $C^\infty \Rightarrow \exists\, x \in W' \subseteq W$ int. aperto ed $\exists\ F : W' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞ t.c. $F|_{W' \cap M} = g^{-1}|_{W' \cap M}$

def di g C^∞ — mi interessa in x

$$\begin{tikzcd} & W' \arrow[dr, "F"] & \\ U \cap g^{-1}(W') \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, hook, "i"] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$i = F \circ g \Rightarrow \underbrace{di_u}_{\underset{id_{\mathbb{R}^m}}{\parallel (2)}} = dF_{\underbrace{g(u)}_{x}} \circ dg_u$ poiche' di_u e' inj $\overset{}{\underset{*}{\Rightarrow}} dg_u$ e' inj

dato che dg_u e' inj $\Rightarrow \dim T_x M = m$

* $\gamma = \alpha \circ \beta$ con γ inj $\Rightarrow \beta$ inj

siano $x \neq y$ tc $\beta(x) = \beta(y)$ e $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ (γ inj)

$\Rightarrow \gamma(x) = \alpha \circ \beta(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(\beta(y)) = \alpha \circ \beta(y) = \gamma(y)$ ↯

Def

$f : \underset{\underset{\mathbb{R}^K}{\cup\!\shortmid}}{M} \longrightarrow \underset{\underset{\mathbb{R}^e}{\cup\!\shortmid}}{N}$ $C^\infty \overset{f\, C^\infty}{\Longrightarrow} \exists\, W \subseteq \mathbb{R}^K$ ap int. di x, $\exists\ F : W \longrightarrow \mathbb{R}^e$ C^∞ con $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$

$x \longmapsto y$

$df_x = dF_x|_{T_x M} : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^e$

df_x e' ben def e $df_x(T_x M) \subseteq T_{f(x)} N$

$\downarrow$

voglio dim che df_x non dipende da F

siano $g: \underset{u \mapsto x}{U \to M}$ $\quad h: \underset{v \mapsto y}{V \to N}$ par. locali tpq $g(U) \subseteq W$

Abbiamo
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^e \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ F \circ g"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

$$F \circ g = h \circ (h^{-1} \circ F \circ g)$$

passando ai differenziali $\Rightarrow dF_{\underset{x}{g(u)}} \circ \underbrace{dg_u(\mathbb{R}^m)}_{T_xM} = dh_{\substack{h^{-1}(F(g(u))) \\ h^{-1}(F(x)) \\ h^{-1}(y)=v}} \circ d(h^{-1}\circ F \circ g)_u$

$dg_u : \underset{\mathbb{R}^m}{T_x U} \to T_xM = dg_u(\mathbb{R}^m)$

$$dF_x(T_xM) = dh_v\left(d(h^{-1}\circ f \circ g)_u(\mathbb{R}^m)\right) \overset{*}{\subseteq} \mathrm{Im}\, dh_v \subseteq T_yN$$

$dh_v : \underset{\mathbb{R}^m}{T_vV} \to \underset{y}{T_{h(v)}}N$, $h^{-1}\circ f\circ g : U \to V \Rightarrow d(h^{-1}\circ f \circ g)_u : T_uU = \mathbb{R}^m \to T_vV = \mathbb{R}^m$

Quindi $dF_x(T_xM) \subseteq T_yN$ e

$dF_x(T_xM) = dF_x\big|_{T_xM} = dh_v \circ d(h^{-1}\circ f\circ g)_u \circ dg_u^{-1}$ (non dipende né da F ne da W.)

Proprietà

1) $d(g\circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

2) $id_M : M \to M \Rightarrow d(id_M)_x = id_{T_xM}$

3) $M' \overset{i}{\subseteq} M$ $\quad d(i)_x : T_xM' \to T_xM$ è inj $\quad T_xM' \underset{ssp}{\subseteq} T_xM$

4) Se $f: \underset{dim}{M} \overset{\cong}{\to} N$ diffeo $\Rightarrow df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ è iso

dalla prop sopra so che $df_x(T_xM) \subseteq T_{f(x)}N$ ma hanno la stessa dim $\Rightarrow$ iso

PUNTI CRITICI E VALORI REGOLARI

Def

$f: M \to N$ C^∞ $\quad \dim M = m$, $\dim N = n$ $\quad M, N$ varietà

$x \in M$ è un pto critico di f se $rg(df_x) < n$ ovvero se df_x non è surg.

