

Introduzione alla Ricerca Operativa

Maria Grazia Santella

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa; Cap. 1)

Obiettivi: risolvere problemi decisionali

(di ottimizzazione), in variati contesti

applicativi, sfruttando le loro proprietà matematiche

→ Link con analisi, geometria, statistica, informatica, ingegneria, economia ...

in Teoria e in pratica

Un semplice problema decisionale

$G = (V_1 \cup V_2, A)$ rete logistica
bipartita

V_1 : insieme dei pazienti

V_2 : insieme dei centri di assistenza

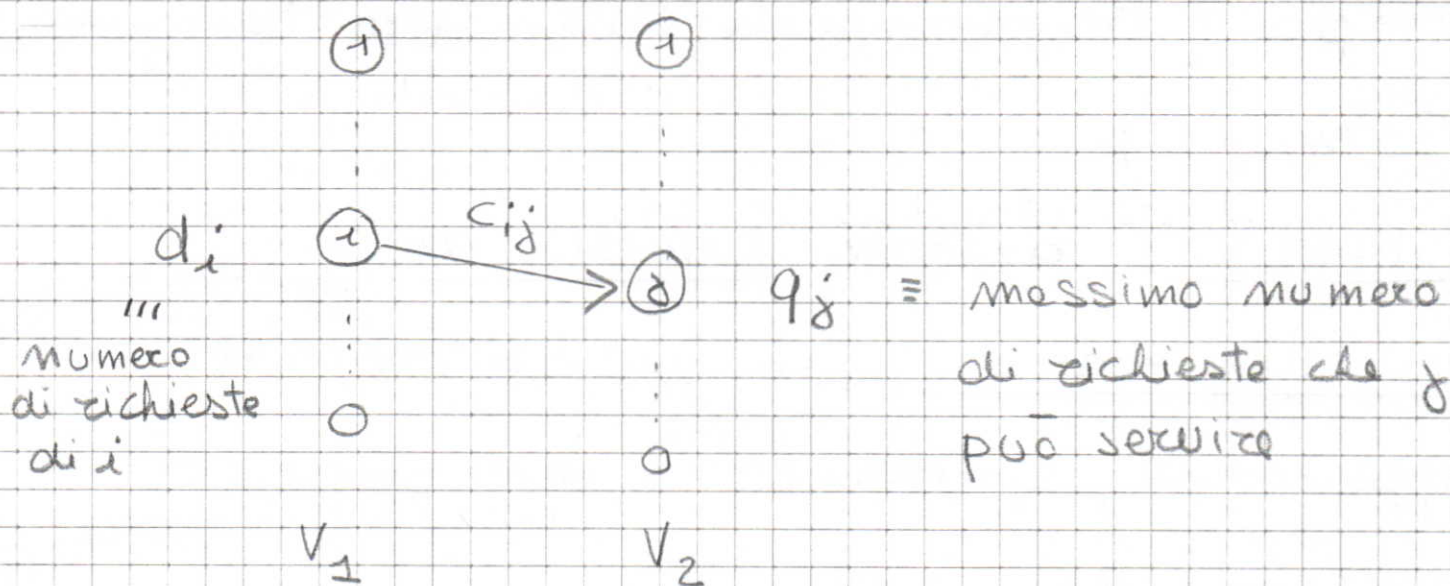
A : insieme dei possibili
collegamenti

dati di input:

d_i : domanda del paziente i , $\forall i \in V_1$

q_j : capacità di servizio del centro j , $\forall j \in V_2$

c_{ij} : costo unitario di servizio,
 $\forall (i, j) \in A$



Problema decisionale: decidere come servire i pazienti in modo da soddisfare la loro domanda e rispettando la capacità dei centri di assistenza (vincoli), con l'obiettivo di minimizzare il costo totale di servizio (funzione obiettivo): problema di ottimizzazione.

Schema di processo decisionale:

- 1) Individuazione del problema decisionale
- 2) Analisi della realtà e raccolta dei dati
- 3) Definizione di un modello matematico *
- 4) Risoluzione del modello matematico, *
mediante un algoritmo risolutivo
- 5) Analisi dei risultati ottenuti

Cos'è un modello matematico: descrizione del problema mediante strumenti di tipo logico-matematico:

Teoria dei giochi: l'uomo è introdotto nel modello attraverso i giocatori

modelli di simulazione: si descrive il comportamento di un sistema mediante relazioni matematiche, e si studia la sua risposta a sollecitazioni simili a quelle reali

* modelli analitici: il problema è descritto

mediante relazioni matematiche tra variabili
(decisionali, modellano le decisioni da prendere);
si cercano valori che soddisfano i vincoli e
ottimizzano la funzione obiettivo

esempio (cont.)

variabili decisionali:

$x_{ij} (\geq 0)$: numero di richieste di i
servite da j , $\forall (i, j) \in A$

$$\text{Min} \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(i, j) \in FS(i)} x_{ij} = d_i \quad \forall i \in V_1$$

" "
stella uscente di i

$$\sum_{(i, j) \in BS(j)} x_{ij} \leq q_j \quad \forall j \in V_2$$

" "
stella entrante di j

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A$$

modello analitico

Definizioni e notazione

Problema : domanda generica, solitamente espresso mediante parametri

Istanza di un problema : domanda specifica, dando un valore a ogni parametro

Un problema è solitamente definito specificando :

- F insieme ammissibile : insieme delle soluzioni del problema, descritto mediante parametri
- $c : F \rightarrow \mathbb{R}$ funzione obiettivo (nel caso di problemi di ottimizzazione)

Un modello analitico generale per un problema di ottimizzazione :

$$(P) : \min_{(\max)} \{ c(x) : x \in F \}$$

↑
parametri

← parametri

↑
vettore delle
variabili
decisionali

$$z(P) = \min_{(max)} \{ c(x) : x \in F \} \quad \underline{\text{valore ottimo di } (P)}$$

$$x^* \in F : c(x^*) = z(P) \quad \underline{\text{soluzione ottima di } (P)}$$

È equivalente formulare in forma di minimizzazione o massimizzazione:

$$\min \{ c(x) : x \in F \} = - \max \{ -c(x) : x \in F \}$$

(i punti di minimo di c coincidono con quelli di massimo di $-c$)

Esempio 1 : Equipartizione

Dato un numero naturale n e un insieme $N = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ di n numeri naturali, trovare un sottoinsieme di N tale che la differenza in valore assoluto tra la somma dei numeri nel sottoinsieme e la somma dei numeri nel complemento sia la minore possibile.

- n, a_1, a_2, \dots, a_n parametri
- se $n = 4$ e $N = \{7, 3, 4, 6\}$ si ottiene un'istanza del problema

Un modello matematico:

$$(EQ): \min \{ c(S) : S \subseteq N \}, \text{ dove}$$

\uparrow
variabile del modello

$$F = \{ S : S \subseteq \underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}_N \}$$

insieme delle
soluzioni
ammissibili

$$c(S) = \left| \sum_{a_i \in S} a_i - \sum_{a_i \in N \setminus S} a_i \right|$$

funzione
obiettivo

Nell'istanza considerata:

$$S^* = \{3, 7\} \text{ è una soluzione ottima}$$

$$c(S^*) = |10 - 10| = 0 \text{ valore ottimo}$$

Problema di ottimizzazione discreto: numero finito (o enumerabile) di soluzioni ammissibili.

Esempio 2: Packing

Dato un quadrato di lato unitario e un numero naturale n , determinare il massimo raggio di n cerchi identici inscritti e non intersecanti.

n : parametro

Un modello matematico:

variabili decisionali;

r : raggio

$x_i, y_i, i=1, \dots, n$: coordinate dei centri dei cerchi

(CP)

$\max r$

"
circolo
packing

$$r \leq x_i \leq 1-r \quad i=1, \dots, n$$

$$r \leq y_i \leq 1-r \quad " \quad "$$

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq 2r \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ j=i+1, \dots, n \end{matrix}$$

Problema di ottimizzazione continuo

Esiti di risoluzione di un modello di ottimizzazione

Dato (P) : $\min \{c(x) : x \in F\}$

1) (P) vuoto, ovvero $F = \emptyset$:

per convenzione $z(P) = +\infty$

($z(P) = -\infty$ se in
forma max)

2) (P) inferiormente illimitato:

se $\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in F$ t.c. $c(x) \leq M$.

per convenzione $z(P) = -\infty$

(P) superiormente illimitato, $z(P) = +\infty$ se
(in forma max)

3) (P) ha valore ottimo finito ($-\infty < z(P) < +\infty$)

ed esiste $x^* \in F$: $c(x^*) = z(P)$
 \uparrow
soluzione ottima

4) (P) ha valore ottimo finito, ma non ha
soluzione ottima, cioè $\nexists x \in F : c(x) = z(P)$

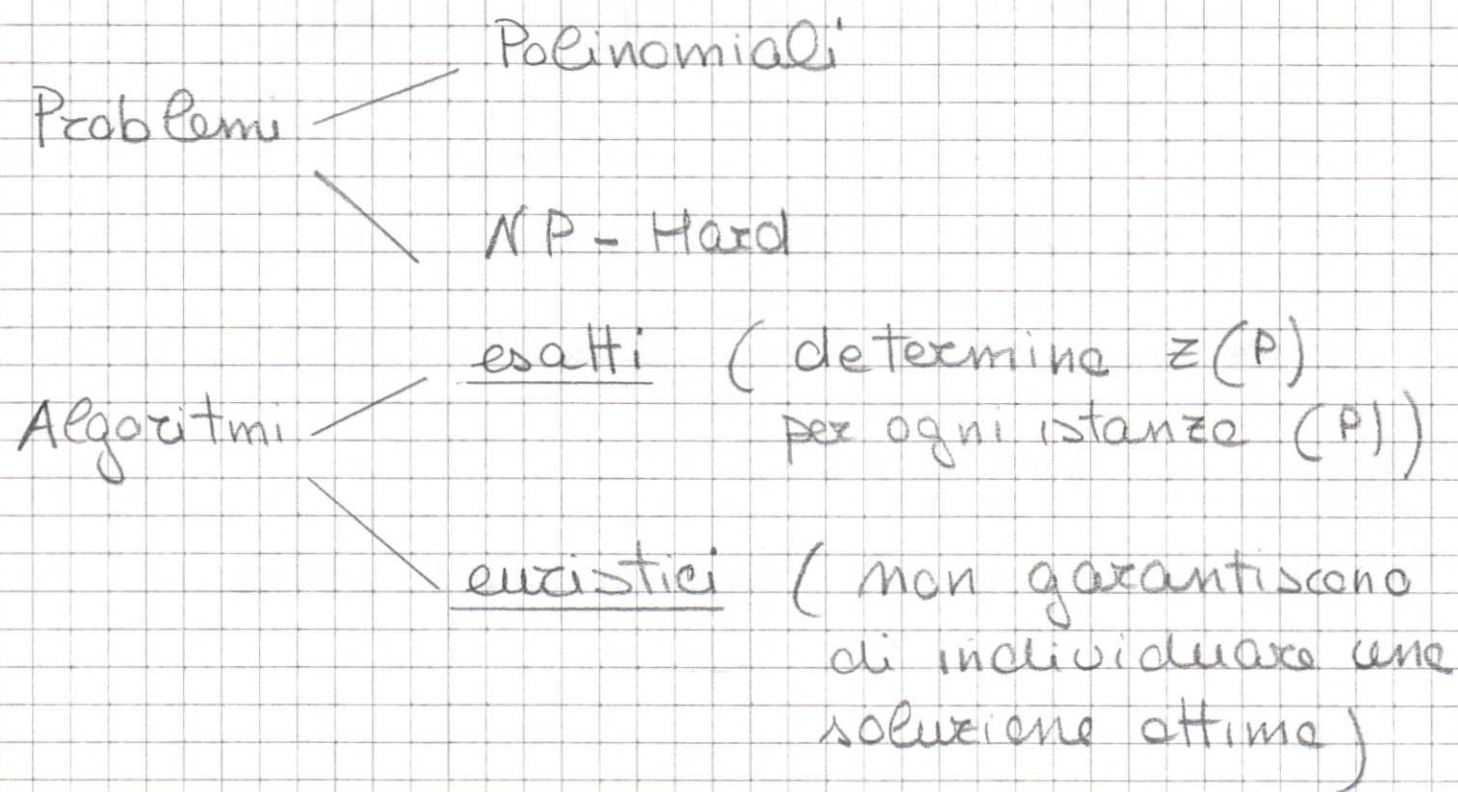
esempio $\inf \{ x : x > 0 \}$

valore ottimo 0, ma nessuna soluzione ottima

Come si risolve un problema di ottimizzazione:

problema \rightarrow modello matematico \rightarrow algoritmo
(ad hoc oppure tramite solver)

Algoritmo : prende in input un'istanza del modello (P) , e restituisce $z(P)$ (e una soluzione ottima, \exists esiste)



Nel caso di euristiche, come si può valutare la bontà di una soluzione $\bar{x} \in F$ restituita dall'euristica?

Errorre assoluto:

approssimazione
superiore di $z(P)$

$$E_{\bar{x}} = c(\bar{x}) - z(P) \geq 0 \quad (\text{se in forma min})$$

(= $z(P) - c(\bar{x})$ se in forma max)

Errorre relativo (invariante rispetto ai cambiamenti di scala):

$$R_{\bar{x}} = \frac{E_{\bar{x}}}{z(P)} \quad \text{assumendo } z(P) > 0$$

Dato $\varepsilon > 0$:

- se $R_{\bar{x}} \leq \varepsilon$, \bar{x} è ε -ottima
- se $R_{\bar{x}} \leq \varepsilon$ per ogni istanza, allora l'algoritmo è ε -approssimato

$z(P)$ non è generalmente noto! Lo si stima risolvendo un'approssimazione di (P) :
considereremo in particolare i rilassamenti di (P) .

Definizione

Dato $(P) : \min \{ c(x) : x \in F \}$,

$(\bar{P}) : \min \{ \bar{c}(x) : x \in \bar{F} \}$ è

detto un rilassamento di (P) se:

i) $F \subseteq \bar{F}$

ii) $\bar{c}(x) \leq c(x) \quad \forall x \in F$ (\nexists se in forma max)

Proprietà: $z(\bar{P}) \leq z(P)$, ovvero è una valutazione inferiore o lower bound di $z(P)$ (valutazione superiore o upper bound se in forma max).

Conseguenza:

$$R_{\bar{x}} = \frac{c(\bar{x}) - z(P)}{z(P)} \leq \frac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})}$$

↖ si può utilizzare al posto di $z(P)$

Se $\frac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})} \leq \varepsilon$, \bar{x} è ε -ottimo

Inoltre:

Teorema: Se (\bar{P}) ha soluzione ottima x^* , e
se x^* è tale che:

- i) $x^* \in F$, ovvero è ammissibile per (P)
- ii) $\bar{c}(x^*) = c(x^*)$,

allora x^* è soluzione ottima di (P) .

Dim

$$\bar{c}(x^*) = z(\bar{P}) \leq z(P) \leq c(x^*) = \bar{c}(x^*)$$

□

Ovvero, in tal caso, risolvendo il
rilassamento si risolve il modello
originario.

Introduzione alla Programmazione Lineare

Mario Franco Scutella

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 1.2.1, 2.1)

Programmazione Lineare (PL): problemi di ottimizzazione caratterizzati da:

1) la funzione obiettivo $c(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, $c(x) = c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

c : vettore dei costi

x : vettore delle variabili decisionali

2) l'insieme ammissibile F è definito da un insieme finito di vincoli lineari del tipo

$$\alpha_i^T x = \beta_i$$

$$\alpha^T x \leq \beta$$

$$\alpha^T x \geq \beta$$

$\alpha \in \mathbb{R}^n$: vettore dei coefficienti

$\beta \in \mathbb{R}$: termine noto

- PL è polinomiale

- Esistono codici commerciali e open-source molto efficienti

Pianificazione della produzione

PINTEL produce due linee di microprocessori:

- 1) PINTIUM / prezzo di vendita unitario 500 \$
massimo numero da immettere sul mercato / settimana 400.000
- 2) COLORON / 200 \$
700.000

Impianto di produzione: al più 3000 wafer / settimana

Un singolo wafer può produrre:

- 300 PINTIUM, con resa media del 50% oppure
- 500 COLORON, " " " " 60%

Problema di ottimizzazione: determinare

quanti PINTIUM e quanti COLORON produrre a settimana, rispettando i vincoli di produzione e massimizzando il ricavo totale.

variabili decisionali:

X_p : numero di PARTIUM / settimana

x_c : " " COLORON / settimana

(immessi)
sul
mercato

$$\text{Max } 500 x_p + 200 x_c$$

funzione obiettivo e vincoli

$$x_p \leq 400.000$$

$$x_c \leq 700,000$$

$$(*) \quad 2x_p + x_c \leq 900.000$$

$$x_P, x_C \geq 0$$

Vincoli
Lineari

variabili decisionali di supporto:

w_p : numero wafer per PINTIUM/ settimana

w_c : " " " " COLORON / αH_{max}

$$w_p + w_c \leq 3000$$

$$X_P = w_P \cdot 300 \cdot (0,5) = 150 \quad w_P \neq 0 \quad w_P = \frac{X_P}{150}$$

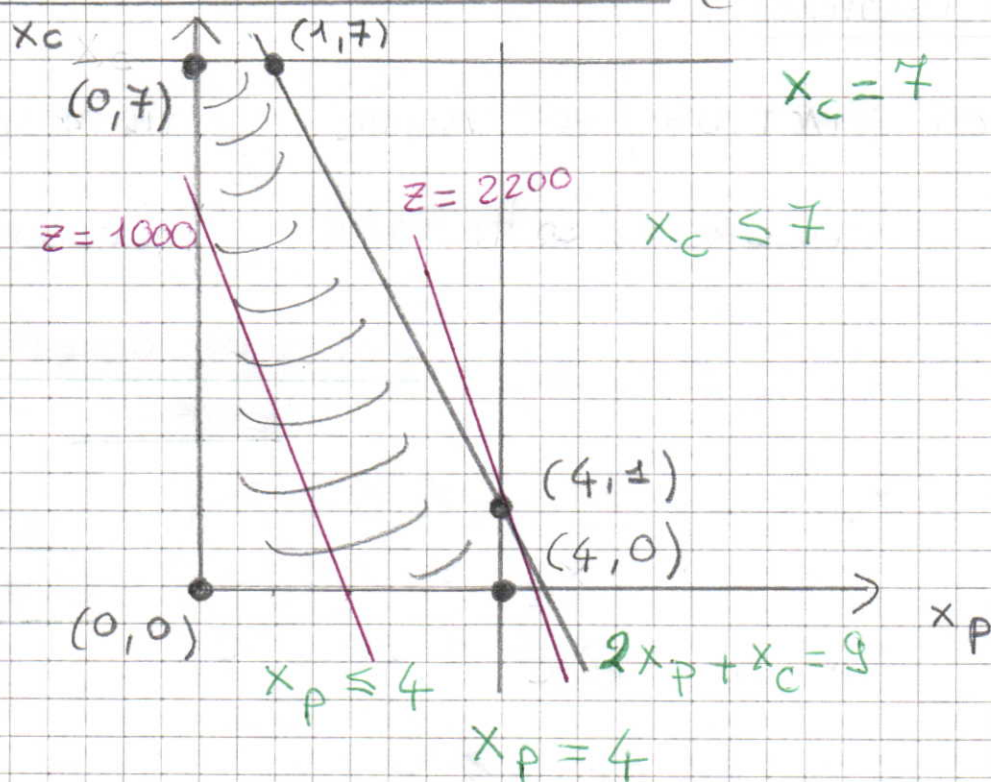
$$x_c = w_c \cdot 500 \cdot (0,6) = 300 w_c \neq 0 \quad \boxed{w_c = \frac{x_c}{300}}$$

Sostituendo in $\omega_p + \omega_c \leq 3000$:

$$\frac{x_P}{150} + \frac{x_C}{300} = \frac{2x_P + x_C}{300} \leq 3000 \quad \text{ovvero}$$

$$(*) \quad 2x_P + x_C \leq 900.000$$

Rappresentazione geometrica dell'insieme ammissibile di PINTEC (scalando gli assi di 100.000)



- Ogni retta (iperpiano) associata a un vincolo divide il piano in due semispazi chiusi:
es $x_P = 4$ divide in $\{(x_P, x_C) : x_P \leq 4\}$
 $\{(x_P, x_C) : x_P \geq 4\}$
- La regione ammissibile è l'intersezione di un numero finito di semispazi ^{chiusi}: poliedro, insieme convesso (politopo e limitato)
- Le rette associate ai vincoli ($x_P = 0$, $x_C = 0$, $x_P = 4$, $x_C = 7$, $2x_P + x_C = 9$) definiscono la frontiera, e individuano facce e vertici
es vertice $(0,7)$ faccia $(0,7)$ - $(1,7)$ vertice

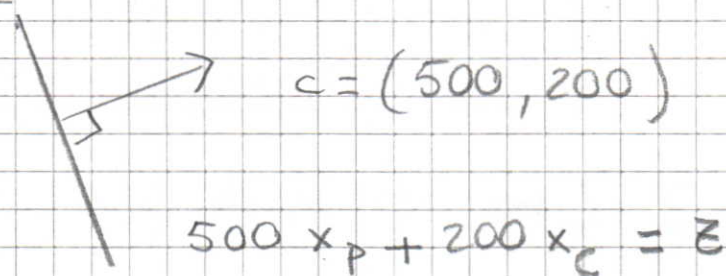
Proprietà: se l'insieme delle soluzioni ottime di un PL è non vuoto, almeno una soluzione ottima corrisponde a un vertice del poliedro; se un punto interno a una faccia è soluzione ottima, tutti i punti della faccia sono soluzioni ottime.

PINTEL: risoluzione per via grafica

$$500 x_p + 200 x_c = z$$

consideriamo $z = 1000$ e $z = 2200$

Al crescere di z , le rette traslano nella direzione di $c = (500, 200)$, gradiente della funzione obiettivo



Risoluzione per via grafica: traslare il più possibile nella direzione di c , finché l'intersezione della retta con la regione ammissibile è non vuota

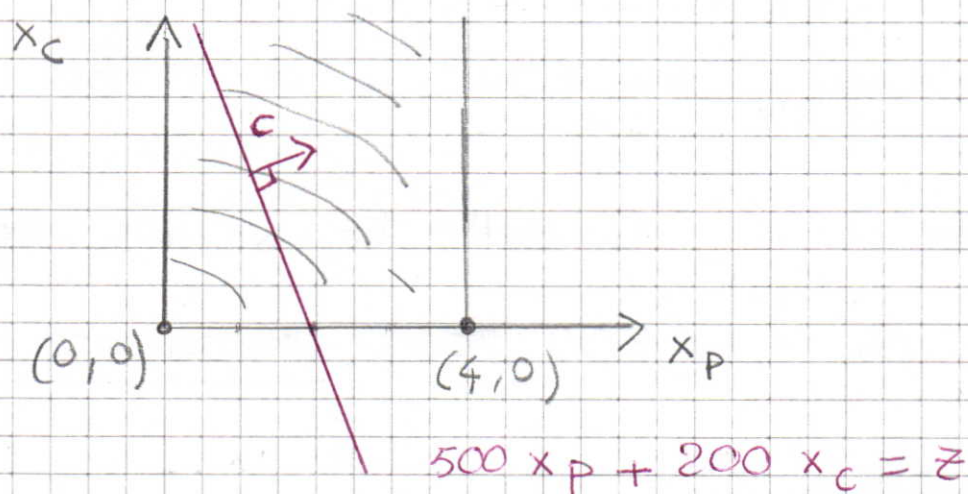
Per PINTEL: $z^* = 2200$; l'intersezione è il solo punto $(4, 1)$, vertice del poliedro (unica soluzione ottima di PINTEL)

In PINTEL : regione ammissibile limitata e non vuota : soluzione ottimale in un vertice del poliedro

Altri possibili esiti di risoluzione :

1) regione ammissibile non limitata

es rimuovendo dal modello di PINTEL il secondo e il terzo vincolo



$Z \rightarrow +\infty$: problema superiormente illimitato (per modello in forme max)

2) regione ammissibile vuota

es

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \geq & 2 \\ x_2 & \geq & 10 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 12 \\ \text{incompatibile} \end{array} \right.$$

Dimostriamo le proprietà di PL in modo rigoroso, riconducendoci alla forma standard

$$\max \{ c^T x : Ax \leq b \}$$

$x \in \mathbb{R}^n$: vettore delle variabili

$c \in \mathbb{R}^n$: " dei costi

A : matrice reale $m \times n$ (ipotesi: $m \geq n$)

$b \in \mathbb{R}^m$: vettore dei termini noti

esempio (PINTEL)

$$\begin{aligned} \max \quad & 500 x_1 + 200 x_2 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 7 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$x = [x_1, x_2]^T$$

$$c^T = [500, 200]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un qualsiasi problema di PL può essere ricondotto a $\max \{c^T x : Ax \leq b\}$ grazie alle seguenti trasformazioni sintattiche:

$$1) \max \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

$$2) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

$$3) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i$$

$$4) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

↑
variabili
strutturali

↑
variabile
di scarto

$$5) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

$$6) x_i \text{ non vincolata in segno} \equiv \begin{cases} x_i = x_i^+ - x_i^- \\ x_i^+, x_i^- \geq 0 \end{cases}$$

esempio

$$\min -2x_1 + 3x_2$$

$$-\max 2x_1 - 3x_2$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$x_2 \leq 0$$

$$\equiv \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ -2x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 \leq -3$$

$$x_2 \leq 0$$

Geometria della PL

Mario Grazia Santella

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Ricerca Operativa, Pappalardo e Passacantando,
Pisa University Press, Seconda edizione, 2012: Cap. 2)

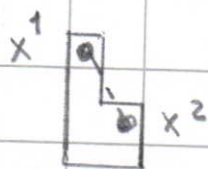
Def Un sottoinsieme K di \mathbb{R}^n si dice convesso se comunque si scelgano $x^1, x^2 \in K$ si ha

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

es



insieme convesso



insieme non convesso

Def Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che

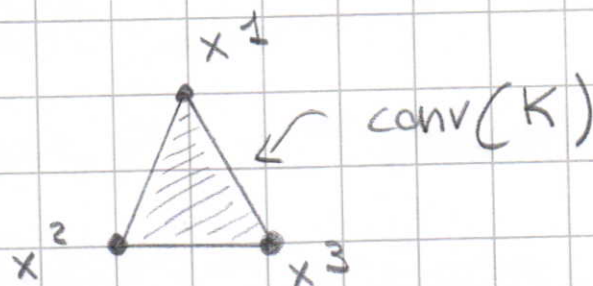
$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \in [0,1] \quad i=1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

La combinazione convessa è propria se $0 < \lambda_i < 1$ per ogni i .

Def L'inviluppo convesso di un insieme K , $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K .

Si può dimostrare che $\text{conv}(K)$ è il più piccolo (nel senso di inclusione) insieme convesso che contiene K ; un insieme convesso coincide quindi con il suo involucro convesso.

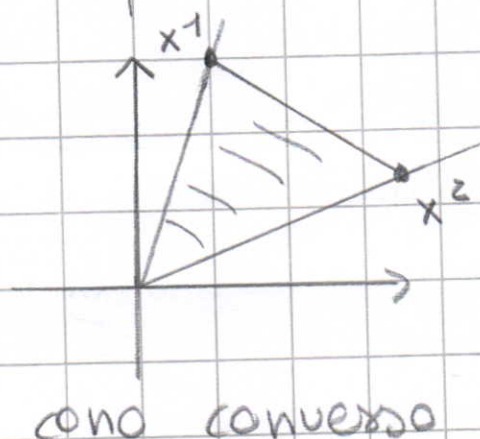
es $K = \{x^1, x^2, x^3\}$



Def Un sottoinsieme K di \mathbb{R}^n si dice cono se per ogni $x \in K$ e per ogni $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$.

Oppure: se K contiene x diversa dall'origine, allora contiene tutta la semiretta uscente dall'origine passante per x .

es



Def Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

La combinazione conica è propria se $h_i > 0, i=1, \dots, m$

Def: L'inviluppo conico di un insieme K , $\text{cono}(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K

Si può dimostrare che:

- 1) $\text{cono}(K)$ è il più piccolo (nel senso di inclusione) cono convesso contenente K
- 2) un insieme è un cono convesso se e solo se coincide con il suo inviluppo conico.

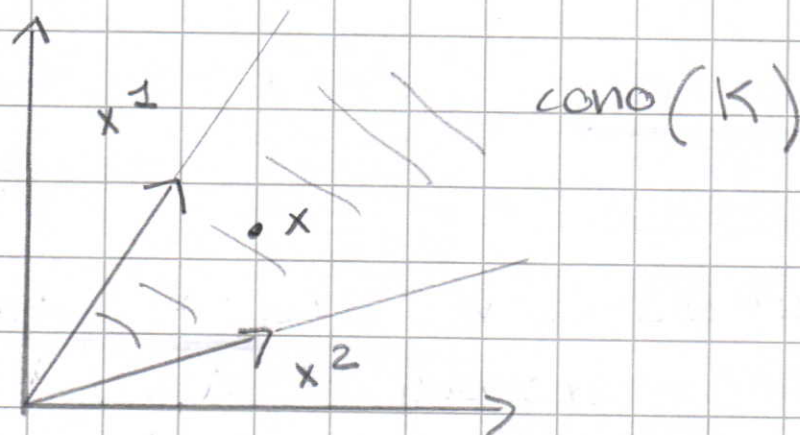
esempio $K = \{x^1, x^2\}$ con $x^1 = (2, 3)$ e $x^2 = (3, 1)$

$x = (3, \frac{13}{6})$ è combinazione conica di x^1 e x^2 :

$$x = \frac{1}{2} x^1 + \frac{2}{3} x^2$$

"
 h_1

"
 h_2



Poliedri

Un semispazio chiuso in \mathbb{R}^n può essere descritto algebricamente come l'insieme delle soluzioni di una disuguaglianza lineare in n variabili:

$$a^T x \leq \beta, \quad a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$$

Def Un poliedro di \mathbb{R}^n è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di \mathbb{R}^n

Ogni poliedro P è quindi rappresentabile come:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

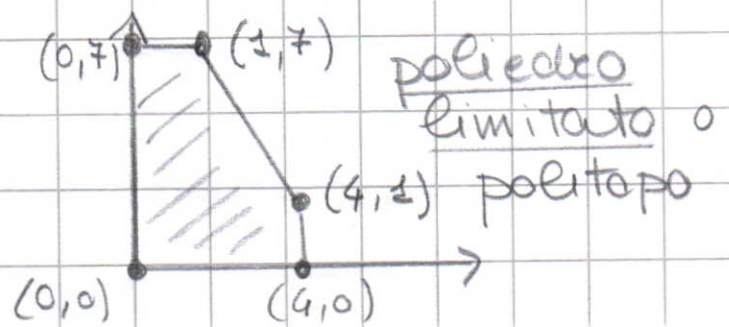
Rappresentazione
per facce

A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$

Proprietà: P è un insieme convesso perché intersezione di semispazi chiusi, che sono insiemi convessi

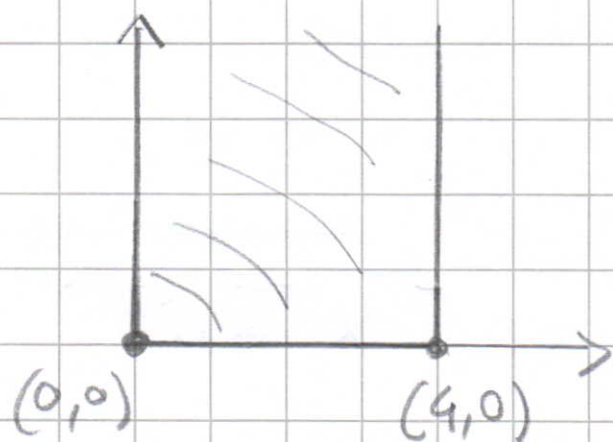
esempio PINTEL

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 4, x_2 \leq 7, 2x_1 + x_2 \leq 9, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0\}$$



Rimuovendo il secondo e il terzo vincolo

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 4, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0\}$$



poliedro non
limitato

Un poliedro che è anche cono è detto cono poliedrico:

Proposizione: Se P è un cono poliedrico allora esiste una matrice Q tale che

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$$

Dim Poiché P è un poliedro è esprimibile come

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq q\}. \text{ Mostriamo che}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq q\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$$

\supseteq : P è un cono e quindi contiene l'origine,

ossia $0 = Q \cdot 0 \leq q$; quindi se $Qx \leq 0$, allora
 $Qx \leq q$

\subseteq : se $Qx \leq q$, ovvero $x \in P$, allora anche
 $\lambda x \in P$ per ogni $\lambda > 0$.

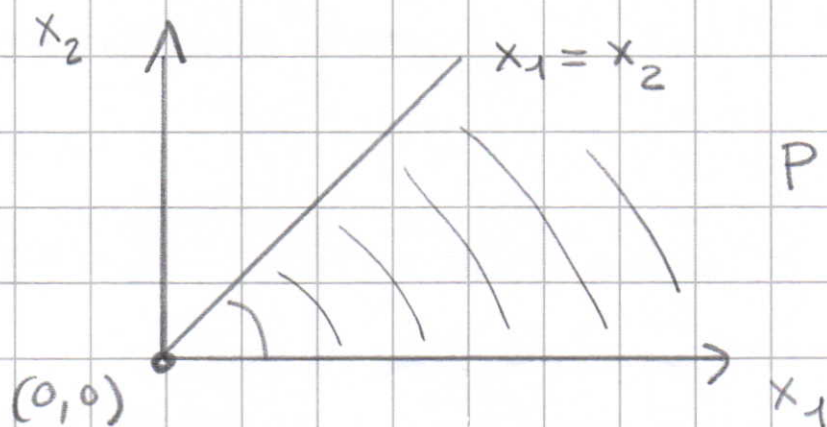
Ovvero deve valere $\varphi(\lambda x) \leq q$ per ogni $\lambda > 0$, ovvero

$$\varphi x \leq \frac{q}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0$$

e quindi $\varphi x \leq 0$ \square

✓ Rappresentazione per facce

esempio $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_1 + x_2 \leq 0\}$ è un cono poliedrico



Def: Un vertice di un poliedro è un punto del poliedro che non può essere espresso come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro. L'insieme dei vertici di un poliedro P è denotato con $\text{vert}(P)$.

Def: Una direzione di recessione per un poliedro P è un vettore d tale che
 $x + \lambda d \in P, \forall x \in P, \forall \lambda \geq 0$.

Quindi: d è direzione di recessione se P contiene tutte le semirette di direzione d uscenti da punti di P ; l'insieme delle direzioni di recessione di P è denotato con $\text{rec}(P)$.

OSS 1: $0 \in \text{rec}(P)$

OSS 2: se P è limitato, allora $\text{rec}(P) = \{0\}$

$\text{rec}(P)$ è un cono poliedrico:

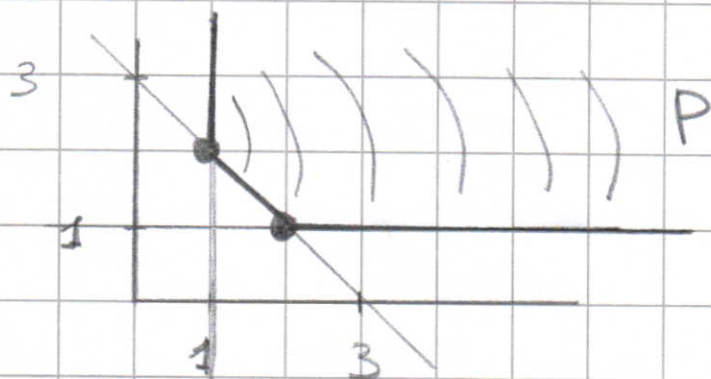
Teorema: Data $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$,
allora

$$\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$$

Mo dim

Esempio

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq -1, -x_2 \leq -1, -x_1 - x_2 \leq -3\}$$



$$\begin{aligned} \text{rec}(P) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_1 - x_2 \leq 0\} = \\ &= \mathbb{R}_+^2 \end{aligned}$$

Def Dati due sottoinsiemi A e B di \mathbb{R}^n ,
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Risultato di supporto:

Proposizione Dato un poliedro P , si ha che
$$P + \text{rec}(P) = P$$

Mo dim

Def Una direzione di linealita' per un poliedro P è un vettore d tale che
$$d \in \text{rec}(P), -d \in \text{rec}(P)$$

Ovvero P contiene tutte le rette di direzione d passanti per punti di P . L'insieme delle direzioni di linealita' di P è denotato con $\text{lineal}(P)$.

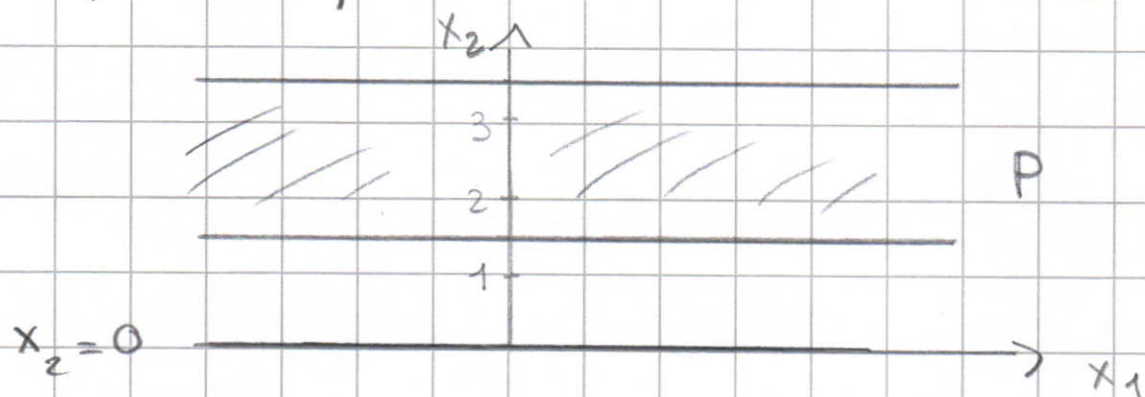
$\text{lineal}(P)$ è un sottospazio vettoriale:

Teorema Dato $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, allora
$$\text{lineal}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Dim

$$\begin{aligned}\text{lineal}(P) &= \text{rec}(P) \cap (-\text{rec}(P)) = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0, Ax \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}. \quad \square\end{aligned}$$

esempio $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_2 \leq 4, -2x_2 \leq -3\}$



$$\text{lineal}(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}, \text{ ovvero la retta } x_2 = 0$$

Caratterizzazione geometrica dei poliedri

Lemma L'involucro conico di un insieme finito di punti $\{e^1, \dots, e^p\}$ è un cono poliedrico, cioè esiste una matrice Φ tale che

$$\text{cono}(e^1, \dots, e^p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi x \leq 0\}.$$

↑ generatori del cono

No dim

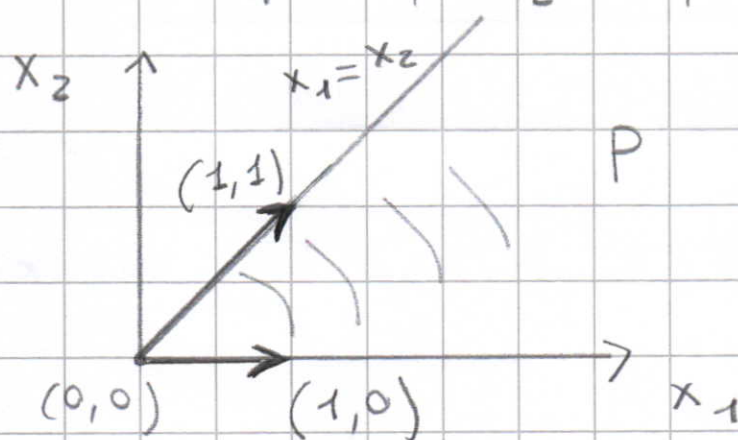
Viceversa:

Lemma Un cono poliedrico $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ è l'involucro conico di un insieme finito di suoi punti.

Mo dim

esempio (cont.)

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_1 + x_2 \leq 0\}$$



$$P = \text{cono}(\{(1,0), (1,1)\})$$

Rappresentazione mediante
generatori

Decomposizione di poliedri

Teorema (Rappresentazione dei poliedri)

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se e solo se esistono un sottoinsieme finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ di P e un insieme finito $E = \{e^1, \dots, e^p\}$, eventualmente vuoti, tali che

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$$

No dim

Si può dimostrare che $\text{cono}(E) = \text{rec}(P)$, ovvero:

Teorema: P è un poliedro se e solo se esiste un sottoinsieme finito V di P tale che

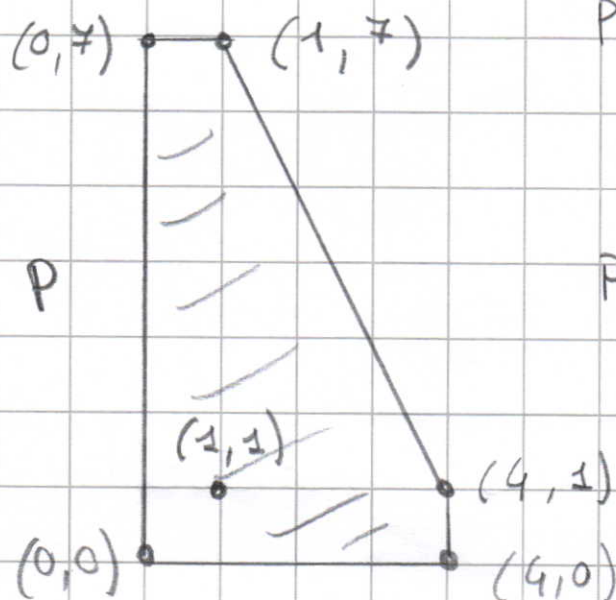
$$P = \text{conv}(V) + \text{rec}(P)$$

No dim

politopo

cono poliedrico

esempio 1 P INTEL



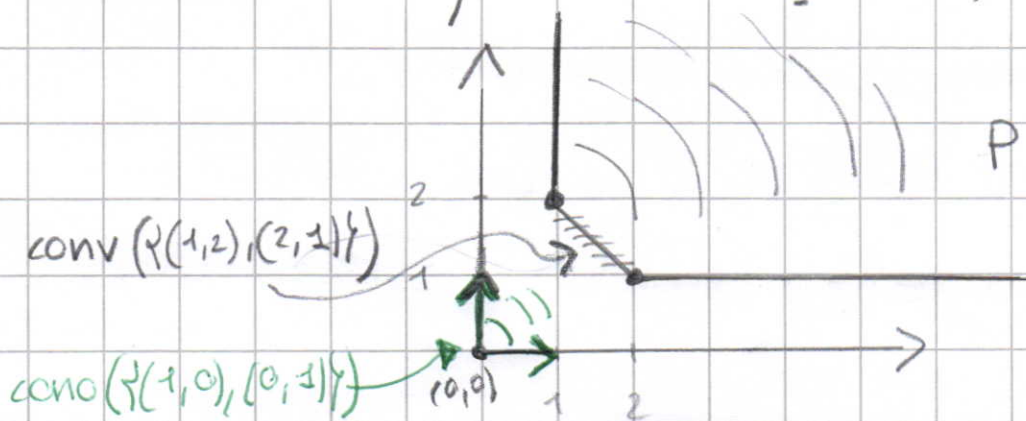
Rappresentazione per facce

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 4, x_2 \leq 7, 2x_1 + x_2 \leq 9, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0 \right\}$$

$$P = \text{conv}(\{(0,0), (4,0), (4,1), (1,7), (0,7)\})$$
$$= \text{conv}(\{(0,0), (4,0), (4,1), (1,7), (0,7), (1,1)\})$$

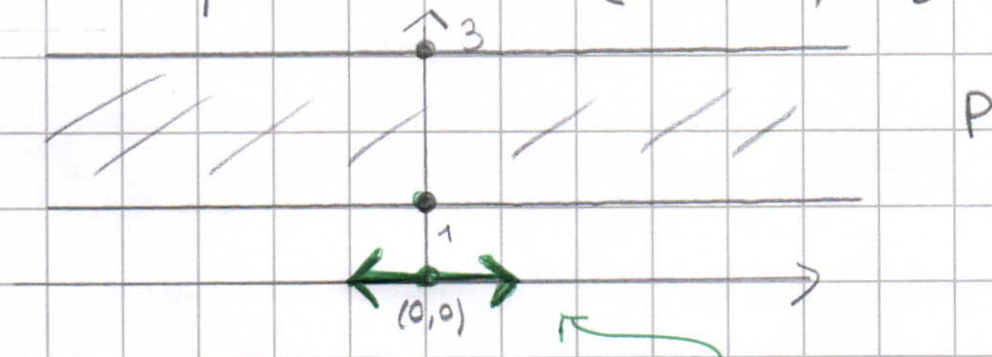
Rappresentazione per punti

esempio 2 $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq -1, -x_2 \leq -1, -x_1 - x_2 \leq -3\}$



$$P = \text{conv}(\{(1,2), (2,1)\}) + \text{cono}(\{(1,0), (0,1)\})$$

esempio 3 $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_2 \leq -1, x_2 \leq 3\}$



$$P = \text{conv}(\{(0,1), (0,3)\}) + \text{cono}(\{(1,0), (-1,0)\})$$

↑
non sono vertici di P!

Se P non contiene rette?

Teorema Se P è un poliedro con $\text{lineal}(P) = \{0\}$,
allora

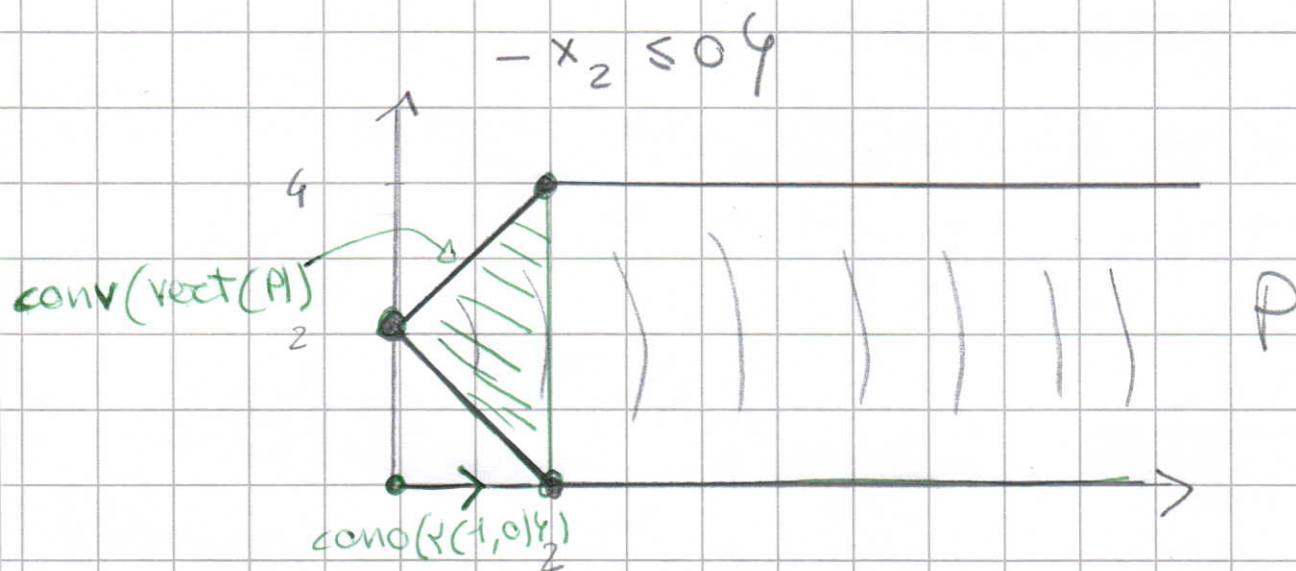
$$P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P)$$

Rappresentazione per punti e generatori

No dim

esempio

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 4, -x_1 - x_2 \leq -2, -x_1 + x_2 \leq 2, -x_2 \leq 0\}$$



$$\text{lineal}(P) = \{0\}$$

$$P = \underbrace{\text{conv}(\{(0, 2), (2, 0), (2, 4)\})}_{\text{vert}(P)} + \underbrace{\text{cono}(\{(1, 0)\})}_{\text{rec}(P)}$$

Corollario (del Teorema precedente): Per ogni poliedro non vuoto P si ha

$$\text{vert}(P) \neq \emptyset \iff \text{lineal}(P) = \{0\}$$

Dim

\Rightarrow Sia \bar{x} vertice di P . Se per assurdo $\text{lineal}(P) \neq \{0\}$, allora esiste $d \in \text{lineal}(P)$, $d \neq 0$. Quindi

$\bar{x} + d \in P$ e $\bar{x} - d \in P$. Inoltre

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + d) + \frac{1}{2}(\bar{x} - d)$$

contraddicendo l'ipotesi che \bar{x} sia vertice di P

\Leftarrow : Se $\text{lineal}(P) = \{0\}$, allora

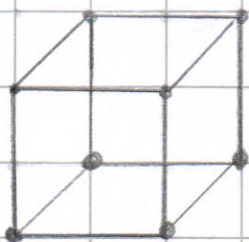
$$P = \text{conv}(\text{vect}(P)) + \text{rec}(P) :$$

- o $\text{vect}(P) \neq \emptyset$
- oppure $P = \text{rec}(P)$, e in tal caso l'origine è un vertice di P \square

Osservazioni:

- 1) dal punto di vista computazionale, si utilizza la rappresentazione per facce di un poliedro
- 2) il numero di vertici e generatori può essere esponenziale rispetto alla dimensione del problema di PL

$$n = 3$$



$$2n = 6 \text{ facce}$$

$$2^n = 8 \text{ vertici}$$

- 3) utilizzeremo il Teorema di decomposizione di poliedri per dimostrare che, se un problema di PL ha soluzione ottima, allora almeno un vertice del poliedro che rappresenta le sue soluzioni ammissibili è soluzione ottima.

Teorema (Fondamentale della PL):

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un poliedro non vuoto tale che $\text{lineal}(P) = \{0\}$. Siano v^1, \dots, v^m i vertici di P , e siano e^1, \dots, e^p tali che

$$P = \text{conv}(\{v^1, \dots, v^m\}) + \text{cono}(\{e^1, \dots, e^p\})$$

Si consideri il problema di PL:

$$(P): \max \{c^T x : \underbrace{Ax \leq b}_{x \in P}\}$$

Allora P ha ottimo finito se e solo se $c^T e^j \leq 0$, $j = 1, \dots, p$. In tal caso esiste $k \in \{1, \dots, m\}$ tale che il vertice v^k è una soluzione ottima di (P) .

Dim

$(P): \max \{c^T x : Ax \leq b\}$ può essere riformulato

come

$$\max \sum_{i=1}^m \lambda_i (c^T v^i) + \sum_{j=1}^p \gamma_j (c^T e^j)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\gamma_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, p$$

Rappresentazione
per punti e
generatori

(P) ha ottimo finito se e solo se $c^T e^{\delta} \leq 0$,
 $\delta = 1, \dots, p$: ~~se~~ ^{Se} esistesse $\delta \in \{1, \dots, p\}$ tale che
 $c^T e^{\delta} > 0$, facendo crescere γ_{δ} ($\gamma_{\delta} \rightarrow +\infty$)
 il valore ottimo tenderebbe a $+\infty$.

Viceversa se

~~Si consideri allora~~ $c^T e^{\delta} \leq 0$, $\delta = 1, \dots, p$, e sia
 x una qualsiasi soluzione ammissibile, ovvero

$x \in P$:

$$c^T x = \sum_{i=1}^m \lambda_i (c^T v^i) + \sum_{\delta=1}^p \gamma_{\delta} (c^T e^{\delta}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (c^T v^i) \leq c^T v^k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) = c^T v^k,$$

dove v^k è un vertice tale che $c^T v^k = \max_{i=1, \dots, m} \{c^T v^i\}$:
 il problema ha ottimo finito ed
 esiste un
 vertice che è soluzione ottima di (P). \square

Corollario $\max \{c^T x : Ax \leq b\}$ è superiormente
 illimitato se e solo se esiste una direzione
 di recessione e^{δ} del poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$
 tale che $c^T e^{\delta} > 0$: direzione di crescita
illimitata

Teoria della Dualità

Maria Grazia Santella

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: par. 2.2)

esempio: un problema di dieta

Un dietologo consiglia due tipi di alimenti, A e B, e il seguente fabbisogno minimo giornaliero di carboidrati, proteine e vitamine:

	A	B	fab. minimo giornaliero
carboidrati	5	7	8
proteine	4	2	15
vitamine	2	1	3
costo unitario	1200	750	

Problema di ottimizzazione: si determini una dieta di costo minimo che rispetti i requisiti sul fabbisogno minimo giornaliero.

