Test di LaTeX del Laboratorio di Introduzione alla Matematica Computazionale

Andrea Palombo
a.palombo@studenti.unipi.it

Anno Accademico 2022-2023

1 Secondo Teorema del Laboratorio

1.1 L'enunciato classico

Scopo di queste note è dimostrare in modo formale un risultato noto in letteratura come *Secondo Teorema del Laboratorio*. Si tratta di un risultato che ha un ruolo fondamentale nella trattazione analitica di alcuni problemi di Cauchy, come il seguente:

$$\begin{cases} \frac{dv(x)}{dx} = \frac{2+\sinh(v(x))}{1+x^2} \\ v(0) = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

La formulazione classica del risultato viene data in forma integrale, ed è la seguente:

$$\int_0^1 [(1-t^2)(1-mt^2)]^{-\frac{1}{4}}\, dt = \int_0^{\pi/2} (1-m\sin^2\theta)^{-\frac{1}{4}}\, d\theta. \tag{2}$$

La dimostrazione non è del tutto banale, e segue dalle considerazioni fatte nella sezione 1.2. La dimostrazione completa viene lasciata come esercizio al lettore volenteroso.

1.2 Determinanti e prodotti

Per rappresentare in modo efficace le soluzione dell'equazione (1), è necessario osservare che alcune identità, come la seguente:

$$ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\Gamma(z)}, \tag{3}$$

possono essere ricavate scrivendo la produttoria come limite di determinante di matrici $n \times n$, per $n \to \infty$. Ad esempio, per l'identità sopra è utile dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = 12.$$

Applicando il logaritmo ad entrambi i termini dell'equazione (3) è possibile trasformare il prodotto (qualora i termini fossero positivi) in una serie, come la seguente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n)!} = I_n(2),$$

che a sua volta implica banalmente (2). e dunque riformulare il problema in modo diverso, e a volte più semplice da trattare. Questa osservazione si può usare per dimostrare la seguente identità,

$$\sum_{k=1}^{x} f(k) = C + \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x),$$

che a sua volta implica banalmente (2).