altrimenti $x \in M$ si dice pto regolare

$y \in N$ è un valore critico di f se $y = f(x)$ con x pto critico

altrimenti $y \in N$ si dice valore regolare

Prop

$f: M \to N$ C^∞ $\quad \dim M = \dim N = m$

1) $x \in M$ pto regolare di $f \Rightarrow f|_{\tilde U} : \tilde U \overset{\cong}{\to} \tilde V$ con $\tilde U$ int di x in M, $\tilde V$ int di $f(x)$ in N

2) Se M è CPT, $y \in N$ è un valore regolare $\Rightarrow |f^{-1}(y)| < +\infty$

dim 1

Siano $g: U \to g(U) \subseteq M$ p.r. intorno ad x

$h: V \to h(V) \subseteq N$ p.r " " $f(x)=y$

Considero

$$\begin{tikzcd} x \in g(U) \arrow[r, "f"] & h(V) \ni y \\ u \in U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & V \ni v \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

spg $f(g(U)) \subseteq h(V)$

$f\circ g = h\circ h^{-1}\circ f\circ g \longrightarrow df_x \circ \underline{dg_u} = \underline{dh_v} \circ d(h^{-1}\circ f\circ g)_u$

oss 1: g, h sono diffeo $\Rightarrow dg, dh$ sono iso $*$

oss 2 $\quad d(h^{-1}\circ f\circ g)_u = \underbrace{dh^{-1}_{f(g(u))=y}}_{\text{iso}} \circ df_{g(u)=x} \circ \underbrace{dg_u}_{\text{iso}}$

$\mathbb{R}^m \quad \mathbb{R}^m$

$\cup| \quad\ \cup|$

$df_x : T_xM \longrightarrow T_yN$. df_x e' surg perche' x e' valore regolare

df_x e' lineare

$\dim T_xM = \dim M = \dim N = \dim T_yN$

$\Rightarrow df_x$ e' iso

$\Rightarrow$ Per il Teo della f. inversa, poiche' $d(h^{-1}\circ f\circ g)$ e' iso lineare $\Rightarrow \exists\, U'$ int di u tc. $h^{-1}\circ f\circ g|_{U'} : U' \xrightarrow{\cong} V'$ e' diffeo $*$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ \ u \in U' \qquad v \in V'$

Avevo $f\circ g = h\circ h^{-1}\circ f\circ g \Rightarrow f = h\circ(h^{-1}\circ f\circ g)\circ g^{-1} \Rightarrow f|_{g(U')} = \underbrace{h|_{V'}}_{\text{diffeo perche' restr.}} \circ \underbrace{(h^{-1}\circ f\circ g)|_{U'}}_{\text{diffeo per } *} \circ \underbrace{g^{-1}|_{h(V')}}_{\text{diffeo perche' rest.}}$

$f|_{g(U')}$ diffeo perche' composizione di diffeo $\Rightarrow f|_{g(U')} : g(U') \xrightarrow{\cong} h(V') \subseteq N$ e' il diffeo cercato

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in g(U') \qquad f(x) \in h(V')$

$(g(U') = \tilde{U}, \quad h(V') = \tilde{V})$

dim 2

step 1

$y \in N \subseteq \mathbb{R}^K$, $\mathbb{R}^K$ e' T_3 e T_3 passa ai ssp $\Rightarrow \{y\}$ sono chiusi.

$f^{-1}(y)$ e' chiuso in quanto preimmagine di un chiuso tramite f. continua

$f^{-1}(y) \subseteq M$ (chiuso in CPT $\Rightarrow f^{-1}(y)$ CPT)

$\qquad\quad \downarrow$ CPT

la top di ssp e' quella discreta cioe' i singoletti in $f^{-1}(y)$ sono aperti

step2 $\quad f^{-1}(y)$ e' discreto: se $x \in f^{-1}(y) \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists\, U$ int di x tc $f|_U : U \xrightarrow{\cong} f(U)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in U \qquad f(x) \in f(U)$

In particolare $f|_U$ e' inj $\Rightarrow U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$ ma per la top di ssp.