Un modello matematico

Variabili decisionali:

x_1 : unità di alimento di tipo A acquistato

x_2 : " " " " " B "

$$\min 1200 x_1 + 750 x_2$$

unità carboidrati	5	x_1	+	7	x_2	≥ 8	PL
" proteine	4	x_1	+	2	x_2	≥ 15	
" vitamine	2	x_1	+		x_2	≥ 3	
		x_1			x_2	≥ 0	

problema associato: venditore di pillole

Un venditore vuole immettere sul mercato pillole di carboidrati, proteine e vitamine. Vuole determinare i prezzi di vendita, massimizzando il ricavo, in modo che i prezzi siano competitivi, ovvero per il cliente non sia svantaggioso acquistare pillole anziché direttamente A e B.

Un modello matematico

Variabili decisionali: un'unità

y_1 : prezzo vendita una pillole di carboidrati

y_2 : " " " " " proteine

y_3 : " " " " " vitamine

$$\max 8y_1 + 15y_2 + 3y_3$$

$$5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1200$$

$$PL \quad 7y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 750$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Legame sintattico tra i due problemi di PL:

	x_1	x_2		max
y_1	5	7	\geq	8
y_2	4	2		15
y_3	2	1		3
	\wedge			
min	1200	750		

Legame semantico tra i due problemi di PL:

sia (x_1, x_2) una dieta ammissibile

sia (y_1, y_2, y_3) un setting di prezzi ammissibile

$$(5y_1 + 4y_2 + 2y_3) \overset{\pi_1^0}{x_1} \leq 1200 \overset{\pi_1^0}{x_1}$$

$$(7y_1 + 2y_2 + y_3) \overset{\pi_2^0}{x_2} \leq 750 \overset{\pi_2^0}{x_2}$$

Sommando membro a membro:

$$(5y_1 + 4y_2 + 2y_3)x_1 + (7y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 \leq 1200x_1 + 750x_2$$

Riordinando i Termini :

$$\begin{array}{ccccccc} (5x_1 + 7x_2)y_1 + (4x_1 + 2x_2)y_2 + (2x_1 + x_2)y_3 & \leq & & & & & \\ \text{IV} & & \text{IV} & & \text{IV} & & \\ 8 & & 15 & & 3 & & 1200x_1 + 750x_2 \end{array}$$

si ricave:

$$8y_1 + 15y_2 + 3y_3 \leq 1200x_1 + 750x_2$$

ricavo del venditore costo della dieta

Ovvero : comunque si fissano prezzi ammissibili, il ricavo del venditore è minore o uguale del costo di una qualsiasi dieta ammissibile.

valutazione inferiore
valore ottimo problema
della dieta

valutazione superiore
valore ottimo problema
venditore di pillola

In generale :

Def Dato un problema di PL nella forma

$$\max \{ c^T x : Ax \leq b, x \geq 0 \} \quad \text{primale}$$

ad esso è associato il problema di PL

$$\min \{ y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0 \} \quad \text{duale}$$

Coppia simmetrica di problemi duali

Teorema : Il duale del duale è il primale,

Dim

Si consideri il problema duale:

$$\begin{aligned} & \min \{ y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0 \} = \\ & = - \max \{ -y^T b : -y^T A \leq -c^T, y \geq 0 \} = \\ & = - \max \{ (-b)^T y : (-A^T) y \leq -c, y \geq 0 \} \end{aligned}$$

Applicando la definizione di problema duale:

$$\begin{aligned} & - \min \{ x^T (-c) : x^T (-A^T) \geq (-b)^T, x \geq 0 \} = \\ & = \max \{ c^T x : Ax \leq b, x \geq 0 \} \text{ ovvero} \\ & \text{il primale.} \quad \square \end{aligned}$$

Considereremo la seguente coppia:

$$(P) \quad \begin{aligned} & \max c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

$$(D) \quad \begin{aligned} & \min y^T b \\ & y^T A = c^T \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Coppia asimmetrica di problemi duali

• Equivalente alla definizione precedente

Corrispondenze primali-duali

max

c

b

$$A_i x \leq b_i$$

$$A_i x \geq b_i$$

$$A_i x = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$x_j \leq 0$$

$$x_j \geq 0$$

x

una per ogni
colonna di A

min

b

c

$$y_i \geq 0$$

$$y_i \leq 0$$

$$y_i \geq 0$$

$$y A^j \geq c_j$$

$$y A^j \leq c_j$$

$$y A^j = c_j$$

y

una per ogni
riga di A

esempio

$$\min 2x_1 + 3x_2$$

$$y_1 \quad x_1 - x_2 \geq 2$$

$$y_2 \quad 2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$y_3 \quad 4x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$

duale

→

$$\max 2y_1 + 3y_2 + y_3$$

$$y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 2$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 = 3$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

$$(y_3 \geq 0)$$

Teorema debole della dualità

Consideriamo la coppia asimmetrica di problemi duali:

$$(P) \quad \max c^T x \\ Ax \leq b$$

$$(D) \quad \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0$$

Teorema (debole della dualità): Se \bar{x} è una soluzione ammissibile per (P) e \bar{y} è una soluzione ammissibile per (D), allora

$$c^T \bar{x} \leq \bar{y}^T b$$

Dim

$$\begin{aligned} \bar{y}^T A = c^T &\Rightarrow c^T \bar{x} = (\bar{y}^T A) \bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} \leq \bar{y}^T b \\ Ax \leq b, \bar{y} \geq 0 &\Rightarrow \bar{y}^T (A \bar{x}) \leq \bar{y}^T b \end{aligned}$$

□

Corollario 1: Se (P) è superiormente illimitato, allora (D) è vuoto; viceversa, se (D) è inferiormente illimitato, allora (P) è vuoto.

Corollario 2: Se (P) e (D) sono non vuoti:

$$\max \{ c^T x : A x \leq b \} = \min \{ y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0 \}$$

Corollario 3: Se \bar{x} è soluzione ammissibile per (P), \bar{y} è soluzione ammissibile per (D) e $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$, allora \bar{x} è soluzione ottima per (P) e \bar{y} è soluzione ottima per (D).

< certificato di ottimalità >

esempio (PINTEL)

$$(P) \max 500 x_1 + 200 x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 9 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$(D) \min 4y_1 + 7y_2 + 9y_3$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_3 - y_4 &= 500 \\ y_2 + y_3 - y_5 &= 200 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\bar{x} = (4, 1)$ soluzione ottima di (P)

$$c^T \bar{x} = 2200$$

$\bar{y} = (100, 0, 200, 0, 0)$ soluzione ammissibile per (D)

$$\bar{y}^T b = 2200 = c^T \bar{x}$$

Segue che:

1) $\bar{x} = (4, 1)$ soluzione ottima di PINTEL

2) $\bar{y} = (100, 0, 200, 0, 0)$ soluzione ottima per il suo duale

Certificato algebrico di ottimalità

(\bar{x} certifica per \bar{y} , \bar{y} certifica per \bar{x})

Dati:

$$(P) \max c^T x$$

$$(D) \min y^T b$$

$$Ax \leq b$$

$$y^T A = c^T$$

$$y \geq 0$$

e assumendo (P) non vuoto, come determinare una soluzione ottima di (P), se esiste.

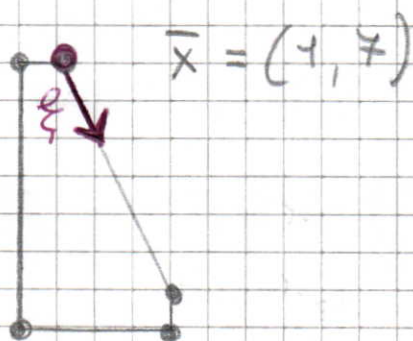
Sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P)

Def. $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una direzionale ammissibile

per \bar{x} se esiste $\bar{\lambda} > 0$ tale che

$$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \xi \text{ è ammissibile per (P) } \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$$

esempio (PINTEL)



Algebricamente: $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una direzione ammissibile per \bar{x} se e solo se

$$A \bar{x}(\lambda) \leq b \quad \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}] \quad , \text{ ovvero}$$

$$A_i \bar{x}(\lambda) \leq b_i \quad " \quad , i=1, \dots, m, \text{ ovvero}$$

$$A_i (\bar{x} + \lambda \xi) \leq b_i \quad " \quad " \quad \text{ovvero}$$

$$A_i \bar{x} + \lambda A_i \xi \leq b_i \quad " \quad "$$

Def: L'insieme dei vincoli attivi in \bar{x} è l'insieme dei vincoli soddisfatti in forma di uguaglianza.

$$\text{Sic } I(\bar{x}) = \{ i \in \{1, \dots, m\} : A_i \bar{x} = b_i \}$$

Osservazioni:

1) se $i \in I(\bar{x})$:

$$A_i \bar{x} + \lambda A_i \xi = b_i + \lambda A_i \xi \quad , \text{ quindi}$$

$$A_i \bar{x} + \lambda A_i \xi \leq b_i \quad \text{se e solo se} \quad A_i \xi \leq 0$$

2) se $i \notin I(\bar{x})$: (vincolo non attivo in \bar{x})

$$A_i \bar{x} + \lambda A_i \xi \leq b_i \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ purché si scelga } \lambda \text{ sufficientemente piccolo}$$

\uparrow
 b_i

Segue:

Proprietà (caratterizzazione algebrica delle direzioni ammissibili): $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una direzione ammissibile per \bar{x} se e solo se $A_i \xi \leq 0$ $\forall i \in I(\bar{x})$, ovvero

$$\boxed{A_{I(\bar{x})} \xi \leq 0}$$

dove $A_{I(\bar{x})}$ è la sottomatrice di A formata dalle sole righe di coefficienti corrispondenti ai vincoli attivi.

Quindi, l'insieme delle direzioni ammissibili per \bar{x} è il cono poliedrico

$$\boxed{C(\bar{x}) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : A_{I(\bar{x})} \xi \leq 0 \}}$$

esempio (PINTEL)

$$\max 500 x_1 + 200 x_2$$

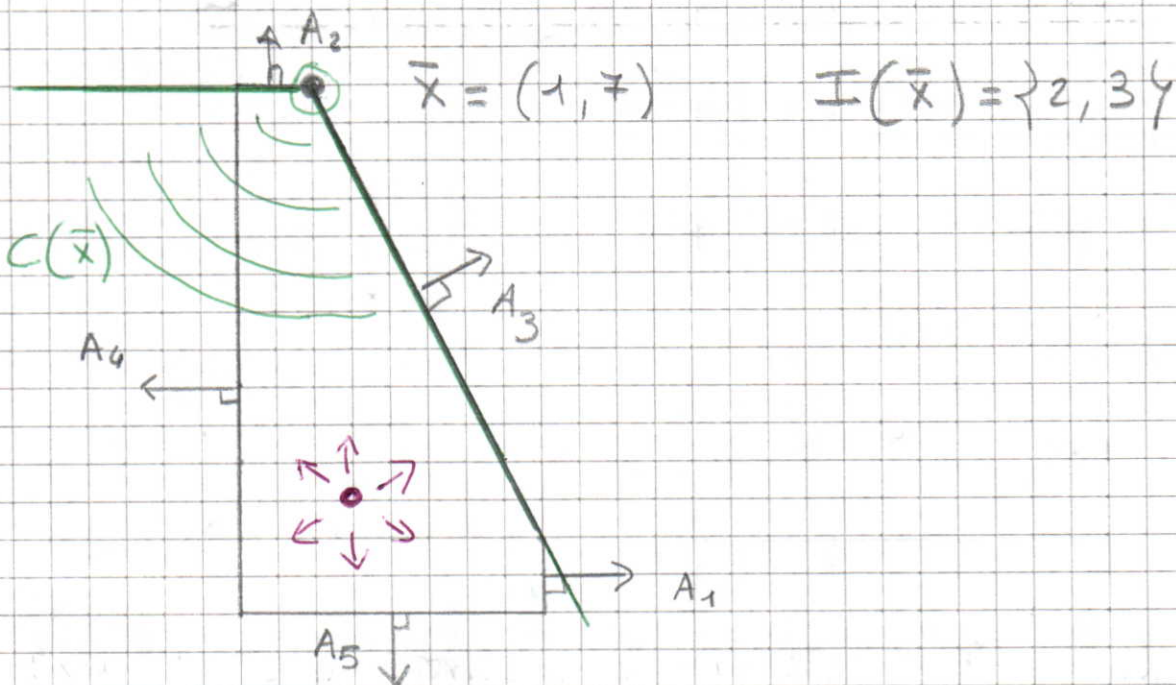
$$A_1 \quad x_1 \leq 6$$

$$A_2 \quad x_2 \leq 7$$

$$A_3 \quad 2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$A_4 \quad -x_1 \leq 0$$

$$A_5 \quad -x_2 \leq 0$$

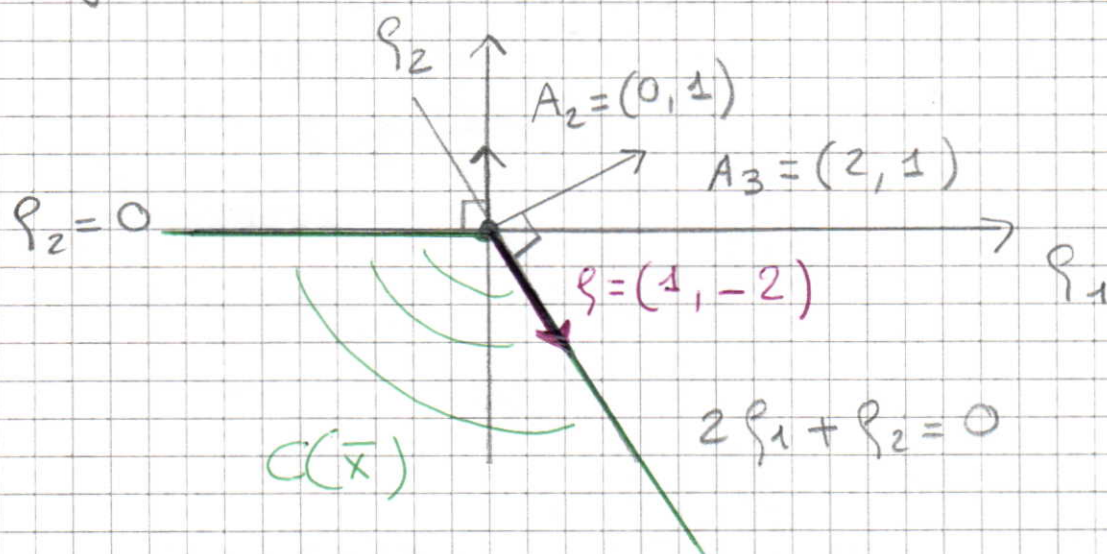


$$A_{I(\bar{x})} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{x}) = \{ (p_1, p_2) : A_{I(\bar{x})} p \leq 0 \} =$$

$$= \{ (p_1, p_2) : p_2 \leq 0, 2p_1 + p_2 \leq 0 \}$$

Geometricamente:



OSS: se \bar{x} è interno al poliedro, si ha $I(\bar{x}) = \emptyset$ e $C(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$: ogni direzione è ammissibile per \bar{x} .

Def Una direzione $\rho \in \mathbb{R}^n$ è di crescita per \bar{x} se $c^T \bar{x}(\lambda) = c^T \bar{x} + \lambda c^T \rho > c^T \bar{x}$ per un opportuno $\lambda > 0$.

Segue:

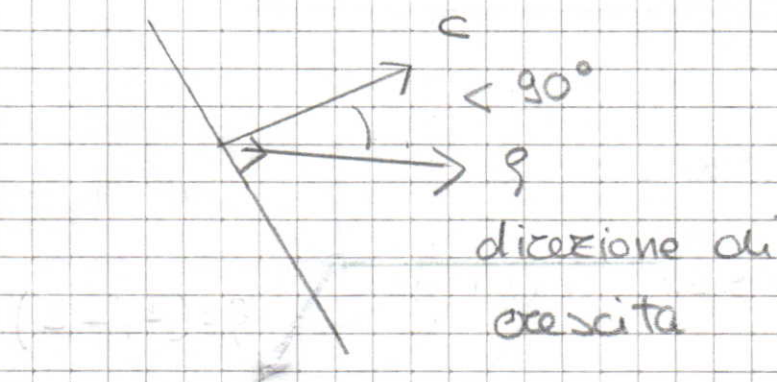
Proprietà (caratterizzazione algebrica delle direzioni di crescita): $\rho \in \mathbb{R}^n$ è una direzione di crescita se e solo se

$$c^T \rho > 0$$

OSS: non dipende da \bar{x}

Geometricamente:

$$c = (500, 200)$$



OSS:

- 1) Se $c = 0$, non esistono direzioni di crescita (ogni soluzione ammissibile è ottima per (P)).
- 2) Se $c \neq 0$?

Lemma: Sia (P) non vuoto e $c \neq 0$. Una soluzione ammissibile \bar{x} è ottima per (P) se e solo se non esistono direzioni ammissibili per \bar{x} che siano anche direzioni di crescita.

Dim

\Rightarrow Sia \bar{x} ottimo: se esistesse una direzione q ammissibile per (P) che sia anche di crescita, spostandosi di un opportuno λ lungo q otterrei una soluzione ammissibile di costo maggiore,

contro l'ipotesi che \bar{x} sia ottimo

⇔ Non esistono direzioni ammissibili e di crescita per \bar{x} .

Supponiamo per assurdo che \bar{x} non sia ottimo,

Allora esiste x' ammissibile per (P) tale che

$$c^T x' > c^T \bar{x} \quad \text{ovvero} \quad c^T (\underbrace{x' - \bar{x}}_{\eta}) > 0$$

Consideriamo la direzione $\eta = (x' - \bar{x})$:

1) η è di crescita in quanto $c^T \eta > 0$

2) η è ammissibile per \bar{x} :

$$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \eta = \bar{x} + \lambda (x' - \bar{x}) = \lambda x' + (1 - \lambda) \bar{x}$$

$\bar{x}(\lambda)$ appartiene al poliedro che definisce la regione ammissibile di (P) $\forall \lambda \in [0, 1]$, essendo un insieme convesso. Segue che \bar{x} è soluzione ottima per (P). \square

OSS: Se $c \neq 0$, \bar{x} interno al poliedro non può essere soluzione ottima di (P) in quanto

$\eta = c$ è ammissibile per \bar{x} e anche di

crescita: $c^T c = \|c\|_2^2 > 0$

Il lemma precedente può essere riformulato algebricamente:

Lemma (rif.): Sia (P) non vuoto e $c \neq 0$.
Una soluzione \bar{x} ammissibile è ottima per (P) se e solo se il sistema

$$\begin{cases} A_{I(\bar{x})} \rho \leq 0 \\ c^T \rho > 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

esempio (PINTEL)

$\bar{x} = (1, 7)$ ammissibile per PINTEL

Consideriamo $\rho^T = [1 \quad -2]$:

1) è ammissibile per \bar{x} :

$$A_{I(\bar{x})} \rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

2) è di crescita:

$$c^T \rho = [500 \quad 200] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 100 > 0$$

quindi $\bar{x} = (1, 7)$ non è soluzione ottima di PINTEL.

Come rafforzare il legame con il problema duale

Lemma di Farkas (1902): data una matrice reale A $m \times n$ e dato un vettore $c \in \mathbb{R}^n$, i due sistemi

$$(S_P): \begin{cases} A \bar{x} \leq 0 \\ c^T \bar{x} > 0 \end{cases} \quad (S_D): \begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

sono mutuamente esclusivi, ovvero esattamente uno dei due ha soluzione.

Mo di in

Per semplificare la trattazione, denotiamo $I(\bar{x}) =$

$$(PR): \begin{cases} A_I \bar{x} \leq 0 \\ c^T \bar{x} > 0 \end{cases} \quad (DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

Primale Ristretto

Duale Ristretto (ai soli rinvii attivi)

Dal lemma di Farkas:

Corollario: Sia (P) non vuoto e $c \neq 0$. Una soluzione ammissibile \bar{x} è ottimo per (P) se e solo se (DR) ha soluzione.

Teorema (forte della dualità) : Se (P) e (D) non vuoti, allora

$$\max \{ c^T x : A x \leq b \} = \min \{ y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0 \}$$

Dim.

OSS: Poiché (D) non vuoto per ipotesi, (P) non può essere superiormente illimitato. Non essendo vuoto per ipotesi, allora (P) ha ottimo finito

1) $c = 0$

- $\max \{ 0^T x : A x \leq b \} = 0$

- $y = 0$ è soluzione ammissibile per (D),
con $y^T b = 0$

da un corollario del Teorema debole di dualità,
 0 è il valore ottimo sia di (P) che di (D).

2) $c \neq 0$

Sia \bar{x} una soluzione ottima di (P), e I sia l'insieme degli indici attivi in \bar{x} ($I \neq \emptyset$ in quanto $c \neq 0$).

Per il corollario precedente, (DR) ha soluzione,
sia \bar{y}_I :

$$\begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

Completiamo \bar{y}_I con uno 0 per ogni componente in \bar{I} , sia $\bar{y}^T = [\bar{y}_I \ 0]$:

1) \bar{y} è ammissibile per (D):

$$\bar{y}^T A = \bar{y}_I^T A_I = c^T$$

$$\bar{y} \geq 0 \text{ in quanto } \bar{y}_I \geq 0$$

$$2) \bar{y}^T b = \bar{y}_I^T b_I = \bar{y}_I^T (A_I \bar{x}) = (\bar{y}_I^T A_I) \bar{x} = c^T \bar{x}$$

$\underbrace{\quad}_{b_I} \quad \underbrace{\quad}_{c^T}$

Da un corollario del Teorema debole di dualità segue che \bar{y} è ottima per (D), e

$$c^T \bar{x} = \max \{ c^T x : Ax \leq b \} = \min \{ y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0 \} = \bar{y}^T b$$

□

Teorema : Se (P) ha ottimo finito, allora anche (D) ha ottimo finito, e viceversa.

Dim

Perché (P) è non vuoto, (D) non può essere inferiormente illimitato. Supponiamo per assurdo

(D) vuota:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{non ha soluzioni}$$

Per il lemma di Farkas, il sistema:

$$\begin{cases} A\bar{y} \leq 0 \\ c^T \bar{y} > 0 \end{cases} \quad \text{ha soluzione, sia } \bar{y}.$$

Si ha:

1) $c^T \bar{y} > 0$, ovvero \bar{y} direzione di crescita

$$2) A(x + \lambda \bar{y}) = Ax + \lambda \underbrace{A\bar{y}}_{\leq 0} \leq Ax \leq b$$

$\forall x$ ammissibile per (P) , $\forall \lambda \geq 0$, ovvero

\bar{y} direzione ammissibile $\forall x$ ammissibile per (P)
(di recessione)

Segue che \bar{y} è una direzione di crescita illimitata, e quindi (P) superiormente illimitato, contro l'ipotesi. \square

legame semantico tra (P) e (D):

		(P)		
		ottimo finito	sup. illimitato	vuoto
(D)	ottimo finito	*		
	inf. illimitato			*
	vuoto		*	*

Esempio di (P) e (D) vuoti:

(P) $\max x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned}
 -x_1 - x_2 &\leq -1 \\
 x_1 + x_2 &\leq -1 \\
 x_1 &\leq 0
 \end{aligned}$$

vuoto

(D) $\min -y_1 - y_2$

$$\begin{aligned}
 -y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\
 -y_1 + y_2 &= 2 \\
 y_1, y_2, y_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

vuoto

$$(P) \max 2x_1 + x_2$$

$$(D) \min 5y_1 + 5y_2 + 10y_3 - 5y_4$$

①

$$x_1 \leq 5$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$-x_1 - x_2 \leq -5$$

$$y_1 + y_3 - y_4 = 2$$

$$y_2 + y_3 - y_4 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Si consideri $\bar{x} = (5, 5)$, ammissibile per (P):
è soluzione ottima?

$$I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\} \quad \bar{I}(\bar{x}) = \{4\}$$

Si consideri (PR), che caratterizza l'insieme delle
direzioni ammissibili per \bar{x} che sono anche di
crescita:

$$(PR): \begin{cases} A_I \varphi \leq 0 \\ c^T \varphi > 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \varphi_1 \leq 0 \\ \varphi_2 \leq 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 \leq 0 \\ 2\varphi_1 + \varphi_2 > 0 \end{cases}$$

ha soluzione?

È facile verificare che (PR) non ha soluzione:

$$\varphi_1 \leq 0, \varphi_2 \leq 0 \Rightarrow 2\varphi_1 + \varphi_2 \leq 0$$

Quindi $\bar{x} = (5, 5)$ è soluzione ottima di (P)

Per il lemma di Farkes, la soluzione (DR):

$$(DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} y_1 + y_3 = 2 \\ y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

(DR) ha infinite soluzioni:

ponendo $y_3 = \lambda$

si ricava $y_1 = (2 - \lambda)$

$$y_2 = (1 - \lambda)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Quindi $y_I(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda)$ è soluzione di (DR) $\forall \lambda \in [0, 1]$

$y(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda, 0)$ è ammissibile per (D) $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Poiché } \sum_{i=1}^4 y_i(\lambda) b_i &= 5(2 - \lambda) + 5(1 - \lambda) + 10\lambda = \\ &= 15 = 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 \end{aligned}$$

si ha che $y(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda, 0)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,
è soluzione ottima di (D).

② Si consideri

$$\max x_2$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq -4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x_2 \leq 2$$

Utilizzando il lemma di Farkas verificare se $\bar{x} = (2, 1)$ sia soluzione ottimale. In caso negativo, determinare una direzione ammissibile per \bar{x} che sia anche di crescita.

$\bar{x} = (2, 1)$ soluzione ammissibile

$$I = I(\bar{x}) = \{2, 3, 4\}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [0 \quad 1]$$

Per il lemma di Farkas, \bar{x} è soluzione ottimale se e solo se (PR) non ha soluzione se e solo se (DR) ha soluzione

$$(PR): \begin{cases} A_I p \leq 0 \\ c^T p > 0 \end{cases}$$

$$(DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

$$(PR): \begin{cases} p_1 + p_2 \leq 0 \\ -p_1 - 2p_2 \leq 0 \\ 2p_1 + p_2 \leq 0 \\ p_2 > 0 \end{cases}$$

$$(DR): \begin{cases} y_2 - y_3 + 2y_4 = 0 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 = 1 \\ y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

dove $y_I^T = [y_2 \ y_3 \ y_4]$

Verifica algebrica di ottimalità

In (DR):

$$y_2 = y_3 - 2y_4 \quad (\text{prima equazione})$$

$$y_3 - 2y_4 - 2y_3 + y_4 = -y_3 - y_4 = 1 \quad (\text{seconda equazione})$$

incompatibile con $y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$

Quindi (DR) non ha soluzioni: $\bar{x} = (2, 1)$

non è soluzione ottima.

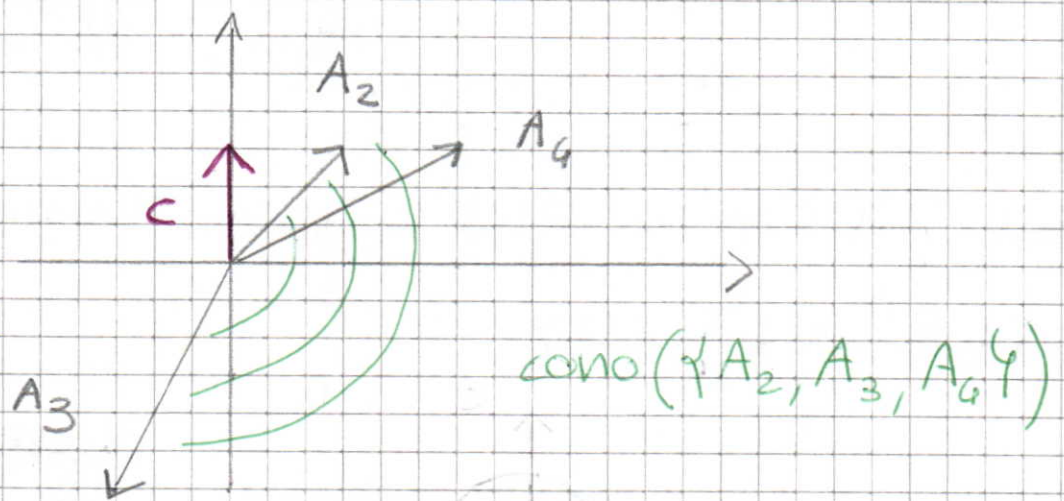
Per il Lemma di Farkas (PR) ha soluzione, ovvero esistono direzioni ammissibili per \bar{x} che sono anche di crescita.

Verifica geometrica di ottimalità

$$(DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4 = c^T \\ y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

(DR) ha soluzione se e solo se

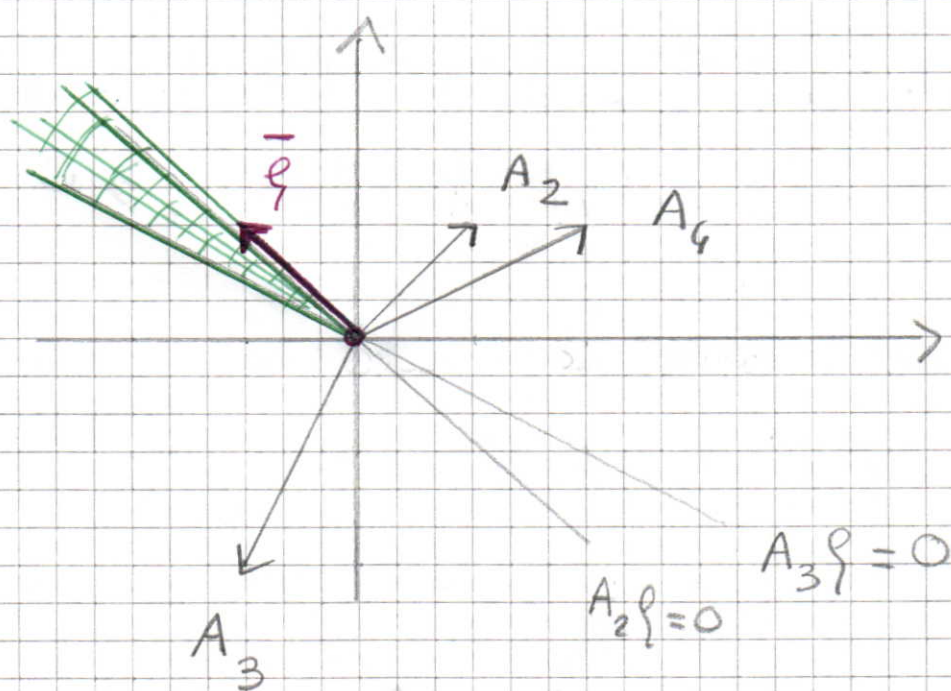
$$c \in \text{cono}(\{A_2, A_3, A_4\})$$



$c \notin \text{cono}(\{A_2, A_3, A_4\})$: (DR) non ha soluzione.

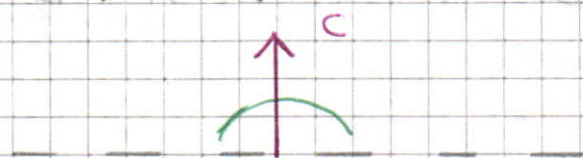
$$(PR): \begin{cases} A_I^T p \leq 0 \\ c^T p > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2^T p \leq 0 \\ A_3^T p \leq 0 \\ A_4^T p \leq 0 \\ c^T p > 0 \end{cases}$$

$\{ \bar{p} \in \mathbb{R}^2 : A_i \bar{p} \leq 0 \}$ cono poliedrico



cono poliedrico delle direzioni ammissibili per \bar{x}

$$\{ \bar{p} \in \mathbb{R}^2 : \bar{c}^T \bar{p} > 0 \}$$



direzioni di
crescita

l'intersezione delle due regioni è $\{ \bar{p} \in \mathbb{R}^2 : A_i \bar{p} \leq 0 \}$

direzioni ammissibili per \bar{x} che sono anche
di crescita :

esempio $\bar{p} = (-1, 1)$

Interpretazione geometrica
del lemma di Farkas

Algoritmo del Simplex Primal

Maria Grazia Santella

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 2)

$$(P) \quad \max c^T x \\ Ax \leq b$$

$$(D) \quad \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0$$

1) $\boxed{\text{rank}(A) < n}$: il sistema lineare $Ax=0$ ammette infinite soluzioni non nulle; ciascuna è direzione di linearità di $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ (vedi teorema precedente)

Per un corollario dimostrato (un poliedro P non vuoto ha vertici se e solo se $\text{lineal}(P) = \{0\}$), segue che $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ non ha vertici

2) $\boxed{\text{rank}(A) = n}$: l'unica soluzione di $Ax=0$ è la soluzione nulla, ovvero l'unica direzione di linearità del poliedro primale è 0. Segue che $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ha vertici

L'azione di rilassamento algebrica dei vertici

esempio (PINTEL)

$$\max 500 x_1 + 200 x_2$$

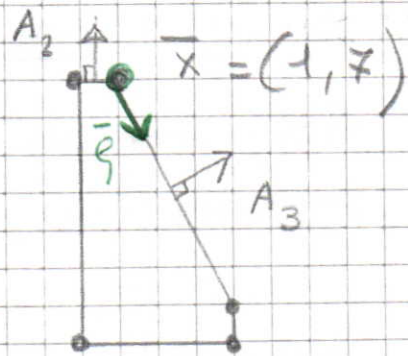
$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$



$$\underset{\text{II}}{I}(\bar{x}) = \{2, 3\} \quad A_{\text{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \times 2 \\ \text{ha rango } 2 \end{matrix}$$

$\bar{x} = (1, 7)$ è l'unica soluzione del sistema

$$\overset{A_{\text{II}}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \overset{b_{\text{II}}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}}$$

quadrata e di rango 2,

quindi invertibile, detta matrice di base

ovvero

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

soluzione di
base primale

In generale: nel caso $\text{rank}(A) = n$, A contiene una sottomatrice quadrata $n \times n$ invertibile.

Definizione: una base è un insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$, tale che la sottomatrice A_B , ottenuta da A estraendo le righe A_i , $i \in B$, sia invertibile, cioè $\det(A_B) \neq 0$. A_B è detta matrice di base.

$N = \{1, \dots, m\} \setminus B$: indici fuori base

$$A = \begin{bmatrix} A_B \\ A_N \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_B \\ b_N \end{bmatrix}$$

Definizioni:

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è una soluzione di base
primale

\bar{z} :

ammissibile se $A_i \bar{x} \leq b_i \quad \forall i \in N$

non ammissibile se $\exists i \in N : A_i \bar{x} > b_i$

non degenera se $A_i \bar{x} \neq b_i \quad \forall i \in N$

degenera se $\exists i \in N : A_i \bar{x} = b_i$

Teorema Si consideri un poliedro nella forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}. \text{ Allora}$$

\bar{x} è un vertice del poliedro $\Leftrightarrow \bar{x}$ è una soluzione di base ^{primale} ammissibile

Dim : (da Pappalardo, Passacantando, "Ricerca Operativa", pag. 58)

\Rightarrow : supponiamo \bar{x} vertice, e sia

$$I = I(\bar{x}) = \{i : A_i \bar{x} = b_i\}$$

Supponiamo per assurdo che $\text{rank}(A_I) < n$:

allora esiste $d \neq 0$ tale che $A_I d = 0$. Definiamo:

$$z = \bar{x} + \lambda d \quad w = \bar{x} - \lambda d$$

con $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo. Si ha $z \neq w$,
e inoltre z e w appartengono al poliedro:

$$A_i z = A_i (\bar{x} + \lambda d) \begin{cases} = A_i \bar{x} = b_i & \text{se } i \in I \\ < b_i & \text{se } i \notin I \end{cases}$$

idem per w .

Pertanto $\bar{x} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} w$, assurdo perché
per ipotesi \bar{x} è vertice.

\Leftarrow : supponiamo \bar{x} soluzione di base ammissibile
relative a B : $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$, $A_N \bar{x} \leq b_N$

Supponiamo per assurdo \bar{x} non sia un vertice:
allora esistono z e w punti del poliedro, $z \neq w$,
tali che $\bar{x} = \lambda z + (1-\lambda)w$, $0 < \lambda < 1$.

$\forall i \in B$ si ha:

$$A_i \bar{x} = \lambda \underbrace{A_i z}_{\leq b_i} + (1-\lambda) \underbrace{A_i w}_{\leq b_i} = b_i$$

quindi si deve avere $A_i z = A_i w = b_i$, $\forall i \in B$,

ovvero $A_B z = A_B w = b_B$, ovvero

$$z = w = A_B^{-1} b_B = \bar{x}$$

assurdo per l'ipotesi $z \neq w$. \square

esempio $\bar{x} = (1, 7)$ $I = \{2, 3\} = B$ base,

$A_I = A_B$ matrice di base

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \quad \underline{\text{rappresentazione univoca}}$$

soluzione di base primale ammissibile (ovvero vertice) non degenera.

Consideriamo la soluzione di base primale ammissibile $\bar{x} = (1, 7)$, e i sistemi:

$$(PR): \begin{cases} A_I \bar{x} \leq 0 \\ c^T \bar{x} > 0 \end{cases}$$

$$(DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

Poiché $I = B$:

$$(P_B): \begin{cases} A_B \bar{x} \leq 0 \\ c^T \bar{x} > 0 \end{cases}$$

$$(D_B): \begin{cases} y_B^T A_B = c^T \\ y_B \geq 0 \end{cases}$$

Sistemi estratti di base

$\bar{x} = (1, 7)$ è una soluzione ottimo se e solo se (P_B) non ha soluzione se e solo se (D_B) ha soluzione.

L'unica soluzione candidata a risolvere (D_B)

è $\boxed{\bar{y}_B = c^T A_B^{-1}}$; risolve (D_B) se e solo se $\bar{y}_B \geq 0$.

nell'esempio $\bar{x} = (1, 7)$ $I = B = \{2, 3\}$

$$(P_B): \begin{cases} \rho_2 \leq 0 \\ 2\rho_1 + \rho_2 \leq 0 \\ 500\rho_1 + 200\rho_2 > 0 \end{cases}$$

$$(D_B): \begin{cases} 2y_3 = 500 \\ y_2 + y_3 = 200 \\ y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}_B^T = C^T A_B^{-1} = [500 \ 200] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-50 \ 250]$$

Perché $\bar{y}_2 < 0$, (D_B) non ha soluzioni,
quindi per il lemma di Farkas ha soluzione
 (P_B) :

consideriamo $\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(2)} = -A_B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

Si ha:

$$A_I \bar{\xi} = A_B \bar{\xi} = A_B (-A_B^{-1}) u_{B(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T \bar{\xi} = [500 \ 200] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{50}_{-\bar{y}_2} > 0$$

Ovvero $\bar{\xi}$ è direzione ammissibile per $\bar{x} = (1, 7)$
e pure direzione di crescita: soluzione di (P_B)

geometricamente:

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \bar{\xi} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_2 \bar{\xi} = -1 \\ A_3 \bar{\xi} = 0 \end{cases}$$

" A_B

$\bar{\xi}$ appartiene alla zetta associata al terzo
vincolo, e "tende ad allontanare" dalla zetta
associata al secondo.

L'algoritmo del Simplex Primal si sposta il più possibile lungo \bar{e} , fino al vertice adiacente $(4, 1)$, e ripete il test di ottimalità:

$$\bar{x} = (4, 1), \quad I = B = \{1, 3\} \quad \text{vertice non degenero}$$

$$(P_B): \begin{cases} p_1 \leq 0 \\ 2p_1 + p_2 \leq 0 \\ 500p_1 + 200p_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D_B): \begin{cases} y_1 + 2y_3 = 500 \\ y_3 = 200 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 100 & 200 \\ \underbrace{0}_{\text{V}} & \underbrace{0}_{\text{V}} \end{bmatrix} \quad \text{soluzione di } (D_B)$$

STOP:

$$\bar{x} = (4, 1) \quad \text{soluzione ottimale per } (P)$$

$$\bar{y} = (100, 0, 200, 0, 0) \quad \text{soluzione ottimale per } (D)$$

Definizioni: dato una base B ,

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T A_B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{è una soluzione di base duale}$$

\bar{e} :

ammissibile se $\bar{y}_i \geq 0 \quad \forall i \in B$

non ammissibile se $\exists i \in B : \bar{y}_i < 0$

non degenero se $\bar{y}_i \neq 0 \quad \forall i \in B$

degenero se $\exists i \in B : \bar{y}_i = 0$

Si può dimostrare:

Teorema

\bar{y} è una soluzione
di base duale
ammissibile

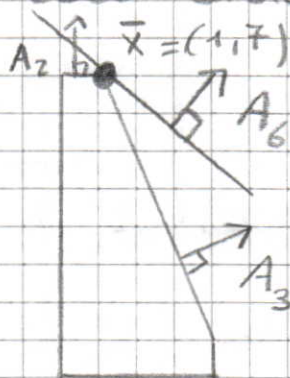
$\Leftrightarrow \bar{y}$ è un vertice
del poliedro
duale

Come si comporta l'algoritmo nel caso di
un vertice degenero?

esempio (PINTEL)

aggiungiamo il vincolo ridondante

$$x_1 + x_2 \leq 8$$



$\bar{x} = (1, 7)$ è ora un vertice degenero

$$I = \{2, 3, 6\}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ranko}(A_I) = 2$$

Poiché $|I| > 2$, a \bar{x} possono corrispondere più basi, e quindi più matrici di base

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad A_{B_2} = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_6 \end{bmatrix} \quad A_{B_3} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = A_{B_2}^{-1} b_{B_2} = A_{B_3}^{-1} b_{B_3} \quad \begin{array}{c} \text{rappresentazione} \\ \text{non} \\ \text{univoca} \end{array}$$

In caso di degenerazione, se (D_B) ha soluzione, allora (DR) ha soluzione: \bar{x} soluzione ottima.

Altrimenti, ovvero (P_B) ha soluzione, ciò non implica che (PR) abbia soluzione; l'algoritmo fa variare $B \subseteq I$, B base

Lemma: un vertice \bar{x} è soluzione ottima per (P) se e solo se $\exists B \subseteq I(\bar{x})$, B base, tale che

$$(D_B): \begin{cases} y_B^T A_B = c^T \\ y_B \geq 0 \end{cases} \text{ ha soluzione,}$$

ovvero se e solo se $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} \geq 0$.

In tal caso $\bar{y}^T = \begin{bmatrix} \bar{y}_B^T & 0 \end{bmatrix}$ è soluzione ottima di (D)

Algoritmo del Simplex Primal: schema

$$(P) \quad \max c^T x \\ Ax \leq b$$

non vuoto

$$(D) \quad \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0$$

Sia B base iniziale e $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ soluzione di base primale ammissibile, ovvero un vertice del poliedro primale: in input

Tipica iterazione

$$(P_B): \begin{cases} A_B \bar{p} \leq 0 \\ c^T \bar{p} > 0 \end{cases}$$

$$(D_B): \begin{cases} \bar{y}_B^T A_B = c^T \\ \bar{y}_B \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$$

unica soluzione candidata a risolvere (D_B)

1) $\bar{y}_B \geq 0$: \bar{y}_B risolve (D_B) e quindi

(DR) : \bar{x} è soluzione ottimale per (P) e

$\bar{y}_D^T = [\bar{y}_B^T \quad 0] = [c^T A_B^{-1} \quad 0]$ è soluzione ottimale per (D)

STOP

2) $\boxed{x \bar{y}_B \neq 0} : \exists h \in B$ tale che

$$\bar{y}_h = c^T A_B^{-1} u_{B(h)} < 0$$

Sic $\boxed{\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(h)}}$, si ha:

- $c^T \bar{\xi} = -c^T A_B^{-1} u_{B(h)} = -\bar{y}_h > 0$

ovvero $\bar{\xi}$ è direzione di crescita

- $A_B \bar{\xi} = -u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0$ ← posizione indice h in B

Conseguenze

2.1) $x \bar{x}$ è non degenero, ovvero $I = B$:

$$A_B \bar{\xi} = A_I \bar{\xi} \leq 0$$

ovvero $\bar{\xi}$ è una direzione ammissibile per \bar{x}

2.2) $x \bar{x}$ è degenero, ovvero $B \subset I$:

$$A_B \bar{\xi} \leq 0 \neq A_I \bar{\xi} \leq 0$$

potrebbe esistere $i \in I \setminus B$ tale che

$A_i \bar{\xi} > 0$: in tal caso $\bar{\xi}$ non è una direzione ammissibile per \bar{x}

Sia nel caso 2.1 che nel caso 2.2, l'algoritmo calcola il massimo passo di spostamento

lungo $\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(r)} :$

$$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \bar{\xi}$$

se $i \in B$: $A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda \underbrace{A_i \bar{\xi}}_{\leq 0} \leq A_i \bar{x} = b_i$

soddisfatto $\forall \lambda \geq 0$

se $i \in N$:

se $A_i \bar{\xi} \leq 0$:

$$A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda \underbrace{A_i \bar{\xi}}_{\leq 0} \leq A_i \bar{x} \leq b_i$$

soddisfatto $\forall \lambda \geq 0$

se $A_i \bar{\xi} > 0$:

$$A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \bar{\xi} \leq b_i \text{ se e solo se}$$
$$\lambda \leq \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}}$$

massimo passo di spostamento lungo $\bar{\xi}$:

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}} : i \in N, A_i \bar{\xi} > 0 \right\} & \text{se } \exists i \in N \text{ tale che } A_i \bar{\xi} > 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazioni:

1) se $A_i \bar{\xi} \leq 0 \quad \forall i \in N$, ovvero $A_N \bar{\xi} \leq 0$:

$\bar{\lambda} = +\infty$, ovvero (P) è superiormente illimitato e di conseguenza (D) è vuoto

2) se $A_N \bar{\xi} \not\leq 0$: $\bar{\lambda} \geq 0$, finito

2.1) se $\bar{\lambda} > 0$, allora $\bar{\xi}$ è una direzione

ammissibile per \bar{x} : l'algoritmo si

sposta in $\bar{x}(\bar{\lambda}) = \bar{x} + \bar{\lambda} \bar{\xi}$ (nuovo

vertex) e cambia base:

$$B := B \setminus \{R\} \cup \{K\}$$

← indice diventato attivo dopo lo spostamento

2.2) se $\bar{\lambda} = 0$, allora $\bar{\xi}$ non è una

direzione ammissibile per \bar{x}

oss: solo se \bar{x} è degenere: $\exists k \in I \setminus B$

tale che $A_k \bar{\xi} > 0$, e $\bar{\lambda} = \frac{0}{A_k \bar{\xi}} = 0$

l'algoritmo non cambia vertex ($\bar{\lambda} = 0$)

ma cambia base: $B := B \setminus \{R\} \cup \{K\}$

cambio di base degenere

Formalmente:

Algoritmo Simplex Primal $(A, b, c, B, \overline{x}, \overline{y}, \text{stato})$

begin

$\text{stato} = ""$;

repeat

$\overline{x} = A_B^{-1} b_B$; $y_B^T = c^T A_B^{-1}$; $y_N^T = 0$;

if $\overline{y}_B \geq 0$ then $\text{stato} = \text{"ottimo"}$

else begin

$h = \min \{ i \in B : \overline{y}_i < 0 \}$;

$\overline{\rho} = -A_B^{-1} u_{B(h)}$;

if $A_N \overline{\rho} \leq 0$ then $\text{stato} = \text{"P, illimitato"}$

else

begin

$\overline{\lambda} = \min \left\{ \frac{b_i - A_i \overline{x}}{A_i \overline{\rho}} : i \in N, A_i \overline{\rho} > 0 \right\}$

$K = \text{argmin} \{ \overline{\lambda}_i : i \in N, A_i \overline{\rho} > 0 \}$;

$B = B \setminus \{h\} \cup \{K\}$

end

end

until $\text{stato} \neq ""$

end

Regole
anticiclo
di
Bland

La regola anticiclo di Bland garantisce che ogni base venga visitata al più una volta. Poiché il numero delle basi è finito, ciò assicura la Terminazione dell'algoritmo.

Teorema: Sia $k \in N$ tale che $\bar{\lambda} = \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\xi}}$.

Allora:

- 1) $B' = B \setminus \{k\} \cup \{k\}$ è una base
- 2) $\bar{x} + \bar{\lambda} \bar{\xi}$ è una soluzione di base primale ammissibile, ovvero un vertice, rispetto a B'

Dim:

- 1) • i vettori A_i , $i \in B \setminus \{k\}$, sono linearmente indipendenti in quanto B è una base.
 - A_k è linearmente indipendente rispetto a A_i , $i \in B \setminus \{k\}$:
 - poiché $A_i \bar{\xi} = 0 \quad \forall i \in B \setminus \{k\}$, $\bar{\xi}$ è ortogonale al sottospazio generato dai vettori A_i , $i \in B \setminus \{k\}$

- poiché $A_k \bar{\rho} > 0$ ($k \in N$, $A_k \bar{\rho} > 0$ in quanto per ipotesi $\bar{\lambda} = \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\rho}}$), A_k non appartiene a tale sottospazio

Segue che A_k non è esprimibile come combinazione lineare dei vettori A_i , $i \in B \setminus \{k\}$.
 $B' = B \setminus \{k\} \cup \{k\}$ è quindi una base,
 e $A_{B'}$ è una matrice di base.

2) Dimostriamo che

$$A_{B'}(\bar{x} + \bar{\lambda} \bar{\rho}) = b_{B'}$$

ovvero che $\bar{x} + \bar{\lambda} \bar{\rho}$ è una soluzione di base primale rispetto a B' .

$$\begin{aligned} \bullet \quad A_k(\bar{x} + \bar{\lambda} \bar{\rho}) &= A_k \bar{x} + \bar{\lambda} A_k \bar{\rho} = \\ &= A_k \bar{x} + \left(\frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\rho}} \right) A_k \bar{\rho} = b_k \end{aligned}$$

• $i \in B \setminus \{k\}$:

$$A_i(\bar{x} + \bar{\lambda} \bar{\rho}) = A_i \bar{x} + \underbrace{\bar{\lambda} A_i \bar{\rho}}_{=0} = A_i \bar{x} = b_i$$

Poiché $\bar{x} + \bar{h} \bar{p}$ è una soluzione ammissibile per (P), per definizione di \bar{h} , segue che $\bar{x} + \bar{h} \bar{p}$ è un vertice del poliedro primale avente B' come base. \square

① Primale (algebrico)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

$$B = \{2, 3\}$$

- base
- matrice di base e inverso
- coppia di sol. di base
- indice uscente (h)
- dir. crescite ($\bar{\xi}$)
- passo di spost. ($\bar{\lambda}$)
- indice entrante (k),
giustif. le risposte

Disantare degenerazione primale e duale

1) $B = \{2, 3\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \ 1] \quad \bar{y}_N = 0$$

$$\bar{y}^T = [0 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0]$$

sol. di base duale non ammissibile non degenero

$$h = \min \{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 2 \quad B(h) = 1$$

$$\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}:$$

sol. di base

primale ammissibile

degenero: $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$

$$J = \{i \in N : A_i \bar{\xi} > 0\} = \{4, 5\}$$

$$\bar{h}_i = \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{p}}$$

$$\bar{h}_4 = \bar{h}_5 = 4$$

$$\bar{h} = \min \{ \bar{h}_i : i \in J \} = \min \{ 4, 4 \} = 4$$

$$K = \min \{ i \in J : \bar{h} = \bar{h}_i \} = \min \{ 4, 5 \} = 4$$

regola anticiclo di Bland

$$2) B = \{2, 3\} \setminus \{2\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$$

$$I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sol. di base
degenera

$$\bar{y}_B^T = [1 \ 2] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [-3 \ 2] \quad \bar{y}_N^T = 0$$

sol. di base duali non ammissibili

$$\bar{y}^T = [0 \ 0 \ -3 \ 2 \ 0] \quad h = 3 \quad B(h) = 1$$

non
degenera

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_N \bar{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{5\}$$

$$\bar{h} = \bar{h}_5 = 0$$

cambio di base
degenera

$$3) B = \{3, 4\} \setminus \{3\} \cup \{5\} = \{4, 5\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

degenera

$$\bar{y}_B^T = [1 \ 2] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \ 3] \quad \bar{y}_N^T = 0$$

$$\bar{y}^T = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 3]$$

sol. di base duali non ammissibili non degenera

alt.

$$h=4 \quad B(h)=1$$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_N \bar{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{STOP}$$

Poiché $A_N \bar{\xi} \leq 0$, il problema primale è
superiormente illimitato, e di conseguenza
il suo duale è vuoto

Condizioni degli scarti complementari

Maria Grazia Santella

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 2.2.4)

$$(P) \max c^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$(D) \min y^T b$$

$$y^T A = c^T$$

$$y \geq 0$$

Per i teoremi debole e forte della dualità, \bar{x} soluzione ammissibile per (P) e \bar{y} soluzione ammissibile per (D) sono ottime se e solo se $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$.

