La Regola di Littlewood-Richardson

Eugenio Paracucchi

Università di Pisa

14/12/2018

Road Map

Partizioni

Definizione

Una partizione λ di un intero non negativo d è una successione debolmente decrescente di interi non negativi definitivamente uguale a 0

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$$

tale che $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i = d$. Spesso gli zeri verranno omessi.

Partizioni

Definizione

Una partizione λ di un intero non negativo d è una successione debolmente decrescente di interi non negativi definitivamente uguale a 0

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$$

tale che $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i = d$. Spesso gli zeri verranno omessi.

Esempio

$\lambda = (3, 2, 2, 1)$ è una partizione di 8.

Partizioni - Lunghezza e Peso

- La lunghezza di λ, $l(\lambda)$, è il più grande intero k tale che $\lambda_k \neq 0$.

Partizioni - Lunghezza e Peso

- La lunghezza di λ, $l(\lambda)$, è il più grande intero k tale che $\lambda_k \neq 0$.
- Il peso di λ è $|\lambda| = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i$.

Partizioni - Lunghezza e Peso

- La lunghezza di λ, $l(\lambda)$, è il più grande intero k tale che $\lambda_k \neq 0$.
- Il peso di λ è $|\lambda| = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i$.

Partizioni - Lunghezza e Peso

- La lunghezza di λ, $l(\lambda)$, è il più grande intero k tale che $\lambda_k \neq 0$.
- Il peso di λ è $|\lambda| = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i$.

Esempio

Per la partizione λ dell'esempio precedente vale $l(\lambda) = 4$ e $|\lambda| = 8$.

Diagrammi di Young

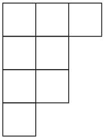
Per rappresentare una partizione λ faremo uso dei diagrammi di Young.

Diagrammi di Young

Per rappresentare una partizione λ faremo uso dei diagrammi di Young.

Esempio

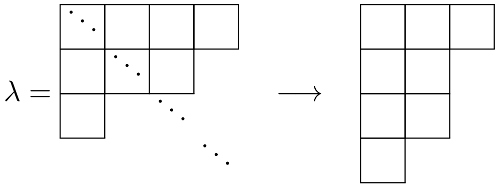
Il diagramma di Young associato a $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ è



Diagrammi di Young - Partizioni Coniugate

Data λ partizione denotiamo con λ' la partizione coniugata.

Esempio



Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Contenimenti

Definizione

Siano λ e μ due partizioni. Diciamo che λ contiene μ, e scriviamo $\lambda \supset \mu$, se $\lambda_i \geq \mu_i$ per ogni i.

Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Contenimenti

Definizione

Siano λ e μ due partizioni. Diciamo che λ contiene μ, e scriviamo $\lambda \supset \mu$, se $\lambda_i \geq \mu_i$ per ogni i.

Esempio

$\lambda = (5,3,3,1) \supset (4,2,1) = \mu$. Geometricamente il diagramma di λ contiene quello di μ:

Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

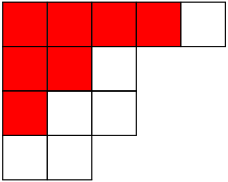
Contenimenti

Definizione

Siano λ e μ due partizioni. Diciamo che λ contiene μ, e scriviamo $\lambda \supset \mu$, se $\lambda_i \geq \mu_i$ per ogni i.

Esempio

$\lambda = (5, 3, 3, 1) \supset (4, 2, 1) = \mu$. Geometricamente il diagramma di λ contiene quello di μ:



Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Definizione

Siano λ e μ due partizioni, $\lambda \supset \mu$.

- La partizione skew $\lambda - \mu$ è la upla $\lambda - \mu = (\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_i - \mu_i, \dots)$. Si pone $|\lambda - \mu| = \sum_i \lambda_i - \mu_i = |\lambda| - |\mu|$.

Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Definizione

Siano λ e μ due partizioni, $\lambda \supset \mu$.

