Problemini interessanti

Eugenio Paracucchi

11 maggio 2021

Sommario

Questa è una lista di problemini, raccolti negli anni, che mi sono piaciuti particolarmente. Molti sono stati presi da varie gare di matematica (fonte principale canali youtube come, per esempio, quello di Michael Penn[1]) altri da amici oppure ai corsi dell'università.

Problema 1. Sia data la curva nel pano $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$x^3 + 3xy + y^3 = 1.$$

Dimostrare che esiste un unico triangolo equilatero i cui vertici giacciano su di essa e se ne determini l'area.

Problema 2. Si determino tutte le terne (x, y, z) di interi non negativi tali che

$$x^2 + y^2 = 3(2023^z) + 77.$$

Problema 3. Sia $p \equiv 3\ (4)$ un numero primo, si consideri la curva ellittica su $\mathbb{F}_p$ definita dall'equazione:

$$E:\ y^2 = x^3 + x.$$

Dimostrare che $|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1$. (Questo è un esempio di curva ellittica *supersingolare*)

Problema 4 (IMO 1979). Siano $p, q \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{1319}.$$

Dimostrare che p è divisibile per 1979.

Problema 5. Calcolare la probabilità p di vincere al solitario delle tre carte.

Problema 6. Gioco dei cappelli e i prigionieri: 100 prigionieri con cappelli bianchi o neri, tutti in fila indiana. Quanti se ne possono salvare al più?

[1] `https://www.youtube.com/channel/UC6jM0RFkr4eSkzT5Gx0HOAw`

Problema 7. Tutti i triangoli sono equilateri.

Problema 8 (IMO 1975). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $d(n)$ la somma delle sue cifre decimali. Si calcoli
$$d(d(d(4444^{4444}))).$$

Problema 9. Determinare tutte la coppie di numeri primi (p, q) tali che
$$p^q + q^p$$
sia ancora un numero primo.

Problema 10. Dimostrare che $2 \cdot (n^2 + 1) - n$ non è mai un quadrato perfetto.

Problema 11. Sapendo che
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$
Calcolare $x^5 + y^5 + z^5$.

Problema 12. Decidere se $2021^{1024} + 1024^{2021}$ è primo oppure no.

Problema 13. Dimostrare che le matrici
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ -I$$
generano il gruppo $\Gamma_0(4)$.

Problema 14. Trovare $x \in \mathbb{N}$ tale che
$$x^{13} = 219821459173083330487013369.$$

Problema 15. Indovinello Satana e le tre porte. Satana ti conduce davanti a tre porte: dietro a due di esse si trova la *salvezza*, dietro all'altra la *dannazione*. Quello che puoi fare è indicare una porta e successivamente fare una domanda a Satana. Se hai indicato una porta corrispondente alla *salvezza* ti risponderà dicendoti la verità, altrimenti risponderà a caso (mentendo oppure dicendo la verità). Come riesci a salvarti?

Problema 16. Determinare tutte le coppie (n, p) di interi positivi, con p primo, tali che
$$n^3 = p^2 - p - 1.$$

Problema 17. Dimostrare che un gruppo di ordine 66, 144, 112 non è semplice[2].

[2] Un gruppo G si dice semplice se non contiene sottogruppi normali non banali.

Problema 18. Trovare tutte le mappe di $\mathbb{C}$-algebre $f : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]$ tali che la corrispondente mappa tra gli spettri sia sia aperta che chiusa.

Problema 19 (Diagram chasing). Sia M un A-modulo piatto e sia

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Una successione esatta. Si dimostri che per ogni A-modulo N la successione

$$0 \longrightarrow X \otimes N \longrightarrow Y \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow 0$$

è ancora esatta.

Problema 20. Sia $\mu : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ la *funzione di Moebius*, definita da

$$\mu(m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ non è squarefree} \\ (-1)^l & \text{se } m \text{ è prodotto di } l \text{ primi} \end{cases}$$

Dimostrare che $\sum_{d|m} \mu(d) = 0$ se $m > 1$.