Osserviamo che la sequenza di equivalenze:

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow \bar{y}^T A \bar{x} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow \bar{y}^T (b - A \bar{x}) = 0$$

vale a prescindere dell'ammissibilità di \bar{x} e \bar{y} , purché $\bar{y}^T A = c^T$

Definizione: (\bar{x}, \bar{y}) tale che $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ e

$y^T A = c^T$ è una coppia di soluzioni complementari

se $\bar{y}^T (b - A \bar{x}) = 0$

Segue:

Teorema (degli scarti complementari): \bar{x} soluzione ammissibile per (P) e \bar{y} soluzione ammissibile per (D) sono ottime se e solo se

$$\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0$$

condizioni degli
scarti complementari
(s.c.)

Poiché $\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \bar{y}_i (b_i - A_i \bar{x}) = 0$,

se \bar{x} ammissibile per (P) e \bar{y} ammissibile per (D), le condizioni degli s.c. possono essere espresse equivalentemente:

$$\begin{array}{ccc} \bar{y}_i (b_i - A_i \bar{x}) = 0 & i = 1, \dots, m \\ \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 \end{array}$$

Ovvero:

$$\bar{y}_i > 0 \Rightarrow A_i \bar{x} = b_i \quad \text{ovvero e' uno vincolo} \\ \text{deve essere attivo in } \bar{x} \\ (i \in I(\bar{x}))$$

$$A_i \bar{x} < b_i \Rightarrow \bar{y}_i = 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

Proposizione : Sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P). Allora \bar{x} è ottimo se e solo se $\exists \bar{y}$, soluzione ammissibile per (D), tale che (\bar{x}, \bar{y}) è una coppia di soluzioni complementari.

Dim :

\Leftarrow : Dal Teorema degli scarti complementari

\Rightarrow : Supponiamo che \bar{x} sia ottimo per (P).

Allora (D) ha ottimo finito, e sia \bar{y} una sua soluzione ottima. Per il Teorema forte della dualità, $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$. Poiché $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0$, segue da (\bar{x}, \bar{y}) è una coppia di soluzioni complementari. \square

OSS : se \bar{x} ammissibile per (P) e \bar{y} per (D), le condizioni degli s.c. implicano

$$\bar{y}_i = 0 \quad \forall i \notin I(\bar{x}) = I$$

Poiché $\bar{y}^T A = c^T$, ciò implica $\bar{y}_I^T A_I = c^T$,

con $\bar{y}_I \geq 0$. Ovvero \bar{y}_I deve essere soluzione

di (DR) :
$$\begin{cases} \bar{y}_I^T A_I = c^T \\ \bar{y}_I \geq 0 \end{cases}$$

Ritroviamo: \bar{x} è ottima per (P) se e solo se esiste una soluzione \bar{y}_I di (DR), come già dimostrato.

Proposizione: Sia \bar{y} una soluzione ammissibile per (D). \bar{y} è ottima se e solo se esiste \bar{x} , soluzione ammissibile per (P), tale che (\bar{x}, \bar{y}) è una coppia di soluzioni complementari.

Mo dim

Proprietà: Data una base B e una matrice di base A_B , le soluzioni di base

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \text{ e } \bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \bar{y}_N^T] = [c^T A_B^{-1} \quad 0]$$

soddisfano le condizioni degli s.c.

Dim:

$$\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = [c^T A_B^{-1} \quad 0] \begin{bmatrix} b_B - A_B \bar{x} \\ b_N - A_N \bar{x} \end{bmatrix} = 0$$

□

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e $\bar{y}^T = [c^T A_B^{-1} \quad 0]$ vengono pertanto chiamate soluzioni di base complementari

Algoritmo del Simplex Duale

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 2.3.2)

$$(P) \max c^T x \\ A x \leq b$$

$$(D) \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0$$

Si tratta dell'algoritmo del Simplex Primale applicato a (D), scritto in forma primale. Le operazioni fanno riferimento al poliedro primale.

Schema dell'algoritmo

Input: B base duale ammissibile, A_B

Tipica iterazione:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$$

$$\bar{y}^T = [y_B^T \ 0], \text{ dove } y_B^T = c^T A_B^{-1} \geq 0$$

(vertice del poliedro duale, ovvero soluzione di base duale ammissibile)

se $A_x \bar{x} \leq b_x$, \bar{x} è una soluzione di base primale ammissibile: STOP

• \bar{x} soluzione ottima di (P)

• \bar{y} soluzione ottima di (D)

altrimenti $\exists K \in \mathbb{N}$ tale che $A_K \bar{x} > b_K$.

L'algoritmo determina una direzione di decrescita:

$$d = \begin{bmatrix} -\eta_B \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{posizione indici in base} \\ \leftarrow i = K \\ \leftarrow i \in \mathbb{N}, i \neq K \end{array}$$

dove $\eta_B = A_K A_B^{-1}$

Proprietà: d è una direzione di decrescita per \bar{y} .

Dim

Consideriamo

$$\bar{y}(\theta) = \bar{y} + \theta d = \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -\eta_B \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_B - \theta \eta_B \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}^T(\theta) b &= [\bar{y}_B - \theta \eta_B]^T b_B + \theta b_K = \bar{y}_B^T b_B + \\ &+ \theta (b_K - \eta_B^T b_B) = \bar{y}^T b + \theta (b_K - A_K A_B^{-1} b_B) = \\ &= \bar{y}^T b + \theta \underbrace{(b_K - A_K \bar{x})}_{< 0} < \bar{y}^T b \quad \forall \theta > 0. \end{aligned}$$

□

Calcola quindi il massimo passo di spostamento lungo d:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \bar{y}^T(\theta)A &= [\bar{y}_B - \theta \eta_B]^T A_B + \theta A_K = \\
 &= \bar{y}_B^T A_B - \theta \eta_B^T A_B + \theta A_K = \bar{y}_B^T A_B - \theta A_K A_B^{-1} A_B + \\
 &+ \theta A_K = \bar{y}_B^T A_B - \cancel{\theta A_K} + \cancel{\theta A_K} = c^T \\
 &\text{vero } \forall \theta
 \end{aligned}$$

$$2) \quad \bar{y}(\theta) \geq 0 : \begin{cases} \theta \geq 0 \\ \bar{y}_B - \theta \eta_B \geq 0 \end{cases}$$

Osservazioni:

$$1) \quad \underline{\text{se } \eta_B \leq 0 : \bar{y}_B - \theta \eta_B \geq 0 \quad \forall \theta \geq 0,}$$

ovvero d è una direzione di decrescita illimitata

STOP: (D) è inferiormente illimitato e quindi (P) è vuoto

$$2) \quad \underline{\text{altrimenti : } \exists i \in B \text{ tale che } \eta_i > 0}$$

$$i \in B \text{ tale che } \eta_i < 0 : \bar{y}_i - \theta \eta_i \geq 0 \quad \forall \theta \geq 0$$

$$i \in B \text{ tale che } \eta_i > 0 : \bar{y}_i - \theta \eta_i \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\bar{y}_i}{\eta_i}$$

massimo passo di spostamento lungo d:

$$\boxed{\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B, \eta_i > 0 \right\}}$$

criterio del minimo rapporto

Formalmente:

Algoritmo Simplex Duale ($\underbrace{A, b, c, B}_{\text{input}}, \underbrace{\bar{x}, \bar{y}, \text{stato}}_{\text{output}}$)

begin

stato = " ";

repeat

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B; \quad \bar{y}_B = c^T A_B^{-1}; \quad \bar{y}_N = 0;$$

if $A_N \bar{x} \leq b_N$ then stato = "ottimo"

else

begin

$$K = \min \{ i \in N : A_i \bar{x} > b_i \};$$

$$\eta_B = A_K A_B^{-1};$$

if $\eta_B \leq 0$ then stato = "P vuoto"

else

begin

$$h = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B, \eta_i > 0 \right\};$$

$$B = B \setminus \{h\} \cup \{K\}$$

end

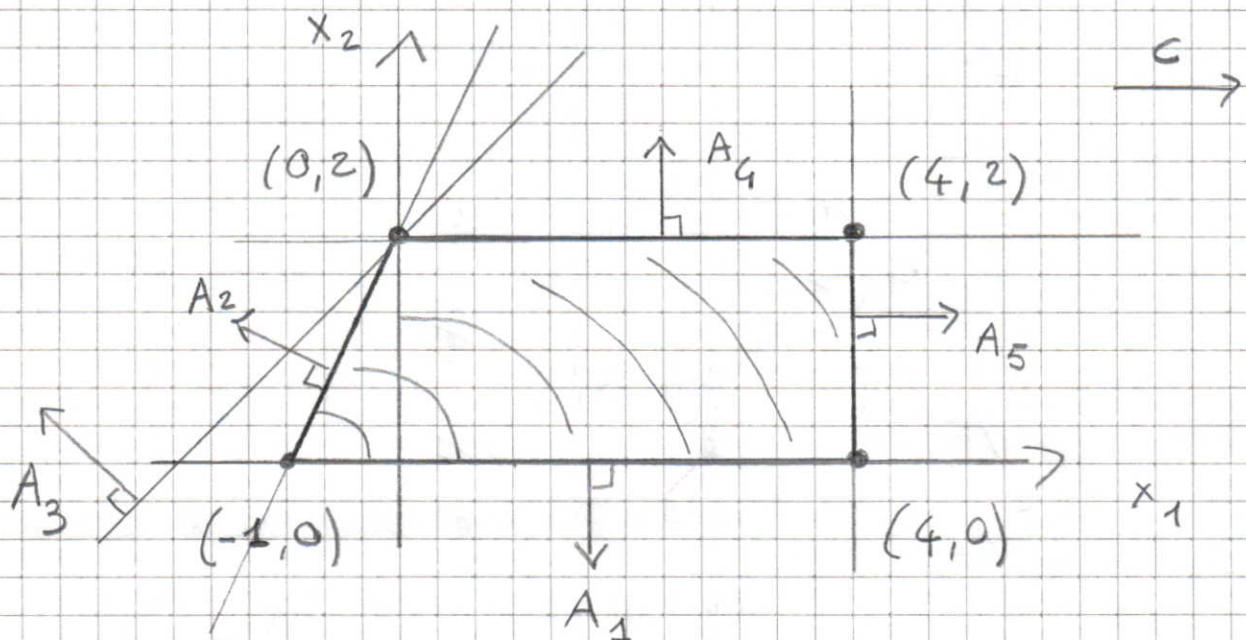
end

until stato \neq " "

end

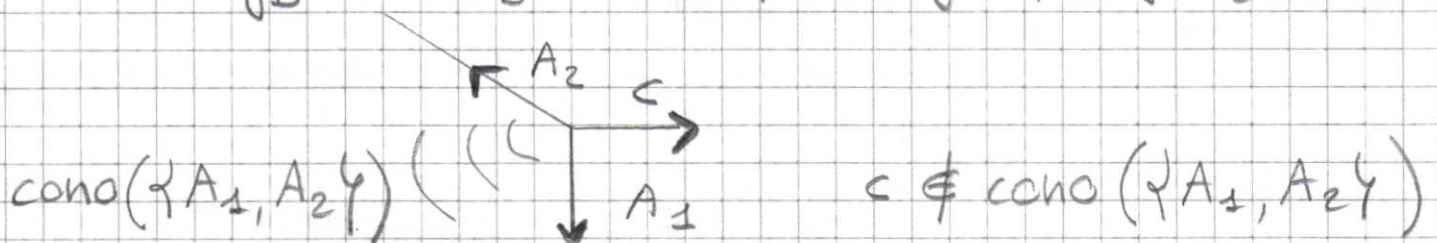
Regole
anticiclo
di Bland

① Simplex Primal (geometrico)

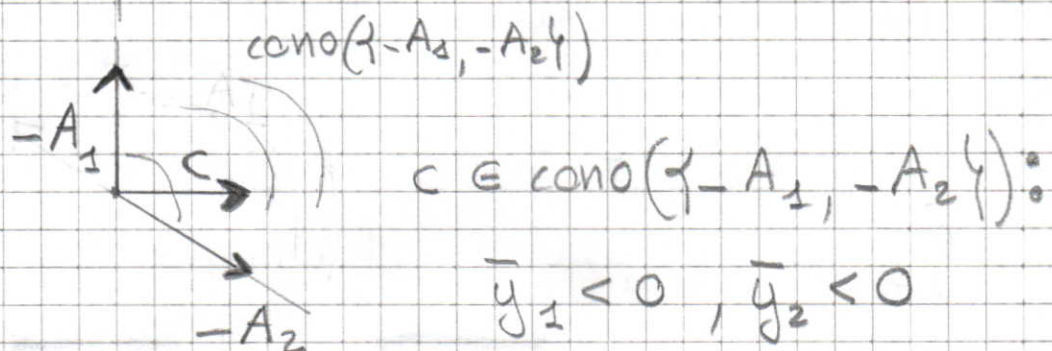


it 1) $B = \{1, 2\}$ \bar{x}_1 in figura
soluzione di base primale
ammissibile non degenera

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} \quad : \quad \text{poiché } \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 = c^T$$



ma:



$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ 0]$: soluzione di base duale non
ammissibile non degenera

$$h = \min \{ i \in B : \bar{y}_i < 0 \} = 1$$

$$\bar{p}_1 = -A_B^{-1} u_{B(1)} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_1 \bar{p}_1 = -1 \\ A_2 \bar{p}_1 = 0 \end{cases}$$

" $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

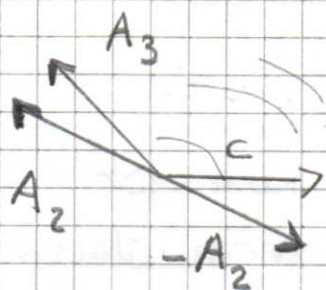
\bar{p}_1 in figura

$$K = \min \{ 3, 4 \} = 3 \quad \text{regola anticiclone di Bland}$$

$$\text{it 2)} \quad B = \{ 1, 2 \} \leftarrow \{ 1 \} \cup \{ 3 \} = \{ 2, 3 \}$$

" $\begin{matrix} K \\ K-1 \end{matrix}$

\bar{x}_2 in figura : soluzione di base primale ammissibile degenera



$c \in \text{cono}(\{-A_2, A_3\})$:

$$\bar{y}_2 < 0, \bar{y}_3 > 0$$

$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ 0]$: soluzione di base duale non ammissibile non degenera

$$h = 2$$

$$\bar{p}_2 = -A_B^{-1} u_{B(2)} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_2 \bar{p}_2 = -1 \\ A_3 \bar{p}_2 = 0 \end{cases}$$

" $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

\bar{p}_2 in figura : direzione di crescita non

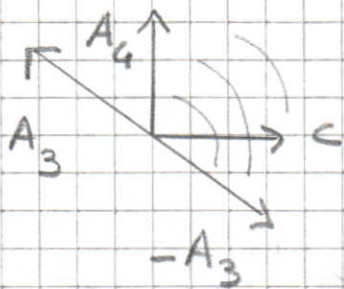
ammissibile per \bar{x}_2 , $\bar{\lambda}_2 = 0$

cambio di base degenera

$K = 4$ attivo ma non in base

$$\text{it 3)} \quad B = \{2, 3\} \setminus \underbrace{\{2\}}_h \cup \underbrace{\{4\}}_K = \{3, 4\}$$

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_2$$



$$c \in \text{cono}(\{-A_3, A_4\}):$$

$$\bar{y}_3 < 0, \bar{y}_4 > 0$$

$$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ 0] = [0 \ 0 \ \bar{y}_3 \ \bar{y}_4 \ 0] \text{ soluzione}$$

di base duale non ammissibile non degenera

$$h = 3$$

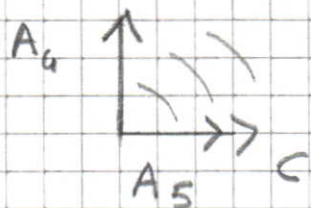
$$\bar{p}_3 = -A_B^{-1} u_{B(3)} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_3 \bar{p}_3 = -1 \\ A_4 \bar{p}_3 = 0 \end{cases}$$

\bar{p}_3 in figura

$$K = 5$$

$$\text{it 4)} \quad B = \{3, 4\} \setminus \underbrace{\{3\}}_h \cup \underbrace{\{5\}}_K = \{4, 5\}$$

\bar{x}_4 in figura: soluzione di base primale ammissibile non degenera



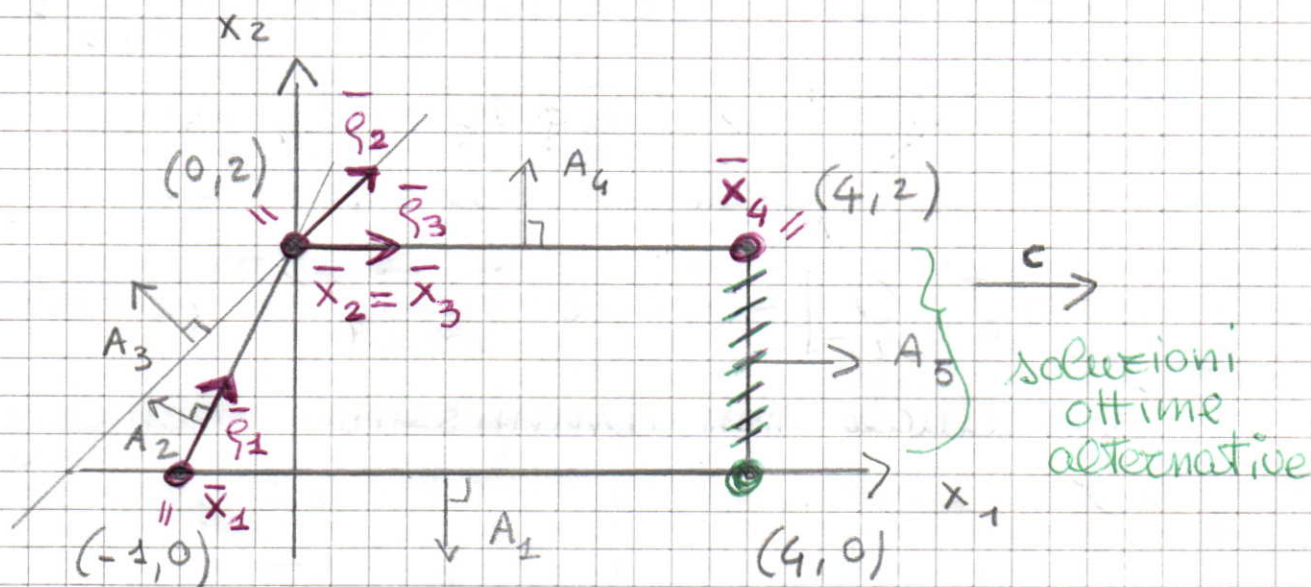
$$c \in \text{cono}(\{A_4, A_5\}):$$

$$\bar{y}_4 = 0, \bar{y}_5 > 0$$

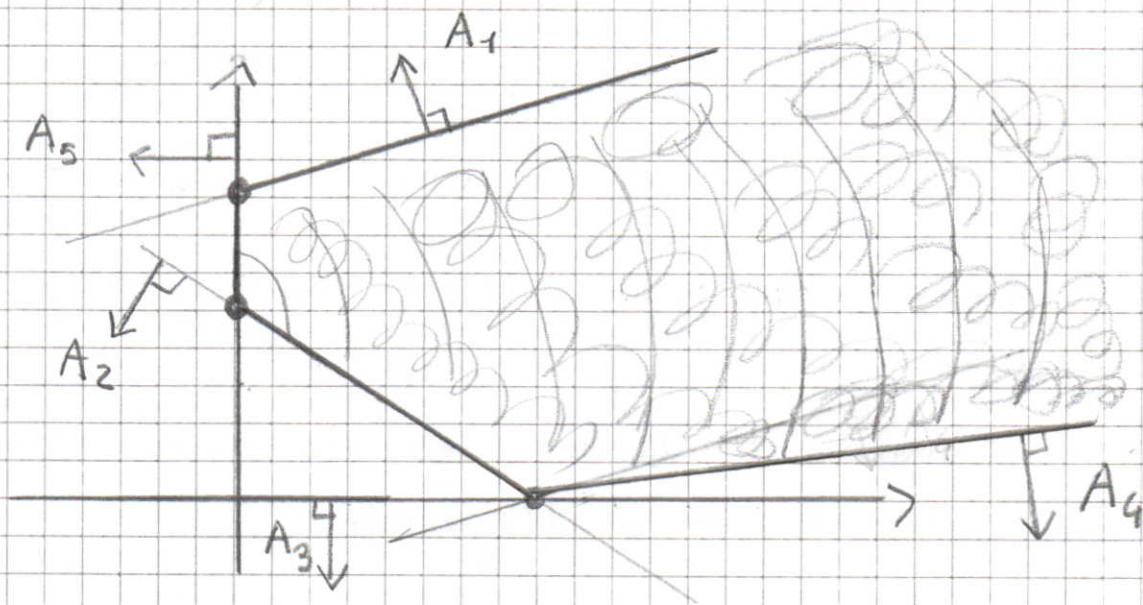
$$\bar{y}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{y}_5]: \text{ soluzione di base duale ammissibile degenera}$$

STOP : \bar{x}_4 soluzione ottima primale

$\bar{y}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{y}_5]$ soluzione ottima duale



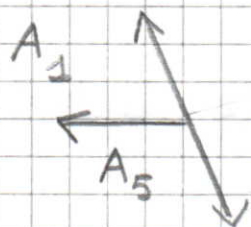
② Simplesso Primale (geometrico)



$$c = -A_1 = A_5$$

$$B = \{1, 5\}$$

it 1) $B = \{1, 5\}$ \bar{x}_1 in figura: soluzione di base primale ammissibile non degenera



$$c = -A_1$$

$$c = -A_1 :$$

$$\bar{y}_1 = -1, \bar{y}_5 = 0$$

$y^T = [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$: soluzione di base duale non ammissibile degenera

$$h = 1$$

$$\bar{y}_1 = -A_B^{-1} u_{B(1)} \quad \text{ovvero} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \bar{y}_1 = -1 \\ A_5 \bar{y}_1 = 0 \end{array} \right.$$

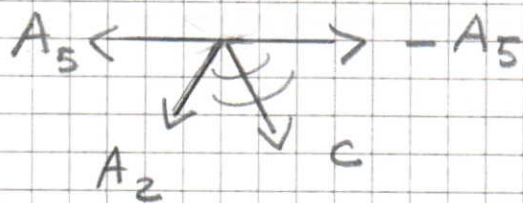
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\bar{y}_1 in figura

$$K = 2$$

$$it 2) \quad B = \{1, 5\} \setminus \underbrace{\{1\}}_K \cup \underbrace{\{5\}}_K = \{2, 5\}$$

\bar{x}_2 in figura: soluzione di base primale ammissibile non degenera



$$c \in \text{cono}(\{A_2, -A_5\}) :$$

$$\bar{y}_2 > 0, \bar{y}_5 < 0$$

$y^T = [0 \ \bar{y}_2 \ 0 \ 0 \ \bar{y}_5]$: soluzione di base duale non ammissibile non degenera

$$h=5$$

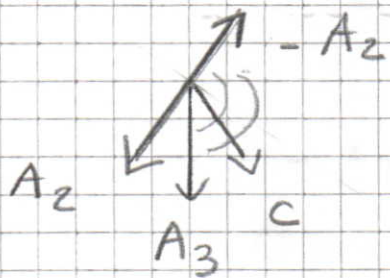
$$\bar{p}_2 = A_B^{-1} u_{B(5)} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_2 \bar{p}_2 = 0 \\ A_5 \bar{p}_2 = -1 \end{cases} \quad \text{in figura}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$K = \min\{3, 4\} = 3$ regola anticiclo di Bland

$$+3) \quad B = \{2, 5\} \setminus \underbrace{\{5\}}_h \cup \underbrace{\{3\}}_K = \{2, 3\}$$

\bar{x}_3 in figura: soluzione di base primale ammissibile degenera



$c \in \text{cono}(\{-A_2, A_3\})$:

$$\bar{y}_2 < 0, \bar{y}_3 > 0 \quad h=2$$

$\bar{y}^T = [0 \ \bar{y}_2 \ \bar{y}_3 \ 0 \ 0]$ soluzione di base duale non ammissibile non degenera

$$\bar{p}_3 = -A_B^{-1} u_{B(2)} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_2 \bar{p}_3 = -1 \\ A_3 \bar{p}_3 = 0 \end{cases}$$

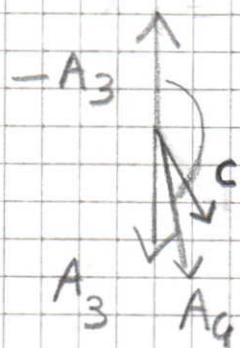
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\bar{p}_3 in figura: direzione di crescita non ammissibile per \bar{x}_3 , $\bar{\lambda} = 0$ cambio di base degenera

$K = 4$ attivo ma non in base

$$it\ 4) \quad B = \{2, 3\} \setminus \underbrace{\{2\}}_h \cup \underbrace{\{4\}}_k = \{3, 4\}$$

$$\bar{x}_4 = \bar{x}_3$$



$c \in \text{cono}(\{-A_3, A_4\})$:

$$\bar{y}_3 < 0, \bar{y}_4 > 0$$

$\bar{y}^T = [0 \ 0 \ \bar{y}_3 \ \bar{y}_4 \ 0]$: soluzione di base duale
non ammissibile non degenera

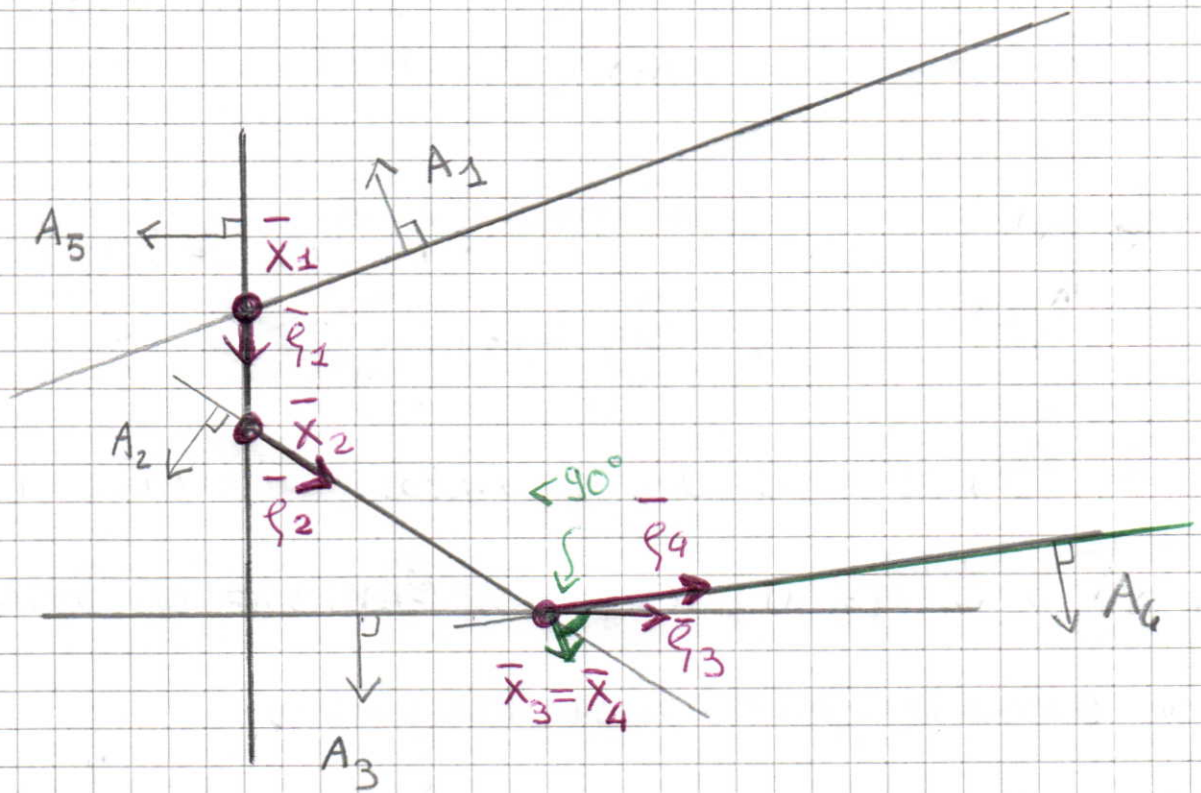
$$h = 3$$

$$\bar{y}_4 = -A_B^{-1} \mu_{B(3)} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_3 \bar{y}_4 = -1 \\ A_4 \bar{y}_4 = 0 \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

\bar{y}_4 in figura: direzione di crescita
illimitata ($\bar{\lambda} = +\infty$)

STOP: primale superiormente illimitato
duale vuoto



\bar{f}_4 è direzione di recessione per il poliedro primale

$c^T \bar{f}_4 > 0$: direzione di crescita

Esercitazione condizioni

S.C.

M.G. Santella

Corso "Ricerca Operativa"
Università di Pisa

①

$$(P) \max x_1 + 2x_2$$

$$(D) \min 5y_1 + 4y_2 + 3y_3$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$y_1 + y_2 - y_4 = 1$$

$$x_1 \leq 4$$

$$y_1 + y_3 - y_5 = 2$$

$$x_2 \leq 3$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

$\bar{x} = (2, 3)$ soluzione ammissibile per (P)

è ottima?

Condizioni degli scarti complementari:

$$\bar{x}_1 < 4 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$-\bar{x}_1 < 0 \Rightarrow y_4 = 0$$

$$-\bar{x}_2 < 0 \Rightarrow y_5 = 0$$

Overco: una soluzione duale in S.C. con \bar{x}

deve avere forma $(y_1, 0, y_3, 0, 0)$.

\bar{x} è ottima per (P) se e solo se esiste una soluzione duale ammissibile della forma

$(y_1, 0, y_3, 0, 0)$, ovvero:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_3 = 2 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Duale Restretto (DR)}$$

se e solo se (DR) ha soluzione.

(DR) ha un'unica soluzione: $\bar{y}_1 = \bar{y}_3 = 1$

Quindi \bar{x} è ottimo per (P), e $\bar{y} = (1, 0, 1, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D).

Se $c^T = [3 \quad -1]$:

$$(DR) \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_1 + y_3 = -1 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{non ha soluzione}$$

Quindi \bar{x} non è soluzione ottima per (P).

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (P) \max \quad & -2x_1 - x_2 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (D) \min \quad & 2y_2 + y_3 + 4y_4 + 3y_5 \\ & -2y_2 - y_3 + y_4 + y_5 = -2 \\ & -y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = -1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizzando le condizioni degli s.c., verificare se $\bar{x} = (-1, 0)$ sia ottimo per (P). In caso affermativo, determinare l'insieme di tutte le soluzioni duali

ottimo.

$\bar{x} = (-1, 0)$ è ammissibile per (P)

$$I = I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$$

Una soluzione duale in s.c. con \bar{x} deve avere forma $(y_1, y_2, y_3, 0, 0)$.

\bar{x} è ottimo per (P) se e solo se esiste una soluzione duale ammissibile della forma $(y_1, y_2, y_3, 0, 0)$; ovvero se e solo se (DR) ha soluzione:

$$(DR): \begin{cases} -2y_2 - y_3 = -2 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 = -1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Posto $y_3 = \alpha$:

$$y_2 = \frac{2 - \alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{dalla prima equazione})$$

$$y_1 = 1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + 2\alpha = 2 + \frac{3}{2}\alpha \quad (\text{dalla seconda equazione})$$

Il sistema di equazioni ammette quindi

infinita soluzioni della forma $\left(2 + \frac{3}{2}\alpha, 1 - \frac{\alpha}{2}, \alpha\right)$:

$$2 + \frac{3}{2}\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq -\frac{4}{3}$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 2$$

$$\alpha \geq 0$$

Quindi (DR) ammette infinite soluzioni:

$$(2 + \frac{3}{2}\alpha, 1 - \frac{\alpha}{2}, \alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 2]$$

Segue che (D) ha infinite soluzioni ottime:

$$\{(2 + \frac{3}{2}\alpha, 1 - \frac{\alpha}{2}, \alpha, 0, 0) : 0 \leq \alpha \leq 2\}.$$

Tale insieme costituisce l'insieme di tutte e solo le soluzioni ottime di (D).

③

$$(D) \min 2y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1 - y_2 + 2y_3 - y_4 = 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Utilizzando le condizioni degli s.c., verificare se $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ sia ottimo. In caso affermativo si individuino gli insiemi di tutte le soluzioni ottime, sia primali che duali.

$$\bar{y} = (0, 0, 1, 0) \text{ è ammissibile per (D)}$$

\bar{y} è ottimo se e solo se esiste \bar{x} ammissibile per (P) tale che $\bar{y}_i(b_i - A_i \bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, 4$

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \max x_1 + 2x_2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
 & -x_2 \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\bar{y}_3 > 0 \Rightarrow b_3 - A_3 \bar{x} = 0 \text{ ovvero } x_1 + 2x_2 = 4$$

in qualsiasi soluzione primale complementare a \bar{y} .

Posto $x_2 = \alpha$, l'equazione ha infinite soluzioni della forma $(4 - 2\alpha, \alpha)$. Perché $(4 - 2\alpha, \alpha)$ sia ammissibile per (P):

$$4 - 2\alpha + \alpha = 4 - \alpha \leq 2 \Leftrightarrow \alpha \geq 2$$

$$4 - 2\alpha - \alpha = 4 - 3\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$

$$-\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq -1$$

ovvero $\forall \alpha \geq 2$.

Quindi:

- 1) $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ è ottima per (D)
- 2) $\{(4 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \geq 2\}$ sono tutte e sole le soluzioni ottime di (P)

Esistono altre soluzioni ottime di (D)?

Fissiamo ad esempio $d=2$: $\bar{x}=(0,2)$ è soluzione ottima di (P), $I=I(\bar{x})=\{1,3\}$

Una soluzione duale in s.c. con \bar{x} deve quindi avere forma $(y_1, 0, y_3, 0)$.

Considero:

$$(DR): \begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ y_1 + 2y_3 = 2 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

(DR) ammette l'unica soluzione $\bar{y}_1=0, \bar{y}_3=1$.

Quindi $(0, 0, 1, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D).

Esercitazione Simplexso

Duale

Ugo Scutella
Corso "Ricerca Operativa"
Università di Pisa

① Simplexso Duale (algebrico)

$$\max x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 1$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

$$B = \{2, 3\}$$

it1) $B = \{2, 3\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = [1 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 4] \quad \bar{y}_N = 0$$

$$\bar{y}^T = [0 \ 1 \ 4 \ 0 \ 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \neq b_N = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \min \{ i \in N : A_i \bar{x} > b_i \} = \min \{ 1, 5 \} = 1$$

regola anticiclo
di Bland

$$\bar{z}_B^T = A_K A_B^{-1} = [1 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 4]$$

$$\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B, \eta_i > 0 \right\} = \min \{1, 1\} = 1$$

$$h = \min \{ i \in B : \eta_i > 0, \bar{\theta} = \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} \} = \min \{2, 3\} = 2$$

regola

$$B = \{2, 3\} \setminus \{2\} \cup \{1\} = \{1, 3\}$$

anticiclo di Bland

it 2) $B = \{1, 3\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_N = 0$$

$$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K=4$$

$$\eta_B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{y}_3}{\eta_3} = 0 \quad h = 3 \quad \text{cambio di base degenero}$$

$$B = \{1, 3\} \setminus \{3\} \cup \{4\} = \{1, 4\}$$

it 3) $B = \{1, 4\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

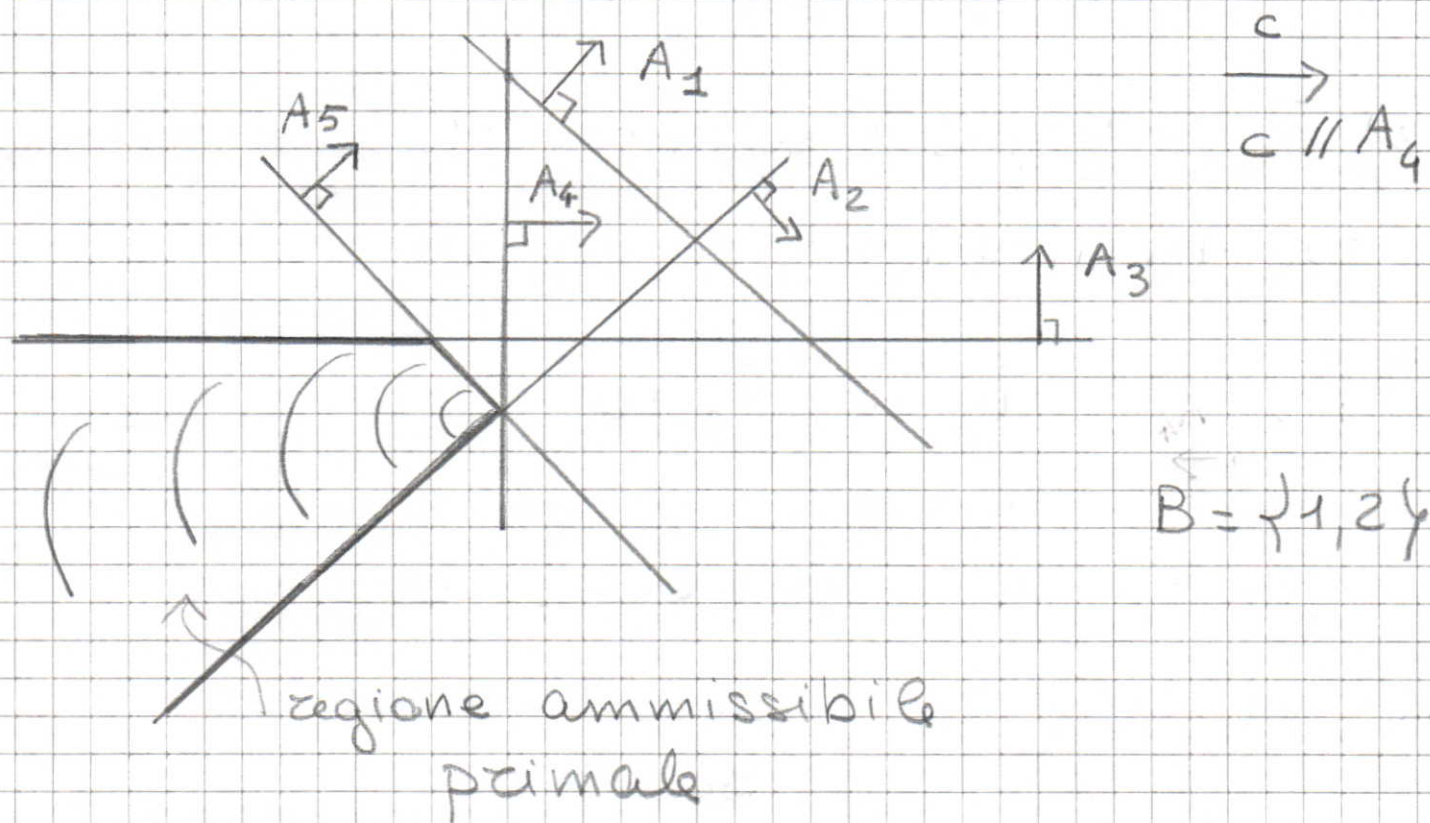
$$\bar{y}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{STOP}$$

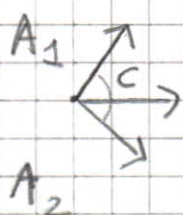
$\bar{x} = (\frac{3}{7}, \frac{6}{7})$ è soluzione ottima primale

$\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0)$ è soluzione ottima duale

② Simplessa Duale (geometrico)



it 1) \bar{x}_1 in figura: soluzione di base primale
non ammissibile non degenera

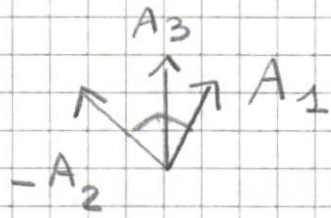


$$\bar{y}_1 > 0, \bar{y}_2 > 0$$

soluzione di base duale ammissibile
non degenera

$K = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{3, 4, 5\} = 3$
 regola anticlock
 di Bland

$$\eta_B^T = A_K A_B^{-1} = A_3 A_B^{-1}, \text{ oppure } A_3 = \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2$$



$A_3 \in \text{cono}(\{A_1, -A_2\})$:

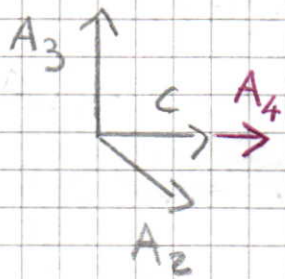
$$\eta_1 > 0, \eta_2 < 0$$

caso
semplice

$$h = 1$$

$$B = \{1, 2\} \setminus \{1\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

it2) \bar{x}_2 in figura: soluzione di base primale
 non ammissibile non degenera



$$\bar{y}_2 > 0, \bar{y}_3 > 0$$

soluzione di base duale
 ammissibile non degenera

$K = \min\{4, 5\} = 4$ regola anticlock di
 Bland

$$\eta_B : A_4 \in \text{cono}(\{A_2, A_3\}) :$$

$$\eta_2 > 0, \eta_3 > 0$$

$h ?$

$$c^T = \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3$$

$$A_4 = \eta_2 A_2 + \eta_3 A_3$$

$$\text{poiché } c \parallel A_4 : \bar{y}_2 = \alpha \eta_2, \bar{y}_3 = \alpha \eta_3 \text{ per } \alpha > 0$$

Quindi:

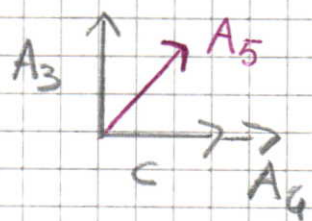
$$\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{\bar{y}_1}{\eta_1} : i \in B, \eta_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{y}_2}{\eta_2}, \frac{\bar{y}_3}{\eta_3} \right\} =$$

$$= \frac{\bar{y}_2}{\eta_2} = \frac{\bar{y}_3}{\eta_3} = \alpha$$

di conseguenza $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland

$$B = \{2, 3\} \xrightarrow{h} \{2\} \cup \{4\}^K = \{3, 4\}$$

it 3) \bar{x}_3 in figura: soluzione di base primale non ammissibile non degenera



$$\bar{y}_3 = 0, \bar{y}_4 > 0$$

soluzione di base duale ammissibile degenera

$$K = 5$$

$$\eta_B: A_5 \in \text{cono}(\{A_3, A_4\}):$$

$$\eta_3 > 0, \eta_4 > 0$$

$$h? \quad \bar{\theta} = \min \left\{ \frac{\bar{y}_3}{\eta_3}, \frac{\bar{y}_4}{\eta_4} \right\} = \min \left\{ 0, \frac{\bar{y}_4}{\eta_4} \right\} = 0$$

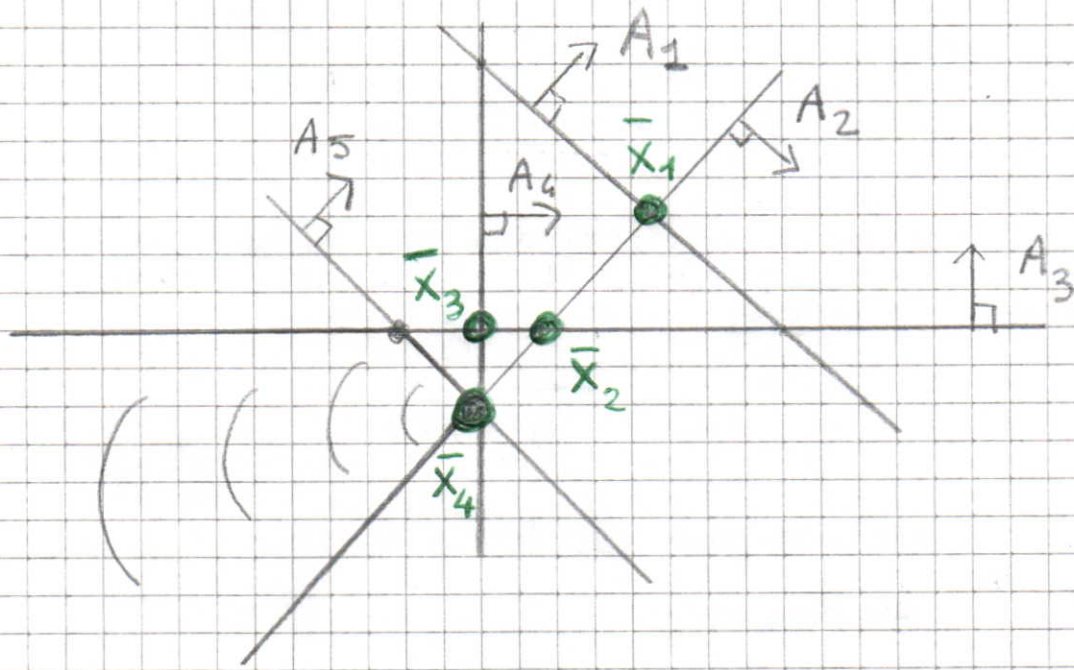
di conseguenza $h = 3$

cambio di base degenera

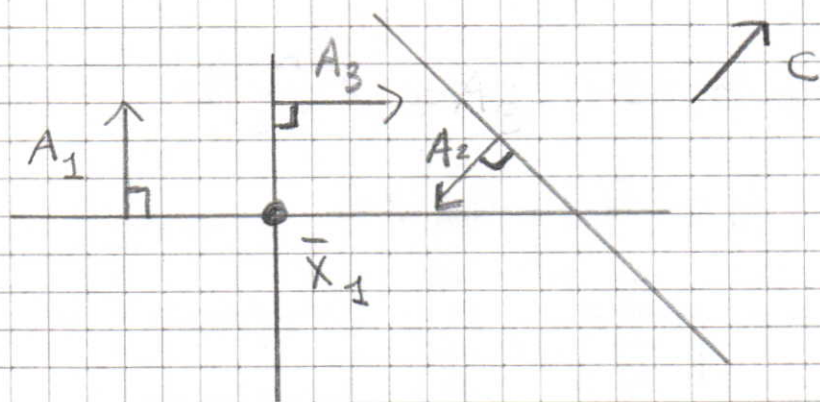
$$B = \{3, 4\} \xrightarrow{h} \{3\} \cup \{5\}^K = \{4, 5\}$$

it 4) $B = \{4, 5\}$ \bar{x}_4 in figura : soluzione di base primale ammissibile degenera
 \bar{y} non cambia ($\bar{\theta} = 0$)

STOP : \bar{x}_4 soluzione ottima primale
 \bar{y} soluzione ottima duale

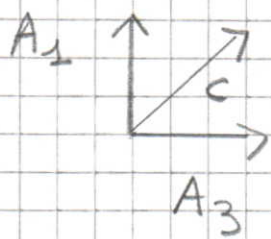


3



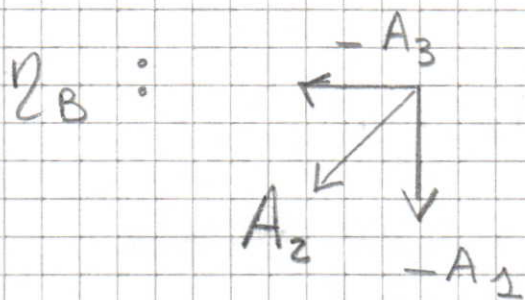
regione primale vuota

$B = \{1, 3\}$ \bar{x}_1 in figura



$$\bar{y}_1 > 0, \bar{y}_3 > 0$$

$K = 2$ unico vincolo violato



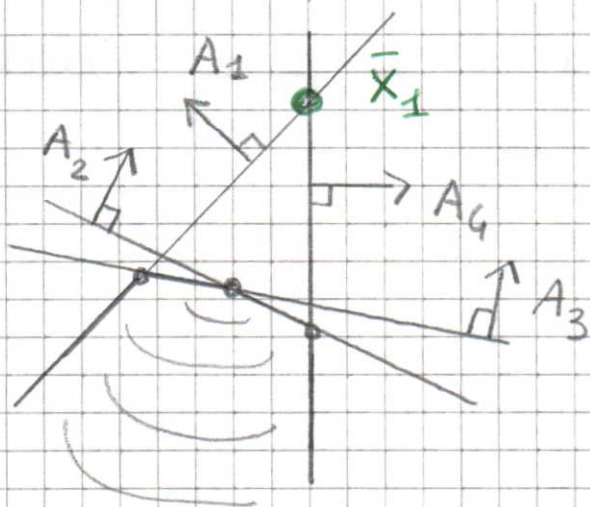
$A_2 \in \text{cono}(-A_1, -A_3)$:

$$\eta_1 < 0, \eta_3 < 0,$$

$$\text{ovvero } \eta_B \leq 0$$

STOP: il duale è inferiormente illimitato
e di conseguenza il primale è vuoto.

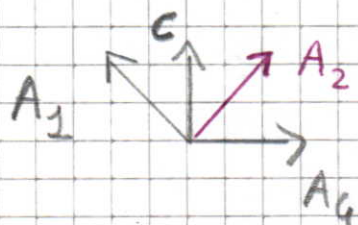
④



$$\uparrow c$$

$$B = \{1, 4\}$$

it 1) $B = \{1, 4\}$ \bar{x}_1 in figura



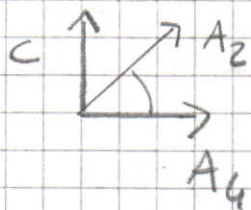
$$\bar{y}_1 > 0, \bar{y}_4 > 0$$

$$K = \min\{2, 3\} = 2$$

$h_B: A_2 \in \text{cono}(\{A_1, A_4\}) :$

$$h_1 > 0, h_4 > 0$$

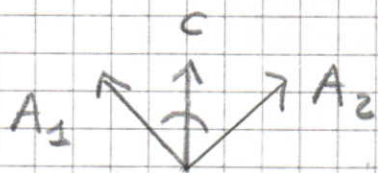
$h? \quad \text{se } h = 1, B = \{2, 4\}$



$c \notin \text{cono}(\{A_2, A_4\}) :$

soluzione di base duale
non ammissibile

se $h = 4, B = \{1, 2\}$



$c \in \text{cono}(\{A_1, A_2\}) :$

soluzione di base duale
ammissibile

quindi $h = 4$.

Problemi di flusso su rete

Maria Grazia Santella

Corso "Ricerca Operativa", Corso di laurea in Matematica
Università di Pisa

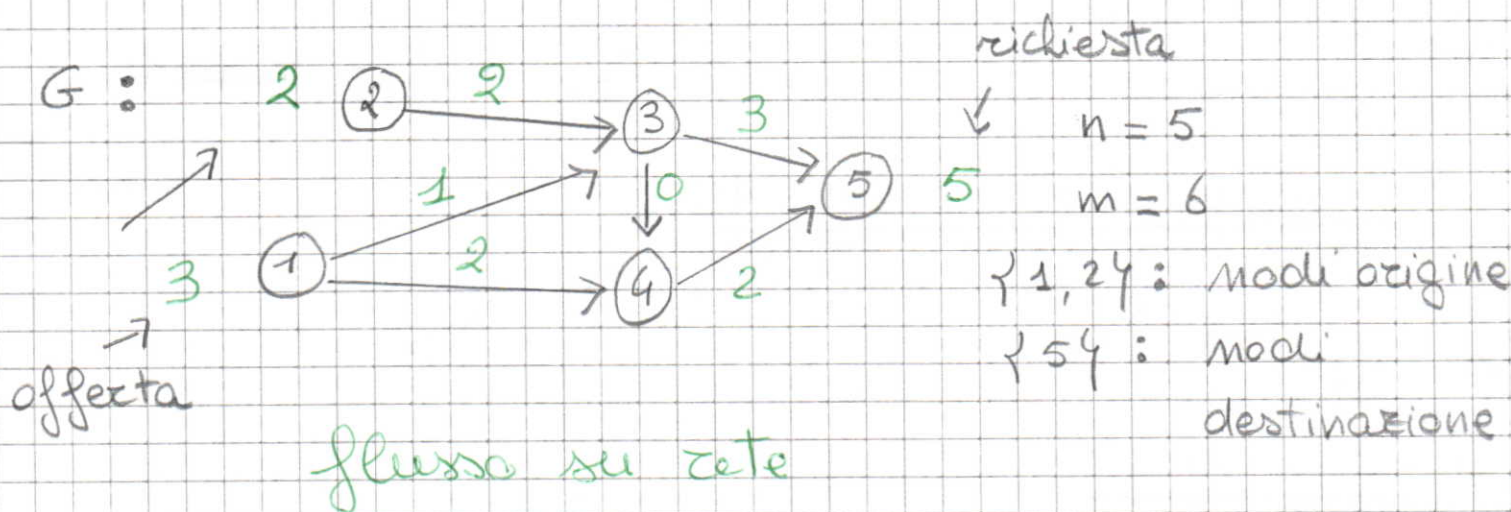
(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 3)

• Problemi di ottimizzazione su reti di flusso

Un esempio di flusso su rete

Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato

$$|N| = n, |A| = m$$



Come formulare l'invio di una certa tipologia di bene (\equiv flusso) dai nodi origine ai nodi destinazione lungo una rete?