- La partizione skew $\lambda - \mu$ è la upla $\lambda - \mu = (\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_i - \mu_i, \ldots)$. Si pone $|\lambda - \mu| = \sum_i \lambda_i - \mu_i = |\lambda| - |\mu|$.
- Il diagramma skew di $\lambda - \mu$ è l'oggetto che si ottiene togliendo al diagramma di λ μ_1 quadratini consecutivi dalla prima riga, μ_2 quadratini consecutivi dalla seconda riga e così via, ogni volta partendo da sinistra.

Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Un Esempio

Consideriamo le partizioni λ e μ dell'esempio precedente

Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Un Esempio

Consideriamo le partizioni λ e μ dell'esempio precedente

$$\lambda = \ydiagram{5,3,3,1} \quad , \quad \mu = \ydiagram{4,2,1}$$

Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Un Esempio

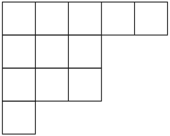
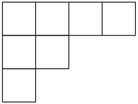
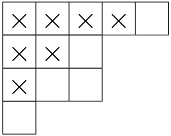
Consideriamo le partizioni λ e μ dell'esempio precedente

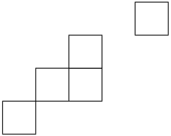
$$\lambda = \ydiagram{5,3,3,1} \quad , \quad \mu = \ydiagram{4,2,1} \longrightarrow \begin{ytableau} \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \\ \times & & \\ \\ \end{ytableau}$$

Diagrammi di Young - Diagrammi Skew

Un Esempio

Consideriamo le partizioni λ e μ dell'esempio precedente

$\lambda =$  $, \quad \mu =$  $\longrightarrow$ 

$\longrightarrow \lambda - \mu =$ 

Tableaux Semi-standard

Definizione

Siano $\lambda,\ \mu,\ \nu$ partizioni, $\lambda \supset \mu$ e $|\nu| = |\lambda| - |\mu|$. Un tableaux semi-standard associato a $\lambda - \mu$ di peso ν è un riempimento di $\lambda - \mu$ con ν_1 1, ν_2 2, $\dots$, ν_k k tale che i numeri scritti sulle righe siano non decrescenti letti da sinistra a destra e quelli scritti sulle colonne siano in ordine crescente letti dall'alto verso il basso. Il numero di tali riempimenti è detto numero di Kostka $K_{\lambda-\mu,\nu}$.

Tableaux Semi-standard

Un esempio

Se $\lambda = (5, 3, 3, 1)$, $\mu = (4, 2, 1)$, $\nu = (3, 1, 1)$ allora $K_{\lambda-\mu,\nu} = 6$ e i tableaux semi-standard sono:

Tableaux Semi-standard

Un esempio

Se $\lambda = (5,3,3,1)$, $\mu = (4,2,1)$, $\nu = (3,1,1)$ allora $K_{\lambda-\mu,\nu} = 6$ e i tableaux semi-standard sono:

$$\begin{array}{ccccc} &&&&2\\ &&1&& \\ &1&3&& \\ 1&&&& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} &&&&3\\ &&1&& \\ &1&2&& \\ 1&&&& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} &&&&1\\ &&2&& \\ &1&3&& \\ 1&&&& \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} &&&&1\\ &&1&& \\ &2&3&& \\ 1&&&& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} &&&&1\\ &&1&& \\ &1&3&& \\ 2&&&& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} &&&&1\\ &&1&& \\ &1&2&& \\ 3&&&& \end{array}$$

Tableaux Semi-standard - Parole

Definizione

Dato un tableaux semi-standard T si definisce parola derivata da T e si indica con $w(T)$ la sequenza di simboli formata mettendo in fila quelli presenti nelle caselle di T scritti da destra a sinistra partendo dalla prima riga e scendendo in quelle successive.

Tableaux Semi-standard - Parole

Definizione

Dato un tableaux semi-standard T si definisce parola derivata da T e si indica con $w(T)$ la sequenza di simboli formata mettendo in fila quelli presenti nelle caselle di T scritti da destra a sinistra partendo dalla prima riga e scendendo in quelle successive.

Esempio

Se $T = \begin{array}{ccccc} & & & & \boxed{2} \\ & & \boxed{1} & & \\ & \boxed{1} & \boxed{3} & & \\ \boxed{1} & & & & \end{array}$ allora $w(T) = 21311$.