$\forall x \neq x' \quad f(x) \neq f(x')$

$\{x\}$ e' aperto in $f^{-1}(y) \iff \exists\, U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto tc. $U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$

$\Rightarrow \{x\}$ e' aperto

Quindi $\quad f^{-1}(y)$ e' CPT + discreto $\Rightarrow |f^{-1}(y)| < +\infty$

Preso un ricoprimento

Se $|f^{-1}(y)| = \infty \Rightarrow f^{-1}(y) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} \{x\}$ ma $\underset{I \text{ finito}}{\bigcup_{x_i \in I \subseteq f^{-1}(y)}}^{\text{finito}} \{x_i\} \subsetneq f^{-1}(y)$ $\not\!\!\!\;$ $f^{-1}(y)$ e' CPT

Lemma della pila di dischi

M,N varietà di $\dim M = \dim N$
M CPT
$f: M \to N$ C^∞
$y \in N$ valore reg con $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, V$ int di $y \subseteq N$ tc $|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)|$ $\forall y' \in V$

dim

Da prop prec **(2)** so che $|f^{-1}(y)| < +\infty \Rightarrow f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$
e inoltre per **(1)** $\exists\, U_i$ int di x_i $\forall i = 1, \dots, k$ tc $f|_{U_i}: U_i \xrightarrow{\cong} f(U_i) = V_i$ $\forall i = 1, \dots, k$
spg U_i ap $\Rightarrow f(U_i)$ ap in N

Spg $U_i \cap U_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ $\quad (U_i \subseteq \mathbb{R}^k \; T_2)$

Sia $V = V_1 \cap \dots \cap V_k \setminus f(M \setminus \bigcup U_i)$

oss 1: perché devo togliere $f(M \setminus \bigcup U_i)$?

se prendessi come $V = \bigcap^k V_i$ può succedere che $\exists\, y' \in \bigcap_{i=1}^k V_i$ tc. $f^{-1}(y') \ni x'$ con $x' \notin \bigcup_i U_i$

se $x' \notin \bigcup_i U_i \Rightarrow x' \in M \setminus \bigcup_i U_i \Rightarrow f(x') \in f(M \setminus \bigcup_i U_i)$ [obiettivo togliere $f(x')$]

Prendendo come $V = \bigcap V_i \setminus \underbrace{f(M \setminus \bigcup_i U_i)}_{f(x')}$ ho che $f(x') \notin V$

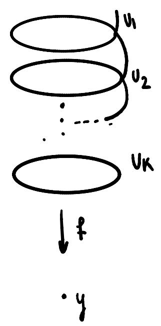
Osserviamo che $V \neq \emptyset$ poiché $y \in \bigcap V_i$ e $y \notin f(M \setminus \bigcup_i U_i)$

$\bigcup_i U_i$ è unione di aperti $M \setminus \bigcup_i U_i$ è chiuso in M, chiuso in M CPT $\Rightarrow M \setminus \bigcup U_i$ è CPT $\Rightarrow \underset{f\text{ cont.}}{f(\text{CPT})}$ è CPT

$f(M \setminus \bigcup_i U_i)$ è un CPT in uno sp. T_2 $N \subseteq \mathbb{R}^k$ $\Rightarrow$ è chiuso.

$\bigcap V_i$ è intersezione finita di aperti $\Rightarrow$ aperto

$V = \underbrace{\bigcap_i V_i}_{\text{ap}} \setminus \underbrace{f(M \setminus \bigcup_i U_i)}_{\text{chiuso}} \Rightarrow V$ è aperto e contiene y



U_i rivestono y tramite f

Proposizione 3.1.1. *$f : M \to N$ varietá differenziabili di dimensione n, M compatta. Allora i valori regolari formano un aperto R in N, e $f_{|f^{-1}(R)} : f^{-1}(R) \to R$ é un rivestimento.*
In particolare su ogni componente connessa R_i di R la cardinalitá di $f^{-1}(x)$ per $x \in R$ non dipende da x.