Esempio di modello di flusso su rete:

Variabili decisionali (di flusso):

x_{ij} : quantità di bene (flusso) inviata lungo (i,j) , $\forall (i,j) \in A$

Vincoli di bilancio:

$$\begin{array}{lcl} \text{modo 1} & \begin{array}{c} [-x_{13} - x_{14} = -3] \\ x_{13} + x_{14} \end{array} & = 3 \\ \text{modo 2} & \begin{array}{c} [-x_{23} = -2] \\ x_{23} \end{array} & = 2 \\ \text{modo 3} & x_{23} + x_{13} - x_{34} - x_{35} & = 0 \\ \text{modo 4} & x_{14} + x_{34} - x_{45} & = 0 \\ \text{modo 5} & x_{35} + x_{45} & = 5 \end{array}$$

Vincoli di non negatività:

$$x_{23}, x_{13}, \dots, x_{45} \geq 0$$

In generale:

Dato un grafo orientato $G=(N,A)$, siano:

1) $b_i \in \mathbb{R}$ bilancio del nodo i , $\forall i \in N$

Per convenzione:

$b_i < 0$ se i è un nodo origine (sorgente)
 $b_i > 0$ se i è un nodo destinazione (pozzo)
 $b_i = 0$ se i è un nodo di transito

2) $u_{ij} \geq 0$ capacità di (i,j) , $\forall (i,j) \in A$

3) $c_{ij} \in \mathbb{R}$ costo unitario di invio lungo (i,j) , $\forall (i,j) \in A$

Il problema di flusso di costo minimo consiste nel decidere come inviare il bene lungo le rete di flusso, a costo minimo, rispettando i bilanci dei nodi e le capacità dei collegamenti.

Un modello matematico:

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad \forall i \in N$$

vincoli di bilancio o di conservazione del flusso

PL!

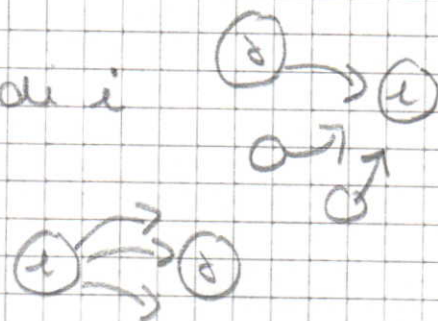
$l_{ij} \leq 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$

vincoli di capacità

dove:

$BS(i)$: Backward Star di i

$FS(i)$: Forward Star di i



In forma compatta:

$$\min c^T x$$

$$E x = b$$

$$0 \leq x \leq u$$

con $c = [c_{ij}]$ vettore dei costi

$b = [b_i]$ vettore dei bilanci

$u = [u_{ij}]$ vettore delle capacità

$x = [x_{ij}]$ vettore delle variabili di flusso

E : matrice di incidenza della rete

nell'esempio:

	$(2,3)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(4,5)$
1		-1	-1			
2	-1					
3	+1	+1		-1	-1	
4			+1	+1		-1
5					+1	+1

$$E = \begin{bmatrix} x_{23} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{34} \\ x_{35} \\ x_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ b \end{bmatrix}$$

|||
x

Siano: $D = \{i \in N : b_i > 0\}$ insieme dei nodi destinazione

$O = \{i \in N : b_i < 0\}$ insieme dei nodi
origine

Condizione necessaria di ammissibilità:

$$\sum_{i \in D} b_i = - \sum_{i \in O} b_i$$

Lammini, cicli e alberi (Appendice B)

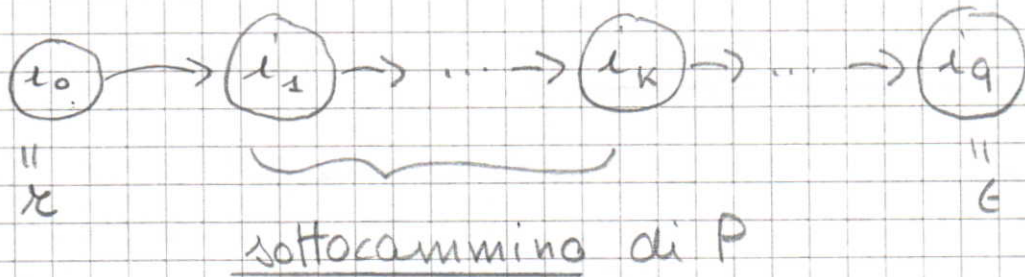
Definizione: dato un grafo orientato $G = (N, A)$,

un cammino P da $x \in N$ a $t \in N$ è una sequenza di nodi

$$P = (\underset{\substack{\parallel \\ \in}}{i_0}, i_1, \dots, i_q) \underset{\substack{\parallel \\ \in}}{\quad}$$

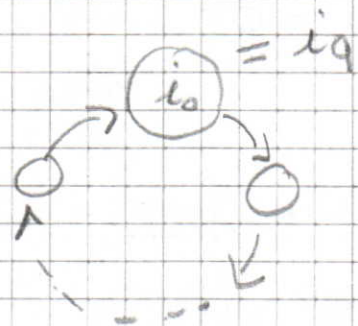
tali che $(i_{h-1}, i_h) \in A$, $h = 1, \dots, q$

esempio

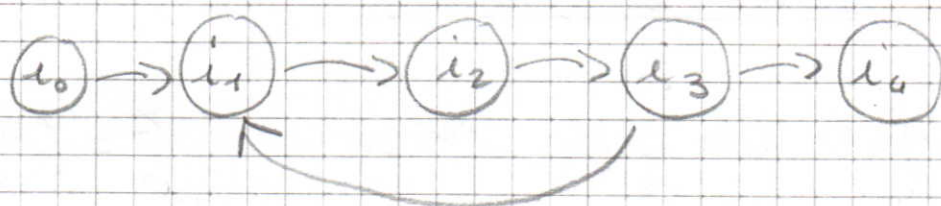


Nota: considereremo solo cammini orientati!

Definizione: un cammino è un ciclo (orientato) se $i_0 = i_q$.



Definizione: un cammino (ciclo) è semplice se non contiene ripetizioni di nodi.



non è semplice (contiene un ciclo)

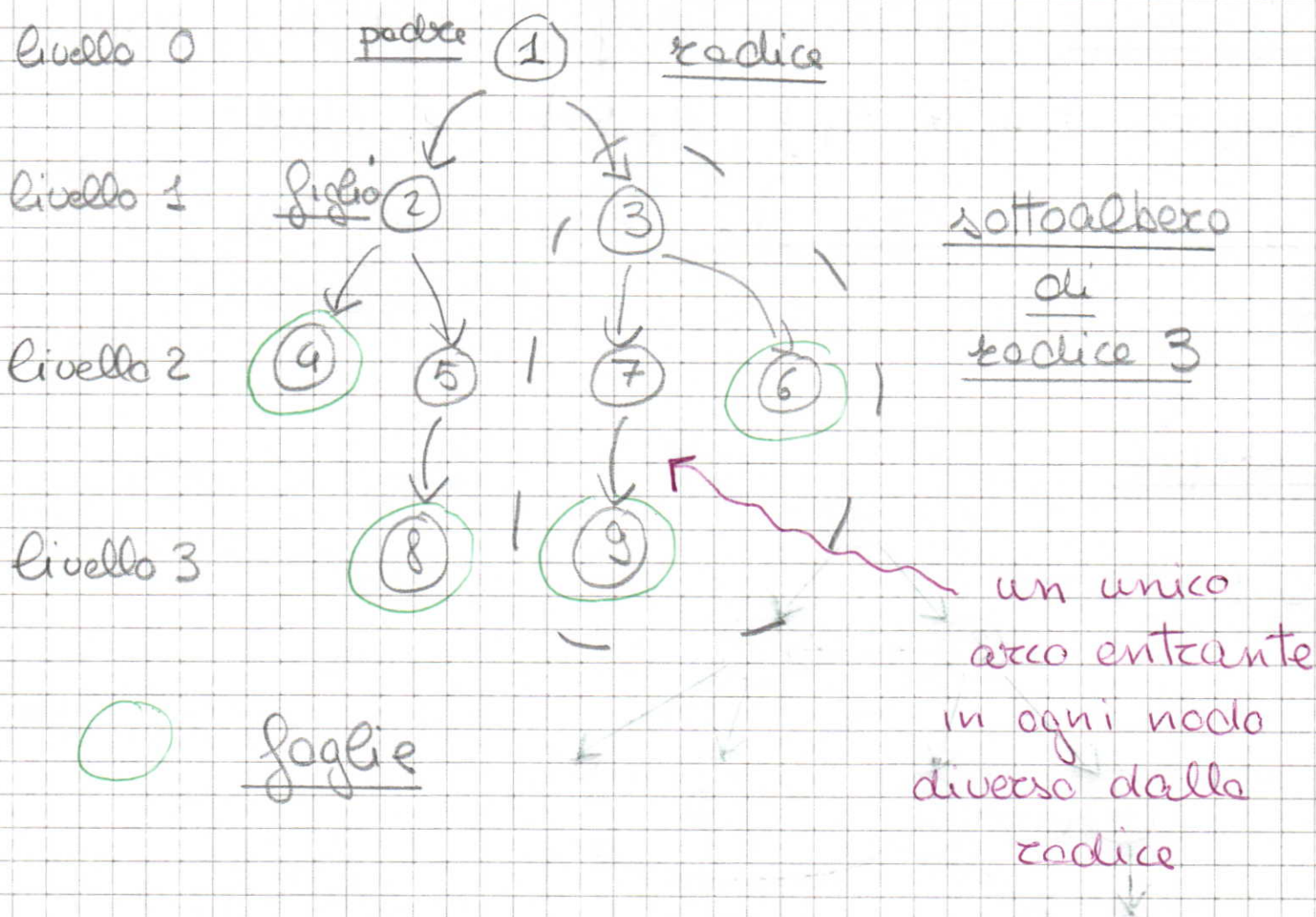
Definizione: un albero è un grafo connesso e privo di cicli.

Segue che, se $T = (N, A)$ è un albero e $|N| = n$, allora $|A| = n - 1$.

Definizioni equivalenti: un albero è un grafo connesso tale che $|A| = n - 1$; un albero è un grafo privo di cicli (\equiv aciclico) tale che $|A| = n - 1$.

Definizione: un albero è radicato quando un suo nodo è selezionato come nodo radice, e orientato se i suoi archi sono orientati dal padre al figlio.

esempio

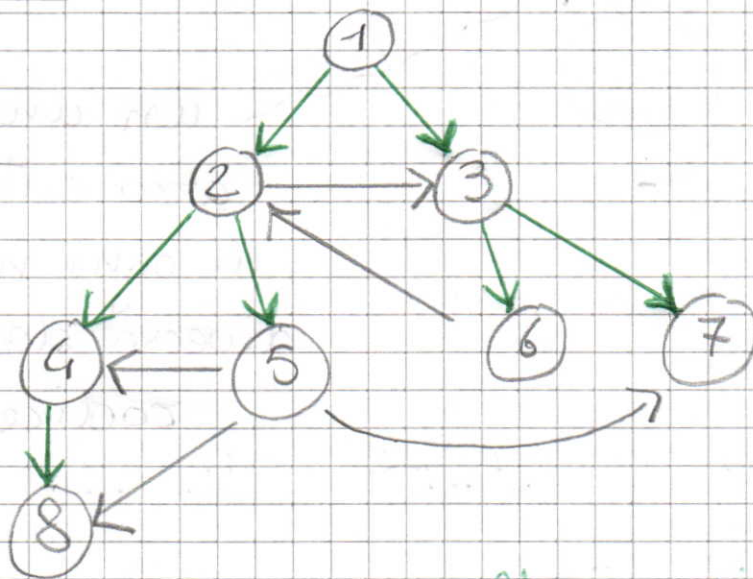


Proprietà: in un albero radicato e orientato esiste un unico cammino dalla radice a ogni nodo dell'albero, e la sua lunghezza (\equiv numero di archi) è uguale al livello del nodo nell'albero.

Definizione: dato un grafo $G = (N, A)$, un albero $T = (N, A_T)$, $A_T \subseteq A$, è detto albero di copertura (spanning tree) di G .

esempio

G :



albero di copertura
di G

Il problema dei cammini minimi

Maxia Grazia Scutella

Ricerca Operativa, Corso di Laurea in Matematica

Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 3.2)

Caso speciale del problema di flusso di costo minimo:

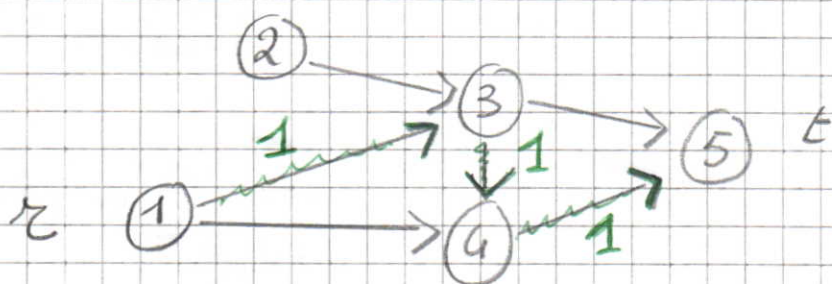
$$|O| = |D| = 1 : O = \{x\}, D = \{t\}$$

$$c_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall (i,j) \in A$$

$$u_{ij} = +\infty \quad \forall (i,j) \in A \quad (\text{non capacitato})$$

$b_x = -1$, $b_t = 1$, ovvero x invia a t un'unità di flusso

esempio



l'unità di flusso viene inviata lungo un cammino (orientato) da x a t : il problema consiste quindi nel determinare un cammino

da r a t è di costo minimo (cammino minimo)

Modello matematico (caso speciale del modello di PL per il problema di flusso di costo minimo)

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} &= \begin{cases} -1 & \text{se } i = r \\ +1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

Studieremo le proprietà del problema direttamente in termini di grafo (derivano dalla teoria della PL)

Definizioni:

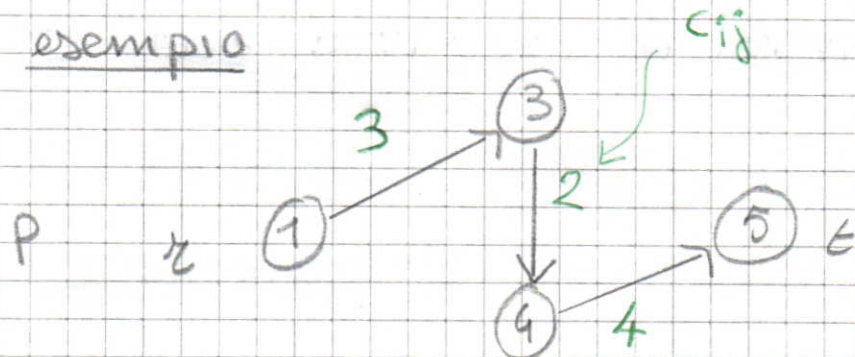
1) dato un cammino P , $C(P) = \sum_{(i,j) \in P} c_{ij}$ è

detto costo di P

2) $P_{r,t}$ è l'insieme dei cammini da r a t in G

abuso di notazione

esempio

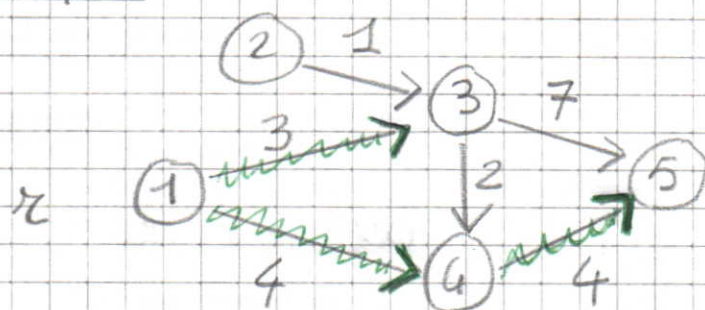


$$c(P) = 3 + 2 + 4 = 9$$

Problema del cammino minimo: dati s e t ,
trova $P \in P_{s,t}$ che sia di costo minimo

Problema dell'albero dei cammini minimi:
dato $G=(V,A)$ e dato s , trova un cammino
di costo minimo da s a i , $\forall i \neq s$

esempio



Albero dei
cammini minimi
di radice 1:

albero di copertura
radicato in s e orientato

Osservazione 1: poiché $(1,4,5)$ è un cammino
minimo da 1 a 5, si ha che $(1,4)$ è
un cammino minimo da 1 a 4

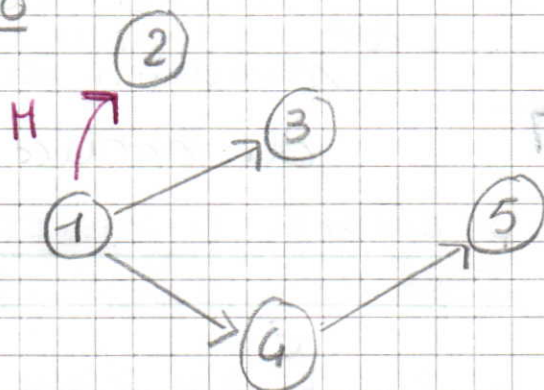
proprietà di concatenazione

Osservazione 2: gli alberi di copertura radicati in r e orientati sono le soluzioni di base ammissibili del modello di PL precedente (no dim)

Assunzioni:

- 1) G è "fortemente connesso", ovvero in G esiste un cammino orientato da r a i , $\forall i \neq r$; se non esiste, basta aggiungere un arco $(r, i) \notin A$ di costo $M \geq (n-1)c_{\max} + 1$.
- \uparrow
massimo
costo in G

esempio

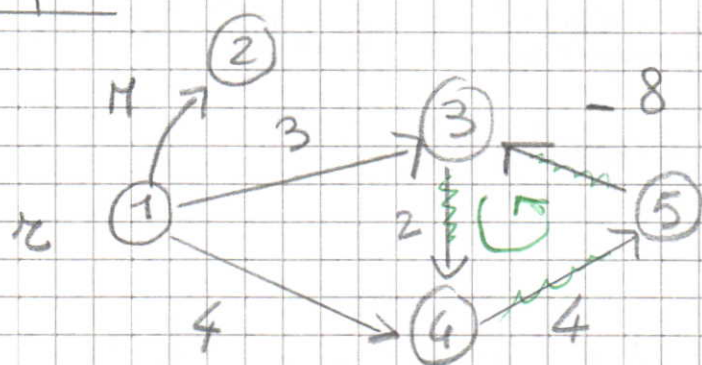


albero di
copertura!

- 2) in G non esistono cicli orientati di costo negativo (cicli negativi).

Se esistesse un ciclo negativo?

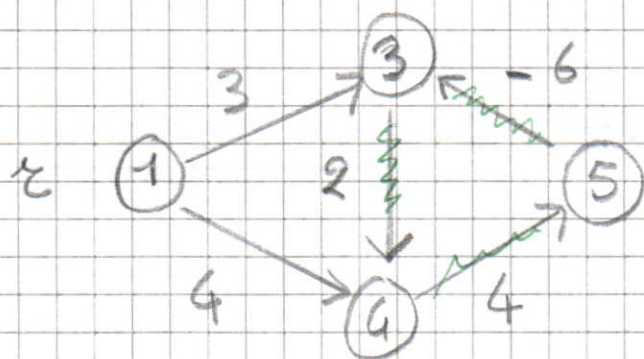
esempio



$$C((3, 4, 5)) = -2$$

Per individuare un cammino minimo da 1 a 3 (4 e 5), conviene visitare il ciclo infinite volte: problema dei cammini minimi inferiormente illimitato!

Assipotesi che G non contenga cicli negativi (si può verificare in tempo polinomiale), ogni cammino minimo è privo di cicli, ovvero semplice, ovvero formato da al più $(n-1)$ archi.



ciclo nullo:
gli algoritmi
risolutivi non li
considerano

Visite di un grafo (Appendice B.3)

$G = (N, A)$ grafo orientato

$x \in N$ nodo radice

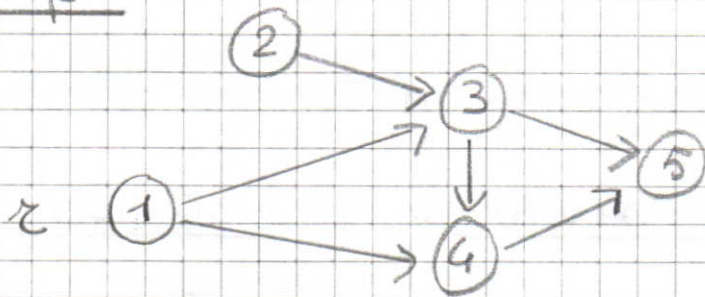
problema: determinare l'insieme di nodi raggiungibili da x in G mediante un cammino orientato, restituendo

$$T_x = (N_x, A_x)$$

albero della visita

con $N_x \subseteq N$, $A_x \subseteq A$

esempio



Inizializzazione

$Q = \{x\} = \{1\}$ insieme dei nodi candidati

$p(1) = nil$

$p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0$ predecessori

Iterazioni

1) $i = 1$, $Q = \emptyset$

FS(1): $(1, 3) : p(3) = 1$

$(1, 4) : p(4) = 1$

$Q = \{3, 4\}$

2) $i = 3$, $Q = \{4\}$

FS(3): $(3, 4) : \text{—}$

$(3, 5) : p(5) = 3$

$Q = \{4, 5\}$

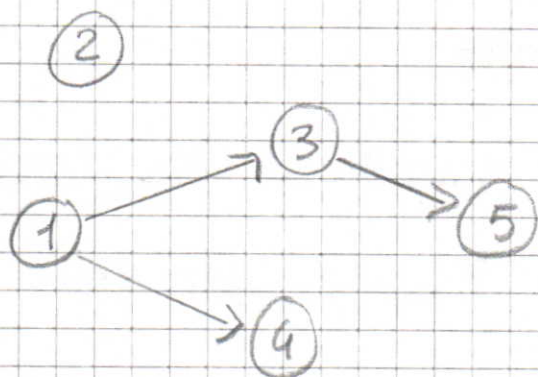
3) $i = 4$, $Q = \{5\}$

FS(4): $(4, 5) : \text{—}$

$Q = \{5\}$

4) $i = 5$, $Q = \emptyset$ STOP

$T_r :$



definito tramite
i predecessori

Osservazione: $p(2) = 0$ segnale che non esiste
nessun cammino orientato da 1 a 2 in G

Formalmente:

Procedure Visita (G, x, p)
output

begin

for $i = 1$ to n do $p(i) = 0$;

$p(x) = \text{nil}$;

$Q = \{x\}$;

repeat

$i = \text{SELECT}(Q)$; $Q = Q - \{i\}$;

for each $(i, d) \in \text{FS}(i)$ do

if $p(d) = 0$ then begin

$p(d) = i$;

$Q = Q \cup \{d\}$

end

until $Q = \emptyset$

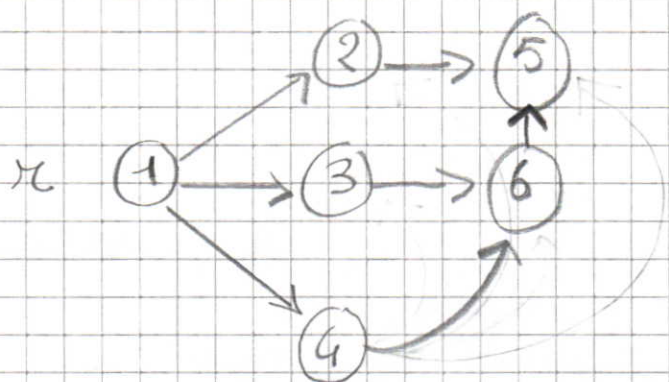
end

Complessità in tempo : $O(m)$ se SELECT richiede tempo costante

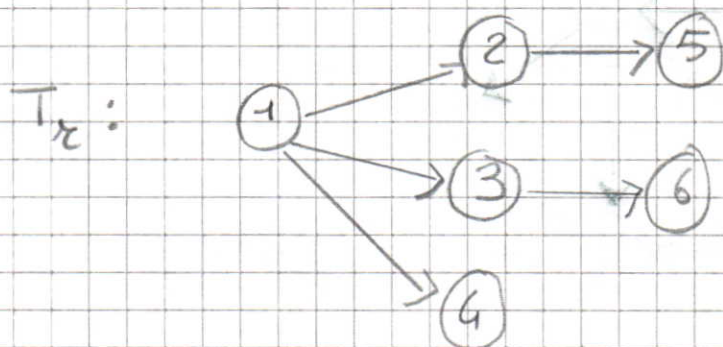
Correttezza : non dipende da ordine di esame degli archi in $\text{FS}(i)$, per ogni i visitato, e neppure dal criterio di selezione in SELECT

Implementazioni diverse, tuttavia, possono individuare cammini con proprietà diverse

esempio



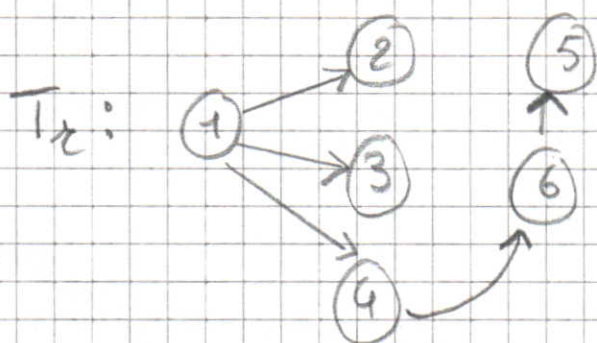
1) Q code : strategia FIFO \equiv First In First Out



$Q = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

cammini "corti", nel senso di numero di archi

2) Q stack : strategia LIFO \equiv Last In First Out



$Q = (5, 6, 4, 3, 2, 1)$



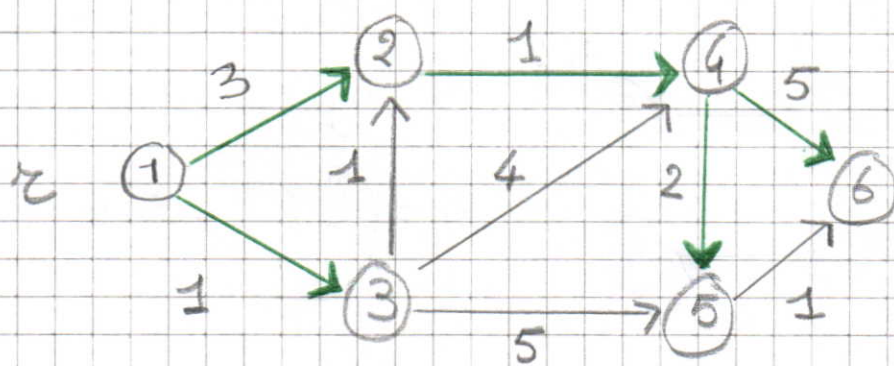
cammini "lunghi" (modo 5)

Teorema: Se ϕ è implementato come una coda, la procedura *Visita* individua un cammino con il minimo numero di archi da x a i , per ogni i raggiungibile da x .

Ma dim

Corollario: Se $c_{ij} = 1 \forall (i, j) \in A$, il problema dei cammini minimi è risolvibile in $O(m)$.

Alberi, etichette e condizioni di ottimalità



T è una soluzione ottima?

Calcoliamo il seguente insieme di etichette, eseguendo *Visita* di T a partire da x :

$$d(1) = 0$$

$$d(2) = d(1) + 3 = 3$$

$$d(3) = d(1) + 1 = 1$$

$$d(4) = d(2) + 1 = 4$$

$$d(5) = d(4) + 2 = 6$$

$$d(6) = d(4) + 5 = 9$$

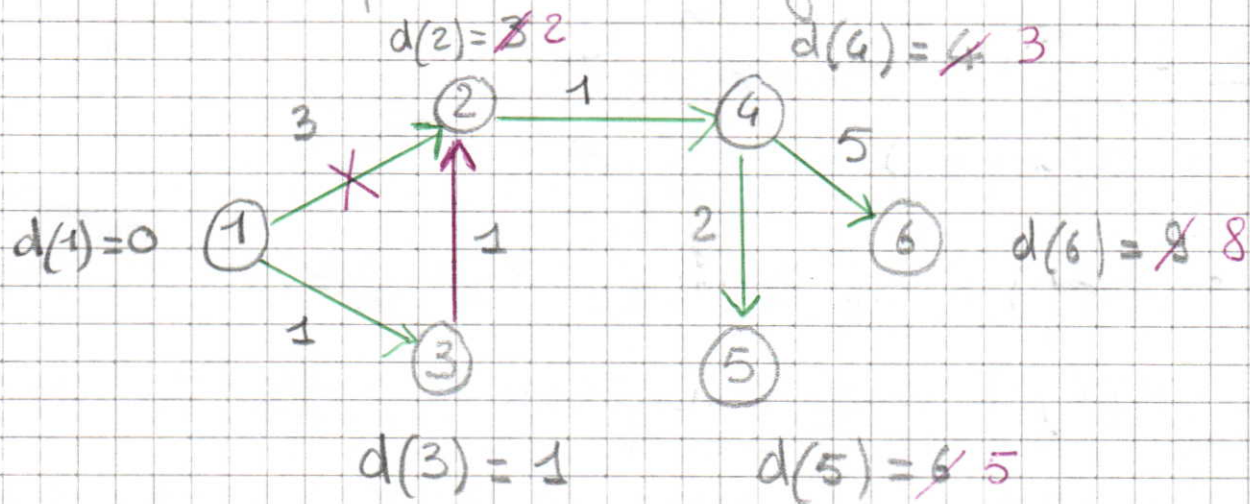
Per costruzione, $d(i)$ è il costo dell'unico cammino in T da r a i , $i = 1, 2, \dots, 6$

Proprietà: $d(i) + c_{ij} = d(j)$, $\forall (i, j) \in T$

Consideriamo gli archi non in T , esempio

$$(3, 2): \quad \underbrace{d(3)}_{1} + \underbrace{c_{32}}_{1} < \underbrace{d(2)}_{3}$$

quindi T non è un albero dei cammini minimi di radice 1, in quanto il cammino da 1 a 2 può essere migliorato:



le etichette dei nodi nel sottoalbero di radice 2 sono diminuite (di 1)

Quindi: $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$ $\forall (i, j) \in A$ è condizione necessaria per l'ottimalità di T

Teorema : Dato $G=(N,A)$, sia $T=(N,A_T)$ un albero di copertura radicato in r e orientato, e sia $d(i)$ l'etichetta di i , $\forall i \in N$ (ovvero $d(r)=0$, $d(i)$ costo dell'unico cammino da r a i in T , $\forall i \neq r$). T è un albero dei cammini minimi di radice r se e solo se

$$d(i) + c_{ij} \geq d(j) \quad \forall (i,j) \in A$$

Condizioni di Bellman

Lemma : Sia $d \in \mathbb{R}^n$ tale che

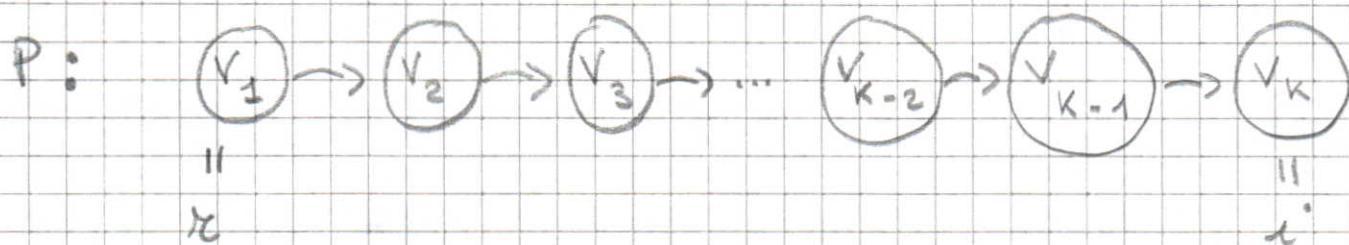
- $d(r) = 0$
- $d(i) + c_{ij} \geq d(j) \quad \forall (i,j) \in A$,

allora $d(i)$ è una valutazione inferiore del costo del cammino minimo da r a i , $\forall i \in N$.

Dim :

$i = r$ caso banale

Sia $i \neq r$, e sia P un cammino in G da r a i :



Le condizioni di Bellman valgono per ipotesi per ogni arco in A , e quindi anche per gli archi in P :

$$d(v_k) \leq d(v_{k-1}) + c_{v_{k-1}v_k}$$

$$d(v_{k-1}) \leq d(v_{k-2}) + c_{v_{k-2}v_{k-1}}$$

$$\vdots$$

$$d(v_3) \leq d(v_2) + c_{v_2v_3}$$

$$d(v_2) \leq d(\underset{\substack{\parallel \\ x}}{v_1}) + c_{v_1v_2}$$

Sommando membro a membro:

$$d(i) \leq \underbrace{d(\underset{\substack{\parallel \\ x}}{v_1})}_0 + \underbrace{c_{v_1v_2} + c_{v_2v_3} + \dots + c_{v_{k-2}v_{k-1}} + c_{v_{k-1}v_k}}_{c(P)}$$

ovvero $d(i) \leq c(P) \quad \forall P$ cammino da x a i . \square

Dim. (Teorema)

\Rightarrow : condizione necessaria, già dimostrata

\Leftarrow : Sia $d(x) = 0$ e $d(i)$ sia il costo

dell'unico cammino in T da r a i , $\forall i \neq r$.

Supponiamo valgano le condizioni di Bellman.

Per il lemma appena dimostrato, $d(i)$ è minore o uguale del costo del cammino minimo da r a i , $\forall i \in N$.

Poiché $d(i)$ è il costo dell'unico cammino in T da r a i , $\forall i \neq r$, si ha che T è un albero dei cammini minimi di radice r . \square

Schema algoritmico SPT

Inizializzazione

T : albero di copertura radicato in r e orientato

$d(i)$, $\forall i \in N$ etichette

$p(i)$, $\forall i \in N$ predecessori

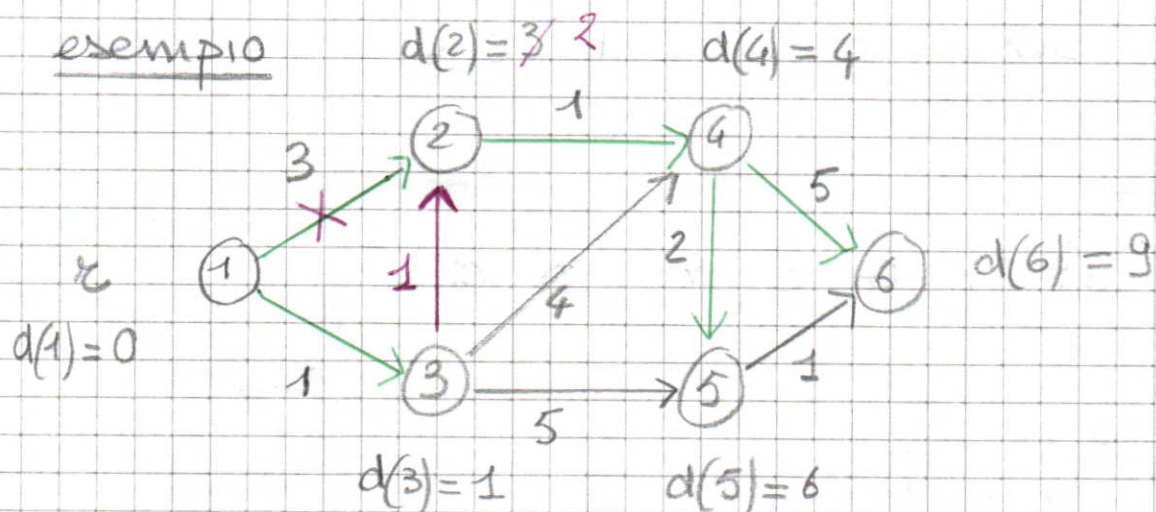
Tipica iterazione:

se esiste $(i, j) \in A$ tale che $d(i) + c_{ij} < d(j)$:

- $p(j) = i$ (aggiornamento di T)
- "aggiornamento di $d(i)$, $\forall i \in N$ "

altrimenti STOP: T è ottimo

esempio



$T: p(1) = \text{nil}, p(2) = 1, p(3) = 1, p(4) = 2, p(5) = 4, p(6) = 4$

Perché $d(3) + 1 < d(2)$:

- $p(2) = 3$ (aggiornamento di T)
- $d(2) = 2$ (aggiornamento delle etichette)

Ovvero, per motivi di efficienza l'aggiornamento di $d(4)$, $d(5)$ e $d(6)$ viene differito;

conseguenze:

- 1) $d(i)$ è un' approssimazione superiore del costo del cammino da r a i in T , $\forall i \in V, i \neq r$
- 2) viene introdotta una struttura dati Q , insieme dei nodi candidati: $Q = \{2, 4\}$

* segnale che vanno controllate le condizioni

di Bellman per gli archi in $FS(2)$ *

Formalmente:

Procedura $SPT(G, c, r, P, d)$

begin

for $i = 1$ to n do

begin $P(i) = r$; $d(i) = \infty$ end

$P(r) = nil$; $d(r) = 0$; $Q = \{x \mid x \neq r\}$;

repeat

SELECT i from Q ; $Q = Q - \{i\}$;

for each $(x, y) \in FS(i)$ do

if $d(i) + c_{ix} < d(x)$ then

begin

$d(x) = d(i) + c_{ix}$;

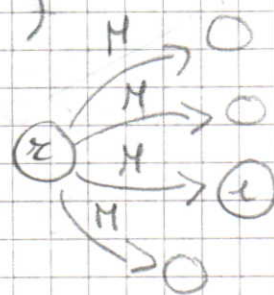
$P(x) = i$;

if $x \notin Q$ then $Q = Q \cup \{x\}$

end

until $Q = \emptyset$

end



Triniziale

aggiornamento
differito

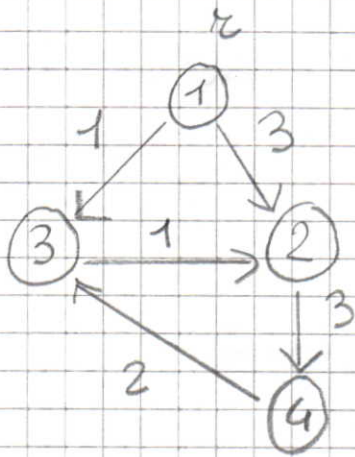
Proprietà (correttezza di SPT): Quando $Q = \emptyset$,

le condizioni di Bellman sono soddisfatte per

ogni arco in G . L'ultimo albero determinato

è quindi ottimo.

esempio



Inizializzazione

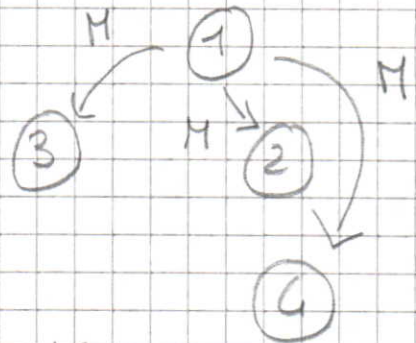
$$P(1) = \text{nil}$$

$$P(2) = P(3) = P(4) = 1$$

$$d(1) = 0$$

$$d(2) = d(3) = d(4) = \infty$$

$$Q = \{2, 3, 4\}$$

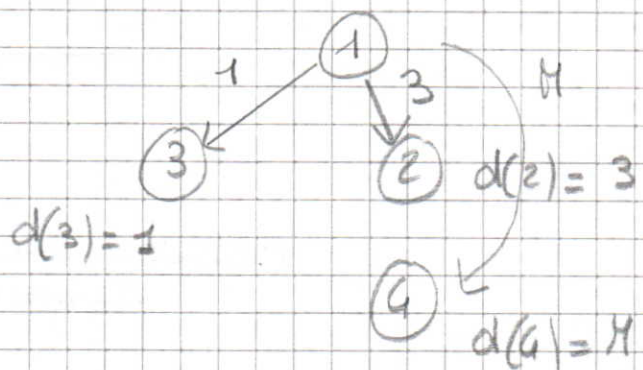


it1) $i = 1$

$$FS(1): (1, 2): d(1) + 3 < d(2) : d(2) = 3$$

$$(1, 3): d(1) + 1 < d(3) : d(3) = 1$$

$$Q = \{2, 3, 4\}$$

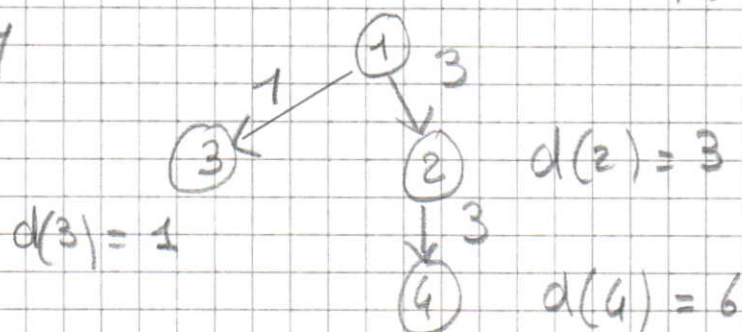


it2) $i = 2$

$$FS(2): (2, 4): d(2) + 3 < d(4) : d(4) = 6$$

$$P(4) = 2$$

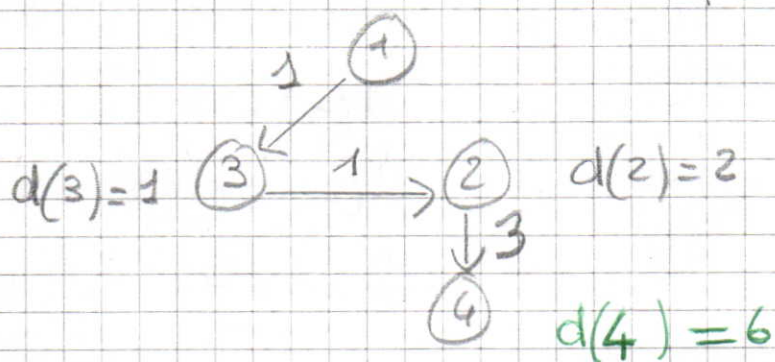
$$Q = \{3, 4\}$$



it 3) $i = 3$

$$FS(3) : (3, 2) : d(3) + 1 < \overset{2}{d(2)} : d(2) = 2$$
$$P(2) = 3$$

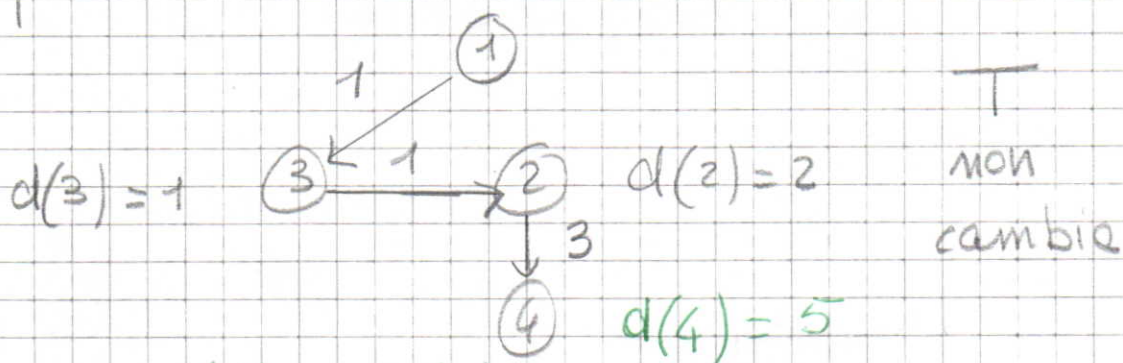
$$Q = \{2, 4\}$$



it 4) $i = 2$

$$FS(2) : (2, 4) : d(2) + 3 < \overset{2}{d(4)} : d(4) = 5$$

$$Q = \{4\}$$



Albero dei cammini minimi di radice 1

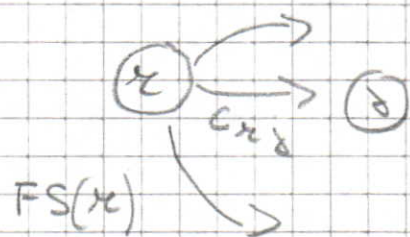
it 5) $i = 4$

$$FS(4) : (4, 3) : d(4) + 2 > d(3) : -$$

$$Q = \emptyset \quad \text{STOP}$$

Teorema: A ogni iterazione di SPT, $d(i)$ è il costo di un cammino da x a i in G , oppure $d(i) = M$, $\forall i \in N$

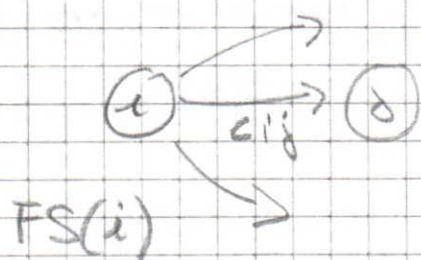
Dim Per induzione sul numero delle iterazioni
Al termine della prima iterazione



$$d(y) = c_{xy} \text{ se } (x, y) \in FS(x)$$

$$d(y) = M \text{ altrimenti}$$

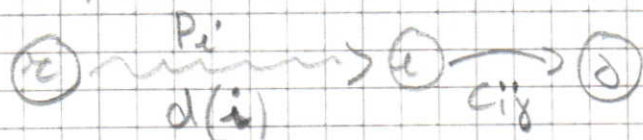
Passo induttivo Supponiamo che la proprietà sia vera al termine dell'iterazione K , e consideriamo l'iterazione $K+1$



- 1) $d(y)$ non migliora: vero per ipotesi induttiva
- 2) $d(y)$ migliora, ovvero

$$d(y) = d(i) + c_{iy}$$

Per ipotesi induttiva, $d(i)$ è il costo di un cammino, P_i , da x a i in G :



Ovvero $d(j) = d(i) + c_{ij}$ è il costo del cammino ottenuto concatenando P_i e (i, j) . La tesi segue. \square

Teorema (terminazione SPT): SPT esegue un numero finito di iterazioni.

Dim Poiché:

- 1) poiché per ipotesi G non ha cicli negativi, i cammini individuati da SPT sono semplici;
- 2) il numero dei cammini semplici da s a i in G è finito, $\forall i \in V$;
- 3) un nodo i è inserito in Q solo se $d(i)$ diminuisce;
- 4) per il Teorema precedente, $d(i)$ è il costo di un cammino da s a i in G (oppure $d(i) = \infty$);

segue che:

- a) $d(i)$ può diminuire solo un numero finito di volte, $\forall i \in V$;
- b) un nodo i può essere inserito in Q solo un numero finito di volte,

Dopo un numero finito di iterazioni, quindi, $Q = \emptyset$ e di conseguenza SPT termina. \square

SPT : famiglia di algoritmi
(**SELECT**)

SPT-S

Q è una coda di
priorità: si estrae i
con minima etichetta

SPT-L

Q è una lista: la
selezione di i dipende
dalla sua posizione nella
lista

Algoritmi a coda di priorità (3.2.4)

(SPT-S \equiv Shortest first)

Teorema (Dijkstra, 1959)

Se $c_{ij} \geq 0 \forall (i,j) \in A$, SPT-S inserisce in (e
quindi estrae da) Q ogni nodo i al più una
volta.

Notazione di supporto: sia i_k il nodo

estreatto da Q all'inizio dell'iterazione k , e
 $d_k(i)$ l'etichetta di i all'inizio dell'iterazione
 k , $\forall i \in N$,

Quindi: $u_1 = r$, $d_1(r) = 0$, $d_1(i) = M$ $i \neq r$

Lemma (di supporto): Se $c_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$:

$$d_{k+1}(i_{k+1}) \geq d_k(i_k) \quad \forall k \geq 1,$$

ovvero la sequenza delle etichette dei nodi estratti da Q in SPT-S è non decrescente.

Dim Per ogni $k \geq 1$ si possono verificare due casi:

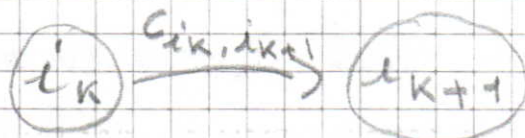
1) $d_{k+1}(i_{k+1}) = d_k(i_{k+1})$, ovvero l'etichetta di i_{k+1} non cambia. In tal caso

$i_{k+1} \in Q$ all'inizio dell'iterazione k , quindi

$$d_{k+1}(i_{k+1}) = d_k(i_{k+1}) \geq d_k(i_k),$$

essendo i_k un nodo con minima etichetta all'iterazione k .

2) $d_{k+1}(i_{k+1}) < d_k(i_{k+1})$, ovvero l'etichetta di i_{k+1} è diminuita durante l'iterazione k , quindi grazie a i_k :



$$d_{k+1}(i_{k+1}) = d_k(i_k) + \overset{0}{c_{i_k, i_{k+1}}} \geq d_k(i_k)$$

□

Dim (T. Dijkstra)

Dal lemma precedente, la sequenza delle etichette dei nodi estratti da Q è non decrescente. Poiché un nodo è inserito in Q solo quando la sua etichetta diminuisce, un nodo può essere inserito in Q al più una volta. \square

Corollario: Se $c_{ij} \geq 0 \forall (i,j) \in A$, SPT-S esegue $O(n)$ iterazioni

OSS: SPT-S può essere esponenziale nel caso di costi negativi.

Algoritmo di Dijkstra: Q lista non ordinata

esempio: Q vettore di puntatore ai nodi

$Q: \rightarrow [\quad] \leftarrow$

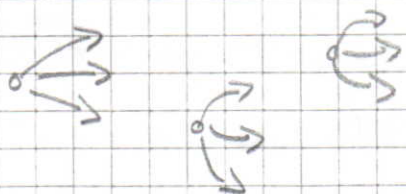
inserzione in Q : $O(1)$ per iterazione

$Q: [\quad]$

\nwarrow ricerca della minima etichetta

estrazione da Q (SELECT): $O(n)$ per iterazione

analisi delle stelle uscenti : $O(m)$



globalmente

Se $c_{ij} \geq 0 \forall (i,j) \in A$ l'algoritmo esegue $O(n)$ iterazioni, quindi:

$$O(n^2 + m), \text{ ovvero } O(n^2)$$

complessità in tempo dell'algoritmo di Dijkstra

nel caso $c_{ij} \geq 0 \forall (i,j) \in A$

Algoritmi a selezione su lista (3.2.5)

(SPT-L)

Varie implementazioni di Q :

code (strategia FIFO)

stack (" LIFO)

:

Algoritmo di Bellman : Q code
(o Bellman-Ford-Moore)

Q :



estrazione:
 $O(1)$

inserzione: $O(1)$



se non già presente
in Q

Proprietà : L'algoritmo di Bellman inserisce ogni nodo in Q al più $n-1$ volte.

Ma dim

Corollario: Ogni arco è esaminato dall'algoritmo di Bellman al più $n-1$ volte.

Quindi:

- estrazione da Q : $O(1)$ per iterazione
- inserzione in Q : $O(1)$ per iterazione
- analisi delle stelle uscenti : $O(mn)$
globalmente

$$O(mn + n^2) \text{ ovvero } O(mn)$$

complessità in tempo dell'algoritmo di
Bellman

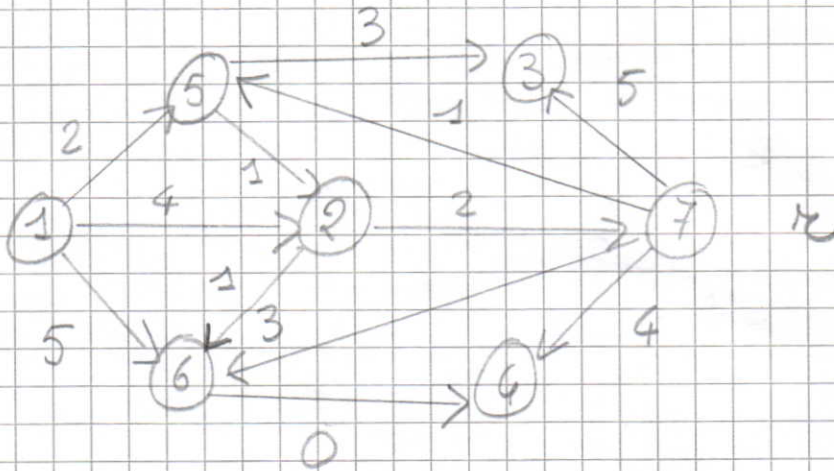
Osservazione : l'algoritmo di Bellman
permette di rilevare la presenza di cicli
negativi in G , controllando se un nodo
viene inserito in Q almeno n volte.