Tableaux Semi-standard - Lattice Permutation

Definizione

Una parola $w = a_1a_2 \dots a_N$, $a_i \in \{1, \dots, n\}$, si dice lattice permutation se per ogni $1 \le r \le N$ e per ogni $1 \le i \le n-1$ il numero di simboli i in $a_1a_2 \dots a_r$ è maggiore uguale del numero di occorrenze di simboli $i+1$.

Tableaux Semi-standard - Lattice Permutation

Definizione

Una parola $w = a_1 a_2 \dots a_N$, $a_i \in \{1, \dots, n\}$, si dice lattice permutation se per ogni $1 \leq r \leq N$ e per ogni $1 \leq i \leq n-1$ il numero di simboli i in $a_1 a_2 \dots a_r$ è maggiore uguale del numero di occorrenze di simboli $i+1$.

Esempio

- $w = 21311$ non è una lattice permutation.

Tableaux Semi-standard - Lattice Permutation

Definizione

Una parola $w = a_1 a_2 \dots a_N$, $a_i \in \{1, \dots, n\}$, si dice lattice permutation se per ogni $1 \leq r \leq N$ e per ogni $1 \leq i \leq n-1$ il numero di simboli i in $a_1 a_2 \dots a_r$ è maggiore uguale del numero di occorrenze di simboli $i+1$.

Esempio

- $w = 21311$ non è una lattice permutation.
- $w = 12311$ è una lattice permutation.

Numeri di Littlewood-Richardson - $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$

Date $\lambda,\ \mu,\ \nu$ partizioni, $\lambda \supset \mu$ e $|\lambda - \mu| = |\nu|$, il numero di Littlewood-Richardson $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$ è il numero di tableaux semi-standard T di forma $\lambda - \mu$ e peso ν tale che $w(T)$ sia una lattice permutation.

Numeri di Littlewood-Richardson - $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$

Date $\lambda,\ \mu,\ \nu$ partizioni, $\lambda \supset \mu$ e $|\lambda - \mu| = |\nu|$, il numero di Littlewood-Richardson $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$ è il numero di tableaux semi-standard T di forma $\lambda - \mu$ e peso ν tale che $w(T)$ sia una lattice permutation.

Esempio

Se $\lambda = (3, 2, 1),\ \mu = \nu = (2, 1)$ allora $c^{\lambda}_{\mu,\nu} = 2$:

Numeri di Littlewood-Richardson - $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$

Date $\lambda,\ \mu,\ \nu$ partizioni, $\lambda \supset \mu$ e $|\lambda - \mu| = |\nu|$, il numero di Littlewood-Richardson $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$ è il numero di tableaux semi-standard T di forma $\lambda - \mu$ e peso ν tale che $w(T)$ sia una lattice permutation.

Esempio

Se $\lambda = (3,2,1),\ \mu = \nu = (2,1)$ allora $c^{\lambda}_{\mu,\nu} = 2$:

$$T_1 = \begin{array}{ccc} & & \boxed{1} \\ & \boxed{1} & \\ \boxed{2} & & \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{ccc} & & \boxed{1} \\ & \boxed{2} & \\ \boxed{1} & & \end{array}$$

Polinomi Simmetrici

Un polinomio nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$ si dice simmetrico se la sua scrittura riesta invariata comunque vengano permutate le variabili tra di loro.

Polinomi Simmetrici

Un polinomio nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$ si dice simmetrico se la sua scrittura riesta invariata comunque vengano permutate le variabili tra di loro.

Esempio

Se $n = 3$ allora

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 x_3$$

è un polinomio simmetrico.

Polinomi Simmetrici

Indichiamo con Λ_n l'insieme dei polinomi simmetrici in n variabili e con Λ_n^k l'insieme dei polinomi simmetrici in n variabili di grado k più lo zero.