Dimostrazione. $y \in N$ valore regolare. $\forall x_i \in f^{-1}(y)$, $\exists U_i = U(x_i)$ tale che $f(U_i) = V_i$ é un aperto di N e $f_{|U_i} : U_i \to V_i$ é un diffeomorfismo (in quanto la dimensione delle due varietá é la stessa).
Gli x_i sono un discreto (poiché ognuno ha un intorno che lo separa dagli altri) chiuso, ma M é compatta, quindi $\#\{x_i\} < +\infty$.
Infine, detto V l'aperto:

$$V = \left(\bigcap V_i\right) \setminus f\left(M \setminus \left(\bigcup U_i\right)\right),$$

(é un'intersezione finita di aperti meno l'immagine di un chiuso in un compatto), V é un aperto ben rivestito per costruzione, quindi otteniamo la tesi. □

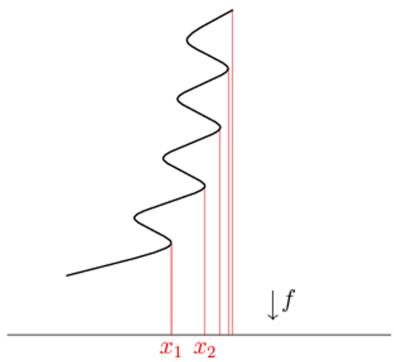
R = insieme dei pti regolari

$f_{|R} \quad \begin{matrix} M \\ \cup \\ R \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N \\ \cup \\ f(R) \end{matrix}$ è un rivestimento se:

- $f_{|R}$ continua
- $f_{|R}$ surgettiva
- $\forall y \in f(R)\ \exists V$ int aperto $f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ con $U_i \cap U_j = \emptyset$ per $i \neq j$ tc $f_{|U_i}$ è omo

Osservazione. L'ipotesi di compattezza su M é necessaria; se infatti $f = \mathrm{id}_{|(a,b)} : (a,b) \to \mathbb{R}$, tutti i valori sono regolari ma f non é un rivestimento (non é neanche surgettiva).

Osservazione. Se M non é compatta, i valori regolari possono non essere un aperto; la figura seguente (dove la successione $\{x_i\}$ é convergente) dá un controesempio.



TEOREMI DI SARD E BROWN

Def

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura 0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{B_i\}_i$ famiglia numerabile di rettangoli, $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c.:
  $A \subseteq \bigcup B_i$ e $\sum_i \mathrm{vol}(B_i) < \varepsilon$

- Se $A' \subseteq A$ e A ha misura nulla $\Rightarrow$ A' ha misura nulla

- Se $\{A_k\}_k$ e' una famiglia numerabile di insiemi di misura 0 $\Rightarrow$ misura$(\bigcup_k A_k) = 0$
  dim
  $\{B_i^{(k)}\}_i$ $\forall k \geq 1$ famiglia numerabile di rettangoli con $\bigcup_i B_i^{(k)} \supseteq A_k$ e $\sum_i B_i^{(k)} \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$
  Allora $\{B_i^{(k)}\}_{i,k}$ e' numerabile
  $\bigcup_{i,k} B_i^{(k)} \supseteq \bigcup_k A_k$ e $\sum_{i,k} \mathrm{vol}(B_i^{(k)}) < \varepsilon$

- $R \subseteq \mathbb{R}^n$ rettangolo tc $\overline{R} \subseteq \bigcup_i B_i$ $\{B_i\}$ fam di rettangoli
  Allora $\sum_i \mathrm{vol}(B_i) \geq \mathrm{vol}(R)$
  Se $\mathrm{Vol}(R) > 0$ $\Rightarrow$ $\overline{R}$ non ha misura zero

- Sard
  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $F: U \to \mathbb{R}^n$ C^∞ $\Rightarrow$ $F(C)$ ha misura 0

estendiamo questi concetti alle varieta'

- $A \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^k$ A ha misura zero se $\forall$ carta locale $(f, W \cap M)$ su M $f(W \cap A) \subseteq \mathbb{R}^m$ ha misura 0

Teorema

Sia $F: M \to N$ C^∞ tra varieta' di $\dim M = m$ e $n = \dim N$
Allora $F(C)$ ha misura 0

dim
$M \subseteq \mathbb{R}^k$ e poiche' gli spazi euclidei sono a base numerabile (II numerabile)
$\Rightarrow \exists$ una famiglia numerabile di carte locali $\{f_i : W_i \cap M\}$ con $\bigcup_i W_i \supseteq M$
Voglio dim che $\forall$ carta $\{g, Z \cap N\}$ l'insieme $g(Z \cap F(C))$ ha misura 0

Osservo che $g(Z \cap F(C)) \underset{C \subseteq M \text{ e } M \subseteq \bigcup_i W_i}{=} g(Z \cap F(C \cap \bigcup_i W_i)) = \bigcup_i g(Z \cap F(C \cap W_i))$

poiche' unione numerabile di insiemi di misura 0 e' ancora un insieme di misura 0
mi basta dim che $g(Z \cap F(C \cap W_i))$ ha misura 0.