Esercitazione cammini minimi

(11)

1) Albero dei c.m. di radice 7

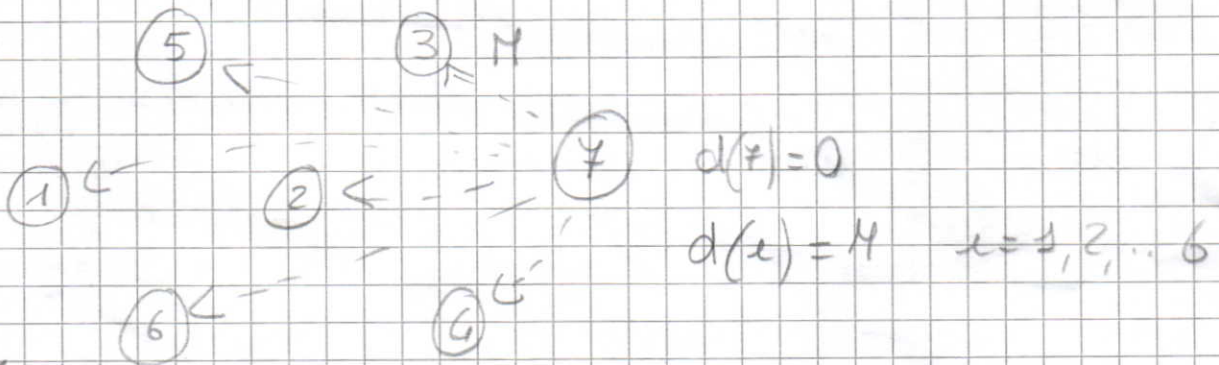
(I^c Verifica 2008)



Algoritmo appropriato complessità comp.: Dijkstra
($c_{ij} \geq 0$)

$$M = (n-1)c_{\max} + 1 = 6 \cdot 5 + 1 = 31$$

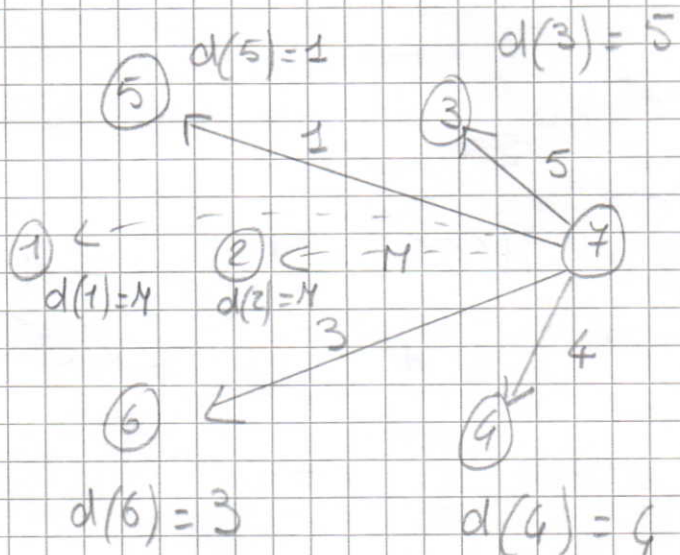
Inizializz



$$Q = \{7\}$$

1) $u=7$

$$\begin{aligned} d(3) &:= 5 \\ d(4) &:= 4 \\ d(5) &:= 1 \\ d(6) &:= 3 \end{aligned}$$



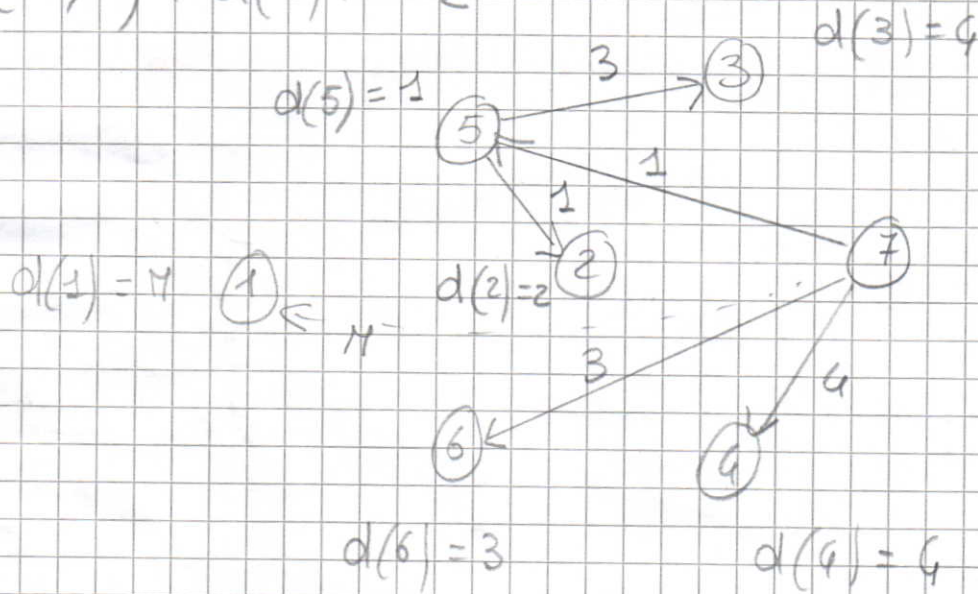
$$Q = \{3, 4, 5, 6\}$$

2) $u=5$ nodo con minimo etichetta

NOTA: ho trovato il cammino minimo da 5

$$(5,3): d(3) := 1 + 3 = 4$$

$$(5,2): d(2) := 2$$



$$Q = \{2, 3, 4, 6\}$$

3) $u=2$ nodo con minimo etichetta

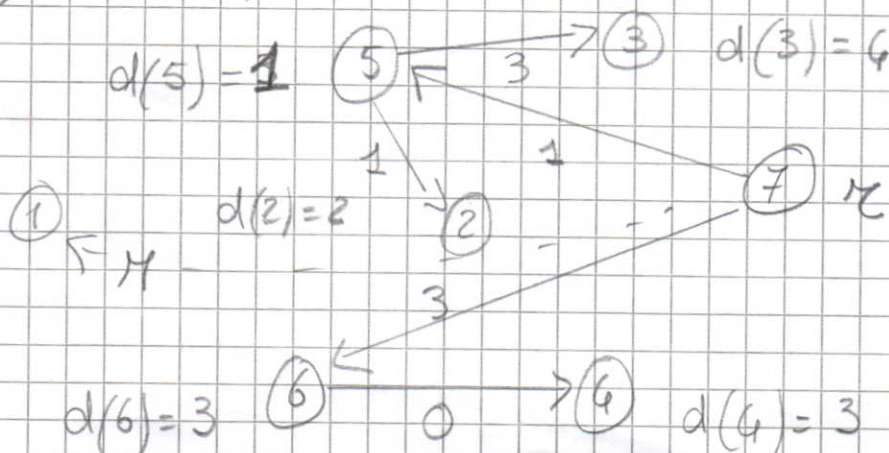
— non migliora nessuno etichetta

$$Q = \{3, 4, 6\}$$

4) $u=6$ nodo con min. etichetta

$$(6,4): d(4) := d(6) + 0 = 3$$

$$Q = \{3, 4\}$$



Albero dei cammini minimi

$$5) \quad u = 4$$

$$FS(4) = \emptyset$$

11'

$$Q = \{3, 4\}$$

$$6) \quad u = 3$$

$$FS(3) = \emptyset$$

$$Q = \emptyset$$

STOP

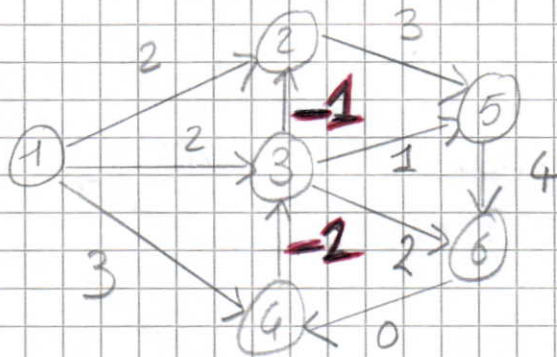
NOTA

6 iterazioni ($\leq n$); al termine

$d(1) = 4$, infatti non esiste in G nessun cammino da $v = 7$ al nodo 1

2) Albero dei c.m. di radice 1

13/01/2010



Alg. più appropriato?
SPT.L

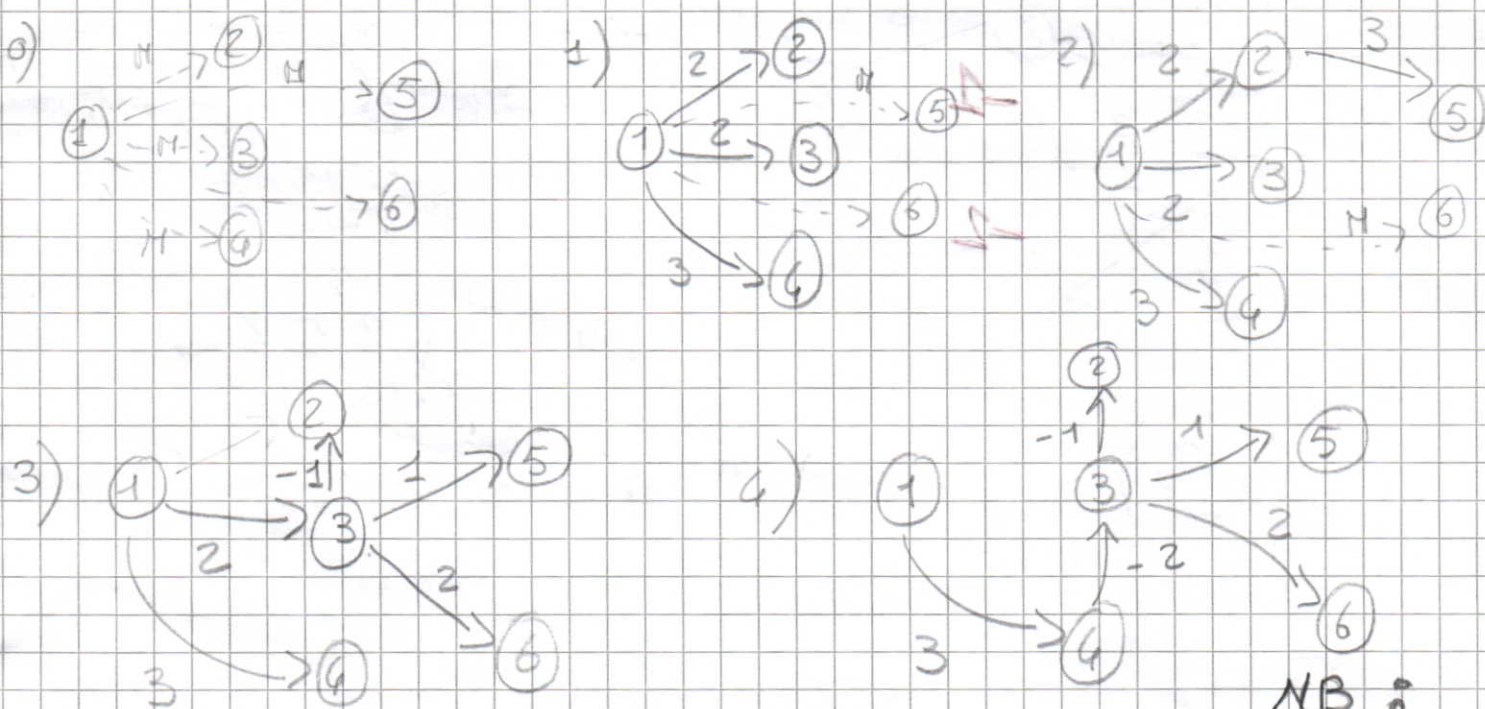
(ciclo: (2 5 6 4 3 2))
orientato

$$M = (n - 1) c_{\max} + 1 = 5 \cdot 4 + 1 = 21$$

Svolgimento (a) Tabellare:

codA

ut	u	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	q
0	/	nil	1	1	1	1	1	0	M_{21}	21	21	21	21	(1)
1	1	nil	1	1	1	1	1	0	2	2	3	21	21	(834)
2	<u>2</u>	nil	1	1	1	2	1	0	2	2	3	5	21	(34)
3	<u>3</u>	nil	3	1	1	3	3	0	1	2	3	3	4	(652)
4	4	nil	3	4	1	3	3	0	1	1	3	3	4	(5263)
5	5													(263)
6	<u>2</u>													(63)
7	6													(3)
8	<u>3</u>	nil	34	1	3	3		0	0	1	3	2	3	(256)
9	2													(56)
10	5													(6)
11	6													0



NB:
le etichette
di 2, 5 e 6
non sono
aggiornate

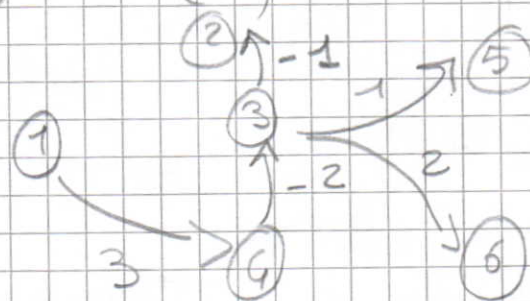
5) invariato

6) invariato

12

7) invariato

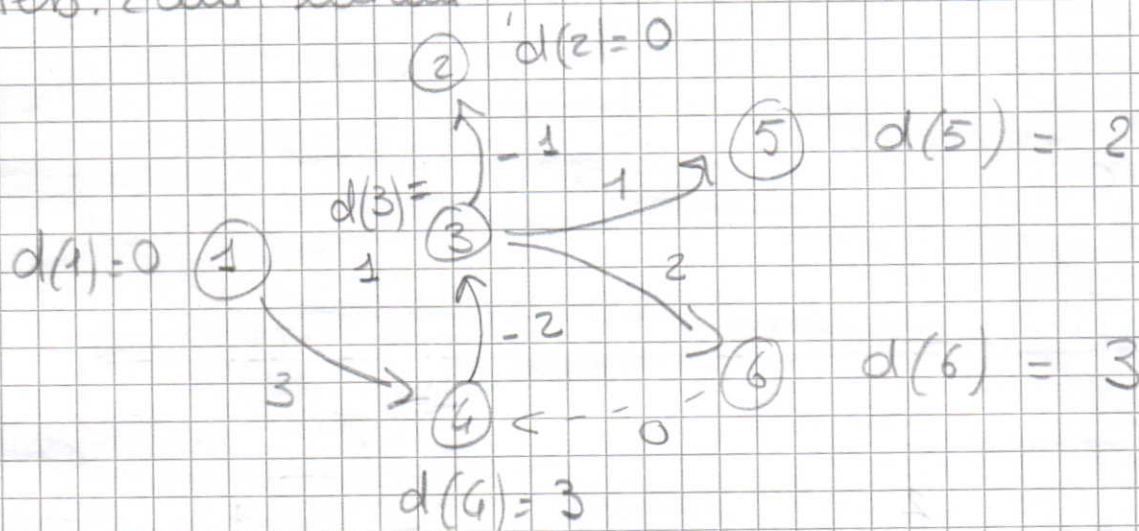
8) proporzionale e' uguale a $d(3)$



9) 10) 11) invariato

non cambia
l'albero ma
aggiorno i pesi

Abb. con univ.



È l'unico albero dei c.m. di radice 1?

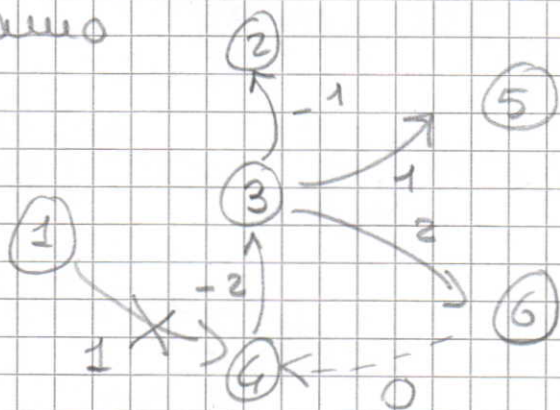
$(6,4) \notin T$: $d(6) + 0 = d(4)$ lo c. di Bellman
" 3 " 3 uolo come =

In tal caso, la sol. ottima potrebbe

non essere unica (è strettamente

unica se $d(i) + c_{ij} > d(j) \quad \forall (i,j) \notin T$)

Vediamo

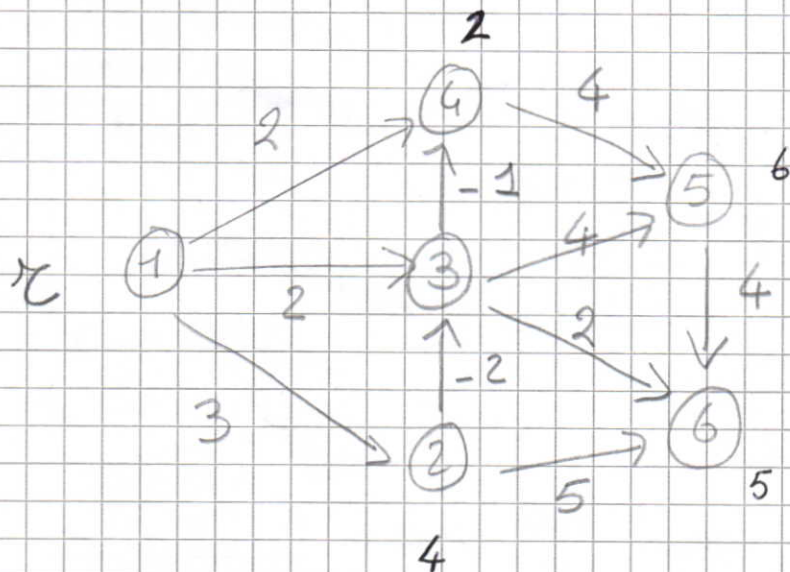


Non si ha un albero, ma una struttura non connessa!

Poiché ogni altro $(i, j) \notin T$ soddisfa le c. di Bellman come $>$, la sol. trovata è l'unico albero dei c. minimi di radice 1

3.2.6.

Cammini minimi su reti acicliche



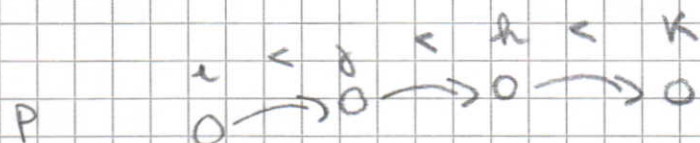
(es. trasporti)
costi o strati
o livelli

È aciclico \equiv
non ha cicli
orientati

Proprietà: Un grafo è aciclico sse in modo
è possibile numerare i suoi nodi in modo che

$$(i, j) \in A \Rightarrow i < j \quad (\text{grafo ben numerato})$$

Intuitivamente:



non essendoci
cicli, posso
numerare in modo
crescente i nodi
lungo qualsiasi P

Se G è aciclico (e ben numerato),

il problema dei c.m. si risolve in $O(m)$
esaminando i nodi in ordine crescente
(non serve Q):

inizializ: $p(1) = m+1$ $d(1) = 0$

$p(2) = p(3) = \dots = 1$ $d(2) = d(3) = \dots = M$

(come nel caso
generale)

$i=1$) < controllo e c. di Bellman
per $FS(1) >$

$d(2) := 3$

$d(3) := 2$

$d(4) := 2$

$i=2$) $d(3) := 1$

$p(3) := 2$

$d(6) := 8$

$p(6) := 2$

$i=3$) $d(4) := 0$

$p(4) := 3$

$d(6) := 3$

$p(6) := 3$

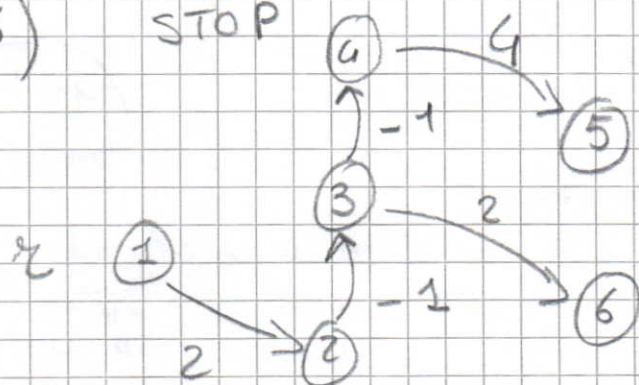
$d(5) := 5$

$p(5) := 3$

$r=4$) $d(5) := 4$ $p(5) := 4$

$r=5$) —

$r=6$) STOP



$(n-1)$ iteration

PROCEDURE SPT.ACYCLIC (G, p, d)

begin

$p(1) := n$; $d(1) := 0$;

for $i := 2$ to n do begin $p(i) := 1$;

$d(i) := \infty$

end

for $i := 1$ to $n-1$ do

for each $(u, v) \in ES(i)$ do

if $d(u) + c_{uv} < d(v)$ then

begin $d(v) := d(u) + c_{uv}$;

$p(v) := i$

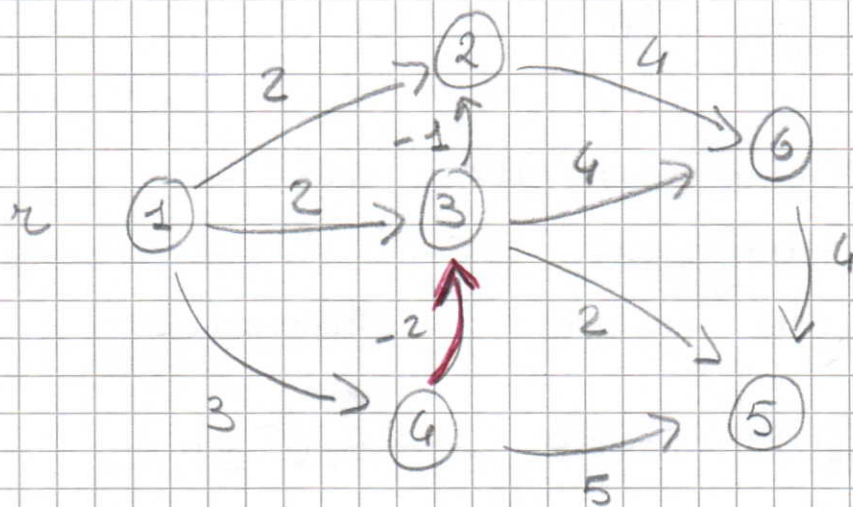
end

end

SPT.ACYCLIC è presentata per il caso $r=1$,
ma è valida $\forall r \in \mathbb{N}$

Se il grafo è aciclico ma non è ben numerato?

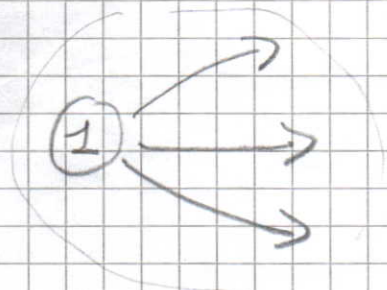
13



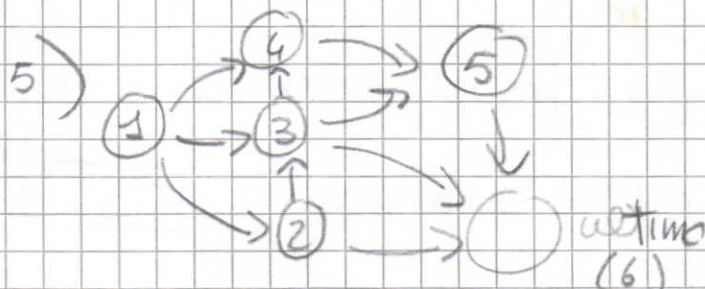
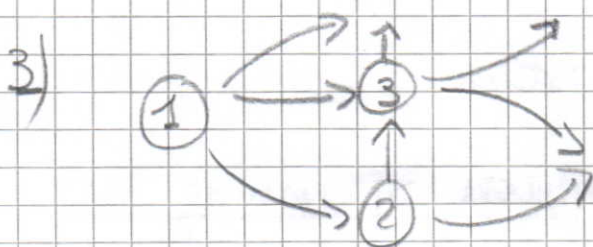
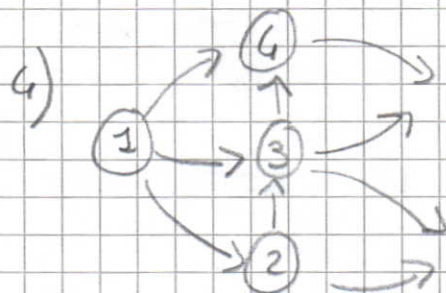
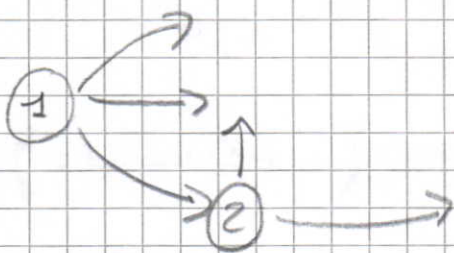
È lo stesso grafo, ma non è ben numerato!

Posso "ben numerarlo" con VISITA, in $O(m)$:

1) se G è aciclico, \exists almeno un nodo i con $BS(i) = \emptyset \Rightarrow i = 1$



2) \exists almeno un nodo i , nel sottografo ottenuto da G rimuovendo $\{1\}$, con $BS(i) = \emptyset$ (perché il sottografo è aciclico) $\Rightarrow i = 2$



ultimo (6)

Il problema di flusso massimo

Maria Grazia Scutellà

"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Ref: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 3.3)

Dati:

$G = (N, A)$: grafo orientato

$s \in N$: nodo sorgente

$t \in N$: nodo destinazione o pozzo

$u_{ij} > 0 \quad \forall (i, j) \in A$: capacità di (i, j)

Il problema di flusso massimo consiste nell'inviare la massima quantità di flusso da s a t in G , rispettando le capacità degli archi.

Modello matematico

Variabili decisionali:

x_{ij} : flusso lungo (i, j) , $\forall (i, j) \in A$

v : valore del flusso

$$\max v$$

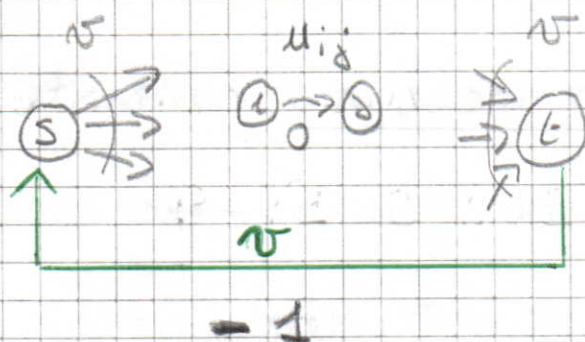
$$\sum_{(s,s') \in BS(s)} x_{ss'} - \sum_{(s,d) \in FS(s)} x_{sd} = -v$$

$$\sum_{(s,e) \in BS(e)} x_{se} - \sum_{(e,d) \in FS(e)} x_{ed} = +v$$

$$\sum_{(s,i) \in BS(i)} x_{si} - \sum_{(i,d) \in FS(i)} x_{id} = 0 \quad i \neq s, e$$

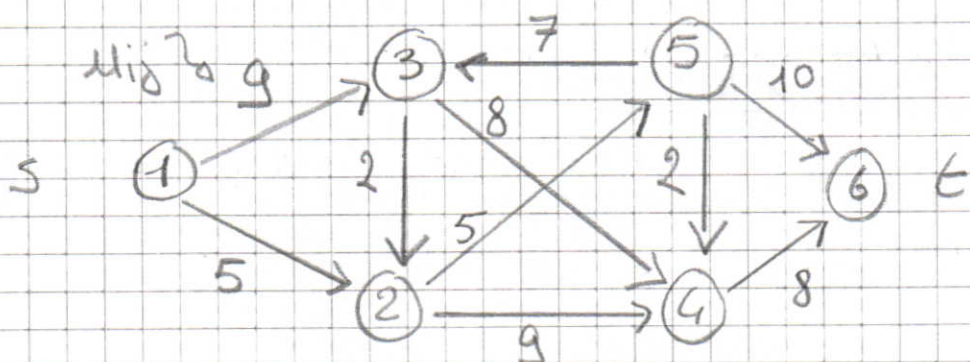
$$0 \leq x_{id} \leq u_{id} \quad \forall (i,d) \in A$$

Si tratta di un caso speciale del problema di flusso di costo minimo:

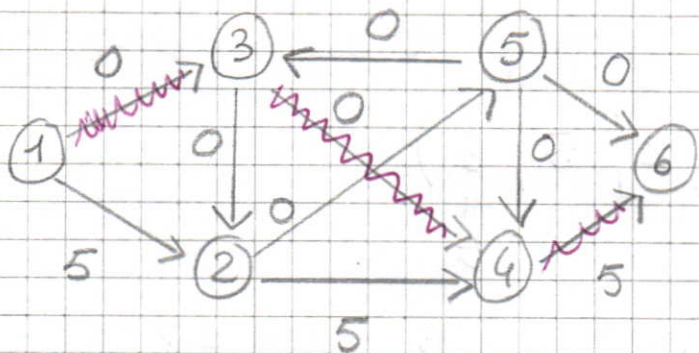


arco di ritorno

Dato un flusso ammissibile x di valore v , come decidere se x è ottimo, e come migliorarlo se non lo è:



$x :$



$$v = 5$$

Inviame flusso lungo il cammino:

$$P = (\underset{\text{"5"}}{1}, 3, 4, \underset{\text{"6"}}{6})$$

quantità di flusso inviabile:

$$\theta(P, x) = \min \{ \underbrace{9, 8, 8 - 5}_u \} = 3$$

$u_{ij} - x_{ij}$

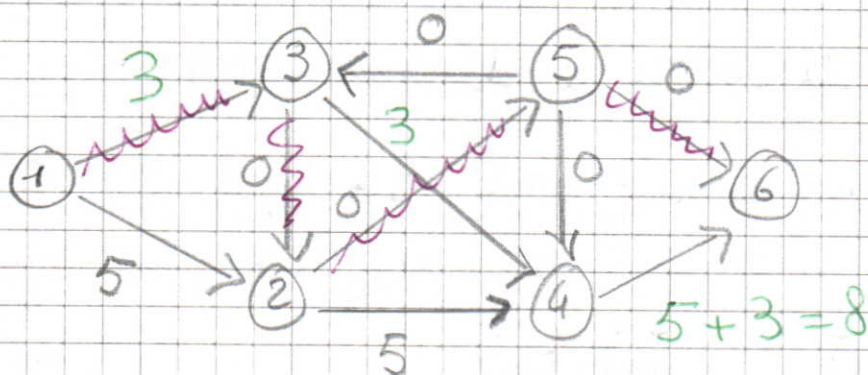
OSS: $\theta(P, x) > 0$ in quanto $u_{ij} - x_{ij} > 0$
 $\forall (i, j) \in A$, ovvero $x_{ij} < u_{ij} \forall (i, j) \in P$.
archi non saturi

Aggiorniamo x inviando $\theta(P, x)$ unità di
 flusso lungo P : $x = x(\theta) = x \oplus \theta P$, con

$$\theta = \theta(P, x) = 3$$

operazione di
 composizione tra x e P

$x :$



$$v = 5 + \overset{\theta}{3} = 8$$

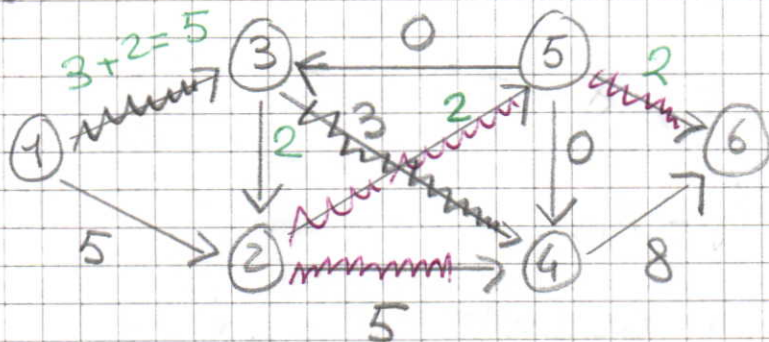
Inviemo flusso lungo il cammino:

$$P = (\underset{\substack{\parallel \\ s}}{1}, 3, 2, \underset{\substack{\parallel \\ t}}{5}, 6)$$

$$\theta = \theta(P, x) = \min\{9-3, 2, 5, 10\} = 2$$

OSS: $\theta(P, x) > 0$ in quanto $x_{i_j} < u_{i_j}, \forall (i, j) \in P$.

Aggiorniamo x :



$$v = 8 + \underset{\substack{\parallel \\ t}}{2} = 10$$

Inviemo flusso lungo il cammino non

orientato: $P = (\underset{\substack{\parallel \\ s}}{1}, 3, 4, 2, \underset{\substack{\parallel \\ t}}{5}, 6)$ in cui

$P^+ = \{(1, 3), (3, 4), (2, 5), (5, 6)\}$ archi concordi

$P^- = \{(2, 4)\}$ archi discordi

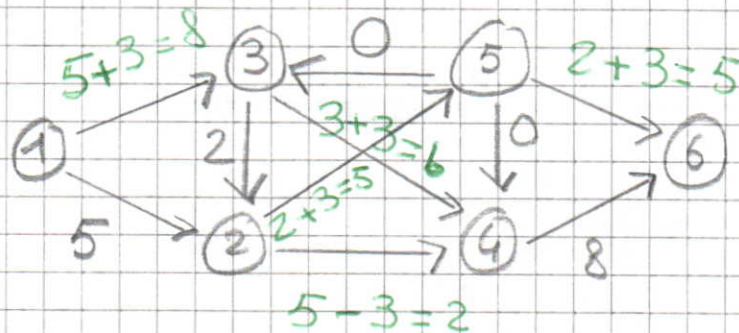
Lungo gli archi concordi il flusso è incrementato,

lungo quelli discordi è decrementato, quindi:

$$\underset{\substack{\parallel \\ \theta}}{\theta}(P, x) = \min\left\{ \underset{\substack{\parallel \\ \theta}}{\min}\{9-5, \underbrace{8-3}_{u_{i_j}-x_{i_j}}, 5-2, 10-2\}, \right. \\ \left. \underset{\substack{\parallel \\ \theta}}{\min}\{ \underset{\substack{\parallel \\ x_{i_j}}}{5} \} \right\} = 3$$

archi concordi

Aggiorniamo x :



$$v = 10 + 3 = 13$$

" \oplus

Definizione: Un cammino P da s a t in G , non necessariamente orientato, è un cammino aumentante se:

- (1) $x_{ij} < u_{ij} \quad \forall (i,j) \in P^+$ archi concordi non saturi
- (2) $x_{ij} > 0 \quad \forall (i,j) \in P^-$ archi discordi non vuoti

Definizione: La capacità di un cammino aumentante P rispetto a un flusso x è:

$$C(P, x) = \min \left\{ \min \{ u_{ij} - x_{ij} : (i,j) \in P^+ \}, \min \{ x_{ij} : (i,j) \in P^- \} \right\} (> 0).$$

Rappresenta la massima quantità di flusso inviabile lungo P senza violare la capacità superiore (u_{ij}) degli archi concordi e la capacità inferiore (0) di quelli discordi.

Come determinare, se esiste, un cammino
aumentante rispetto a un flusso x

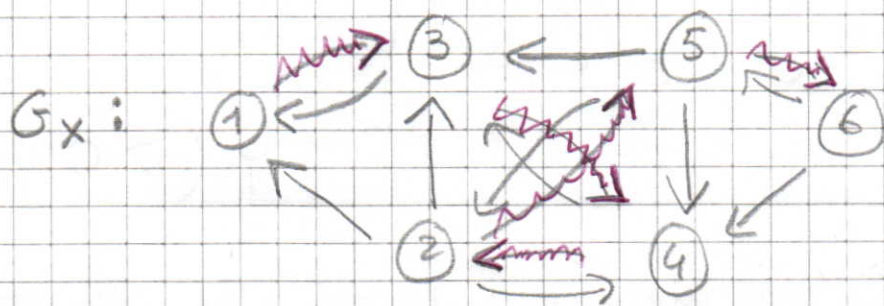
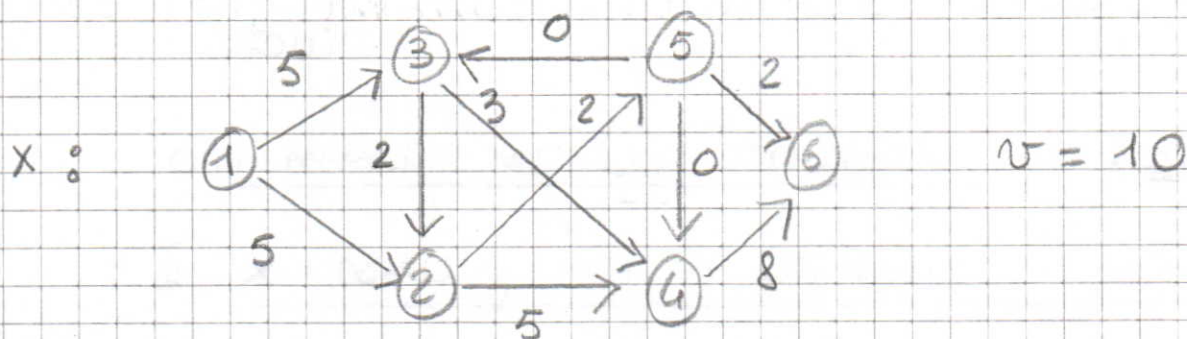
$G_x = (N, A_x)$, dove

$$A_x = \{(i, j) \in A : x_{ij} < u_{ij}\} \cup \{(i, j) : (j, i) \in A, x_{ji} > 0\}$$

Grafo residuo rispetto a x

contiene tutti e soli gli archi utilizzabili in
un cammino aumentante rispetto a x , orientati
da s a t .

esempio (cont.) penultimo flusso



$P = (1, 3, 4, 2, 5, 6)$ è ora rappresentato
in G_x come un cammino orientato da s
a t .

Proprietà: I cammini aumentanti da s a t sono in corrispondenza biunivoca con i cammini orientati da s a t in G_x .

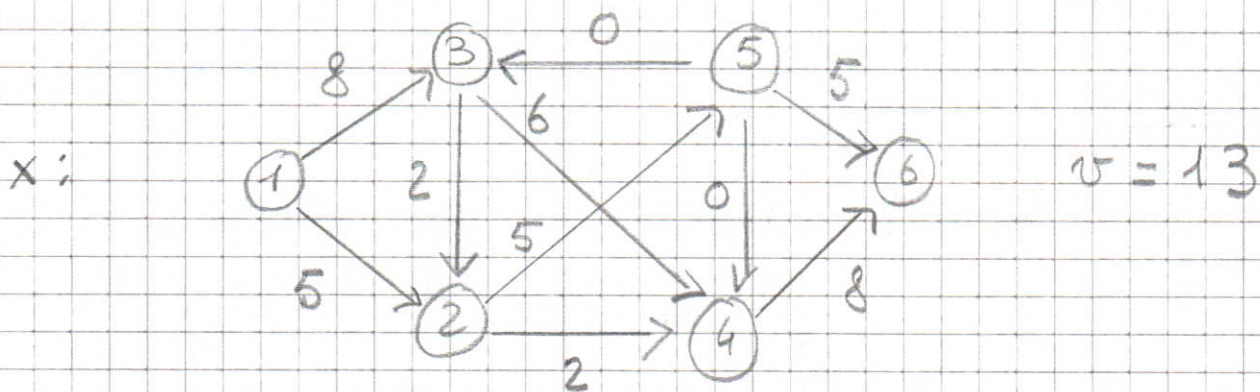
Quindi: determinare se esiste un cammino aumentante da s a t è equivalente a determinare se t è raggiungibile da s in G_x : Visita, in $O(m)$

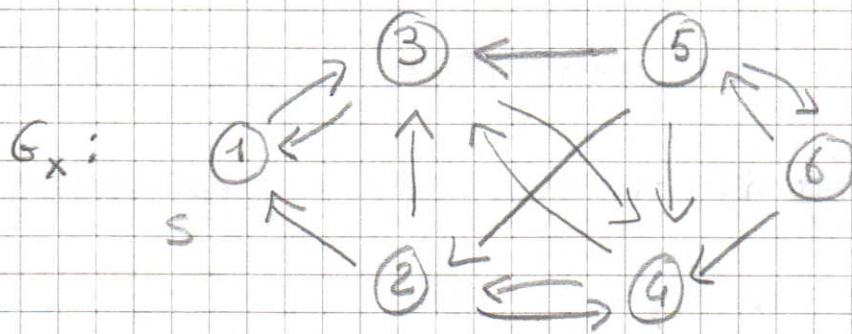
Condizione necessaria per l'ottimalità di un flusso

x : non esistono cammini aumentanti da s a t

La condizione è pure sufficiente?

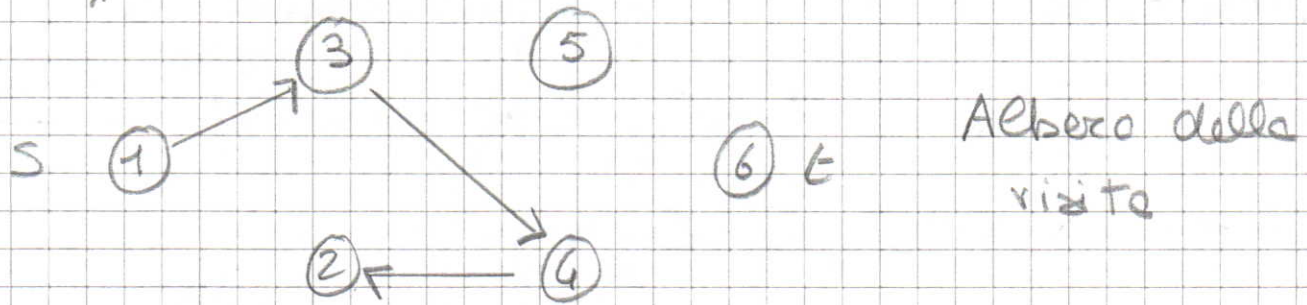
esempio





Esegui la procedura VISITA a partire da s

in G_x :



t non è raggiungibile da s in G_x , ovvero non esistono cammini aumentanti rispetto a x

Definizione Un taglio (N_s, N_t) è una partizione di N ($N_s \cup N_t = N$, $N_s \cap N_t = \emptyset$) tale che $s \in N_s$, $t \in N_t$.

nell'esempio

$N_s = \underbrace{\{1, 2, 3, 4\}}_s$ insieme dei nodi raggiungibili da s in G_x

$N_t = N \setminus N_s = \underbrace{\{5, 6\}}_t$ insieme dei nodi non raggiungibili da s in G_x

Definizione: Dato un taglio (N_s, N_t) :

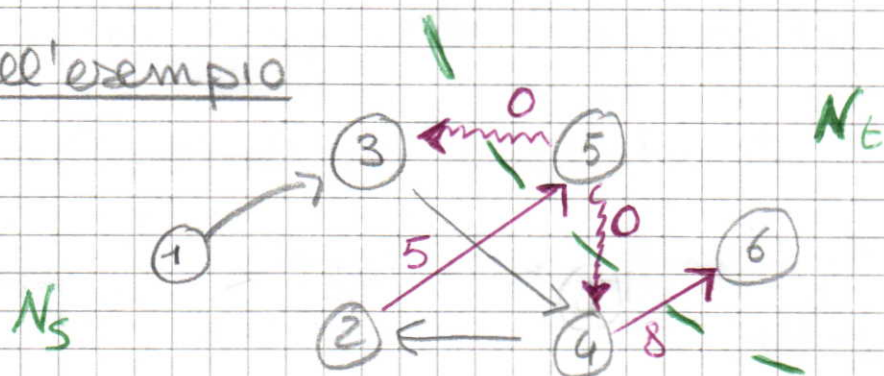
$$A^+(N_s, N_t) = \{(i, j) \in A : i \in N_s, j \in N_t\}$$

archi diretti del taglio

$$A^-(N_s, N_t) = \{(i, j) \in A : i \in N_t, j \in N_s\}$$

archi inversi del taglio

nell'esempio



$$N_s = \{1, 2, 3, 4\} \quad N_t = \{5, 6\}$$

$$A^+(N_s, N_t) = \{(2, 5), (4, 6)\}$$

$$A^-(N_s, N_t) = \{(5, 3), (5, 4)\}$$

Osservazione:

$$1) \quad x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A^+(N_s, N_t)$$

ovvero tutti gli archi diretti del taglio sono saturi

$$2) \quad x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in A^-(N_s, N_t)$$

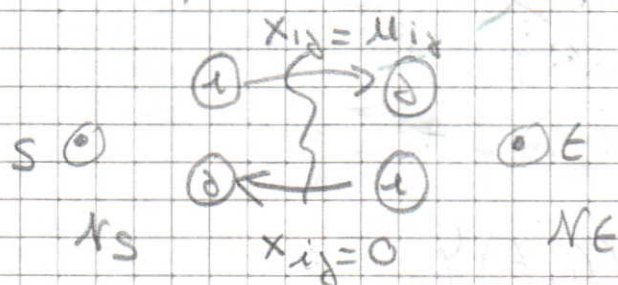
ovvero tutti gli archi inversi del taglio hanno flusso nullo

Proprietà: Dato un flusso ammissibile x , se non esistono cammini aumentanti da s a t allora esiste un taglio (N_s, N_t) tale che:

$$1) x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A^+(N_s, N_t)$$

$$2) x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in A^-(N_s, N_t)$$

Dim Sia N_s l'insieme dei nodi raggiunti da s durante la ricerca di un cammino aumentante in G_x ($s \in N_s$), e $N_t = N - N_s$ ($t \in N_t$):



- $\forall (i, j) \in A^+(N_s, N_t) : x_{ij} = u_{ij}$ altrimenti j sarebbe raggiungibile da s
- $\forall (i, j) \in A^-(N_s, N_t) : x_{ij} = 0$ altrimenti i sarebbe raggiungibile da s \square

Definizione: Dato un taglio (N_s, N_t) e un flusso ammissibile x :

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i, j) \in A^+(N_s, N_t)} x_{ij} - \sum_{(i, j) \in A^-(N_s, N_t)} x_{ij}$$

flusso che attraversa il taglio

$$u(N_s, N_t) = \sum_{(i, j) \in A^+(N_s, N_t)} u_{ij}$$

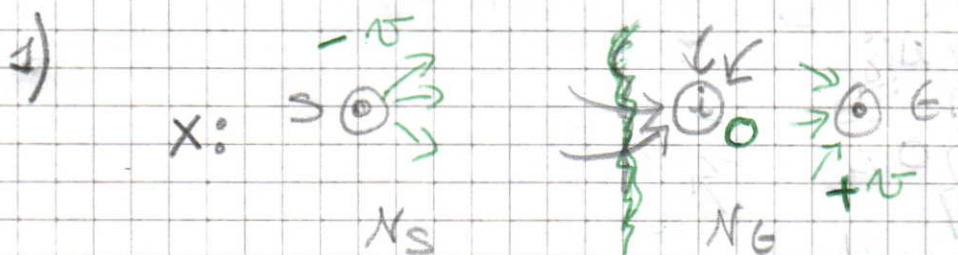
capacità del taglio

Teorema: Per ogni flusso ammissibile x di valore v e per ogni taglio (N_s, N_t) :

$$v = x(N_s, N_t) \leq u(N_s, N_t).$$

Dim

$$\begin{aligned} 2) \quad x(N_s, N_t) &= \sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_s, N_t)} x_{ij} \leq \\ &\leq \sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} u_{ij} = u(N_s, N_t) \end{aligned}$$



Sommiamo membro a membro i vincoli di conservazione di flusso relativi a $i \in N_t$:

$$\sum_{i \in N_t} \left(\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} \right) = +v$$

$$\sum_{i \in N_t} \left(\sum_{\substack{(j,i) \in BS(i): \\ j \in N_s}} x_{ji} + \sum_{\substack{(j,i) \in BS(i): \\ j \in N_t}} x_{ji} - \sum_{\substack{(i,j) \in FS(i): \\ j \in N_t}} x_{ij} - \sum_{\substack{(i,j) \in FS(i): \\ j \in N_s}} x_{ij} \right) = +v$$

$$\sum_{\substack{(j,i) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_s}} x_{ji} + \sum_{\substack{(j,i) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_t}} x_{ji} - \sum_{\substack{(i,j) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_t}} x_{ij} - \sum_{\substack{(i,j) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_s}} x_{ij} = +v$$

$$x(N_s, N_t) = +v$$



Teorema (Condizioni di ottimalità):

Un flusso ammissibile x è massimo se e solo se non esistono cammini aumentanti.

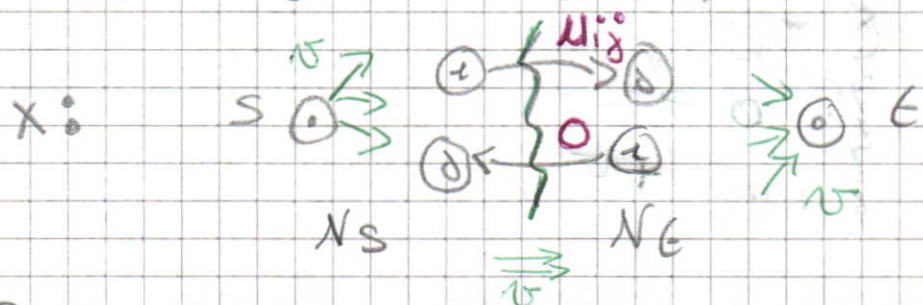
Dim

\Rightarrow : dimostrato

\Leftarrow : Per la proprietà precedente, esiste un taglio (N_s, N_t) tale che:

$$1) \quad x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A^+(N_s, N_t)$$

$$2) \quad x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in A^-(N_s, N_t)$$



Per il teorema precedente:

$$v = x(N_s, N_t) = u(N_s, N_t)$$

Segue che non è possibile spedire altro flusso da s a t , perché la capacità di (N_s, N_t) sarebbe violata, quindi x è un flusso massimo. \square

Corollario : Un taglio (N_s, N_t) tale che

$$x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A^+(N_s, N_t) \text{ e } x_{ij} = 0$$

$\forall (i, j) \in A^-(N_s, N_t)$ è un taglio di capacità minima (taglio minimo).

Teorema (Flusso massimo - taglio minimo):

Il valore del massimo flusso da s a t è uguale alla minima capacità dei tagli (N_s, N_t) .

Dim

Segue dai risultati precedenti. \square

nell'esempio (cont):

$$v = 13 = x(N_s, N_t) = \underset{u_{25}}{5} + \underset{u_{46}}{8} = u(N_s, N_t)$$

legame con la teoria della dualità PL

variabili duali

$\max v$

$$\pi_i \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ +v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall i \in N$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad \equiv \quad x_{ij} \leq u_{ij} \quad \mu_{ij}^*$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

variabili duali

Duale PL:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \mu_{ij}^*$$

$$\pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

$$\pi_t - \pi_s = 1$$

$$\mu_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema del taglio minimo

NOTA: I vincoli di = sono stati scritti in forma

$$\sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} = 0 \quad i \neq s, t$$

$$\sum_{(s,j) \in FS(s)} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in BS(s)} x_{js} - v = 0 \quad i = s$$

$$\sum_{(t,j) \in FS(t)} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in BS(t)} x_{jt} + v = 0 \quad i = t$$

materice dei vincoli:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & x_{ij} & v & \\ \hline s & & -1 & \pi_s \\ i & +1 & & \pi_i \\ j & -1 & & \pi_j \\ t & & +1 & \pi_t \\ \hline & +1 & & \mu_{ij} \end{array} = 0 \quad \leq \mu_{ij}$$

Proprietà: Ogni coppia (π_s, π_t) è una soluzione ammissibile del problema duale, e il valore della funzione obiettivo duale è $u(\pi_s, \pi_t)$.

Dim Basta porre

$$\pi_i = \begin{cases} 0 & i \in N_s \\ 1 & i \in N_t \end{cases} \quad \mu_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in A^+(N_s, N_t) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Il risultato " $v \leq u(x_s, x_t)$ " segue quindi dal Teorema debole della dualità.

Si può inoltre dimostrare che il Teorema "Flusso massimo - taglio minimo" è la specializzazione del Teorema forte della dualità alla coppia di PL in esame.

Schema algoritmico basato su cammini aumentanti

Procedure CAMMINI AUMENTANTI ($G, u, s, t, x, \overset{\text{output}}{v_s, v_t}$)
begin
 $x = 0$; * si può iniziare da qualsiasi flusso ammissibile *
while TROVA CAMMINO ($G, u, s, t, x, P, \overset{\text{output}}{\theta(P, x)}, v_s, v_t$) do
 AUMENTA FLUSSO (x, P, θ)
end $x = x \oplus \theta P$

Teorema: Se $u_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \forall (i, j) \in E$, allora CAMMINI AUMENTANTI individua un flusso massimo intero.

Dim Ad ogni iterazione $\theta = \theta(P, x)$ è intero positivo e $x \oplus \theta P$ è un flusso intero.

$$\theta(P, x) = \min \{ \min \{ u_{ij} - x_{ij} : (i, j) \in P^+ \}, \min \{ x_{ij} : (i, j) \in P^- \} \}$$

• È vero alla prima iterazione: $u_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \forall (i, j) \in E$
 $x_{ij} = 0, \forall (i, j) \in E$

$x = x \oplus \ominus P$ è quindi intero

- Per induzione, se la proprietà vale all'iterazione k , vale alla $k+1$. Quindi vale per ogni iterazione.