Osservazione

Λ_n ha una struttura di anello graduato

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_n^k$$

Polinomi simmetrici elementari - e_r

Siano $r \geq 0$ un numero intero e n il numero di variabili, si definisce polinomio simmetrico elementare e_r

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

Polinomi simmetrici elementari - e_r

Siano $r \geq 0$ un numero intero e n il numero di variabili, si definisce polinomio simmetrico elementare e_r

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

Esempio

In 2 variabili, $e_0 = 1,\ e_1 = x_1 + x_2,\ e_2 = x_1 x_2,\ e_3 = e_4 = \cdots = 0$

Polinomi simmetrici elementari - e_r

Siano $r \geq 0$ un numero intero e n il numero di variabili, si definisce polinomio simmetrico elementare e_r

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

Esempio

In 2 variabili, $e_0 = 1,\ e_1 = x_1 + x_2,\ e_2 = x_1 x_2,\ e_3 = e_4 = \cdots = 0$

Si pone, per $r < 0$, $e_r = 0$.

Polinomi simmetrici elementari - e_r

Siano $r \geq 0$ un numero intero e n il numero di variabili, si definisce polinomio simmetrico elementare e_r

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

Esempio

In 2 variabili, $e_0 = 1, \ e_1 = x_1 + x_2, \ e_2 = x_1 x_2, \ e_3 = e_4 = \cdots = 0$

Si pone, per $r < 0$, $e_r = 0$.
Data una partizione $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ poniamo $e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_k}$.

Polinomi simmetrici elementari - e_r

Siano $r \geq 0$ un numero intero e n il numero di variabili, si definisce polinomio simmetrico elementare e_r

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

Esempio

In 2 variabili, $e_0 = 1, \; e_1 = x_1 + x_2, \; e_2 = x_1 x_2, \; e_3 = e_4 = \cdots = 0$

Si pone, per $r < 0$, $e_r = 0$.
Data una partizione $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ poniamo $e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_k}$.

Le e_λ sono, al variare di λ, una base di Λ_n

Polinomi di Schur - s_λ

Data una partizione λ, il polinomio di Schur s_λ è per definizione

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n} \qquad n \geq l(\lambda').$$

Polinomi di Schur - s_λ

Data una partizione λ, il polinomio di Schur s_λ è per definizione

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \le i,j \le n} \qquad n \ge l(\lambda').$$

Esempio

In 3 variabili, se $\lambda = (2,1,1)$ allora $\lambda' = (3,1,0)$ e

$$s_{(2,1,1)} = \det \begin{pmatrix} e_3 & e_4 & e_5 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} = e_3 e_1 - e_4 = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3).$$

Polinomi di Schur - s_λ

Data una partizione λ, il polinomio di Schur s_λ è per definizione

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n} \qquad n \geq l(\lambda').$$

Esempio

In 3 variabili, se $\lambda = (2,1,1)$ allora $\lambda' = (3,1,0)$ e

$$s_{(2,1,1)} = \det \begin{pmatrix} e_3 & e_4 & e_5 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} = e_3 e_1 - e_4 = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3).$$

Le s_λ sono, al variare di λ, una base di Λ_n, anche grado per grado.

Funzioni Simmetriche

Cerchiamo di estendere la definizione di polinomio simmetrico al caso di infinite variabili "passando al limite".

Funzioni Simmetriche

Cerchiamo di estendere la definizione di polinomio simmetrico al caso di infinite variabili "passando al limite".
Poniamo, dato $k \geq 0$

$$\Lambda^k = \varprojlim_n \Lambda_n^k$$

Funzioni Simmetriche

Cerchiamo di estendere la definizione di polinomio simmetrico al caso di infinite variabili "passando al limite".
Poniamo, dato $k \geq 0$

$$\Lambda^k = \varprojlim_n \Lambda_n^k$$

e definiamo

$$\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$$

anello delle funzioni simmetriche.

La regola di Littlewood-Richardson

Date μ e ν partizioni di n e m rispettivamente, consideriamo la funzione simmetrica

$$s_\mu s_\nu$$

La regola di Littlewood-Richardson

Date μ e ν partizioni di n e m rispettivamente, consideriamo la funzione simmetrica

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda$$

La regola di Littlewood-Richardson

Date μ e ν partizioni di n e m rispettivamente, consideriamo la funzione simmetrica

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda$$

Teorema (Littlewood-Richardson)

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu,\nu} s_\lambda$$

Rappresentazioni

Siano G un gruppo e V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Definizione

Una *G-rappresentazione* è un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

Rappresentazioni

Siano G un gruppo e V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Definizione

Una *G-rappresentazione* è un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

Una G-rappresentazione V si dice *irriducibile* se non ammette sottospazi G-invarianti propri (cioè diversi da 0 e da V stesso).