Considero $\underset{\text{f. di transizione}}{h_i = g\circ F\circ f_i^{-1}} : f_i(W_i\cap F^{-1}(Z)) \longrightarrow g(Z\cap N) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd}
f_i(W_i\cap M) \supseteq f_i(W_i\cap F^{-1}(Z)) \arrow[rrr, "h_i"] \arrow[d, "f_i^{-1}"'] & & & g(Z\cap N) \\
f_i(W_i\cap F^{-1}(Z)) \arrow[d, "f_i^{-1}"'] & & g(F(W_i\cap M)\cap Z) \arrow[ll, "h_i^{-1}"'] \arrow[d, "g^{-1}"] \arrow[ur] & \\
\underbrace{W_i\cap M\cap F^{-1}(Z)}_{F^{-1}(Z)} \arrow[u, "f_i"] & & F(W_i\cap M)\cap Z \arrow[ll, "F^{-1}"'] & \\
M \supseteq W_i\cap M \arrow[rrr, "F"] & & & Z\cap N \subseteq N \arrow[uuu, "g"']
\end{tikzcd}$$

$f_i\circ F^{-1}\circ g^{-1} = h_i^{-1}$

$F(W_i\cap M)\subseteq N \Rightarrow$

$\Rightarrow g(F(W_i\cap M)\cap Z)\subseteq g(N\cap Z)$

$F: W_i\cap M \longrightarrow F(W_i\cap M)\cap Z \subseteq N\cap Z$

Dunque $h_i = \underbrace{g\circ F\circ f_i^{-1}}$

u e' pto critico per $h_i \iff \operatorname{rnk} dh_{i_u} < n$ (dh_i non surg) $\iff$

$\operatorname{rnk} \underbrace{dg_{F(f_i^{-1}(u))} \circ dF_{f_i^{-1}(u)} \circ df_{i_u}^{-1}}_{g,\, f_i^{-1} \text{ diffeo} \Rightarrow dg,\, df_i^{-1} \text{ iso} \Rightarrow \text{surg}} < n \iff dF_{f_i^{-1}(u)}$ non è surg $\iff f_i^{-1}(u)$ critico per F

$\iff f_i^{-1}(u) \in C\subseteq M$

Ora voglio applicare Teo Sard a h_i ma serve che $f_i(W_i\cap F^{-1}(Z))$

Z ap in $\mathbb{R}^k \Rightarrow F^{-1}(Z)$ ap in $M \Rightarrow$ $F^{-1}(Z)\cap W_i$ è ap in $M\cap W_i$

$\Rightarrow f_i(F^{-1}(Z)\cap W_i)$ aperto in $\mathbb{R}^n$ perchè f_i e' diffeo aperto

Quindi h_i e' C^∞ (composizione di C^∞) h_i: Aperto $\longrightarrow \mathbb{R}^n \overset{\text{Sard}}{\Longrightarrow}$ l'insieme dei valori critici di h_i ha misura 0 cioè $g(Z\cap F(C\cap W_i))$ ha misura 0

Corollario (Brown)

Sia $F: M\longrightarrow N$ C^∞ $\dim M = m$, $\dim N = n$

Allora $F(R)$ e' denso in N

dim

$F(R) = \{y\in N \mid y$ e' valore regolare per $F\} = \{y = f(x) \mid x\in M$ e' pto regolare per $F\}$

$F(R)$ e' denso in $N \iff$ V aperto in N $F(R)\cap V \neq \emptyset$

o equivalent. preso $x\in F(C)$ $F(R)^c$ devo mostrare che $\forall U$ int. aperto di x

U contiene valori regolari cioè $U\cap F(R)\neq\emptyset$

Basta allora vedere che $\exists$ valori regolari nel dominio di qualunque carta locale $(g, Z\cap N)$ int. a x

Sia $g: Z\cap N \longrightarrow U\subseteq\mathbb{R}^k$ aperto

$g(Z\cap F(C))$ ha misura 0 per Sard

Supp. per ass che $Z \cap F(C)$ non contiene pti regolari $(Z \cap F(C)) \cap F(R) = \phi$