Poiché $\ominus \geq 1$, CAMMINI AUMENTANTI esegue un numero finito di iterazioni e il flusso finale, ovvero il flusso massimo individuato, è intero. \square

CAMMINI AUMENTANTI



Algoritmo di Edmonds e Karp

TROVA CAMMINO: si esegue VISITA in G_x , a partire da s , utilizzando un criterio di selezione dei nodi da Q di tipo FIFO, ovvero Q è una coda.

Quindi: ad ogni iterazione (tranne l'ultima) è individuato un cammino aumentante con il minimo numero di archi

Complessità in Tempo:

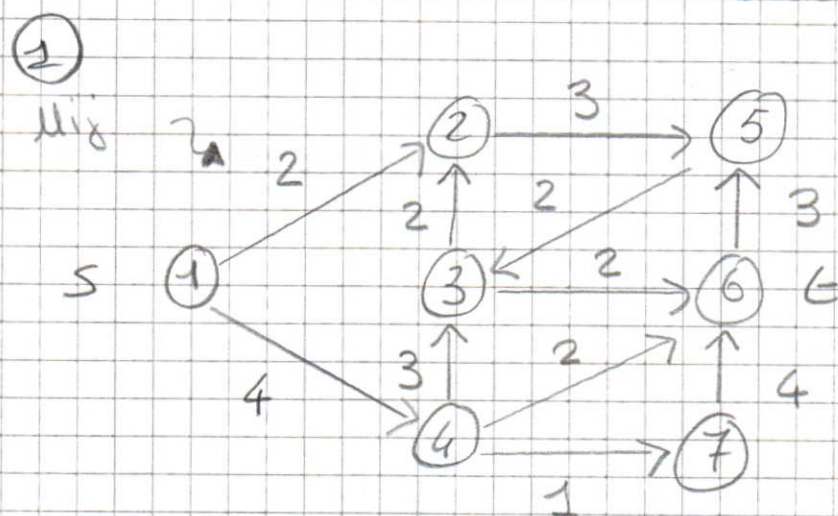
numero iterazioni: $O(mn)$

TROVA CAMMINO: $O(m)$ per it. $\Rightarrow O(m^2n)$

AUMENTA FLUSSO: $O(n)$ per it.

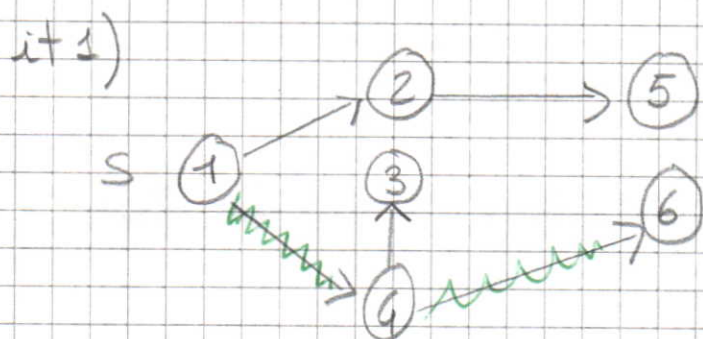
Esercitazione flusso massimo e cammini minimi

My Scutello
"Ricerca Operativa"
Università di Pisa



Si determini un flusso massimo da 1 a 6, mediante l'algoritmo di Edmonds e Karp, a partire dal flusso nullo.

VISITA può essere eseguita direttamente in G.

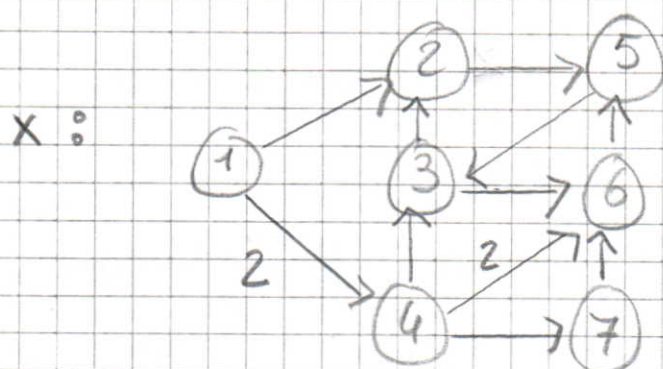


Albero della visita

Q = (S 2 4 5 3 6)
"code" 1 STOP appena raggiunto t

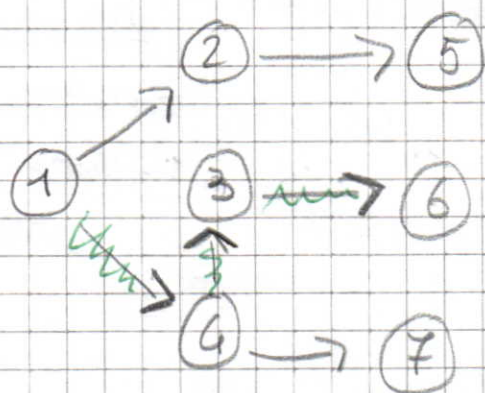
P = (1, 4, 6)

$$\theta(P, x) = \min\{4, 2\} = 2$$



$$v = 2$$

it 2)

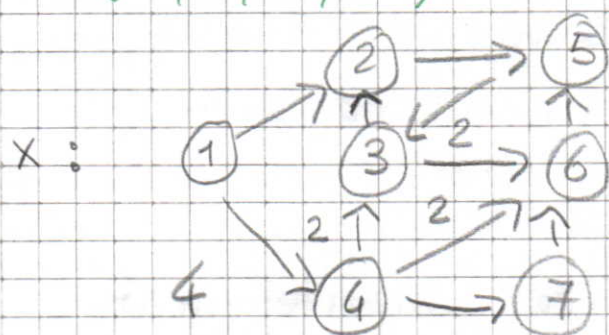


Albero delle visite

$$Q = (1, 2, 4, 5, 3, 7, 6)$$

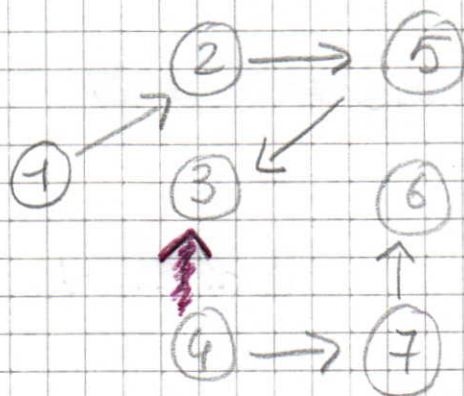
$$P = (1, 4, 3, 6)$$

$$\theta(P, x) = \min\{4-2, 3, 2\} = 2$$



$$v = 2 + 2 = 4$$

it 3)



Albero delle visite

$$Q = (1, 2, 5, 3, 4, 7, 6)$$

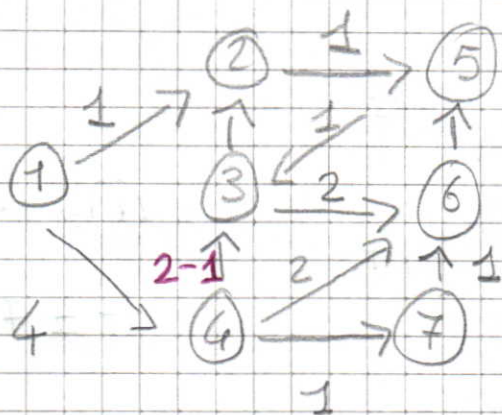
$$P = (1, 2, 5, 3, 4, 7, 6)$$

$$\theta(P, x) = \min\{2, 3, 2, 2, 1, 6\} = 1$$

"
x₄₃

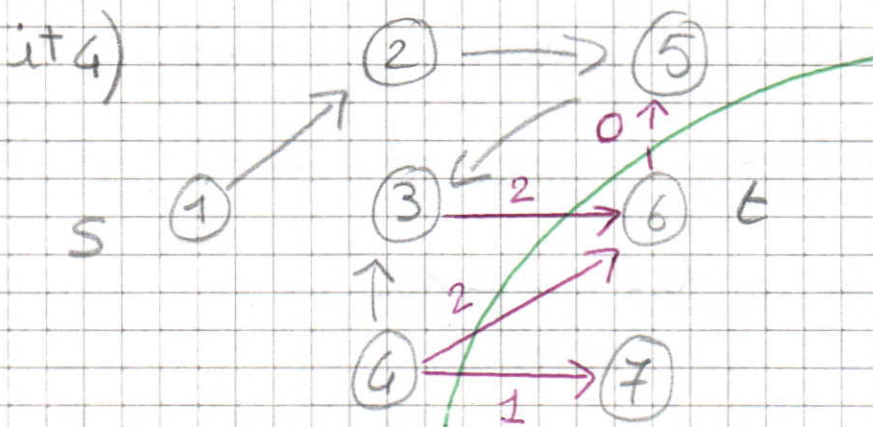
OSS: cammini aumentanti di cardinalità non decrescente

x:



$$v = 4 + 1 = 5$$

OSS: flusso intero a ogni iterazione



STOP: non esistono cammini aumentanti da s a t; il flusso x di valore 5 è un flusso massimo.

$(N_s, N_t) = (\underbrace{\{1, 2, 3, 4, 5\}}_S, \underbrace{\{6, 7\}}_t)$ taglio di capacità minima

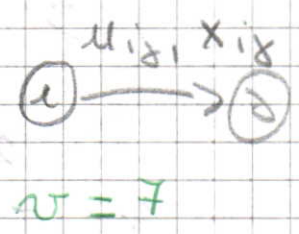
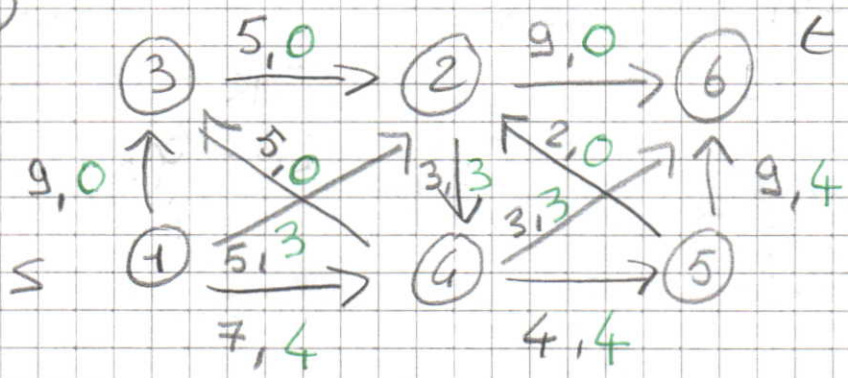
$$u(N_s, N_t) = u_{36} + u_{46} + u_{47} = 2 + 2 + 1 = 5 = v$$

OSS:

1) $x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A^+(N_s, N_t) = \{(3, 6), (4, 6), (4, 7)\}$

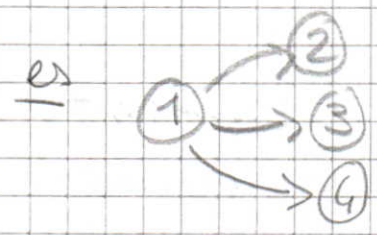
2) $x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in A^-(N_s, N_t) = \{(6, 5)\}$

②

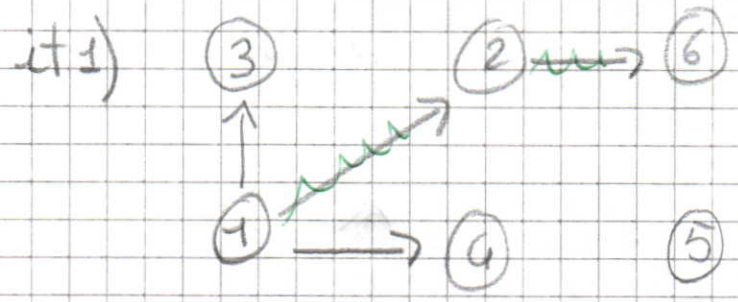


Si determini un flusso massimo da 1 a 6, mediante l'algoritmo di Edmonds e Karp, a partire dal flusso dato di valore $v = 7$.

Ordine di visita archi stelle uscenti:



ordine crescente modi teste

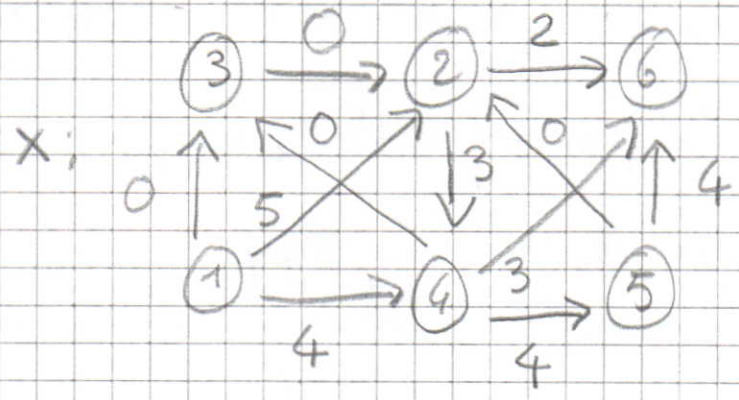


Albero della visita

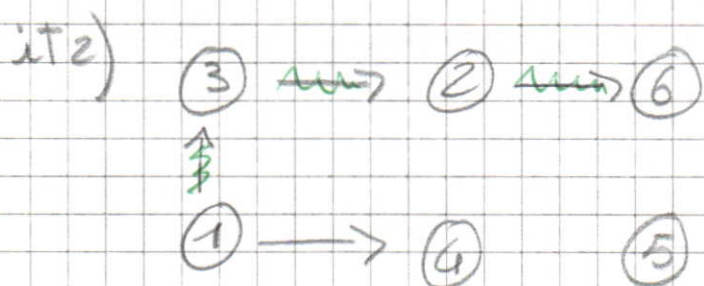
$$Q = (1, 2, 3, 4, 6)$$

$$P = (1, 2, 6)$$

$$\delta(P, x) = \min \{ 5 - 3, 9 - 4 \} = 2$$



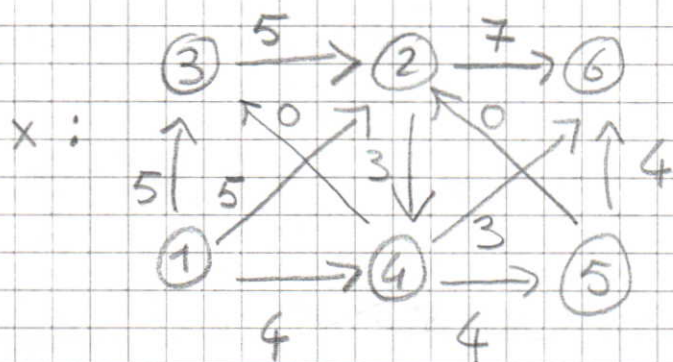
$$v = 7 + 2 = 9$$



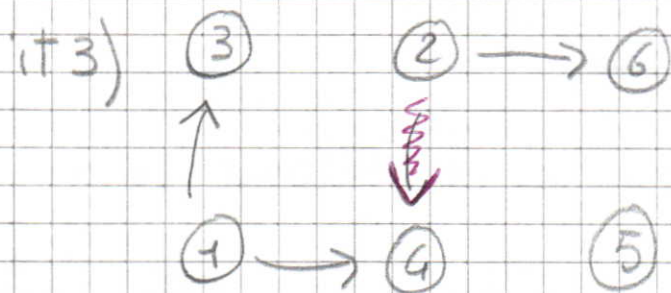
Albero della visita

$$Q = (1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 6)$$

$$P = (1, 3, 2, 6) \quad \theta(P, x) = \min \{ 9, 5, 9 - 2 \} = 5$$



$$v = 9 + 5 = 14$$

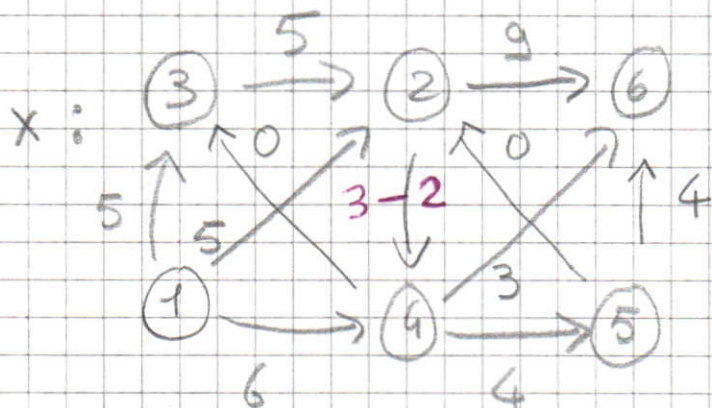


Albero della visita

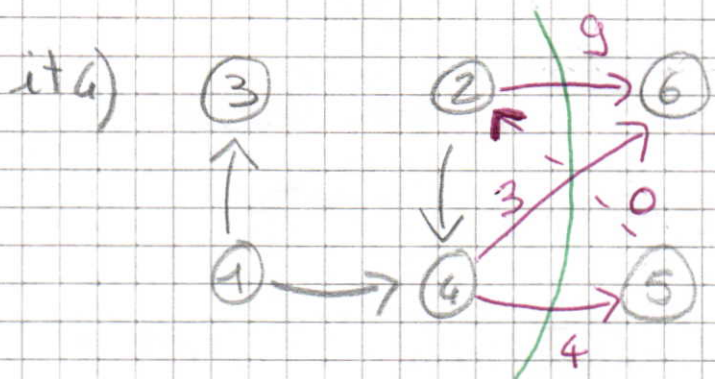
$$Q = (1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 6)$$

$$P = (1, 4, 2, 6) \quad \theta(P, x) = \min \{ 7 - 4, 3, 9 - 7 \} = 2$$

" x_{24}



$$v = 14 + 2 = 16$$



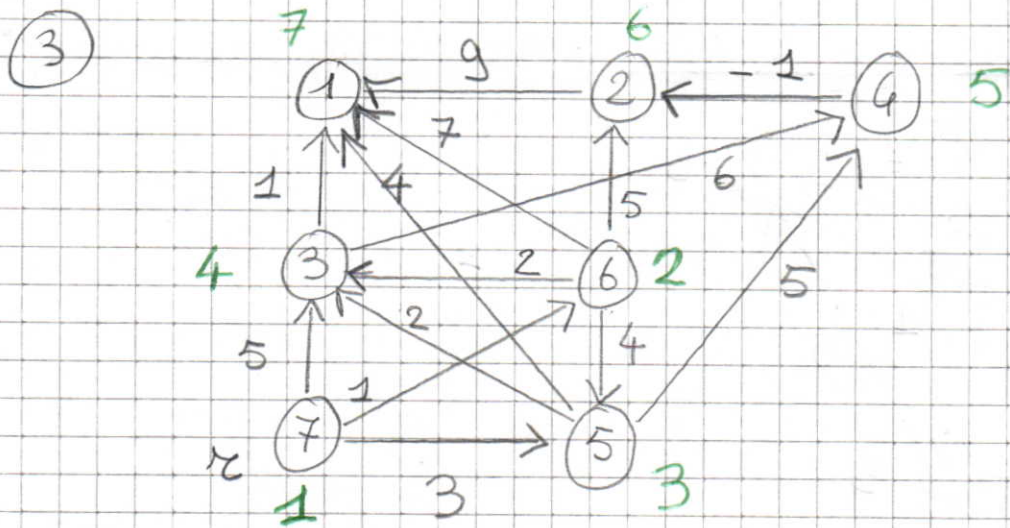
STOP: x è un flusso massimo, di valore 16,
mentre $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ è un
taglio di capacità minimo.

$$u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{45} + u_{46} = 9 + 4 + 3 = 16 = v$$

Come cambierebbero il flusso massimo e il taglio
minimo determinati se $u_{26} = 10$?

1) Si potrebbe inviare un'unità di flusso lungo
 $P = (1, 4, 2, 6)$, ottenendo un flusso (massimo)
di valore $v = 17$.

2) $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ rimarrebbe un taglio
minimo, ma l'algoritmo determinerebbe
 $(\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$, anch'esso di
capacità 17.



Determinare un albero dei cammini minimi di radice 7. Algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo?

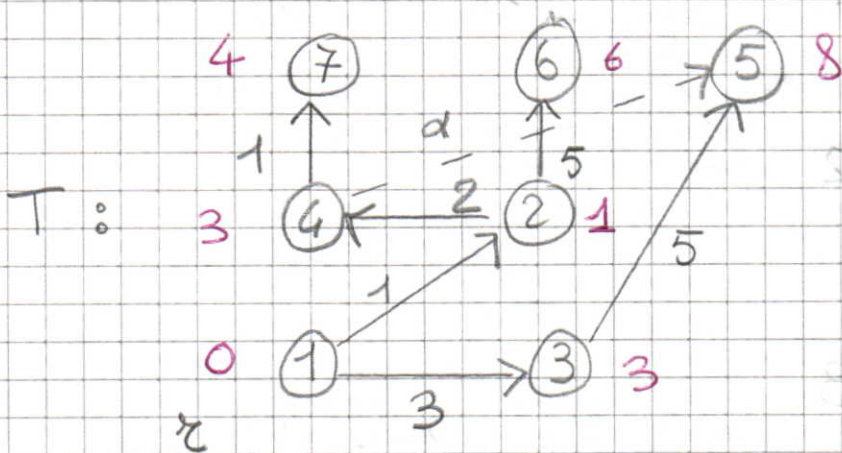
Rinumerando i nodi si dimostra che il grafo è aciclico ($i < j \forall (i, j) \in A$): SPT - Acyclic.

$$M = (n-1)C_{\max} + 1 = 55$$

← nuove numerazioni

it	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)	P(7)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)
0	nil	1	1	1	1	1	1	0	55	55	55	55	55	55
1	nil	1	1	1	1	1	1	0	1	3	5	55	55	55
2	nil	1	1	2	1	2	2	0	1	3	3	55	6	8
3	nil	1	1	2	3	2	3	0	1	3	3	8	6	7
4	nil	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
5	nil	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
6	nil	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4

Albero dei cammini minimi (nuove numerazioni):



Si consideri il caso in cui il costo di $(3,4)$ (o di $(4,5)$) sia un parametro reale α : per quali valori di α T resta un albero dei cammini minimi di radice 1 (o di 1)?

T resta un albero dei cammini minimi se e solo se valgono le condizioni di Bellman.

Poiché $(4,5) \notin T$, se e solo se

$$d(4) + \alpha \geq d(5) \Leftrightarrow \alpha \geq 5$$

" 3
" 8

Per $\alpha = 5$: $(4,5)$ può sostituire $(3,5)$ in T , che non è quindi l'unico albero ottimo.

Per $\alpha > 5$: ogni arco non in T soddisfa le condizioni di Bellman in forma di disuguaglianza stretta, quindi T è l'unico albero ottimo.

Il problema di flusso di costo minimo

1

- $G = (N, A)$ rete di flusso
- c_{ij} , $\forall (i, j) \in A$ costo di (i, j)
- $u_{ij} > 0$, $\forall (i, j) \in A$ capacità superiore di (i, j)
- b_i , $\forall i \in N$ bilancio del nodo i

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(j, i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i, j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i, \quad i \in N \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

Studiamo condizioni di ottimalità per il problema: dato un flusso ammissibile x , x è ottimo? (ovvero: è di costo minimo?)

Sia $G_x = (N, A_x)$ il grafo residuo rispetto a x , definita come per il problema di flusso massimo:

$$\forall (i, j) \in A \text{ t.c. } x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow (i, j) \in A_x \quad c'_{ij} = c_{ij}$$

$$\forall (i, j) \in A \text{ t.c. } x_{ij} > 0 \Rightarrow (j, i) \in A_x \quad c'_{ji} = -c_{ij}$$

NB: G_x è ora pesato, in quanto ai suoi archi è associato un costo di percorrenza

Un ciclo aumentante è un ciclo ^{orientato} in G_x .

La massima quantità di flusso inviabile

lungo un ciclo aumentante C è:

$$\theta(C, x) = \min \{ (u_{ij} - x_{ij}) : (i, j) \in C^+,$$

$$x_{ij} : (i, j) \in C^- \}$$

con:

C^+ : archi diretti del ciclo (in G)

C^- : archi inversi del ciclo (in G)

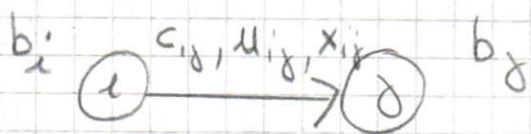
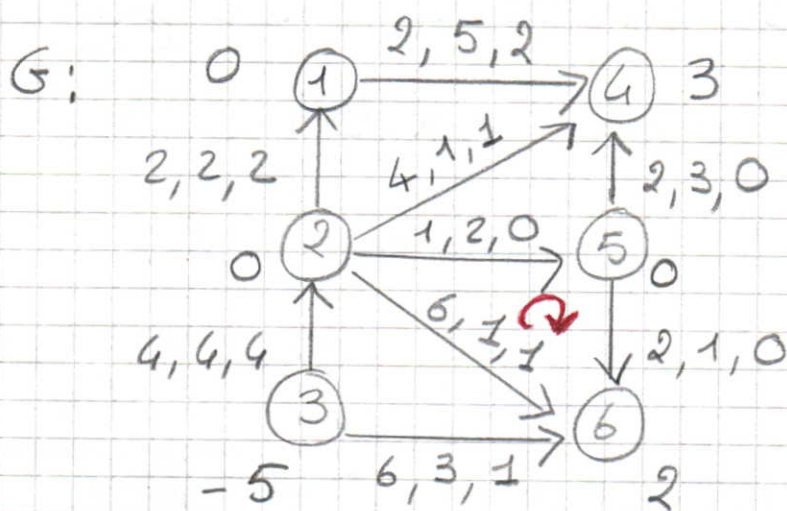
< considerando l'orientamento dato >
dal verso di percorrenza in G_x

Proprietà: Se x è un flusso ammissibile e C è un ciclo in G_x (ciclo aumentante),

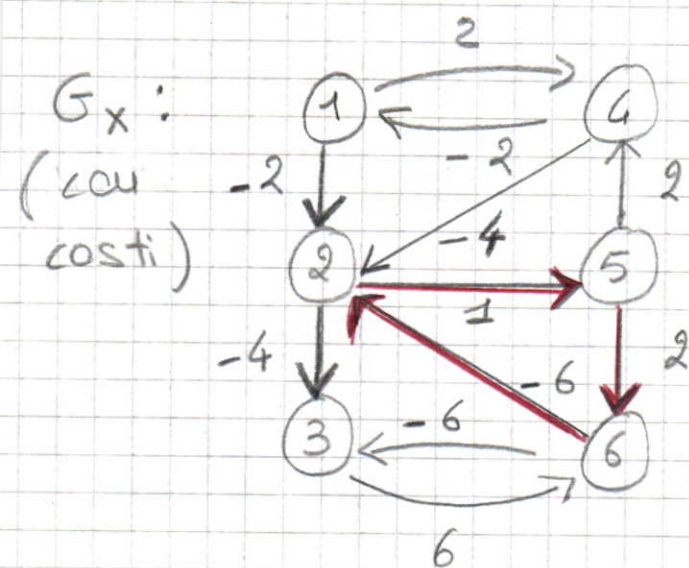
$$x(\theta) = x \oplus \theta C, \quad 0 \leq \theta \leq \theta(C, x)$$

è ancora un flusso ammissibile \square

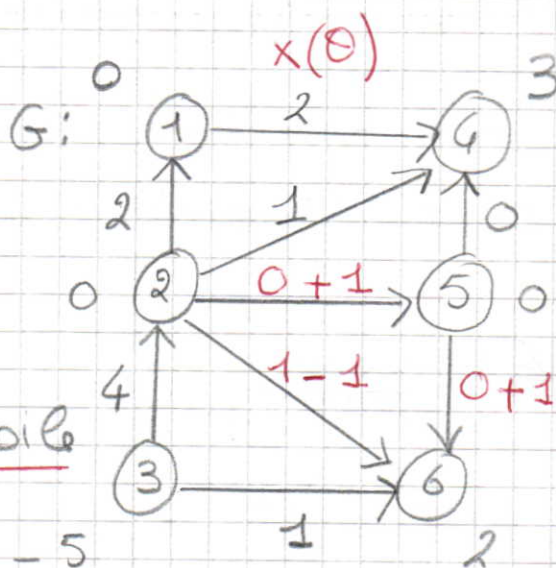
Esempio



$$C \cdot x = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} = 40$$



\Rightarrow
 $x(\theta)$
è
ammissibile



ciclo aumentante C

$$\theta(C, x) = \min \{2, 1, 1\} = 1 = \theta$$

Qual è il costo di $x(\theta)$?

Se $c(C) = \sum_{(i,j) \in C^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} c_{ij}$ è il costo di C

(ovvero è la somma dei costi degli archi in G_x), allora:

$$c x(\theta) = c(x \oplus \theta C) = c x + \theta c(C)$$

Quindi: se $c(C) < 0$, ovvero C è un ciclo aumentante negativo, allora $c x(\theta) < c x$, e pertanto x non è un flusso di costo minimo.

Condizione necessaria per l'ottimalità di un flusso ammissibile x : non devono esistere cicli aumentanti negativi in G_x

Esempio

$c(C) = -3$, quindi x non è un flusso di costo minimo.

$$\text{Infatti } c x(\theta) = c x + \theta c(C) = 40 + 1(-3) = 37$$

La condizione è anche sufficiente?

②

Scrivere il seguente risultato:

Teorema di decomposizione di flussi:

Siano x e x' flussi ammissibili in G .

Allora esistono k cicli aumentanti in G_x ,

C_1, C_2, \dots, C_k , con $k \leq m$, tali che

$$x' = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \theta_2 C_2 \oplus \dots \oplus \theta_k C_k$$

con $0 < \theta_i \leq \theta(C_i, x)$ $i = 1, \dots, k$

Ovvero: un qualsiasi flusso ammissibile x' è ottenibile da un qualsiasi (altro) flusso ammissibile x inviando flusso lungo al più m cicli aumentanti rispetto a x

Dim (costruttiva)

$$\text{Sia } A_x^+ = \{(i, j) : x'_{ij} > x_{ij}\}$$

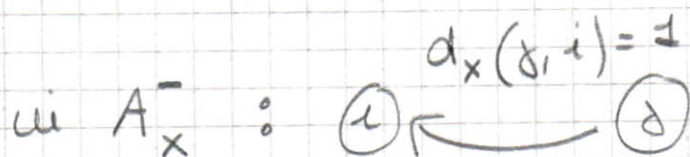
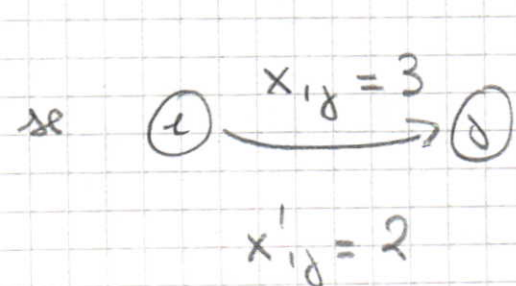
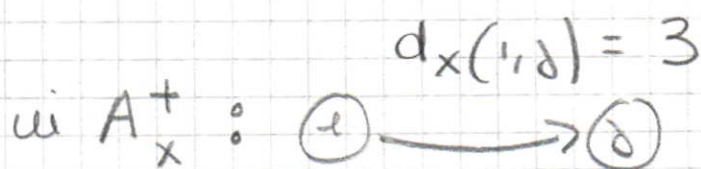
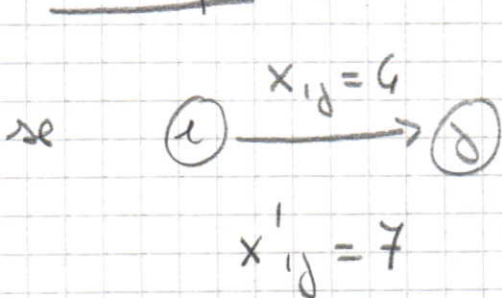
capacità

$$d_x(i, j) = x'_{ij} - x_{ij}$$

$$\text{e } A_x^- = \{(j, i) : x'_{ij} < x_{ij}\}$$

$$d_x(j, i) = x_{ij} - x'_{ij}$$

esempio :



(devo togliere
un'unità di flusso)

Sia $\bar{G}_x = (N, A_x^+ \cup A_x^-)$: sottografo di G_x

Proprietà : se un nodo in \bar{G}_x ha un arco
entrante, deve avere almeno un arco
uscite

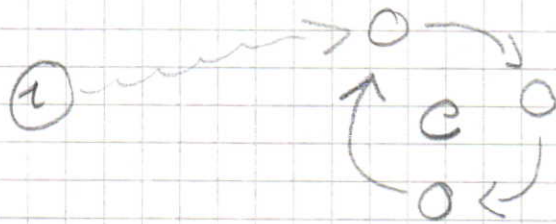
Quindi (procedura per convertire x in x'):

- scelgo un nodo i avente almeno un
arco uscente in \bar{G}_x (se non ne esistono
STOP : $x = x'$)

- visito \bar{G}_x a partire da i fino a
visitare un nodo già visitato : ciclo

augmentante rispetto a x (e)

3



- θ è la quantità di flusso

$$\theta = \min \{ d_x(i, j) : (i, j) \in e \text{ lungo } C \}$$

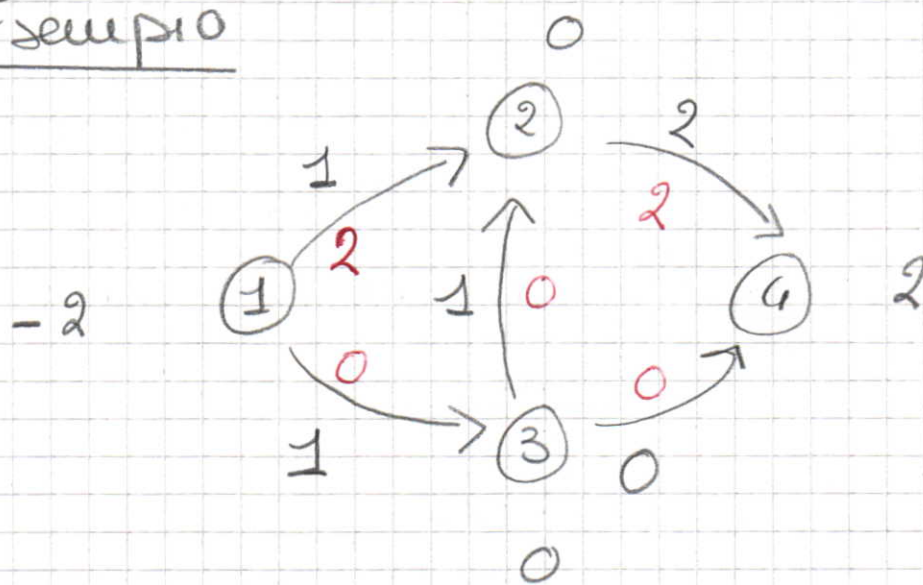
- elimino da \bar{G}_x ogni arco (i, j) tale che $x_{ij} = x'_{ij}$ dopo l'invio (almeno uno)
- aggiorno le capacità $d_x(i, j)$ e itero
finché x è stato convertito in x'

$O(m)$ invii lungo cicli
augmentanti rispetto a x !

□

→ ovvero ho eliminato ogni arco da
 \bar{G}_x

Esempio



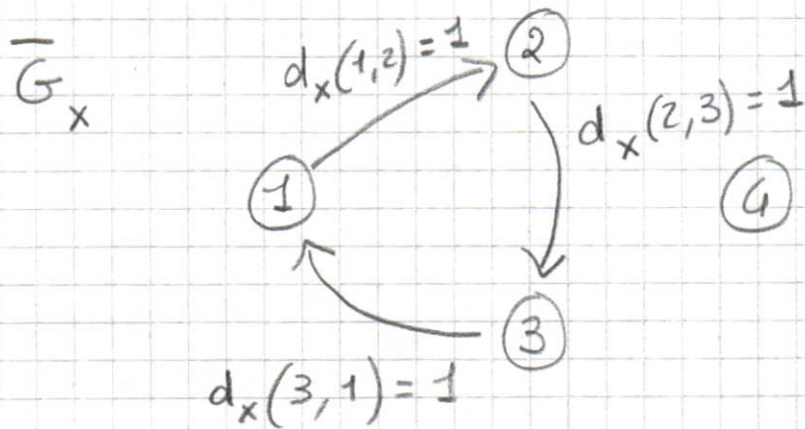
$$u_{1,0} = 3$$

$$v(1,0)$$

x

x'

Convertiamo x in x' ;



- ciclo aumentante rispetto a x ; u v i o

$$\theta = \min\{1, 1, 1\} = 1 \text{ lungo } C$$

- così facendo converto x in x' : STOP
(rimuovo i 3 archi da \bar{G}_x)

Segue il seguente

Teorema : Un flusso ammissibile x è di costo minimo se non esistono cicli aumentanti negativi rispetto a x

Dim

solo se (già dimostrato)

se (sufficienza) : supponiamo non esistano cicli aumentanti negativi rispetto a x .

Sia x' un qualsiasi altro flusso ammissibile in G ; per il Teorema di decomposizione di flussi

$$x' = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \dots \oplus \theta_k C_k$$

quindi

$$c x' = c x + \overset{>0}{\theta_1} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{c(C_1)} + \dots + \overset{>0}{\theta_k} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{c(C_k)} \quad \text{per ipotesi}$$

Quindi $c x' \geq c x$, cioè x è un flusso di costo minimo

□

Le condizioni di ottimalità suggeriscono il seguente algoritmo:

2.6.3 Algoritmo basato su cancellazione di cicli

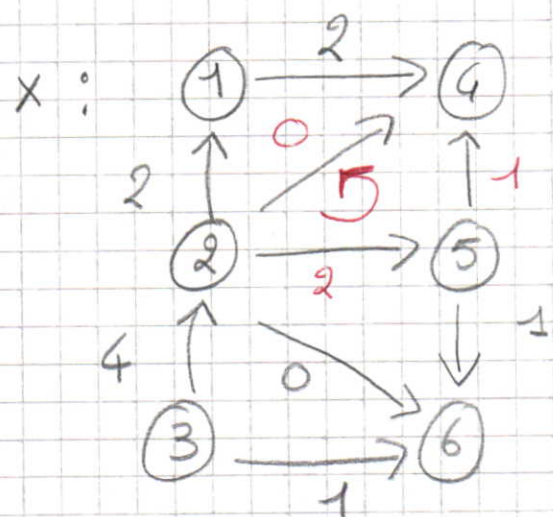
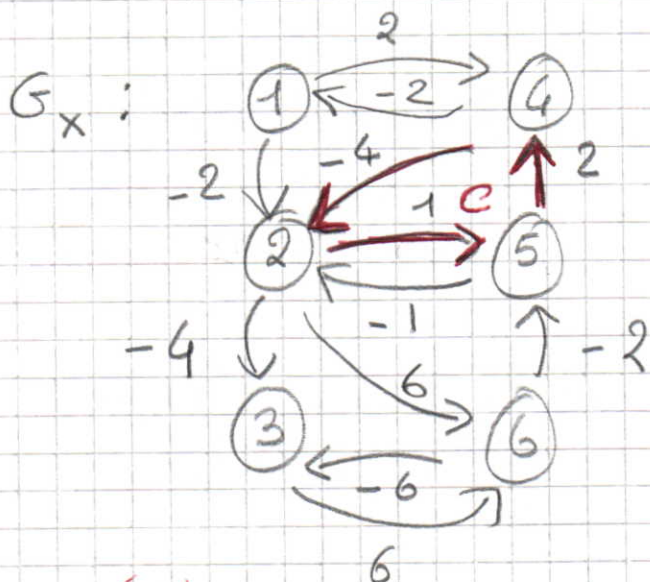
~~pag.~~
~~115~~

- Determina, se esiste, un flusso ammissibile x
- Finché esistono cicli negativi:
 - determina un ciclo negativo, C , in G_x
 - sia $\theta = \theta(C, x)$ la massima quantità di flusso inviabile lungo C
 - aggiorna x : $x := x \oplus \theta C$

(procedura cancella - cicli) ("cancella" C)

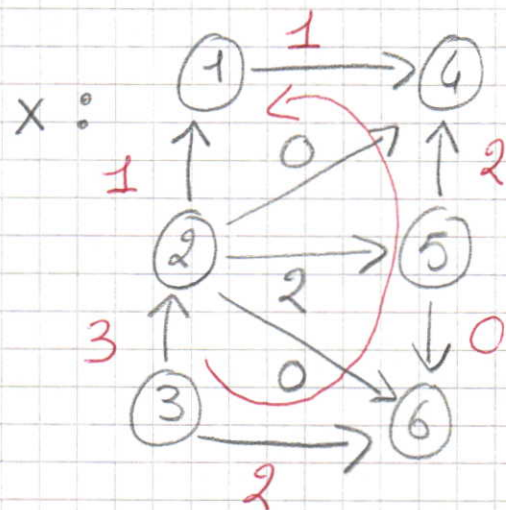
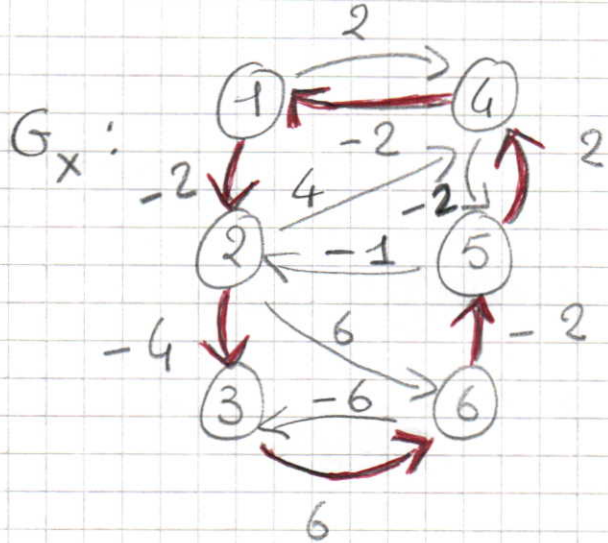
pag 116

Esempio (cont.)



$$c(C) = -1 \quad \theta = 1$$

$$c_x = 37 + \theta(-1) = 36$$

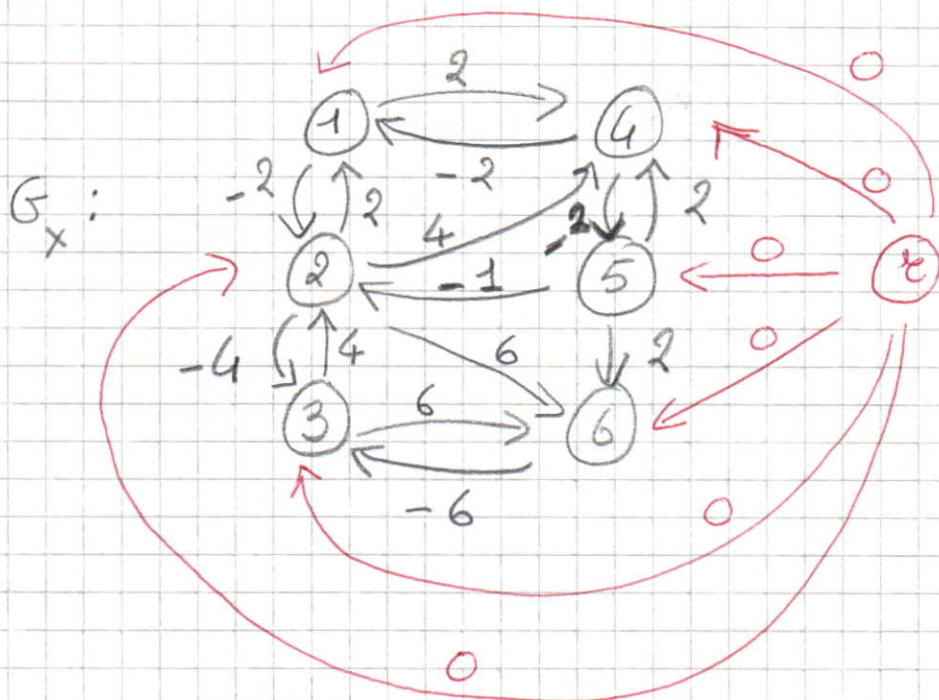


(4)

$$e(e) = -2 \quad \theta = 1$$

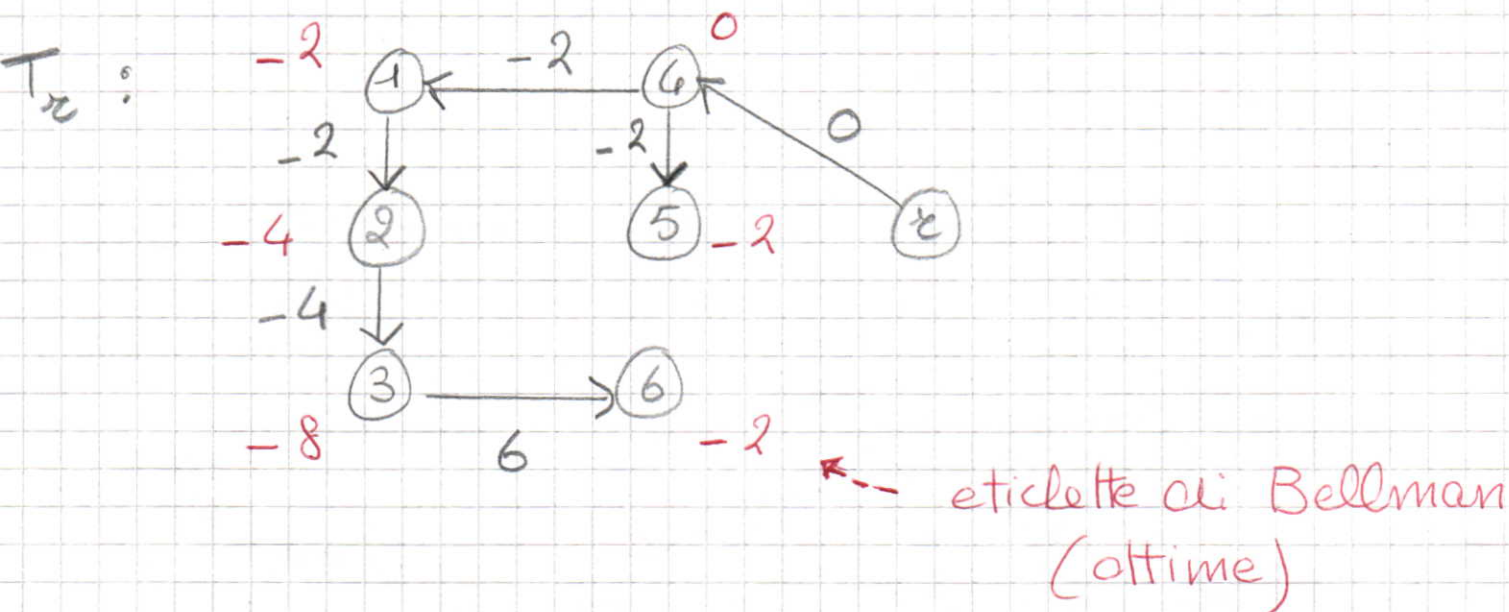
$$c_x = 36 + \theta(-2) = 34$$

Esistono altri cicli negativi in G_x ? Come determinarli? algoritmo di Bellman per cammini minimi avente come radice e l'insieme dei nodi di G :



Costruiamo un albero dei cammini minimi di costo x in G_x : esiste sse non esistono cicli negativi in G_x sse l'algoritmo di Bellman aggiorna l'etichetta di ogni nodo al più $(n-1)$ volte:

$Q = (4 \ 1 \ 2 \ 5 \ 3 \ 6)$ code

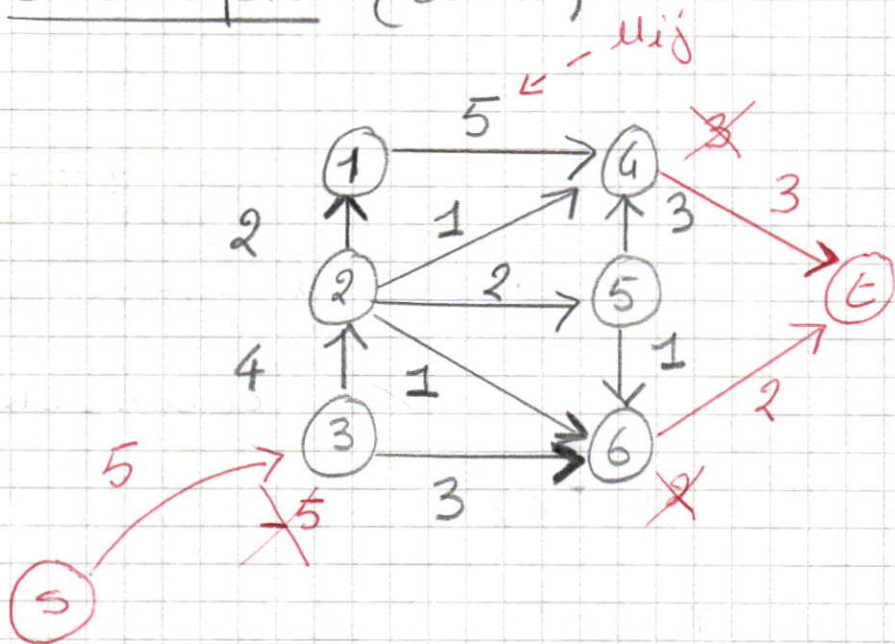


Poiché le etichette associate ai nodi soddisfano le condizioni di Bellman, T_x è un albero dei cammini minimi di costo x , e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo: STOP il flusso x di costo $Cx = 34$ è un flusso di costo minimo

Dettagli implementativi:

- 1) a livello di svolgimento degli esercizi, i cicli negativi possono essere cercati per ispezione, salvo che all'ultima iterazione
- 2) i cicli negativi possono essere cercati direttamente in G (come per il problema di flusso massimo)
- 3) come determinare, se esiste, un flusso ammissibile iniziale? mediante un algoritmo di flusso massimo:

Esempio (cont.)