Rappresentazioni dei gruppi finiti

Se G è un gruppo finito allora le rappresentazioni irriducibili sono un numero finito.

Rappresentazioni dei gruppi finiti

Se G è un gruppo finito allora le rappresentazioni irriducibili sono un numero finito.
Inoltre ogni G-rappresentazione si scrive in modo unico come somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Gruppo Simmetrico

Le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico S_n sono in bigezione con le partizioni λ di n.

Gruppo Simmetrico

Le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico S_n sono in bigezione con le partizioni λ di n.
L'algebra-gruppo

$$\mathbb{C}S_n = \bigoplus_{\sigma \in S_n} < e_\sigma >_{\mathbb{C}}$$

con il prodotti definito sui generatori da $e_\sigma \cdot e_\tau = e_{\sigma\tau}$ ed esteso a tutto lo spazio per linearità.

Gruppo Simmetrico - Simmetrizzatore di Young

Data una partizione λ di n considero il tableaux T di forma λ riempito con i numeri $1, \ldots, n$ dalla prima riga a scendere, da sinistra a destra.

Gruppo Simmetrico - Simmetrizzatore di Young

Data una partizione λ di n considero il tableaux T di forma λ riempito con i numeri $1, \ldots, n$ dalla prima riga a scendere, da sinistra a destra.

Esempio

Se $n = 8$ e $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ allora

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

Gruppo Simmetrico - Simmetrizzatore di Young

Data una partizione λ di n considero il tableaux T di forma λ riempito con i numeri $1, \ldots, n$ dalla prima riga a scendere, da sinistra a destra.

Esempio

Se $n = 8$ e $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ allora

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

$$P_T = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ preserva le righe di } T\} \text{ e } a_T = \sum_{\sigma \in P_T} e_\sigma .$$

Gruppo Simmetrico - Simmetrizzatore di Young

Data una partizione λ di n considero il tableaux T di forma λ riempito con i numeri $1, \dots, n$ dalla prima riga a scendere, da sinistra a destra.

Esempio

Se $n = 8$ e $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ allora

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

$$P_T = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ preserva le righe di } T\} \text{ e } a_T = \textstyle\sum_{\sigma \in P_T} e_\sigma.$$

$$Q_T = \{\tau \in S_n \mid \tau \text{ preserva le colonne di } T\} \text{ e } b_T = \textstyle\sum_{\tau \in Q_T} sgn(\tau) e_\tau.$$

Gruppo Simmetrico - Simmetrizzatore di Young

Data una partizione λ di n considero il tableaux T di forma λ riempito con i numeri $1, \ldots, n$ dalla prima riga a scendere, da sinistra a destra.

Esempio

Se $n = 8$ e $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ allora

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

$$P_T = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ preserva le righe di } T\} \text{ e } a_T = \textstyle\sum_{\sigma \in P_T} e_\sigma.$$

$$Q_T = \{\tau \in S_n \mid \tau \text{ preserva le colonne di } T\} \text{ e } b_T = \textstyle\sum_{\tau \in Q_T} sgn(\tau) e_\tau.$$

Il simmetrizzatore di Young è

$$c_T = a_T \cdot b_T$$

Gruppo Simmetrico - Rappresentazioni irriducibili

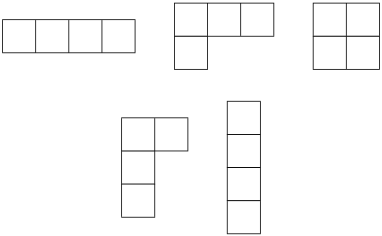
La rappresentazione di S_n $V_\lambda := \mathbb{C}S_n \cdot c_T$ è irriducibile e si ottengono in questo modo, al variare di λ partizione di n, tutte le rappresentazioni irriducibili di S_n.