$\Rightarrow Z \cap N = (Z \cap F(C)) \cup \underbrace{(Z \cap F(R))}_{=\phi} \Rightarrow Z \cap N = Z \cap F(C)$ $\quad F(C) \cap \underbrace{(Z \cap F(R))}_{\phi} = \phi$

$N = F(C) \cup F(R)$

$\Rightarrow \underbrace{g(Z \cap N)}_{\text{aperto}} = g(Z \cap F(C))$

aperto $\Rightarrow$ $\bar{R}$ rettangolo $\subseteq g(Z \cap N)$ con $\text{vol}(R) > 0$ $\Rightarrow \bar{R}$ non ha misura 0 ↯

Lemma Sard

$g(Z \cap N) = g(Z \cap F(C))$

$g(Z \cap N)$ ↓ non ha misura 0 $\qquad$ $g(Z \cap F(C))$ ↓ ha misura 0

$\Rightarrow Z \cap N$ contiene pti di $Z \cap F(R)$ cioè $Z \cap N$ contiene valori regolari

Fatto

M, N varietà $\Rightarrow M \times N$ varietà $\quad \dim(M \times N) = \dim M + \dim N$

$T_{(x,y)}(M, N) \cong T_x M \oplus T_y N$

$f^{-1}(y)$ y VALORE REGOLARE

PROP

M, N varietà, $\dim M = m > \dim N = n$
$f: M \to N$ C^∞
$y \in N$ valore regolare

$\Rightarrow f^{-1}(y) \subseteq M$ è varietà di dim $m-n$

dim

Sia $x \in f^{-1}(y)$ x pto regolare $\Rightarrow df_x : T_x M \to T_y N$ è surgettiva

Sia $K = \ker df_x \subseteq T_x M \subseteq \mathbb{R}^K$, $M \subseteq \mathbb{R}^K$ $\quad \dim K = m - \dim \operatorname{Im} df_x = m - n$

Sia $L: \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^{m-n}$ lineare con $L|_K : K \to \mathbb{R}^{m-n}$ isomorfismo

(lin + surg + spazi della stessa dim)

Sia $F: M \to N \times \mathbb{R}^{m-n}$ $\Rightarrow dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$

$x \longmapsto (f(x), L(x))$

Studio il Ker dF_x

$v \in \ker dF_x \iff dF_x(v) = (df_x(v), L(v)) = 0 \iff df_x(v) = L(v) = 0 \overset{(*)}{\iff} v = 0$

$*$ $df_x(v) = 0 \iff v \in \ker df_x = K$ ma $\forall v \in K$ $L(v) \neq 0$ $\Rightarrow$ si annullano entrambi $\iff v = 0$

Quindi $\ker dF_x = \{0\} \Rightarrow dF_x$ è inj

Inoltre $dF_x : T_x M \to T_y N \times T_y \mathbb{R}^{m-n}$ $\quad \dim T_x M = m = \dim(T_y N \times \underset{\mathbb{R}^{m-n}}{T_y \mathbb{R}^{m-n}}) = n + m - n = m$

Quindi dF_x è inj + dF_x va tra spazi della stessa dim + è lineare $\Rightarrow dF_x$ surg.

$\Rightarrow x$ è valore regolare per F

Prop 1.
$\Rightarrow \exists U \subseteq M$ int di x tc $F|_U : U \overset{\cong}{\to} V$ int di $F(x) = (\underset{y}{f(x)}, L(x)) \subseteq N \times \mathbb{R}^{m-n}$

guardiamo la carta per l'ipotetica varietà $f^{-1}(y)$ $F|_U : f^{-1}(y) \cap U \longrightarrow F(f^{-1}(y)) \cap F(U)$

$F(f^{-1}(y)) = (y, L(x))$, $f(x)$; $F(U) = V$; $= \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n} \cap V$

$F : \underbrace{F^{-1}(V \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}))}_{\text{int. di } x \text{ in } f^{-1}(y)} \longrightarrow V \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n})$ aperto in $\mathbb{R}^{m-n}$

$F^{-1}(V \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n})) \supseteq U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$, $\quad V \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cong \mathbb{R}^{m-n}$

controlliamo che $F^{-1}(V \cap \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \subseteq U \iff$
$F(F^{-1}(V \cap \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n})) \subseteq f(U) = V \iff V \cap \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n} \subseteq V$ ok.