In G esiste un flusso ammissibile sse il flusso massimo da s a t , nel grafo esteso.

ha valore $v = 5 = \sum_{i \in O} (-b_i) = \sum_{i \in D} b_i$
 nodi offerta nodi domanda

< Esercizio : determinare un flusso massimo da s a t , e verificare che $v = 5$ >

Proprietà (integralità dei flussi): se u_{ij} è intero $\forall (i,j) \in A$, allora ogni flusso x determinato dall'algoritmo è intero ($\theta = \theta(e, x) \geq 1$ intero ad ogni iterazione)

NO

Complessità computazionale in tempo ($u_{ij} \in \mathbb{Z}$)

Sia $\bar{u} = \max \{ u_{ij} : (i,j) \in A \}$

sia $\bar{c} = \max \{ |c_{ij}| : (i,j) \in A \}$

\forall flusso ammissibile x :

$$-m\bar{u}\bar{c} \leq cx \leq m\bar{u}\bar{c}$$

$O(nm^2\bar{u}\bar{c})$

complessità di CANCELLA_CICLI

Se $c_{ij} \in \mathbb{Z} \forall (i,j)$: $c(C) \leq -1$ intero $\forall C$ ciclo negativo

Poiché $\theta \geq 1$ ad ogni iterazione; il costo

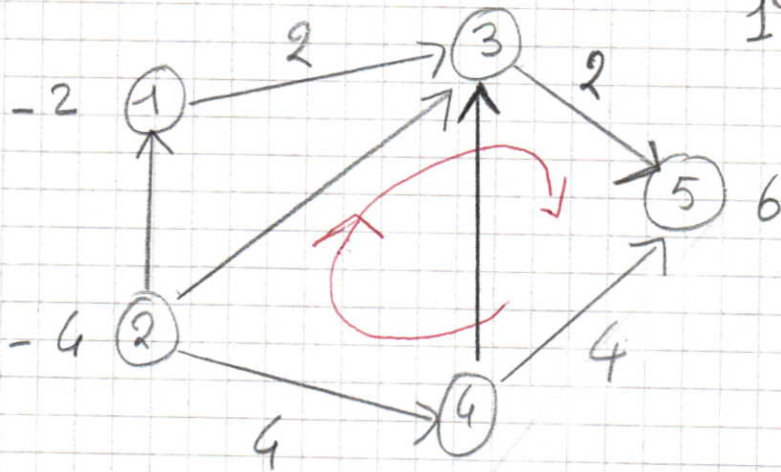
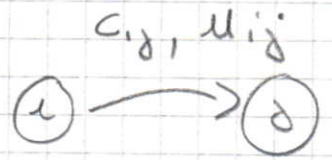
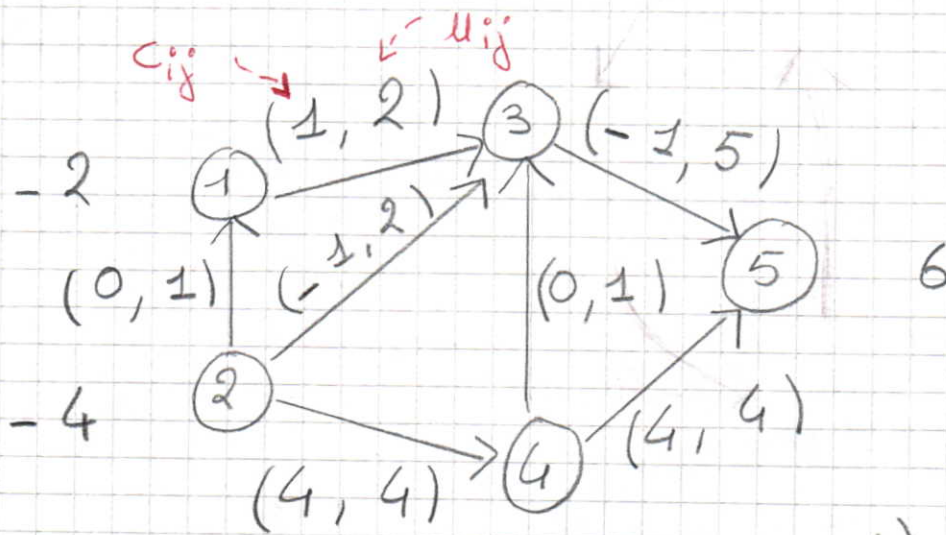
$$cx := cx + \theta c(e)$$

della funzione ob. diminuisce di almeno 1

($\theta c(C)$) ad ogni iterazione: $O(m\bar{u}\bar{c})$ # iterazioni

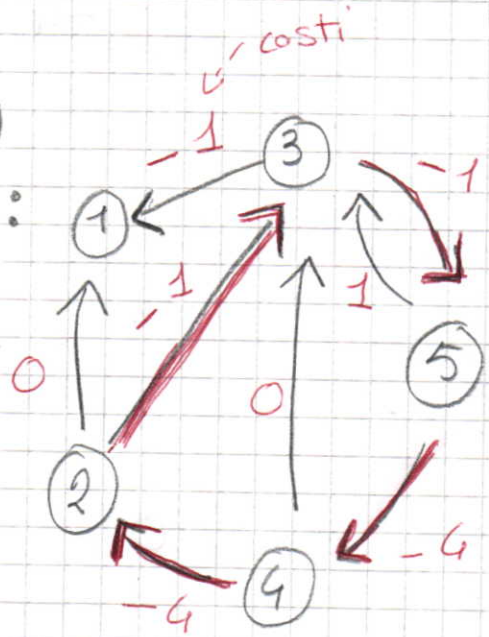
costo per iterazione: $O(mn)$ dq. Bellman

Esercitazione Cancelli - Cici (5)



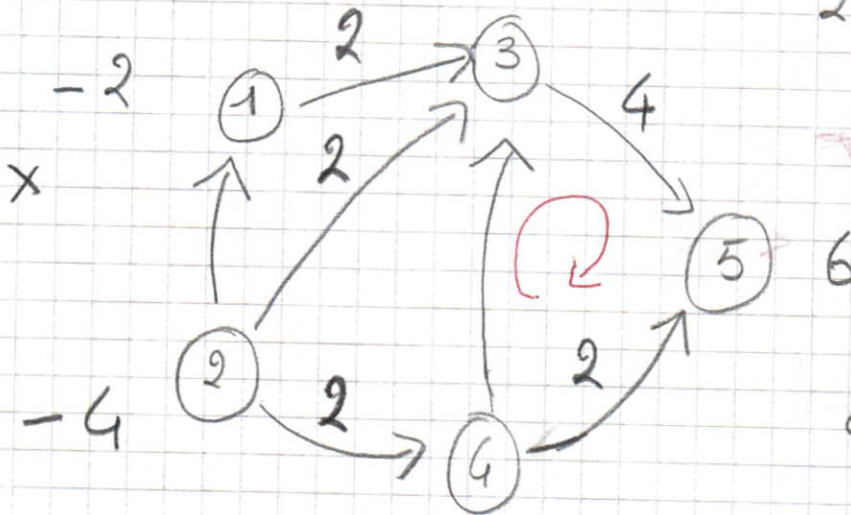
$$cx = 32$$

1^o it)
 G_x :



$$c(c) = -1 - 1 - 4 - 4 = -10$$

$$\theta(c, x) = \min \{ 2, 5 - 2, 4, 4 \} = 2$$

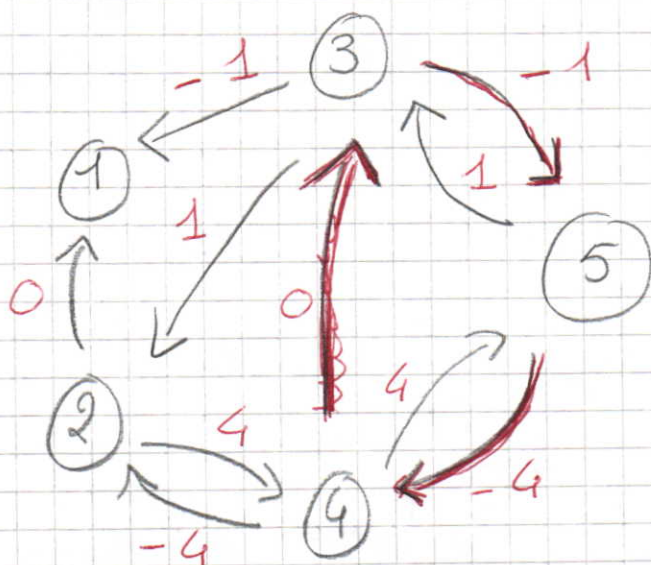


OSS su
 integralità flussi
 e $\theta(c, x) \geq 1$
 e $c(c) \leq -1$

$$cx = 32 + 2(-10) = 32 - 20 = 12$$

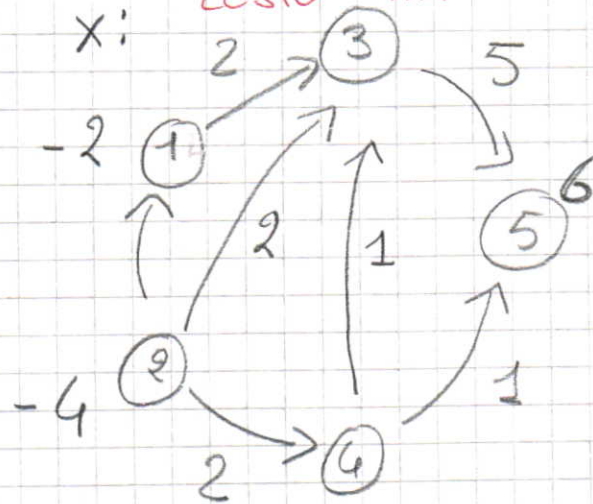
2^a it)

G_x :



Flusso di costo minimo

x :

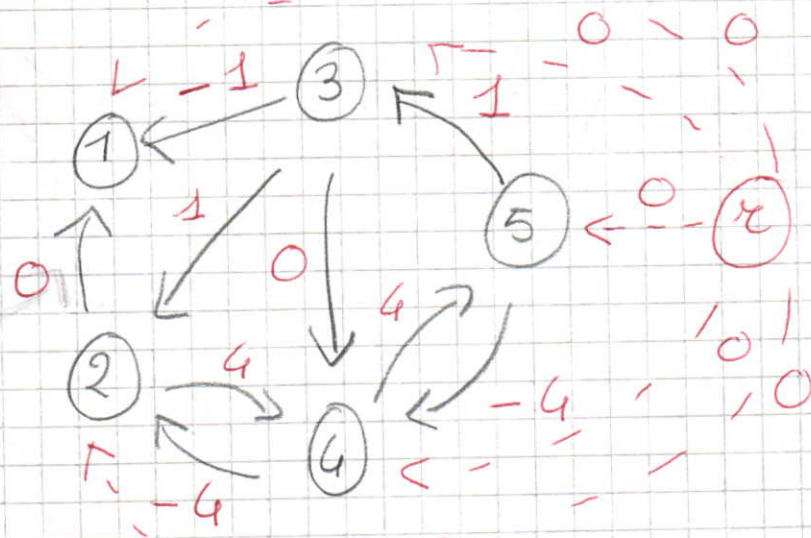


$$c(C) = -5 \quad \theta(C, x) = \min \{1, 1, 2\} = 1$$

$$c \cdot x = 12 + 1(-5) = 7$$

3^a it)

G_x :



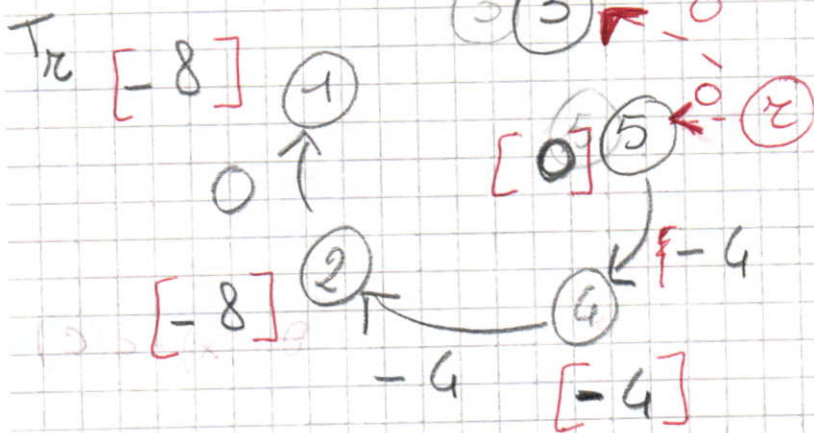
Esistono altri cicli aumentanti negativi?

Applico l'algoritmo di Bellman per verificare se esiste un albero dei cammini minimi di radice x : [0]

Esiste, ovvero non esistono cicli negativi in G_x

STOP

Il flusso di costo minimo costo 7



Programmazione Lineare Intera: tecniche di modellazione

Marie France Scutellà

"Ricerca Operativa", corso di laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento
di Informatica, Università di Pisa: 1.2)

$$\begin{array}{lll} \text{PL:} & \max c^T x & (\min) \\ & Ax \leq b & (\geq) \\ & & (=) \end{array}$$

variabili quantitative

$$\begin{array}{lll} \text{PLI:} & \max c^T x & (\min) \\ & Ax \leq b & (\geq) \\ & \boxed{x \in \{0, 1\}^n} \text{ oppure } \boxed{x \in \mathbb{Z}^n} & \end{array}$$

variabili binarie
(booleane, logiche)

variabili intere

Programmazione Lineare Intera Mista: se un
sottoinsieme di variabili sono vincolate ad
assumere valori interi.

PLI (e PLIM):

- problemi "difficili" (NP-Hard)
- molto potenti dal punto di vista modellistico

1) Variabili logiche

Problema dello zaino binario

$E = \{1, 2, \dots, n\}$ insieme di oggetti

a_i : peso oggetto i , $i = 1, \dots, n$ ($a_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \dots, n$)

c_i : costo (beneficio) oggetto i , $i = 1, \dots, n$
($c_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \dots, n$)

b : capacità dello zaino ($b \in \mathbb{Z}^+$)

Problema : decidere quali oggetti inserire nello zaino rispettando la sua capacità e massimizzando il beneficio totale.

Assunzioni :

- $a_i \leq b \quad i = 1, \dots, n$

- $b < \sum_{i=1}^n a_i$

Modello PL I

Variabili decisionali :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se inserisco l'oggetto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

(KP)
"
Knapsack
Problem

$$\max \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$

vincolo di
zaino

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$$

② Vincoli di semiassegnamento

n : numero cittadini da sottoporre a test sierologico

m : numero centri sanitari disponibili

u_j : capacità del centro j , $j = 1, \dots, m$

c_{ij} : costo sostenuto dal sistema sanitario se il test del cittadino i è effettuato dal centro j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

Problema: decidere come ripartire (assegnare) i cittadini tra i centri rispettando le capacità dei centri e minimizzando il costo totale.

Modello PLI

Variabili decisionali (logiche a due indici):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il cittadino } i \text{ è assegnato al centro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

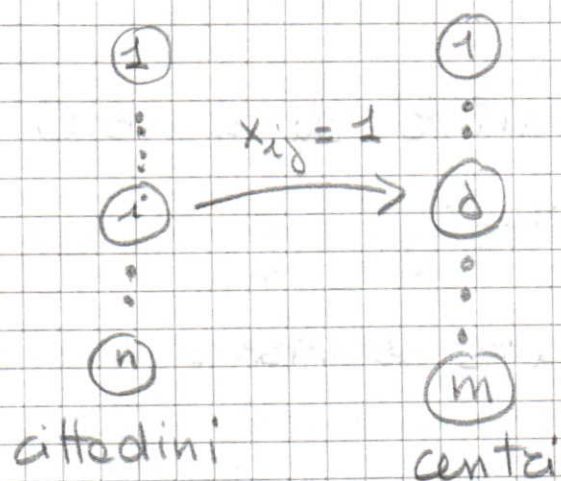
$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

vincoli di
semiassegnamento

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq u_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

vincoli di emiassegnamento: modellano una corrispondenza univoca tra due insiemi



Oss: è fondamentale che $x_{ij} \in \{0, 1\}$; rilassando i vincoli di integralità, la soluzione $x_{ij} = \frac{1}{m}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, sarebbe ammissibile ma senza senso.

Caso speciale:

$S(i)$: sottoinsieme dei centri abilitati a effettuare il test a i , $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

Se $m = n$, si può voler imporre una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

vincoli di assegnamento

OSS: i vincoli di assegnamento possono essere utilizzati per ordinare n oggetti:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ è in posizione } j \\ & \text{nell'ordinamento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n$$

③ Vincoli di soglia

Per motivi di efficienza, si vuole minimizzare il massimo numero di pazienti nei centri (workload del centro più carico):

min z variabile di soglia

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$
$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq u_j \quad j = 1, \dots, m$$

$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq z \quad j = 1, \dots, m$
--

vincoli di soglia

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, m$$

z è una valutazione superiore (upper bound) del numero di pazienti di ogni centro, e quindi stima per eccesso il massimo numero di pazienti nei centri. Minimizzando z , a livello di soluzione ottima z è il massimo numero di pazienti nei centri, che viene pertanto minimizzato.

In generale:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$a_1^T x, a_2^T x, \dots, a_n^T x$: funzioni lineari

$$\min \max \{ a_1^T x, \dots, a_n^T x \} \quad \begin{matrix} \text{PLI} \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

non
< vincoli lineari >

$$\begin{aligned} \min \quad & u \\ & a_1^T x \leq u \\ & \vdots \\ & a_n^T x \leq u \\ & \text{< vincoli lineari >} \end{aligned}$$

$$\max \min \{ a_1^T x, \dots, a_n^T x \} \quad \begin{matrix} \text{PLI} \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

non
< vincoli lineari >

$$\begin{aligned} \max \quad & l \\ & a_1^T x \geq l \\ & \vdots \\ & a_n^T x \geq l \\ & \text{< vincoli lineari >} \end{aligned}$$

Esempio: ordinamento di lavori su macchine con minimizzazione del tempo di completamento

n : numero di lavori (task) da eseguire (non intercambiabili)

d_i : Tempo di elaborazione di i , $i = 1, \dots, n$

m : numero di macchine (identiche) disponibili per eseguire i lavori

Problema: assegnare i lavori alle macchine in modo da completare tutti i lavori nel minor tempo possibile, ovvero minimizzare il tempo

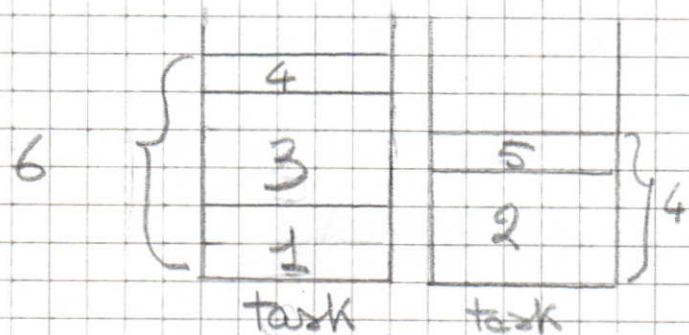
di lavoro della macchina "più carica".

esempio

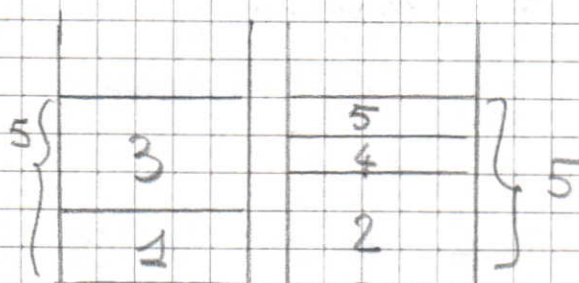
$$n = 5 \quad d_1 = 2 \quad d_2 = 3 \quad d_3 = 3 \quad d_4 = 1 \quad d_5 = 1$$

$$m = 2$$

soluzione 1



soluzione 2



valore : 6

5

funzione
obiettivo

soluzione ottima!

Modello PLI

Variabili decisionali :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ è assegnato alla} \\ & \text{macchina } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

min E

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n d_i x_{ij} \leq E \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

4

Vincoli logici

Si vuole minimizzare il numero di centri utilizzati.

Modello PL I

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente } i \text{ è assegnato al} \\ & \text{centro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il centro } j \text{ è utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\min \sum_{j=1}^m y_j$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq u_j \cdot y_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, m$$

vincoli di capacità e pure vincoli logici:

$$y_j = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

OSS: a livello di soluzione ottima, $y_j = 1$

solo se il centro j è utilizzato (almeno un paziente).

5) Relazioni logiche

Le variabili booleane consentono di modellare relazioni logiche, mediante

$$x \in \{0, 1\} : \begin{array}{ll} x = 1 & \text{"vero"} \\ x = 0 & \text{"falso"} \end{array}$$

Negazione : $y = \neg x$

in PLI : $x, y \in \{0, 1\}$

$$y = 1 - x \quad (\text{ovvero } x + y = 1)$$

Implicazione logica : $x \Rightarrow y$

in PLI : $x, y \in \{0, 1\}$

$$y \geq x$$

OR : $x \vee y = z$

in PLI : $x, y, z \in \{0, 1\}$

$$z \geq x$$

$$z \geq y$$

$$z \leq x + y$$

OR esclusivo : $x \oplus y = z$

in PLI : $x, y, z \in \{0, 1\}$

$$z \geq x - y$$

$$z \geq y - x$$

$$z \leq x + y$$

$$z \leq 2 - x - y$$

AND : $x \wedge y = z$

in PLI : $x, y, z \in \{0, 1\}$

$$z \leq x$$

$$z \leq y$$

$$z \geq x + y - 1$$

6) Vincoli di selezione di sottoinsiemi

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ elementi

$F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ tale che $F_j \subseteq N$ $j = 1, \dots, m$
famiglie di sottoinsiemi di N

c_j : costo di selezione di F_j $j = 1, \dots, m$

Problema di copertura : selezionare sottoinsiemi in F , a costo minimo, in modo che ogni elemento di N compaia in almeno un sottoinsieme selezionato.

Introduciamo i parametri:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in F_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

Modello PLI

Variabili decisionali:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se seleziono } F_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\min \sum_{j=1}^m c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \geq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

vincoli
di
copertura

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, m$$

esempio (vincoli di copertura)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ quartieri

$$F_1 = \{1, 2\}$$

$$F_3 = \{1, 4, 5\}$$

$$F_2 = \{1, 3, 4\}$$

$$F_4 = \{2, 3, 5\}$$

F_j : aprendo un centro sanitario nella località j ,
i cittadini dei quartieri in F_j possono raggiungere
il centro entro un tempo prefissato (es. 30 minuti)

$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4$

$$A = [a_{ij}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Impongono che ogni quartiere sia "coperto" dal

servizio.

Problema di partizione: selezionare sottoinsiemi di F , a costo minimo, in modo che ogni elemento di N compaia in esattamente un sottoinsieme selezionato.

Modello PLI

$$\min \sum_{j=1}^m c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 1 \quad i=1, \dots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j=1, \dots, m$$

Problema di riempimento (packing): selezionare sottoinsiemi di F in modo che ogni elemento di N compaia in al più un sottoinsieme selezionato.

Modello PLI

$$\max \sum_{j=1}^m c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq 1 \quad i=1, \dots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j=1, \dots, m$$

7

Variabili a valori discreti

$$\text{in PLI: } \begin{array}{ll} x \geq 0 & x \leq 0 \\ x \in \{0, 1\} & x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$x \in \{20, 30, 80\} ?$$

y_1

y_2

y_3

variabili binarie
ausiliarie

$$x = 20y_1 + 30y_2 + 80y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

In generale:

$$\text{se } x \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

y_1

y_2

y_n

variabile a
valori discreti

$$\text{in PLI: } x = \sum_{i=1}^n v_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1$$

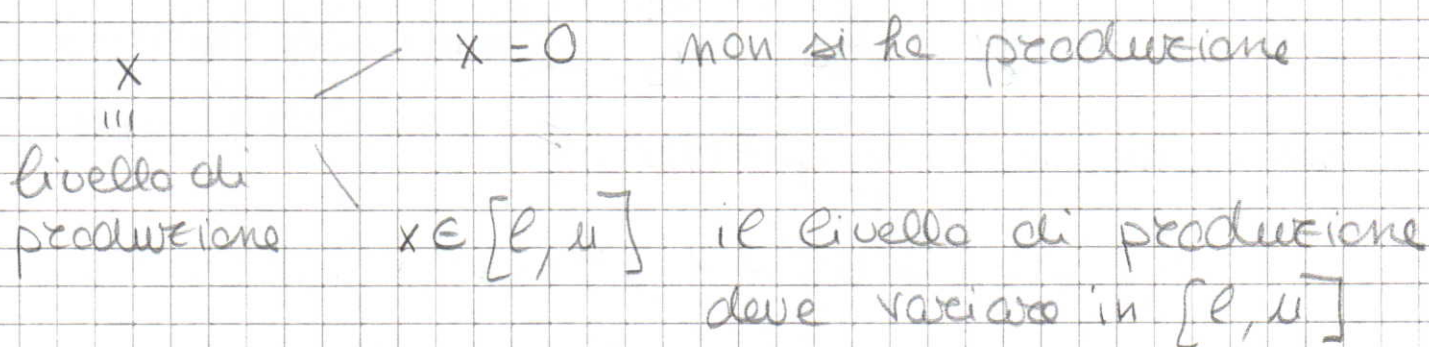
$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$$

8

Minima quantità positiva prefissata

$$x \in \{0, [l, u]\} \quad \text{con } 0 < l < u$$

Tipica in problemi di pianificazione della produzione:



in PLI: $l \cdot y \leq x \leq u \cdot y$

$y \in \{0, 1\}$

variabile ausiliaria per modellare la decisione relativa alla produzione.

9

Funzioni a carico fisso

$$\min f(x)$$

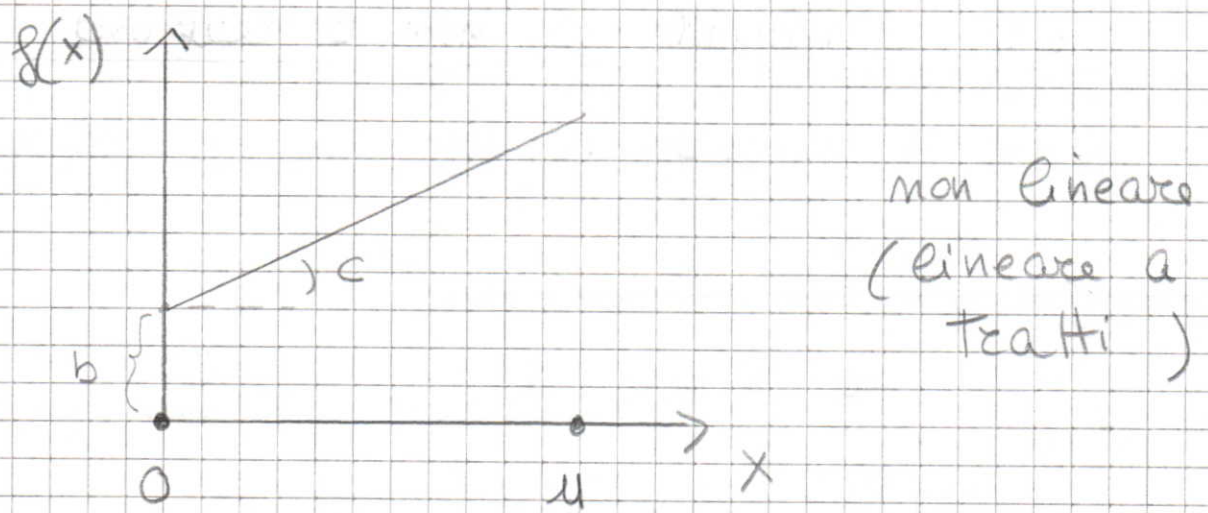
< vincoli lineari >

dove:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ b + cx & \text{se } 0 < x \leq u \end{cases}$$

$b > 0, c > 0$

funzione a carico fisso



Proprietà di sistemi di produzione in logistica:

$b > 0$: costo di investimento (setup)

$c > 0$: costo unitario di produzione

x : livello di produzione

in PL I : $\min g(x, y) = b y + c x$

< vincoli lineari >

$$0 \leq x \leq u \cdot y$$

$$y \in \{0, 1\}$$

variabile binaria
ausiliaria

$g(x, y)$ rappresenta una linearizzazione della funzione obiettivo originaria $f(x)$;

$g(x, y)$ è funzione della variabile x e della variabile ausiliaria y :

$y=0$: modello e non produzione

$y=1$: modello e decisione di produrre

Legame tra $f(x)$ e $g(x, y)$:

1) $y=0 \Rightarrow x=0$: non produzione

$$g(0, 0) = f(0) = 0$$

2) $y=1 \Rightarrow 0 \leq x \leq u$: produzione

$$g(x, 1) = b + cx$$

Oss: il modello PLI non esclude la soluzione

$(x, y) = (0, 1)$, con valore della funzione

obiettivo $g(0, 1) = b$;

ovvero $x=0$ ha due rappresentazioni nel modello

PLI: $(0, 0)$ corretta

$(0, 1)$ non desiderata

Tuttavia, poiché $g(0, 1) = b > g(0, 0) = 0 = f(0)$,

la soluzione indesiderata $(x, y) = (0, 1)$ viene

esclusa in fase di minimizzazione di $g(x, y)$

Relazione tra PLI e PL

Marie Grazia Scutellà

"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento
di Informatica, Università di Pisa: Cap. 4)

$$(P) \quad \begin{aligned} z(P) = \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$F = \{ x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b \} \quad \text{insieme ammissibile di} \\ \quad \quad \quad \underline{(P)}$$

Sia:

$$\bar{F} = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \} \quad \text{poliedro definito dai} \\ \text{vincoli lineari di (P)}$$

Proprietà: $F \subset \bar{F}$

Il problema:

$$(RC) \quad \begin{aligned} z(RC) = \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned} \quad PL$$

è detto rilassamento continuo (o lineare)
di (P).

Proprietà: $z(Re) \geq z(P)$

Ovvero il rilassamento continuo fornisce una valutazione superiore, o upper bound, di $z(P)$.

Proprietà: Sia \bar{x} una soluzione ottima di (Re) .

Se $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$, allora \bar{x} è ottimo per (P) .

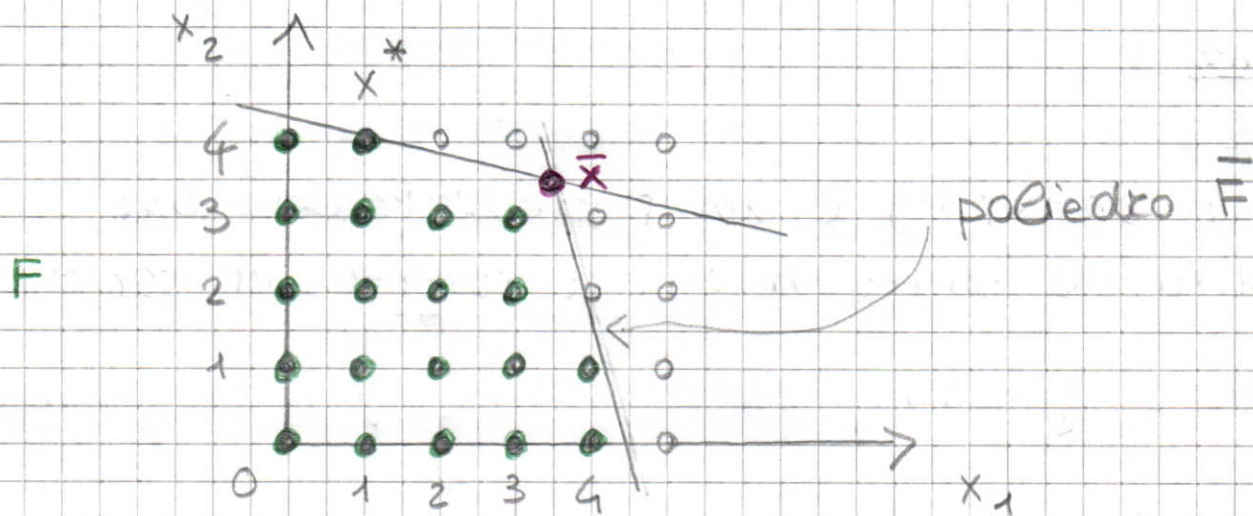
Ovvero, in alcuni casi, il rilassamento continuo permette di risolvere (P) .

In generale, se \bar{x} è una soluzione ottima di (Re) , né la soluzione in F ottenibile arrotondando \bar{x} , né la soluzione in F più vicina a \bar{x} (secondo la norma euclidea) sono soluzioni ottime di (P) .

esempio

$$\begin{aligned}(P) \quad & \max x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Consideriamo F e \bar{F} .



La soluzione ottima di (P) è $x^* = (1, 4)$

$$z(P) = 13$$

La soluzione ottima di (RE) è $\bar{x} = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$

$$z(Re) = 14$$

Arrotondando per difetto \bar{x}_1 e \bar{x}_2 si ha $(3, 3)$, che è anche la più vicina a \bar{x} secondo la norma euclidea: $(3, 3)$ non è ottima per (P) ($z((3, 3)) = 12$).

Sic:

$\text{conv}(F)$ involucro convesso di F

Perché $F \subseteq \text{conv}(F) \subseteq \bar{F}$:

$$(Re) \quad \max_{x \in \bar{F}} c^T x \geq \max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x \geq \max_{x \in F} c^T x \quad (P)$$



rilassamento di P:
rilassamento convessificato

Teorema :

- 1) Se A e b sono a componenti razionali, allora $\text{conv}(F)$ è un poliedro (razionale, cioè definito da disuguaglianze a coefficienti razionali).
- 2) Se F è finito, allora $\text{conv}(F)$ è un poliedro.

Dim

1) no dim

2) ovvio \square

Inoltre, se valgono le ipotesi del teorema precedente :

Corollario :

1) $\max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x$
è un problema di PL

2) $z(P) = \max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x$

Dim :

2) Sia $z^* = \max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x$

Si possono distinguere tre casi.

- Se (P) è vuoto, ovvero $z(P) = -\infty$, allora anche $z^* = -\infty$ in quanto $\text{conv}(F) = \emptyset$.

- Se $z^* = +\infty$, allora esiste in $\text{conv}(F)$ una direzione di recessione $d \in \mathbb{Z}^n$ tale che $c^T d > 0$.
Scelto un qualunque $x \in F$, si ha che $x + h d \in F$ per ogni $h \in \mathbb{Z}$, $h > 0$, in quanto $x + h d \in \mathbb{Z}^n$ e $x + h d \in \text{conv}(F)$. Quindi anche $z(P) = +\infty$.
- Se z^* è finito, allora $z^* = z(P)$ in quanto l'insieme dei vertici di $\text{conv}(F)$ è un sottoinsieme di F . \square

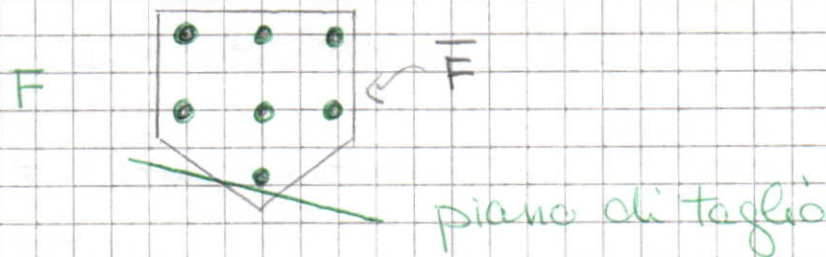
Punto critico: In generale è difficile caratterizzare $\text{conv}(F)$, e quindi risolvere il problema di PL $\max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x$.

Approcci risolutivi (tra gli altri):

- 1) per classi specifiche di problemi PL I, cercare di individuare disuguaglianze che caratterizzano $\text{conv}(F)$
- 2) costruire approssimazioni successive di $\text{conv}(F)$, individuando poliedri e' uno

contenuto nell'altro, a partire da \bar{F} :

algoritmo dei piani di taglio



3) esplorare direttamente F in modo efficiente (non esaustivo):

algoritmo di Branch and Bound

Caso speciale : A è totalmente unimodulare, ovvero il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0, 1 oppure -1.

Teorema : Se A ^è ~~è~~ b ~~sono~~ a componenti intere e A è totalmente unimodulare, allora le soluzioni di base di $\bar{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ sono intere.

Dim : immediato. \square

In caso di ottimo finito,

Corollario : Almeno una soluzione ottima di (RC) è intera, e quindi $z(RC) = z(P)$.

Proprietà : La matrice di incidenza nodi - archi di un grafo orientato è totalmente unimodulare.

Dimostrazioni di ottimalità

Mario Jara Sautella

"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 4, 5, 6)

$$(P) \quad z(P) = \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n$$

Data una soluzione ammissibile \bar{x} , come verificare se \bar{x} è ottimo:

1) $c^T \bar{x} = \underline{z}$ lower bound di $z(P)$

2) individuando $\bar{z} \geq z(P)$ upper bound di $z(P)$

e mostrando che $\underline{z} = \bar{z}$, ovvero

$$\underline{z} = z(P) = \bar{z}$$

OSS: se $\underline{z} \neq \bar{z}$, $\bar{z} - \underline{z}$ fornisce un

gap (di ottimalità) che permette di valutare la bontà di \bar{x}

Come determinare lower bound (per problemi di massimizzazione) : algoritmi euristici

- Ad hoc per lo specifico problema di ottimizzazione da risolvere.

Alcuni esempi

1) Algoritmo greedy CUD per il problema dello zaino binario

$$\max \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$$

Schema algoritmico:

- 1) si ordinano gli oggetti in base a un dato criterio: $1, 2, \dots, n$;
- 2) sia S il sottoinsieme degli oggetti selezionati (inizialmente $S = \emptyset$);
- 3) si considerano gli oggetti in base all'ordine scelto e, per ogni oggetto h esaminato:

$$3.1) \text{ se } a_h \leq b - \sum_{i \in S} a_i$$

capacità residua dello zaino

allora si inserisce h nello zaino: $(x_h = 1)$
 $S = S \cup \{h\}$

$$3.2) \text{ se } a_h > b - \sum_{i \in S} a_i,$$

allora si scarta l'oggetto h ($x_h = 0$).

Possibili ordinamenti:

- 1) per pesi non decrescenti: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$
- 2) per costi non crescenti: $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$
- 3) per costi unitari decrescenti (non crescenti):

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

Algoritmo CUD

esempio (algoritmo CUD)

$$\max 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

ordine CUD: 5 3 4 1 6 2

$$\frac{c_i}{a_i} : \quad 4 \quad 2 \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{5} \quad 1 \quad \frac{2}{3}$$

soluzione

capacità residue

$$x_5 = 1$$

$$7$$

$$x_3 = 1$$

$$5$$

soluzione

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$x_6 = 1$$

$$x_2 = 0$$

capacità residue

$$2$$

$$2$$

$$1$$

$$1$$

soluzione individuata: $\bar{x} = (0, 0, 1, 1, 1, 1)$ $c^T \bar{x} = 14$

OSS: \bar{x} non è ottimo: $\tilde{x} = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$

$$c^T \tilde{x} = 15$$

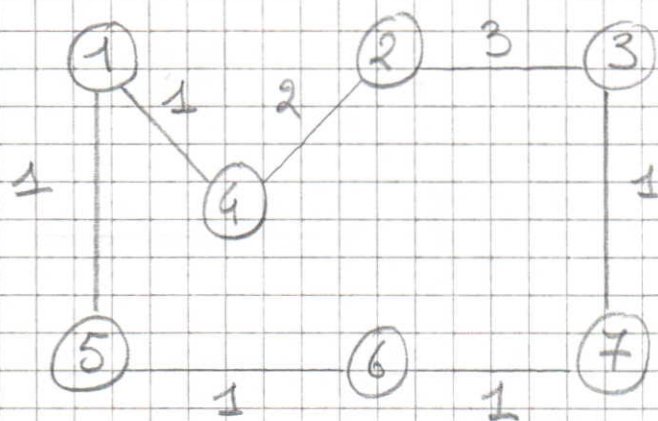
2) Algoritmo greedy per il problema del commesso viaggiatore (TSP)

$G = (N, A)$ grafo non orientato completo

$c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ $\forall (i, j) \in A$ costo di (i, j)

TSP: individua un ciclo Hamiltoniano di costo minimo.

esempio



costo: 10

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \text{ appartiene al ciclo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall (i, j) \in A$$

Un modello PLI:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{i \in N \setminus \emptyset} \sum_{j \in \emptyset} x_{ij} \geq 1 \quad \forall \emptyset \subset N, \emptyset \neq \emptyset$$

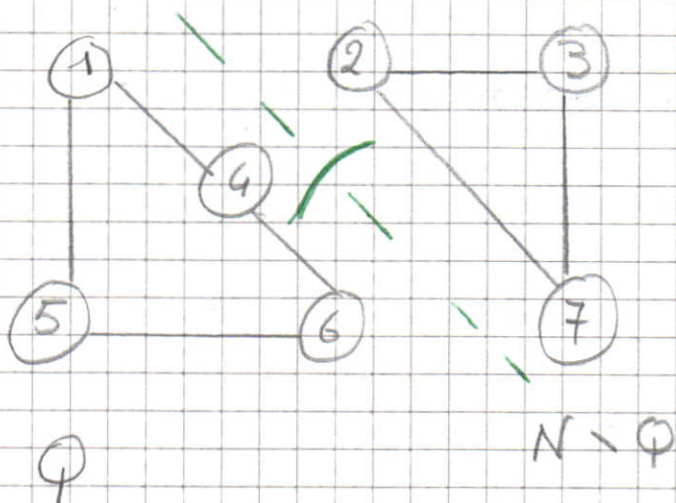
< vincoli di connessione >

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A$$

dove $S(i) = \{ (i,j) \in A \}$ stella di i

OSS: i vincoli $\sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} = 2$ non garantiscono

l'ammissibilità:



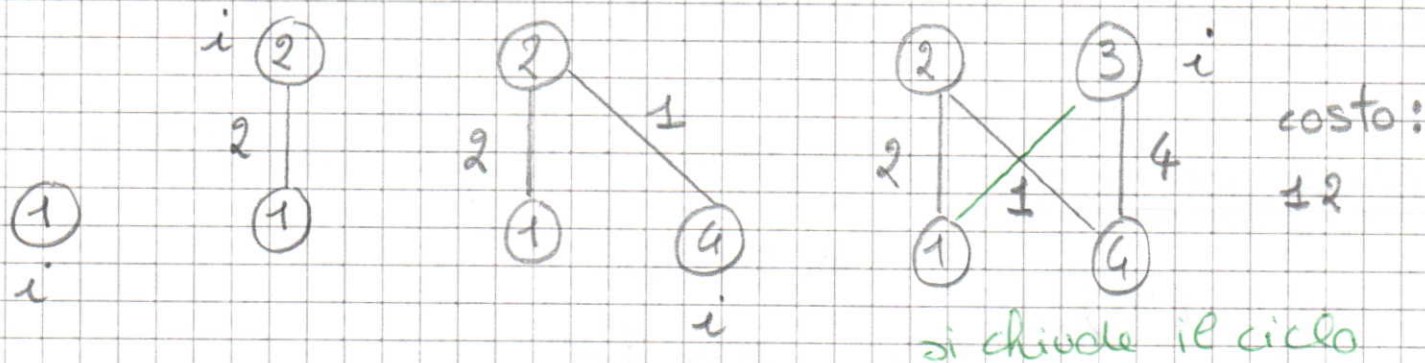
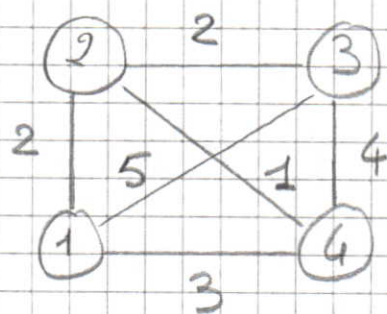
$(N \setminus \emptyset, \emptyset)$: taglio

I vincoli di connessione impongono che ogni taglio sia attraversato da almeno un arco selezionato

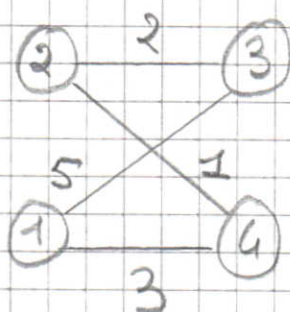
Algoritmo euristico del "vicino più vicino" (nearest neighbour)

- si parte da un nodo qualsiasi, ad esempio il nodo 1 (nodo corrente)
- ad ogni iterazione si esamina il nodo corrente i ; se tutti i nodi sono stati visitati, STOP; altrimenti si considerano gli archi $(i, j) \in EA$ con j non visitato, e si visita l'arco di costo minimo, sia (i, h) ; h diventa il nuovo nodo corrente ($i = h$).

esempio



OSS: non è una soluzione ottima:



costo: 11

Come determinare upper bound:

rilassamenti

Dato:

$$(P) \quad z(P) = \max_{x \in F} c(x)$$

allora

$$(\bar{P}) \quad z(\bar{P}) = \max_{x \in \bar{F}} \bar{c}(x)$$

\bar{P} è un rilassamento di (P) se:

$$1) \quad F \subseteq \bar{F}$$

$$2) \quad \bar{c}(x) \geq c(x) \quad \forall x \in F$$

Proprietà $z(\bar{P}) \geq z(P).$

Consideriamo:

$$(P) \quad \begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax \leq b \\ &x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Alcuni rilassamenti

① Rilassamento continuo

$$(RE) \quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

Risoluzione di (RE) per il problema dello zaino binario: variante dell'algoritmo CUD

esempio (cont.)

$$\max \quad 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 8$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$\text{in (RE): } 0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

ordine CUD: 5 3 4 1 6 2

soluzione ottima
di (RE) (no dim)

capacità residue

$$x_5 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1$$

} come in CUD

2

$$x_1 = \frac{b - a_5 - a_3 - a_4}{a_1} = \frac{2}{5}$$

STOP

$$x_6 = 0$$

$$x_2 = 0$$

soluzione ottima: $x^* = (\frac{2}{5}, 0, 1, 1, 1, 0)$
di (RE)

$$c^T x^* = 15 + \frac{4}{5} \geq z(P)$$

Si ottiene:

$$\underline{z} = 14 \leq z(P) \leq 15 + \frac{4}{5} = \bar{z}$$

↑
esistente
greedy CUD

↑
valore ottimo di (RE)

OSS: $\lfloor 15 + \frac{4}{5} \rfloor = 15$ è un upper bound
più accurato

quindi $14 \leq z(P) \leq 15$

② Rilassamento per eliminazione di vincoli

$$(P) \quad \max c^T x$$

$$Ax \leq b$$

"complicanti"

$$Ex \leq d$$

"facili"

$$x \in \mathbb{Z}^n$$

$$(RE) \quad \max c^T x$$

$$Ex \leq d$$

$$x \in \mathbb{Z}^n$$

è un rilassamento per eliminazione di vincoli
di (P)

Rilassamento per eliminazione di vincoli per il problema del cammino minimo vincolato (CSP)

$G = (N, A)$ grafo orientato

$x \in N$ nodo di partenza

$t \in N$ nodo di arrivo

$c_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i, j) \in A$ costo di (i, j)

$l_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i, j) \in A$ lunghezza di (i, j)

L soglia

CSP: determinare un cammino orientato di costo minimo da x a t in G , considerando solo i cammini di lunghezza totale minore o uguale a L .

(NP-Hard)

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \text{ appartiene al cammino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall (i, j) \in A$

Un modello PLI:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = & \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ +1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ & \forall i \in N \end{aligned}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} l_{ij} x_{ij} \leq L$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A$$

Rilassamento per eliminazione di vincoli: eliminando

$\sum_{(i,j) \in A} l_{ij} x_{ij} \leq L$ si ha un problema di cammino minimo standard da s a t , di efficiente risoluzione

OSS1: poiché CSP è un problema di minimo, il rilassamento fornisce un lower bound di $z(P)$

OSS2: se il cammino minimo da s a t soddisfa il vincolo di soglia, tale cammino è ottimo per CSP.

Rilassamenti per eliminazione di vincoli per TSP

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$G = (N, A)$$

non

orientato

completo

$$\sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N$$

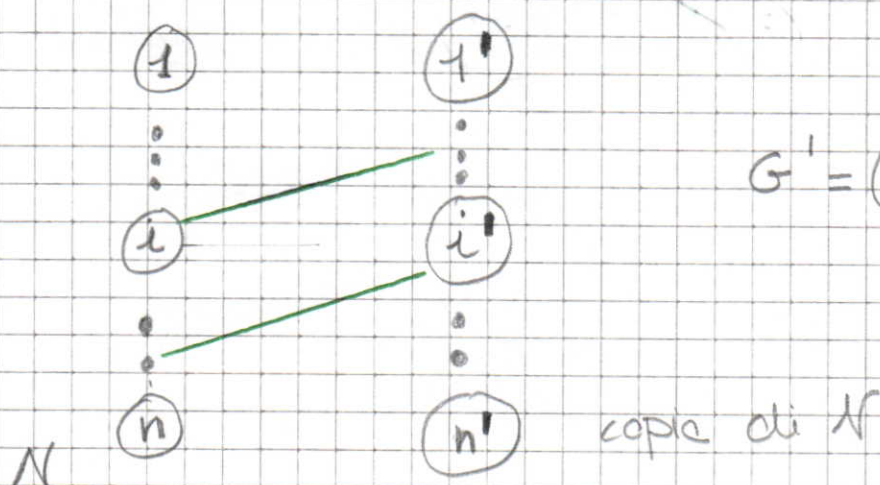
$$\sum_{i \in N \setminus Q} \sum_{j \in Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset N, Q \neq \emptyset$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A$$

Eliminando $\sum_{i \in N \setminus Q} \sum_{j \in Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset N, Q \neq \emptyset$

si ottiene un problema di assegnamento di costo minimo: caso speciale del problema di flusso di costo minimo definito su un grafo bipartito.

Nel caso in esame, il grafo bipartito si ottiene duplicando i nodi in N :



$$G' = (N', A')$$

$$N' = \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_N \cup \underbrace{\{1', 2', \dots, n'\}}_{\text{"copia di N"}}$$

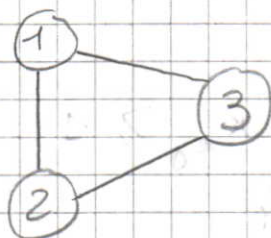
$$A' = \{(i, j') : (i, j) \in S(i) \text{ in } G\}$$

Un assegnamento in G' è un sottoinsieme di n archi tali che in ogni nodo in N' incide esattamente un arco selezionato.

Proprietà : Un assegnamento in G' corrisponde a selezionare in G due archi incidenti in ogni nodo in N , e viceversa.

esempio

G :

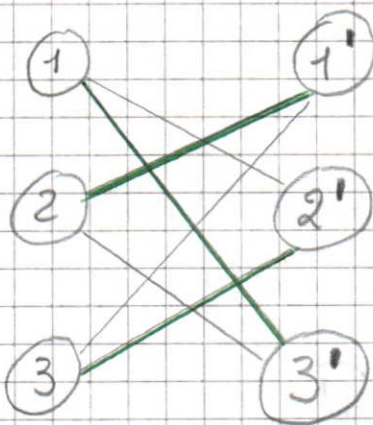


$$S(1) = \{(1,2), (1,3)\}$$

$$S(2) = \{(2,1), (2,3)\}$$

$$S(3) = \{(3,1), (3,2)\}$$

G' :

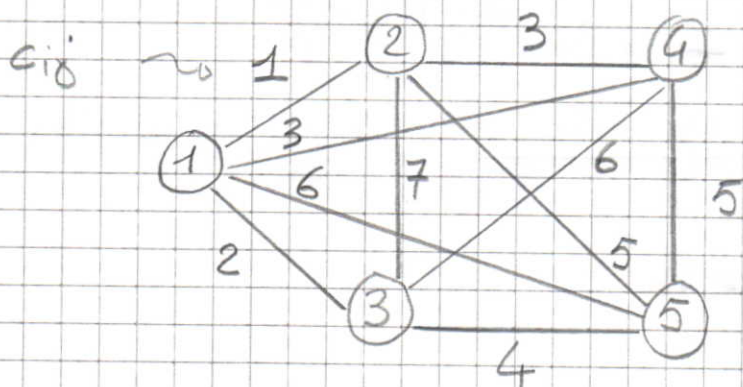


Eliminando $\sum x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N$
 $(i,j) \in S(i)$

si ottiene il problema di individuazione di un albero di copertura di costo minimo (MST) in G : struttura che connette tutti i nodi del grafo a costo minimo.

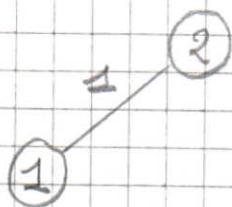
Algoritmo di Kruskal per MST (algoritmo esatto)

esempio

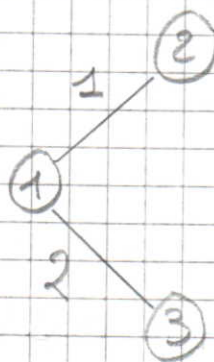


albero di copertura: sottoinsieme di $(n-1)$ archi privo di cicli

it 1)

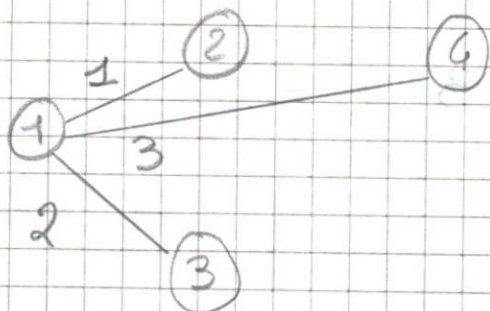


it 2)



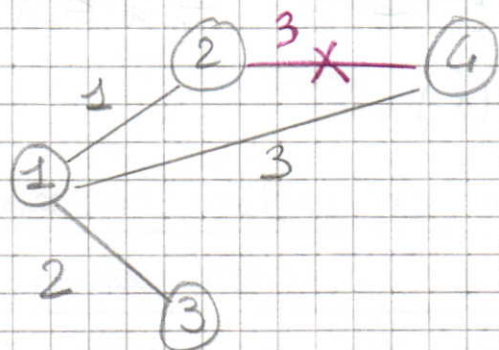
Esame degli archi in ordine di costo non decrescente

it 3)

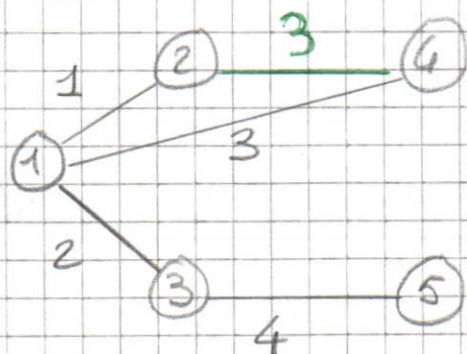


scartato: crea un ciclo

it4)



it5)



STOP: MST

costo: $10 = \underline{z} \leq z(TSP)$

Rafforzamento del lower bound: aggiungendo il vincolo

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = n$$

si ottiene un altro rilassamento, ovvero il problema dell'1-albero di copertura di costo minimo (MST).

Si risolve individuando un albero di copertura di costo minimo (fase 1), e aggiungendo un arco di costo minimo tra quelli non selezionati (fase 2): $(2,4)$ nell'esempio

costo dell'1-albero (MST) : $10 + 3 = \underline{z} > \underline{z}$
 " costo di MST quindi più accurato

Branch and Bound

Marinella Scutella

"Ricerca Operativa", corso di laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento
di Informatica, Università di Pisa: Cap. 7)

$$(P) \quad z(P) = \max_{x \in F} c(x)$$

Idea algoritmica: dividere (P) in sottoproblemi
più piccoli (e più facili da risolvere), risolvere
tali sottoproblemi e utilizzare i risultati
ottenuti per risolvere (P) .