Gruppo Simmetrico - Rappresentazioni irriducibili

La rappresentazione di S_n $V_\lambda := \mathbb{C}S_n \cdot c_T$ è irriducibile e si ottengono in questo modo, al variare di λ partizione di n, tutte le rappresentazioni irriducibili di S_n.

Esempio

Le rappresentazioni irriducibili di S_4 sono 5 e corrispondono a:



Caratteri

Sia V una G-rappresentazione. Si definisce carattere di V, e si indica con χ_V, la funzione

$$\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

tale che $\chi_V(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$ cioè la traccia dell'operatore lineare g.

La regola di Littlewood-Richardson

I numeri di Littlewood-Richardson compaiono anche nella decomposizione in irriducibili di particolari rappresentazioni del gruppo simmetrico.

La regola di Littlewood-Richardson

I numeri di Littlewood-Richardson compaiono anche nella decomposizione in irriducibili di particolari rappresentazioni del gruppo simmetrico.
Ciò è discusso ampiamente nella tesi.

Rappresentazioni di GL(V) - Funtori di Schur

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e d un numero intero positivo, su $V^{\otimes d}$ agisce $\mathrm{GL}(V)$ a sinistra e S_d a destra permutando i fattori.

Rappresentazioni di GL(V) - Funtori di Schur

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e d un numero intero positivo, su $V^{\otimes d}$ agisce $\mathrm{GL}(V)$ a sinistra e S_d a destra permutando i fattori. Per ogni λ partizione di d pongo

$$\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes d} \cdot c_\lambda$$

dove c_λ è il simmetrizzatore di Young associato a λ.

Rappresentazioni di GL(V) - Funtori di Schur

Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e d un numero intero positivo, su $V^{\otimes d}$ agisce $\mathrm{GL}(V)$ a sinistra e S_d a destra permutando i fattori. Per ogni λ partizione di d pongo

$$\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes d} \cdot c_\lambda$$

dove c_λ è il simmetrizzatore di Young associato a λ.

$\mathbb{S}_\lambda(\cdot)$ è detto funtore di Schur.

Rappresentazioni di GL(V) - $\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V$

La regola di Littlewood-Richardson permette di determinare la scomposizione in irriducibili di

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V$$

Rappresentazioni di GL(V) - $\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V$

Teorema

Siano date μ e ν partizioni di m e n rispettivamente. Allora

$$\mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V \cong \bigoplus_\lambda c^\lambda_{\mu,\nu} \mathbb{S}_\lambda V$$

come $GL(V)$-moduli; e la somma diretta varia su λ partizione di $m+n$.

Rappresentazioni di GL(V) - $\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V$

Dimostrazione.

- $$\mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V = V^{\otimes m} \cdot c_\mu \otimes V^{\otimes n} \cdot c_\nu =$$
$$= V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \cdot (c_\mu \otimes c_\nu) = V^{\otimes (m+n)} \cdot c,$$

□

Rappresentazioni di GL(V) - $\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V$

Dimostrazione.

- $$\mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V = V^{\otimes m} \cdot c_\mu \otimes V^{\otimes n} \cdot c_\nu =$$
  $$= V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \cdot (c_\mu \otimes c_\nu) = V^{\otimes (m+n)} \cdot c,$$
- $c \in \mathbb{C}S_{m+n}$ allora $\mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V \cong \bigoplus_\lambda r_\lambda \mathbb{S}_\lambda V$.

□

Rappresentazioni di GL(V) - $\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V$

Dimostrazione.

- $$\mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V = V^{\otimes m} \cdot c_\mu \otimes V^{\otimes n} \cdot c_\nu =$$
  $$= V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \cdot (c_\mu \otimes c_\nu) = V^{\otimes (m+n)} \cdot c,$$
- $c \in \mathbb{C}S_{m+n}$ allora $\mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V \cong \bigoplus_\lambda r_\lambda \mathbb{S}_\lambda V$.
- Passando ai caratteri
  $$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda r_\lambda s_\lambda$$
  Allora, per la regola di Littlewood-Richardson, $r_\lambda = c^\lambda_{\mu\nu}$.

□