Prop

M, N varietà, $\dim M = m \geq \dim N = n$
$f : M \longrightarrow N$ C^∞
$y \in N$ valore regolare di f

Allora $T_x f^{-1}(y) = \operatorname{Ker} df_x$ $\forall x \in f^{-1}(y)$ e $df_x|_{(T_x f^{-1}(y))^\perp} : (T_x f^{-1}(y))^\perp \xrightarrow{\cong} T_y N$ iso

dim

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(y) & \overset{i}{\hookrightarrow} & M \\ \downarrow f|_{f^{-1}(y)} & \circlearrowright & \downarrow f \\ \{y\} & \underset{j}{\hookrightarrow} & N \end{array}$$

$f \circ i = j \circ f|_{f^{-1}(y)}$

$\begin{cases} f \circ i : f^{-1}(y) \longrightarrow N \implies d(f \circ i) : T_x f^{-1}(y) \longrightarrow T_x N \\ df_x : T_x M \longrightarrow T_y N \implies df_x|_{T_x f^{-1}(y)} \equiv d(f \circ i) \end{cases}$

Sia $v \in T_x f^{-1}(y) \implies df_x|_{T_x f^{-1}(y)} \overset{*}{=} df(v)_x \circ di(v)_x = \underbrace{dj(v)_y}_{0} \circ d(f|_{f^{-1}(y)})(v)_x = 0$

$dj_y : T_y \{y\} \longrightarrow T_y N$, $T_y\{y\} = \{0\}$

$\implies v$ arbit. $\implies \underbrace{T_x f^{-1}(y)}_{\substack{\text{ha dim} = \\ \dim f^{-1}(y) \\ = m-n}} \subseteq \underbrace{\operatorname{Ker} df_x}_{\text{ha dim } m-n \,=\, \dim T_x M - \dim T_y N}$

$\dim T_x M = \dim M$, $\dim T_y N = \dim N$

Vale $\subseteq$ + stessa dim $\implies T_x f^{-1}(y) = \operatorname{Ker} df_x$

$df_x|_{(T_x f^{-1}(y))^\perp} : \underbrace{(T_x f^{-1}(y))^\perp}_{*} \longrightarrow T_y N$

dim $* = \dim T_x M - \dim T_x f^{-1}(y) = m - (m-n) = n$ perché $T_x f^{-1}(y) \oplus T_x f^{-1}(y)^\perp$

$df_x|_{(T_x f^{-1}(y))^\perp}$ è inj poiché $n = \dim \operatorname{Ker} df_x|_{T^\perp} + \dim \operatorname{Im} \implies \dim \operatorname{Ker} = 0$

$n = \dim (T f^{-1}(y))^\perp$, $\dim \operatorname{Im} = n = \dim T_y N$

$\implies df_x|_{(T_x f^{-1}(y))^\perp}$ è inj + lineare + spazi della stessa dim $\implies$ è iso

IL GRUPPO DELLE MATRICI ORTOGONALI E' UNA VARIETA' DI DIM $\frac{n(n-1)}{2}$

$M(n)$ spazio delle matrici reali $\simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $S(n)$ spazio delle mat. simmetriche $\simeq \mathbb{R}^{n^2}$

$$f: M(n) \longrightarrow S(n)$$
$$A \longmapsto AA^T$$

$O(n) = f^{-1}(I)$ gruppo delle matrici ortog.

$$A \in f^{-1}(I) \Rightarrow df_A(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(A+\varepsilon B) - f(A)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(A+\varepsilon B)(A+\varepsilon B)^T - AA^T}{\varepsilon} = AB^T + BA^T$$

df_A e' surg perche' data $C \in S(n)$ e $A \in O(n)$ posso trovare $B \in M(n)$ tc $AB^T + BA^T = C$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}C + (\frac{1}{2}C)^T$ quindi basta trovare B tc $BA^T = \frac{1}{2}C$ es $B = \frac{1}{2}CA$ funziona

$df_A: T_A M(n) \longrightarrow T_I S(N)$ surg. $\forall A \in f^{-1}(I)$

$\Rightarrow f^{-1}(I) = O(N)$ e' una varieta' di dim $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

(I valore regolare per f)