⇓
Approccio "divide et impera"

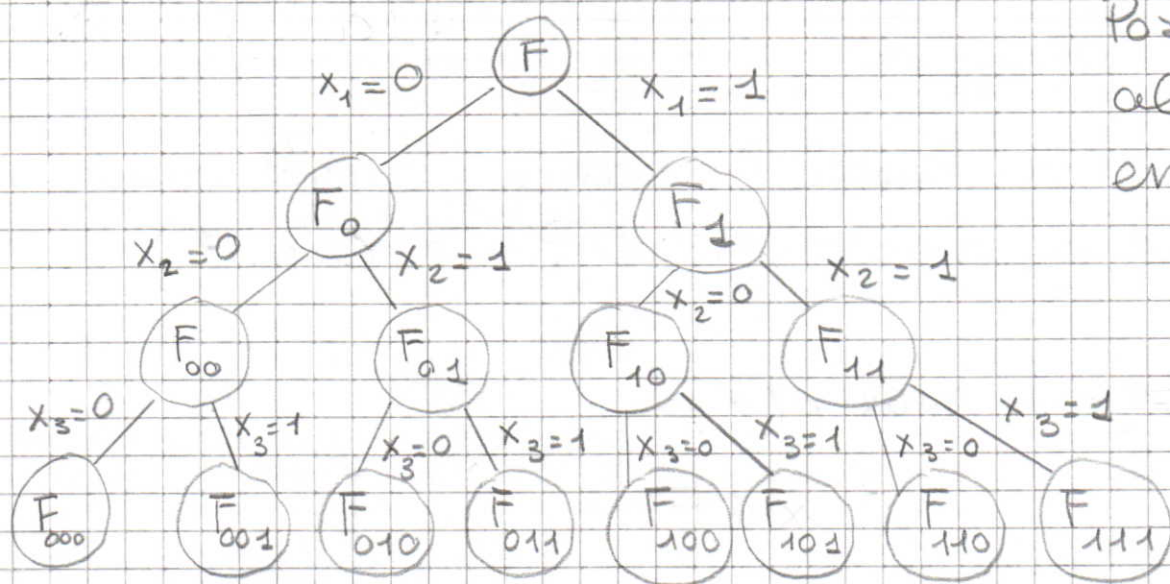
Proposizione: Sia $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_K$ una
decomposizione di F ($F = \bigcup_{i=1}^K F_i$), e sia

$$z^i = \max \{ c(x) : x \in F_i \}, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

$$\text{Si ha } z(P) = \max_{i=1, \dots, K} z^i.$$

Obiettivo: evitare un'enumerazione esaustiva

esempio $F \subseteq \{0,1\}^3$



Possibile
albero di
enumerazione
completo

Come "potare" l'albero di enumerazione?
(pruning)

Come effettuare il pruning:

- 1) utilizzare lower e upper bound relativi ai valori ottimi dei sottoproblemi derivanti dalla decomposizione (z^i) in modo intelligente;
- 2) combinare lower e upper bound relativi a z^i , $i=1, \dots, K$, per derivare lower e upper bound relativi a $z(P)$.

Enumerazione implicita

Proposizione : Sia $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_K$ una decomposizione di F , e sia $z^i = \max \{c(x) : x \in F_i\}$, $i = 1, \dots, K$. Sia inoltre \bar{z}^i un upper bound di z^i , e \underline{z}^i sia un lower bound di z^i , $i = 1, \dots, K$.

Allora :

$$\bar{z} = \max_{i=1, \dots, K} \bar{z}^i$$

e

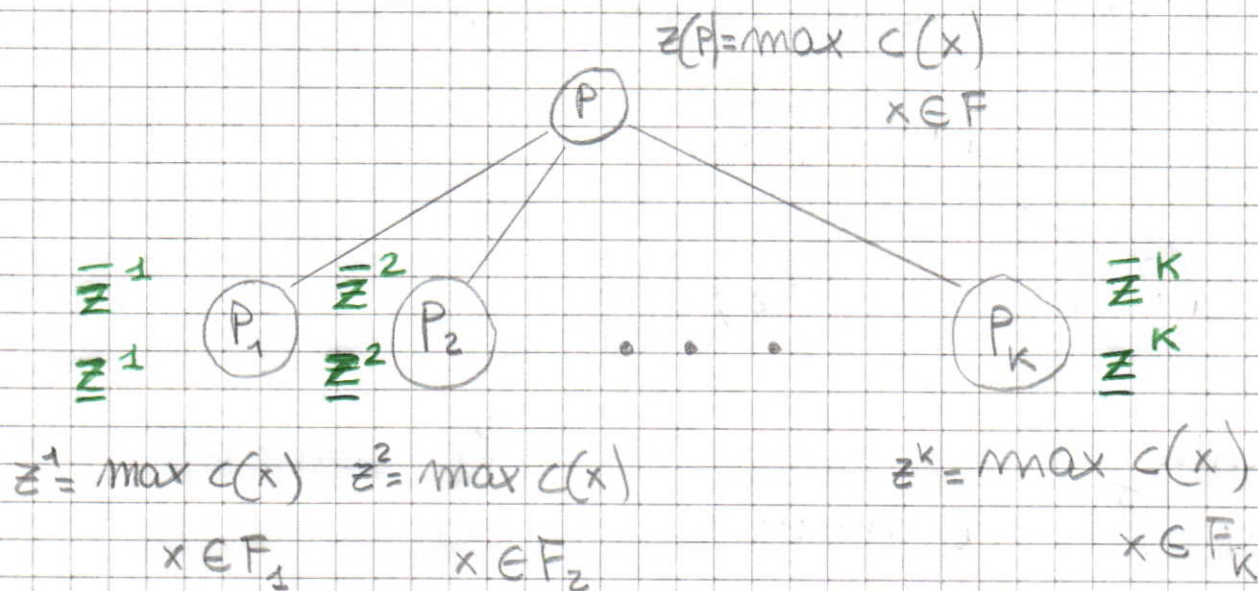
$$\underline{z} = \max_{i=1, \dots, K} \underline{z}^i$$

\bar{z} è un upper bound di $z(P)$

\underline{z} è un lower bound di $z(P)$.

Ovvero : bound relativi ai sottoproblemi

possono essere combinati per ricavare bound relativi a (P)

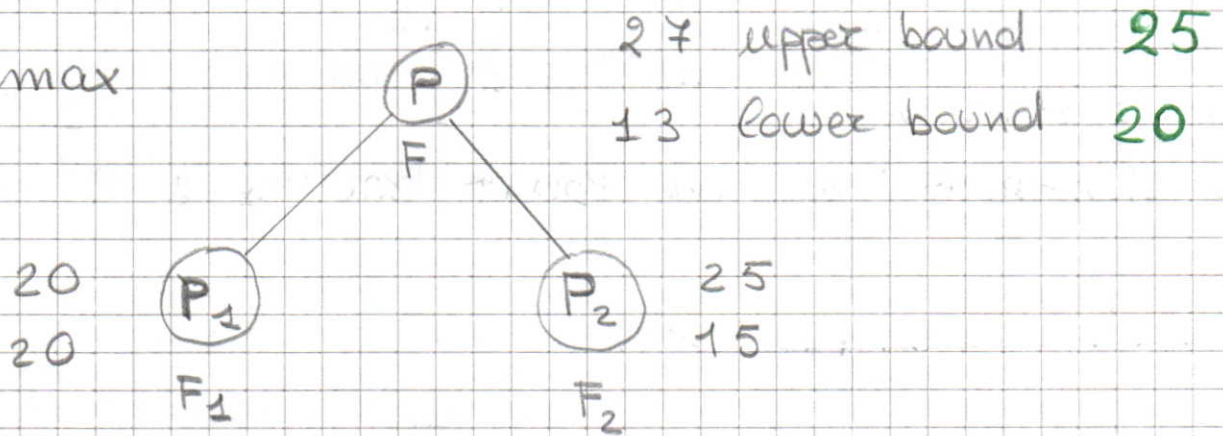


Come utilizzare i bound per evitare un'enumerazione completa

Esempi base

①

max

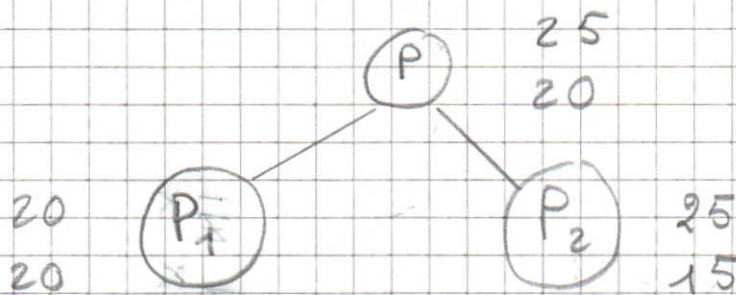


Per la proposizione precedente:

$$\bar{z} = \max \{20, 25\} = 25 \text{ è un upper bound di } z(P)$$

$$\underline{z} = \max \{20, 15\} = 20 \text{ è un lower bound di } z(P)$$

Inoltre: poiché $\underline{z}^1 = \bar{z}^1 = 20$, allora 20 è il valore ottimo di P_1 , e quindi P_1 non deve essere ulteriormente decomposto:

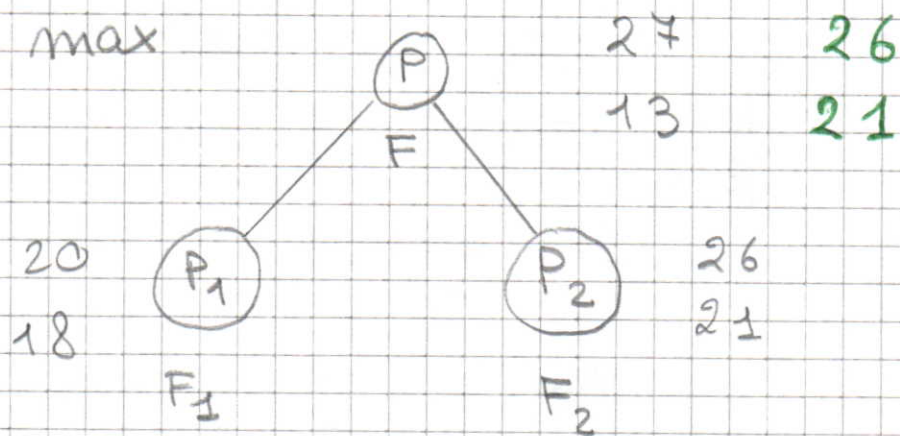


pruning
by
optimality

Le soluzioni di P_1 vengono enumerate "implicitamente"

2

max

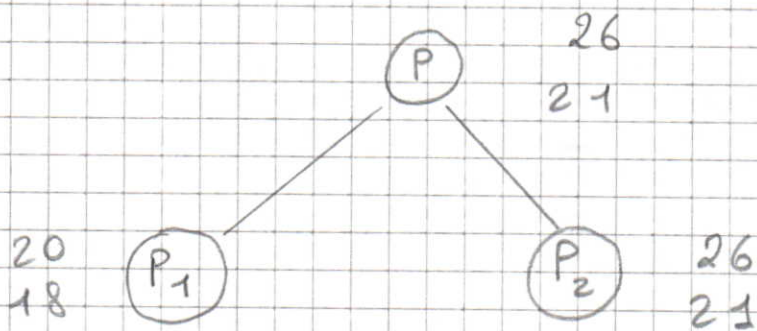


Per la proposizione precedente:

$$\bar{z} = \max \{20, 26\} = 26 \text{ è un upper bound di } z(P)$$

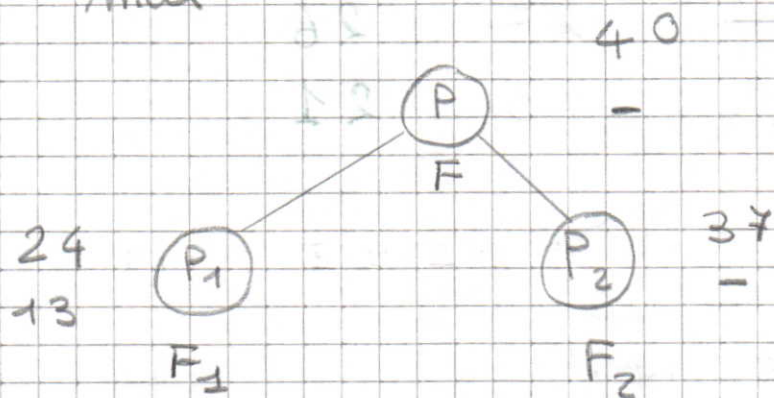
$$\underline{z} = \max \{18, 21\} = 21 \text{ è un lower bound di } z(P)$$

Inoltre: poiché $z(P) \geq 21$ e $\bar{z} = 20$,
è inutile risolvere P_1 :



pruning
by
bound

③ max

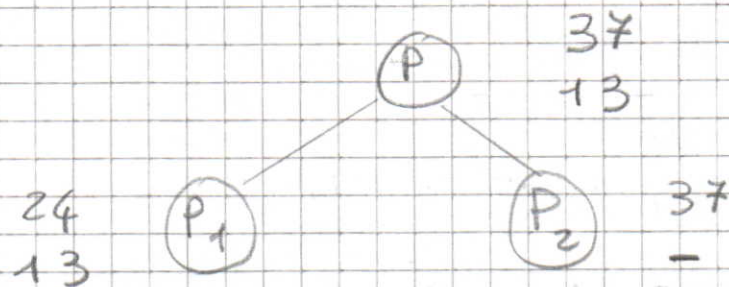


Per la proposizione precedente:

$$\bar{z} = \max \{24, 37\} = 37 \text{ è un upper bound di } z(P)$$

$$\underline{z} = \max \{13, -\infty\} = 13 \text{ è un lower bound di } z(P)$$

In questo scenario non si possono trarre altre conclusioni, e occorre decomporre sia P_1 che P_2 :



Le zeppe di pruning consentono quindi di enumerare alcune soluzioni implicitamente, evitando un'enumerazione completa,

Regole di pruning:

1) pruning by optimality:

si applica quando un sottoproblema

$$(P_i) \quad z^i = \max_{x \in F_i} c(x)$$

è stato risolto, ovvero $\underline{z}^i = \bar{z}^i (= z^i)$

2) pruning by bound:

si applica quando, valutando un sottoproblema, si ha

$$\bar{z}^i \leq \underline{z} \quad \text{lower bound corrente di } z(P)$$

3) pruning by infeasibility:

si applica quando si verifica

$$F_i = \emptyset \quad \text{per un sottoproblema } (P_i)$$

A partire dalle idee presentate è possibile disegnare uno schema algoritmico di enumerazione implicita, Branch and Bound.

Schema algoritmico Branch and Bound

Procedure Branch and Bound (P, z) NB :
 $z = z(P)$
begin

$Q = \{P\}; z = -\infty;$

* Q : insieme nodi attivi (\equiv non potati)
nell'albero

z : costo della migliore soluzione corrente
(incumbent) *

repeat

$(P') = \text{NEXT}(Q); Q = Q - \{P'\};$

$\bar{z} = \text{RILASSAMENTO}(P');$

if $\bar{z} > z$ then

begin

$\underline{z} = \text{EURISTICA}(P');$

if $\underline{z} > z$ then $z = \underline{z};$

if $\bar{z} > \underline{z}$ then

$Q = Q \cup \text{BRANCH}(P')$

end

until $Q = \emptyset$

Branch and Bound: componenti chiave

- ① RILASSAMENTO: restituisce un upper bound (se (P) in forma max) mediante un rilassamento
- ② EURISTICA: restituisce un lower bound (se (P) in forma max) mediante un'euristica caratteristiche desiderate
 - (lower e upper) bound accurati
 - procedure efficienti
 - RILASSAMENTO e EURISTICA possibilmente interconnessi
 - uso di tecniche di riottimizzazione, se possibile
- ③ NEXT: determina l'ordine di valutazione dei sottoproblemi, e quindi la strategia di visita dell'albero di enumerazione.

Visite in ordine:
topologico

breadth-first o FIFO
(Q è una coda)

depth-first o LIFO
(Q è uno stack)

:

Visite basate su : best-first
informazione (estrae da Φ il nodo più "promettente")

④ BRANCH: determina come decomporre F

- proprietà necessarie:

completezza : $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$

- proprietà addizionali:

partizionamento : $F_i \cap F_j = \emptyset \quad i \neq j$

Per ogni soluzione esaminata, nell'albero di enumerazione esiste un unico cammino dalla radice al nodo corrispondente

bilanciamento : $|F_i| \simeq |F_j| \quad i \neq j$

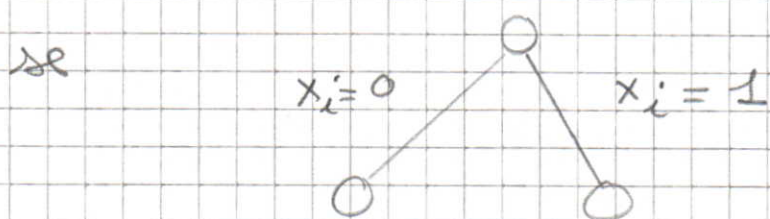
Per generare un albero di enumerazione bilanciato; rilevante se si adotta una strategia di visite di tipo depth-first.

pochi figli per nodo : k limitato

Per limitare il consumo di memoria,

compatibilità ~~tra~~ RILASSAMENTO e EURISTICA:
con

esempio : zaino binario



i due sottoproblemi generati sono a loro volta problemi di zaino binario (ridotti); di conseguenza le tecniche di bounding utilizzate per il nodo padre possono essere utilizzate anche per i nodi figli.

Algoritmo Branch and Bound per il problema di zaino binario

$$(P) \max 8x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 12$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 5$$

RILASSAMENTO : rilassamento continuo

EURISTICA : euristica greedy CUD

BRANCH : Binario, sull'unica variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo.

NEXT: breadth-first, dando priorità al sottoproblema ottenuto fissando la variabile frazionaria a 1

Notazione (in ogni nodo)

x^* : soluzione ottimo del rilassamento continuo

\bar{x} : soluzione dell'euristica CUD

\bar{z} : upper bound al nodo ($\bar{z} = c^T x^*$)

\underline{z} : lower bound al nodo ($\underline{z} = c^T \bar{x}$)

Inoltre: z : costo della miglior soluzione corrente

Ordine: 1, 2, 3, 4, 5
CUD

in quanto $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_3}{a_3} \geq \frac{c_4}{a_4} \geq \frac{c_5}{a_5}$

Inizializzazione: $Q = \{(P)\}$; $z = -\infty$

(P) : nodo radice

$$x^* = (1, 1, 1, \frac{1}{3}, 0) \quad \bar{z} = 19$$

$$\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0) \quad \underline{z} = 18$$

Poiché $\underline{z} > z (= -\infty)$, allora $z = 18$

Poiché $\underline{z} < \bar{z}$, BRANCH su x_4

$$Q = \{(P_1), (P_2)\}$$

$$(P_1): x_4 = 1$$

$$x^* = (1, 1, \frac{1}{2}, 1, 0) \quad \bar{z} = 18 + \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = (1, 1, 0, 1, 1) \quad z = 17$$

Poiché $z < \bar{z}$, BRANCH su x_3

$$Q = \{(P_2), (P_3), (P_4)\}$$

$$(P_2): x_4 = 0$$

$$x^* = (1, 1, 1, 0, \frac{1}{2}) \quad \bar{z} = 18 + \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0) \quad z = 18$$

Poiché $z < \bar{z}$, BRANCH su x_5

$$Q = \{(P_3), (P_4), (P_5), (P_6)\}$$

$$(P_3): x_4 = 1, x_3 = 1$$

$$x^* = (1, \frac{1}{3}, 1, 1, 0) \quad \bar{z} = 17 + \frac{2}{3}$$

Poiché $\bar{z} \leq z = 18$, pruning by bound

$$Q = \{(P_4), (P_5), (P_6)\}$$

$$(P_4): x_4 = 1, x_3 = 0$$

$$x^* = (1, 1, 0, 1, 1) \quad \bar{z} = 17 = z$$

pruning by optimality (e anche per bound)

$$Q = \{(P_5), (P_6)\}$$

$$(P_5): x_4 = 0, x_5 = 1$$

$$x^* = (1, 1, \frac{3}{4}, 0, 1) \quad \bar{z} = 17 + \frac{3}{4}$$

Poiché $\bar{z} \leq z = 18$, pruning by bound

$$\Phi = \{(P_6)\}$$

$$(P_6): x_4 = 0, x_5 = 0$$

$$x^* = (1, 1, 1, 0, 0) \quad \bar{z} = 18 = z$$

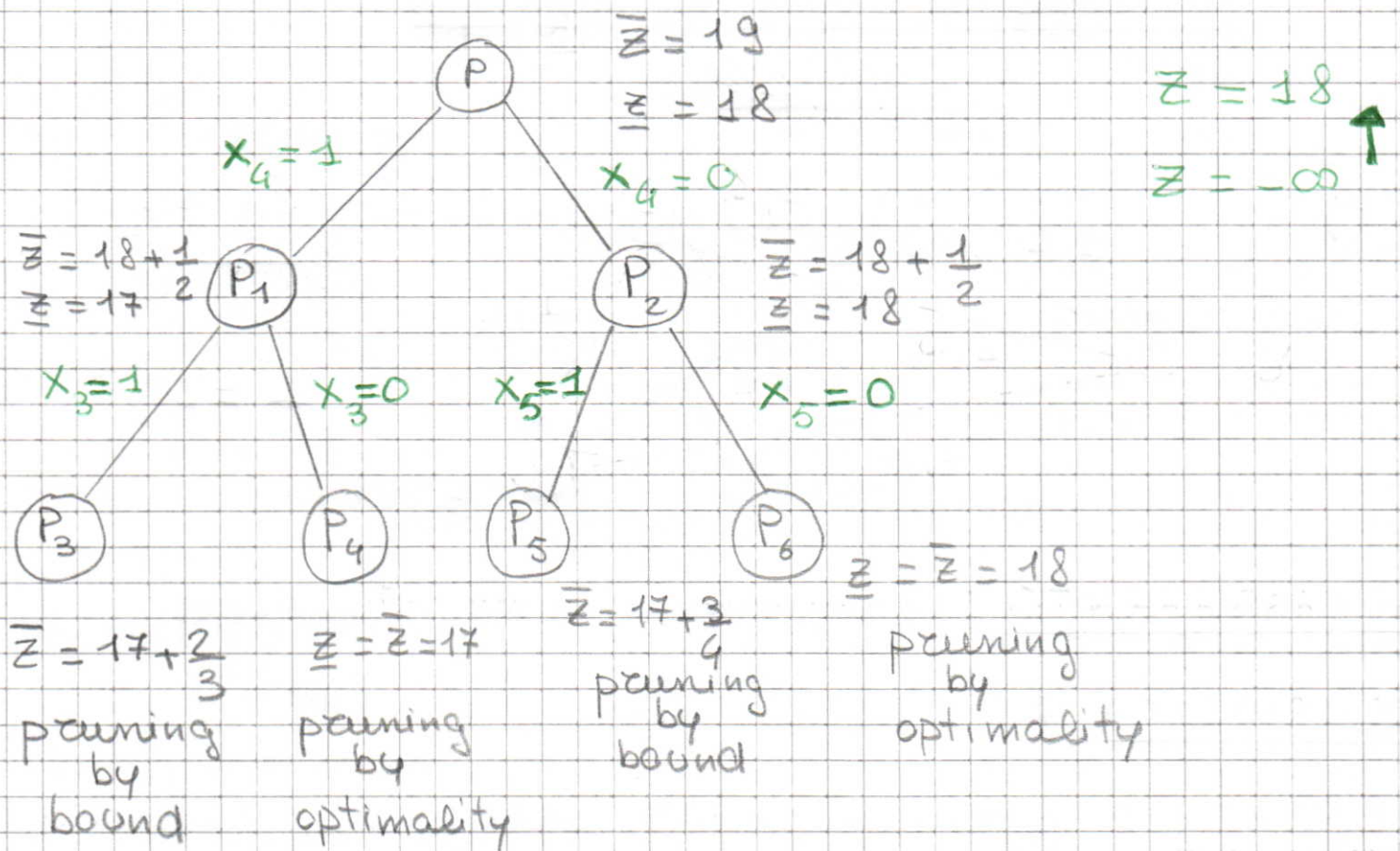
pruning by optimality (e bound)

$\Phi = \emptyset$ STOP : $x = (1, 1, 1, 0, 0)$, di costo $z = 18$, \bar{z} è una soluzione ottimale

Proprietà:

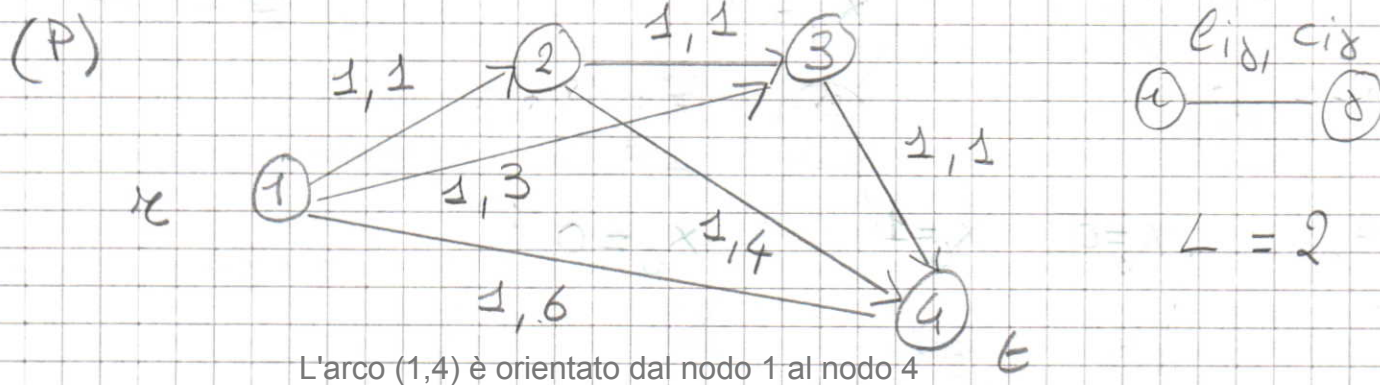
- 1) BRANCH è una regola di partizionamento
- 2) RILASSAMENTO e EURISTICA sono interconnessi (si basano entrambi sull'ordine CUD)
- 3) BRANCH è compatibile con RILASSAMENTO e EURISTICA (ogni sottoproblema è un problema di zaino ridotto)
- 4) La soluzione ottimale del rilassamento continuo è "tagliata" dai due sottoproblemi : \bar{z} è non crescente lungo ogni cammino dell'albero

Albero di enumerazione generato



OSS : Poiché i costi sono interi, per (P_1) e (P_2) si potrebbe considerare l'upper bound $\lfloor 18 + \frac{1}{2} \rfloor = 18$. In tal caso sia (P_1) che (P_2) potrebbero essere chiusi per bound, generando solo i primi due livelli dell'albero di enumerazione.

Algoritmo Branch and Bound per il problema di cammino minimo vincolato



RILASSAMENTO : cammino minimo standard

EURISTICA : —

BRANCH : partizionamento basato sul cammino
minimo standard

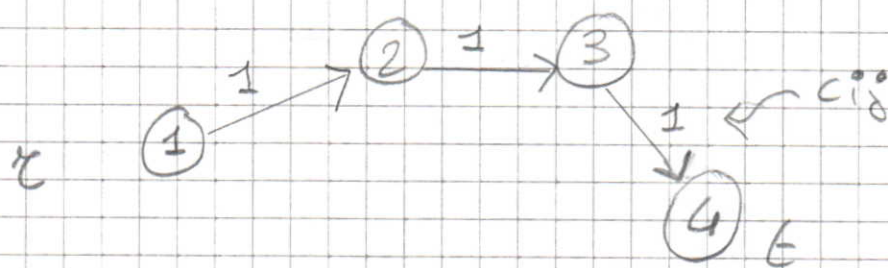
NEXT : breadth-first (FIFO)

Inizializzazione : $\Phi = \{(P)\}$; $z = +\infty$

↑
problema in
versione min

(P) : modo zedice

RILASSAMENTO: cammino minimo da x a t



$P_{x,t}$

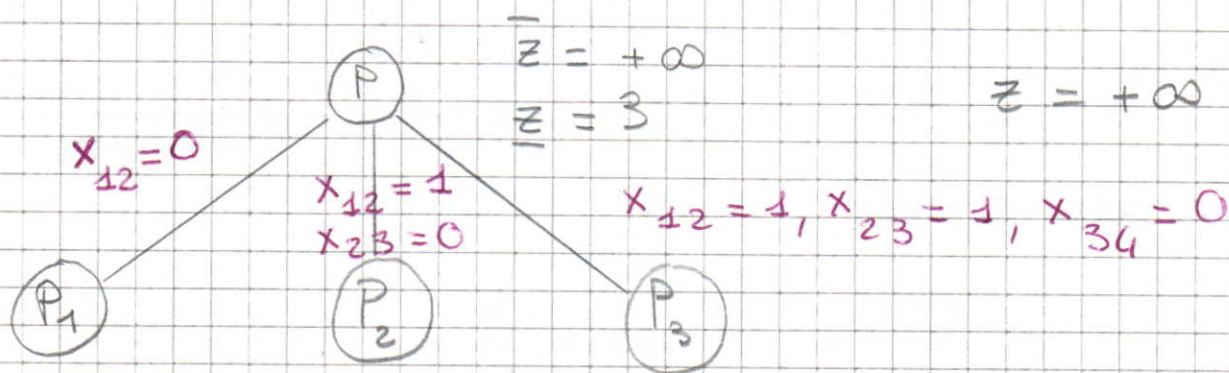
$\underline{z} = 3$: lower bound per $z(P)$

$\bar{z} = +\infty$

Perché $\underline{z} < \bar{z}$, BRANCH

Regole di branching: perché $\sum_{(i,j) \in P_{x,t}} l_{ij} = 3 > L = 2$,

$P_{x,t}$ non è ammissibile per (P) , quindi



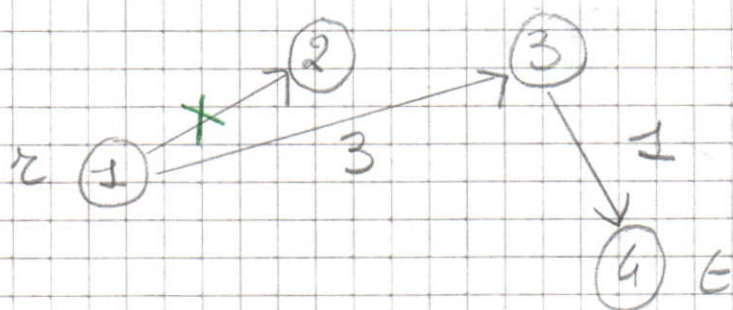
albero di enumerazione corrente

$\mathcal{Q} = \{(P_1), (P_2), (P_3)\}$

(P_1)

(P_1) è un problema di cammino minimo vincolato in un grafo ridotto, ottenuto cancellando $(1,2)$

RILASSAMENTO:



P_{rel}

$$\bar{z} = 4$$

Perché $\sum_{(i,j) \in P_{rel}} l_{ij} = 2 = L$, P_{rel} è ammissibile

per (P) : $\bar{z} = 4$

Perché $\bar{z} = 4 < z (= +\infty)$, allora $z = 4$

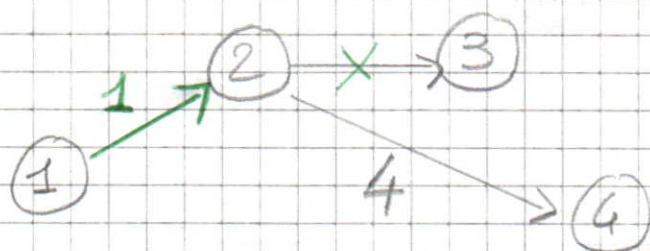
Perché $\bar{z} = \bar{z}$, pruning by optimality
(e per bound)

$$Q = \{(P_2), (P_3)\}$$

(P_2)

(P_2) è un problema di cammino minimo vincolato in un grafo ottenuto cancellando $(2,3)$, con l'ulteriore vincolo che $(1,2)$ sia il primo arco del cammino

RILASSAMENTO: trovare un cammino minimo da 1 a 4 equivale a trovare un cammino minimo da 2 a 4 nel grafo ridotto



P_{rel}

$$\bar{z} = 1 + 4 = 5$$

(Poiché $\sum_{(i,j) \in P_{rel}} l_{ij} = 2 = L$, P_{rel} è ammissibile:

(poiché $\bar{z} = 5 > z = 4$, z non migliore)

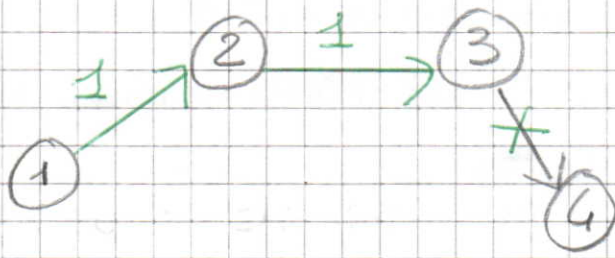
Poiché $\bar{z} > z$, pruning by bound

$$Q = \{ (P_3) \}$$

(P_3)

(P_3) è un problema di cammino minimo vincolato in un grafo ottenuto cancellando $(3,4)$ con l'ulteriore vincolo che il sottocammino iniziale sia $(1, 2, 3)$

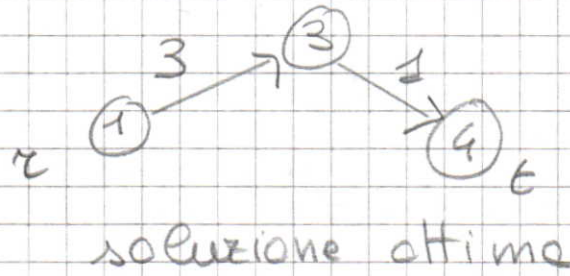
RILASSAMENTO: trova un cammino minimo da 3 a 4 nel grafo ridotto



non esiste nessun cammino da 3 a 4:

pruning by infeasibility

$Q = \emptyset$, STOP:



$z = 4$

Proprietà:

- 1) BRANCH è una regola di partizionamento
- 2) BRANCH è compatibile con RILASSAMENTO (ogni sottoproblema è un problema di cammino minimo vincolato)
- 3) La soluzione ottima del rilassamento è "tagliata" dai sottoproblemi: \bar{z} è non decrescente lungo ogni cammino dell'albero

RILASSAMENTO : 1 - albero di copertura di costo minimo

EURISTICA : —

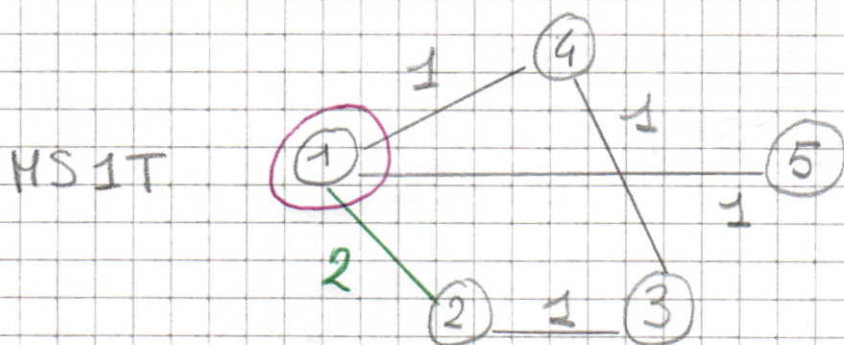
BRANCH : vedi nel seguito

NEXT : breadth-first (FIFO)

Inizializzazione : $Q = \{P\}$; $z = +\infty$

(P)

RILASSAMENTO :

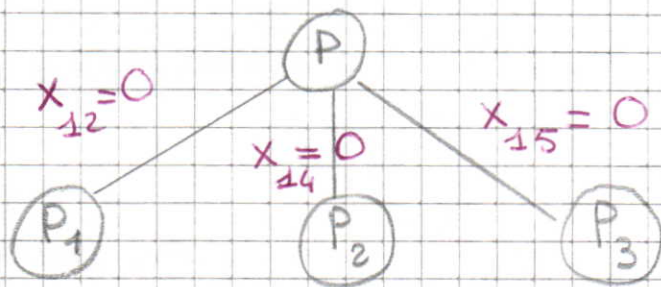


$$\underline{z} = 6$$

$$\bar{z} = +\infty$$

Poiché $\underline{z} < \bar{z}$, BRANCH

Regole di branching: poiché in almeno un nodo (1) incidono più di 2 archi, decompongo escludendo, a turno, uno di tali archi



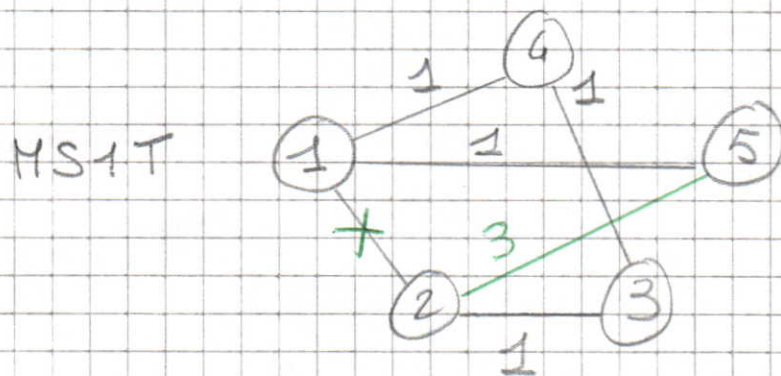
$$Q = \{(P_1), (P_2), (P_3)\}$$

OSS : non è un partizionamento di F

$$(P_1)$$

(P_1) è un TSP su un grafo ridotto, ottenuto rimuovendo $(1, 2)$

RILASSAMENTO:



$$\underline{z} = 7$$

Perché è un ciclo Hamiltoniano : $\bar{z} = 7$

Perché $\bar{z} = 7 < z (= +\infty)$: $z = 7$

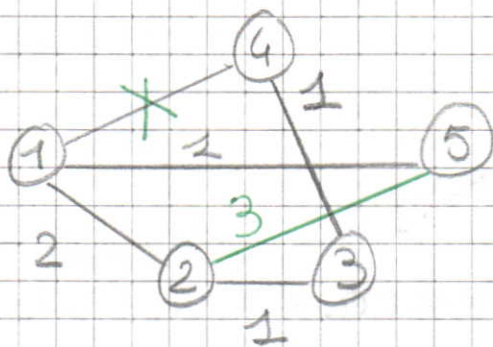
Perché $\underline{z} = \bar{z} (= 7)$, pruning by optimality

$$Q = \{(P_2), (P_3)\}$$

(P_2)

RILASSAMENTO:

HS1T



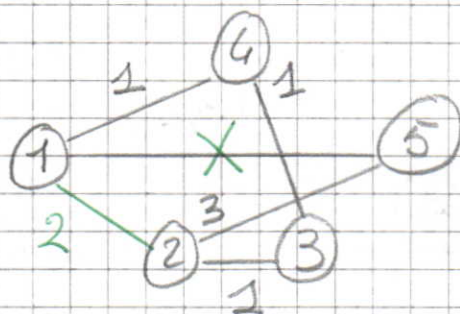
$$\underline{z} = 8$$

Perché $\underline{z} = 8 > z = 7$, pruning by bound

$$Q = \emptyset(P_3)$$

(P_3)

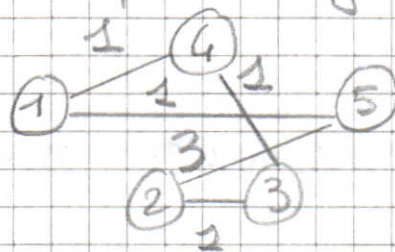
HS1T



$$\underline{z} = 8$$

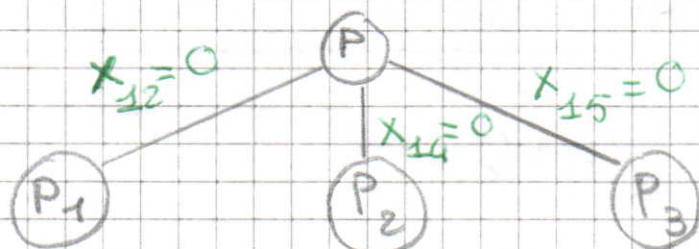
Perché $\underline{z} = 8 > z = 7$, pruning by bound

$Q = \emptyset$, STOP:



soluzione ottimale
 $z = 7$

Albero di enumerazione generato



$z = +\infty$
 $z = 7$



$$\underline{z} = \bar{z} = 7$$

pruning by optimality

$$\underline{z} = 8$$

pruning by bound

$$\underline{z} = 8$$

pruning by bound

Algoritmo dei piani di taglio

Marco Maria Santella

"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica

Università di Pisa

(Rif: Peppalardo, Passacantando, "Ricerca Operativa",
Seconda Edizione: 11.3)

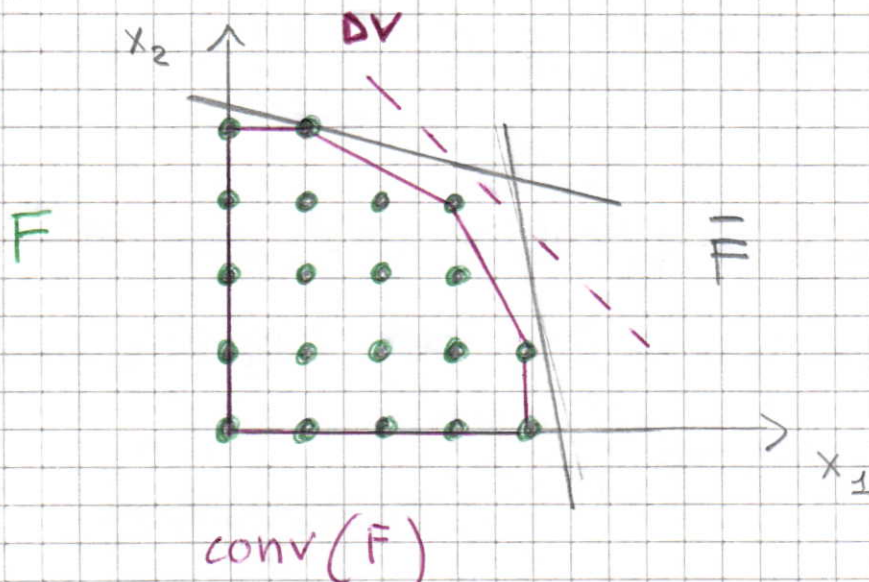
$$(P) \quad \begin{aligned} \max & \quad c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$\bar{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ poliedro definito dai
vincoli lineari di (P)

$F = \bar{F} \cap \mathbb{Z}^n$ regione ammissibile di (P)

$\text{conv}(F)$ involucro convesso di F (poliedro
sotto ipotesi molto ragionevoli)

esempio (cont.)



Poiché

$$z(P) = \max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x$$

L'idea è approssimare $\text{conv}(F)$ in modo più accurato rispetto all'approssimazione fornita da \bar{F}

Definizione La disuguaglianza $\pi^T x \leq \pi_0$ è detta disuguaglianza valida (DV) per F se

$$\pi^T x \leq \pi_0 \quad \forall x \in F$$

Teorema Se $\pi^T x \leq \pi_0$ è una DV per F , allora è una DV anche per $\text{conv}(F)$.

Dim

Se $x \in \text{conv}(F)$, allora $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x^i$, con $x^i \in F$

per $i \in I$, $\lambda_i \geq 0$ per $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

$$\text{Quindi } \pi^T x = \sum_{i \in I} \lambda_i (\pi^T x^i) \leq \pi_0 \sum_{i \in I} \lambda_i = \pi_0 \quad \square$$

Idea algoritmica: aggiungere DV all'insieme di vincoli che definiscono \bar{F} , per approssimare $\text{conv}(F)$ in modo sempre più accurato.

Metodi generali per generare DV

Osservazioni base: 1) ogni vincolo lineare in $Ax \leq b$ è una DV per F (e anche per \bar{F})

2) $\sum_{i=1}^n u^T A^i x_i \leq u^T b$ è una DV per F (e anche \bar{F}),

dove A^1, A^2, \dots, A^n sono le colonne di A ($m \times n$)

$u \in \mathbb{R}_+^m$ è un vettore di moltiplicatori non negativi (uno per ogni riga di A)

Assumendo $x \geq 0$ (quindi $Ax \leq b$ include i vincoli lineari $-x \leq 0$):

Tecnica di arrotondamento di Chvátal-Gomory:

1) genera $\sum_{i=1}^n u^T A^i x_i \leq u^T b$ per opportuni

moltiplicatori $u \in \mathbb{R}_+^m$: DV per F
(e per \bar{F})

2) genera $\sum_{i=1}^n \lfloor u^T A^i \rfloor^T x_i \leq u^T b$: DV per F

(e anche per \bar{F}) in quanto $x \geq 0$

3) genera $\sum_{i=1}^n \lfloor u^T A^i \rfloor^T x_i \leq \lfloor u^T b \rfloor$: DV per F

in quanto $x \in \mathbb{Z}^n$.

Teorema: Ogni DV per F può essere ottenuta applicando la Tecnica di Chvátal - Gomory un numero finito di volte.

Mo dim

esempio

$$\begin{array}{rcl}
 & 7x_1 - 2x_2 & \leq 14 \\
 & & x_2 \leq 3 \\
 Ax \leq b: & 2x_1 - 2x_2 & \leq 3 \\
 x_1, x_2 \geq 0 & \left\{ \begin{array}{l} -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

11

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{37}{63}$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$1) \quad 2x_1 + x_2 \left(\frac{37}{63} - \frac{4}{7} \right) \leq 4 + 3 \cdot \frac{37}{63} - 21$$

ovvero $2x_1 + \frac{1}{63}x_2 \leq \frac{121}{21}$

DV per F (e anche per \overline{F})

$$2) \quad 2x_1 \leq \frac{121}{21}$$

DV per F (e anche per \overline{F})

$$3) \quad 2x_1 \leq \left\lfloor \frac{121}{21} \right\rfloor = 5 \quad \text{DV per } F$$

Iterando, e scegliendo moltiplicatore $\frac{1}{2}$ per il nuovo vincolo:

$$x_1 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2 \quad \text{DV (più stretta) per } F$$

Una sottoclasse fondamentale di DV è:

Definizione Sia \bar{x} una soluzione ottima del rilassamento continuo. Una DV $\pi^T x \leq \pi_0$ tale che $\pi^T \bar{x} > \pi_0$ è detta piano di taglio.

Schema algoritmico dei piani di taglio

Inizializzazione: $\epsilon = 0$, $\mathcal{Q}^0 = \bar{F}$

Iterazione ϵ :

• Risolvi il rilassamento continuo

$$\bar{z}^\epsilon = \max_{x \in \mathcal{Q}^\epsilon} c^T x$$

• sia \bar{x}^ϵ la soluzione ottima determinata

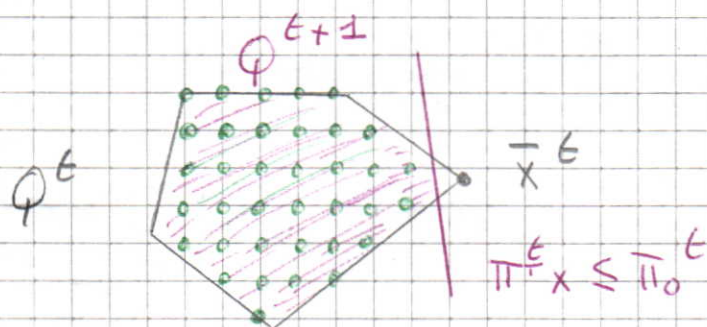
• Se $\bar{x}^\epsilon \in \mathbb{Z}^n$, STOP: \bar{x}^ϵ è una soluzione ottima di (P)

• Se $\bar{x}^\epsilon \notin \mathbb{Z}^n$: genera un piano di taglio $\pi^\epsilon x \leq \pi_0^\epsilon$ che taglia via \bar{x}^ϵ (ovvero $\pi^\epsilon \bar{x}^\epsilon > \pi_0^\epsilon$), e

aggiorna il poliedro:

$$\mathcal{Q}^{\epsilon+1} = \mathcal{Q}^\epsilon \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^\epsilon x \leq \pi_0^\epsilon\};$$

$$\epsilon = \epsilon + 1$$



L'algoritmo può essere interrotto senza l'individuazione di una soluzione intera: in tal caso Q^k è un'approssimazione di $\text{conv}(F)$ migliore di \bar{F} , e può essere utilizzata in un Branch and Bound.

Caso speciale: piani di taglio di Gomory

Supponiamo:

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

e B sia una base ottima del suo rilassamento continuo.

$$\text{Sia } A = \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad A: m \times n \quad (m \leq n)$$

$$\text{poniamo } \tilde{b} = A_B^{-1} b \quad \text{e} \quad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N, \quad \tilde{A} = [\tilde{a}_{rs}]$$

Teorema Se $\tilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$, per $\overset{r \in B}{1 \leq r \leq m}$, allora

$$\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{rj} \} x_j \geq \{ \tilde{b}_r \}$$

taglio di Gomory

è un piano di taglio per (P) .

NB: $\{y\}$ denota la parte frazionaria di y .

Dim Dato un qualsiasi $x \in F$ si ha:

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$$

quindi $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N = \tilde{b} - \tilde{A} x_N$

Sia \dot{x}_k la componente z.m.e di x_B :

$$\dot{x}_k = \tilde{b}_k - \sum_{j \in N} \tilde{a}_{kj} x_j =$$

$$= \lfloor \tilde{b}_k \rfloor + \{ \tilde{b}_k \} - \sum_{j \in N} (\lfloor \tilde{a}_{kj} \rfloor + \{ \tilde{a}_{kj} \}) x_j =$$

$$= \lfloor \tilde{b}_k \rfloor + \{ \tilde{b}_k \} - \sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{kj} \rfloor x_j - \sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{kj} \} x_j$$

quindi:

$$(1) \sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{kj} \} x_j - \{ \tilde{b}_k \} = \lfloor \tilde{b}_k \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{kj} \rfloor x_j - \dot{x}_k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre:

$$(2) \underbrace{\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{kj} \} x_j}_{\geq 0} - \{ \tilde{b}_k \} \geq -\{ \tilde{b}_k \} > -1$$

~~$(\tilde{b}_k \notin \mathbb{Z})$~~

Da (1) e (2) segue che:

$$\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{kj} \} x_j \geq \{ \tilde{b}_k \} \quad \forall x \in F$$

Quindi $\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{kj} \} x_j \geq \{ \tilde{b}_k \}$ è una DV
per F .

Poiché per ipotesi B è una base ottima del rilassamento continuo di B ,

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1} b_B = \tilde{b} \quad \tilde{x}_N = 0$$

è una soluzione ottima del rilassamento continuo,

Poiché

$$0 = \sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{kj} \} \tilde{x}_j < \{ \tilde{b}_k \}$$

segue che

$$\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{kj} \} x_j \geq \{ \tilde{b}_k \}$$

è un piano di taglio per (P) . \square

esempio (cont)

$$\max x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 21$$

$$8x_1 + 2x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Riformuliamo:

$$\max x_1 + 3x_2$$

variabili di scarto

(P)

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 21$$

$$8x_1 + 2x_2 + x_4 = 35$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \in \mathbb{Z}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 21 \\ 35 \end{bmatrix} \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{A_B} \quad \underbrace{\quad}_{A_N}$

La base ottimale del rilassamento continuo è $B = \{1, 2\}$, quindi

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \quad \tilde{x}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} \\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38} \end{bmatrix}$$

Poiché $\tilde{b}_x = \tilde{x}_B$ ha entrambe le componenti non intere, si possono generare due tagli di Gomory.

1) $\boxed{x = 1}$

$$\left\{ -\frac{1}{19} \right\} x_3 + \left\{ \frac{5}{38} \right\} x_4 \geq \left\{ \frac{7}{2} \right\}$$

ovvero

$$\frac{18}{19} x_3 + \frac{5}{38} x_4 \geq \frac{1}{2}$$

ovvero

$$36 x_3 + 5 x_4 \geq 19$$

che, riformulato nelle variabili x_1 e x_2 , diventa

$$36 \underbrace{(21 - x_1 - 5x_2)}_{x_3} + 5 \underbrace{(35 - 8x_1 - 2x_2)}_{x_4} \geq 19$$

cioè

$$\boxed{2x_1 + 5x_2 \leq 24}$$

$$2) \quad \boxed{\kappa = 2}$$

$$\left\{ \frac{4}{19} \right\} x_3 + \left\{ -\frac{1}{38} \right\} x_4 \geq \left\{ \frac{7}{2} \right\}$$

ovvero

$$\frac{4}{19} x_3 + \frac{37}{38} x_4 \geq \frac{1}{2}$$

ovvero

$$8 x_3 + 37 x_4 \geq 19$$

che, riformulato nelle variabili x_1 e x_2 , diventa

$$8(21 - x_1 - 5x_2) + 37(35 - 8x_1 - 2x_2) \geq 19$$

ovvero

$$\boxed{8x_1 + 3x_2 \leq 38}$$

