UNIVERSITÀ DI PISA

Elementi di Analisi di Fourier

Emanuele Pardini

Dalle lezioni del corso Analisi Matematica 3 dell'Università di Pisa
tenuto dai professori G. Alberti e M. S. Gelli nell'anno accademico 2021/2022.

Indice

Capitolo 1

Cenni agli Spazi di Hilbert

1.1 Spazi di Hilbert e Prime Proprietà

Definizione 1.1.1: Si definisce **spazio pre-hilbertiano** uno spazio vettoriale complesso H su cui è definito un prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$.

Ed in tal caso si definisce su H la norma $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Osservazione 1.1.2: Se considero uno spazio vettoriale reale H munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, posso considerare il suo complessificato $H_{\mathbb{C}}$ e il prodotto hermitiano su di esso associato a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ definito da

$$\langle x + iy \ , \ x' + iy' \rangle_{\mathbb{C}} := \big(\langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle \big) + i \left(\langle x', y \rangle + \langle x, y' \rangle \right)$$

in cui $x, y, x', y' \in H$.

Ora $H_{\mathbb{C}} \supset H$, chiaramente $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ e dalla sua definizione il prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ ristretto al solo $H \subset H_{\mathbb{C}}$, visto come parte reale di $H_{\mathbb{C}}$, con $\mathbb{R}$, è uguale al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dunque ogni risultato che vedremo per spazi pre-hilbertiani e successivamente per spazi di Hilbert (definizione più avanti) su $\mathbb{C}$ valgono anche per gli stessi tipi di spazi ma reali.

Ed infine un'ultima considerazione sullo spazio duale, un funzionale $f : H \to \mathbb{R}$ su H (quindi reale) è estendibile ad uno complesso sul complessificato $\widetilde{f} : H_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ che estende f in modo canonico (sempre vedendo H come la parte reale di $H_{\mathbb{C}}$)

$$\widetilde{f}(x + iy) = f(x) + if(y)$$

e chiaramente f è continuo se e solo se lo è $\widetilde{f}$, in quanto restrizione di una continua è continua.

Iniziamo con una sfilza di semplici ma utili risultati.

Proposizione 1.1.3 (Disuguaglianza di Schwarz): *Dato uno spazio pre-hilbertiano H con prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vale che per ogni $x, y \in V$*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Dimostrazione. Se $\langle x, y\rangle = 0$ allora la conclusione è ovvia.

Sia dunque $\langle x, y\rangle \neq 0$ e $\alpha = sgn(\langle x, y\rangle)$, dunque considero $z = \alpha y$ in modo che $\langle x, z\rangle = \langle z, x\rangle = |\langle x, y\rangle|$.

Dunque per $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 \leq \langle x - tz, x - tz\rangle = \|x\|^2 - 2t|\langle x, y\rangle| + t^2\|y\|^2$$

e il RHS è una funzione quadratica in t che ha minimo in $t = \|y\|^{-2}|\langle x, y\rangle|$.

Valutando in tale minimo si ottiene

$$0 \leq \|x - \|y\|^{-2}|\langle x, y\rangle|\alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^{-2}|\langle x, y\rangle|^2$$

che equivale alla disuguaglianza voluta.

□

Proposizione 1.1.4: *Dato uno spazio pre-hilbertiano H la funzione $\|\cdot\|$ è una norma su H.*

Dimostrazione. Chiaramente dalla definizione si ha che $\|x\| = 0 \iff x = 0$ e che $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Per la disuguaglianza triangolare

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq$$

per la disuguaglianza di Schwarz

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

da cui $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

□

Proposizione 1.1.5 (Identità di Polarizzazione): *Dato uno spazio pre-hilbertiano H con prodotto hermitiano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vale $\forall x, y \in H$*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)$$

Corollario 1.1.6: *Dato uno spazio pre-hilbertiano H il rispettivo prodotto hermitiano è continuo nelle due variabili.*

Dimostrazione. La norma è 1-lipschitziana, dunque continua, quindi il prodotto scalare è continuo per l'identità di polarizzazione.

□

Proposizione 1.1.7 (Legge del Parallelogramma): *Dato uno spazio pre-hilbertiano H, per ogni $x, y \in H$ si ha*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

("La somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati dei quattro lati.")

Dimostrazione. Segue dalle due formule

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

□

Definizione 1.1.8 (Ortogononalità): Dato uno spazio pre-hilbertiano H e $x, y \in H$ diciamo che x è **ortogonale** ad y, e scriviamo $x \perp y$, se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$.

Se $V \subset H$ definiamo l'**ortogonale** di V come

$$V^{\perp} := \{x \in H \mid \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in V\}$$

Osservazione 1.1.9: Come conseguenza della linearità del prodotto scalare si ha che l'ortogonale ad un qualsiasi sottoinsieme di H è un sottospazio vettoriale, mentre la continuità del prodotto scalare ci dice inoltre che l'ortogonale è sempre un sottospazio chiuso di H.

Teorema 1.1.10 (Teorema di Pitagora): *Dato uno spazio pre-hilbertiano H e $x, y \in H$ con $x \perp y$ si ha che $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Definizione 1.1.11 (Spazio di Hilbert): Uno spazio pre-hilbertiano H completo è detto **spazio hilbertiano** o **spazio di Hilbert**.

Osservazione 1.1.12: Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{C})$ è uno spazio di Hilbert col prodotto hermitiano definito da

$$\langle f, g\rangle_{L^2(X,\mathcal{A},\mu)} = \int_X f\overline{g}d\mu$$

In particolare quindi anche lo spazio $\ell^2 = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \text{ t.c. } \sum_n |a_n|^2 < +\infty\right\}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto hermitiano definito da

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n\rangle_{\ell^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\overline{b_n}$$

1.2 Sistemi ortonormali e basi di Hilbert

Definizione 1.2.1: Dato H spazio di Hilbert $\mathcal{F} \subset H$ è un **sistema ortogonale** se $\forall e, e' \in \mathcal{F}$ $\langle e, e'\rangle = 0$.

Mentre è detto **sistema ortonormale** se è un sistema ortogonale e $\forall e \in \mathcal{F}$ $\|e\| = 1$.

Un sistema ortonormale è **completo** se $\overline{\mathrm{span}(\mathcal{F})} = H$ ed in tal caso $\mathcal{F}$ è detta **base di Hilbert**.

Osservazione 1.2.2: Una base di Hilbert non è in generale una base algebrica di H perchè gli elementi di H possono essere combinazioni lineari infinite di elementi della base di Hilbert.

Esempio 1.2.3: In ℓ^2 prendo $\mathcal{F} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in cui $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ con 1 all'i-esimo posto. Chiaramente $\mathcal{F}$ è ortonormale ed è anche completo, infatti preso $x \in \ell^2$ definendo $\forall m \in \mathbb{N}$

$$P_m x := (x_0, x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ...) \in \operatorname{span}(\mathcal{F})$$

si ha che

$$\|x - P_m x\|_{\ell^2} = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n^2 \to 0 \text{ per } m \to \infty$$

ossia $\mathcal{F}$ è completo, dunque è una base di Hilbert.

Lemma 1.2.4: *Dato H spazio di Hilbert e $\mathcal{F} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale numerabile (o finito).*

Data $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ allora

(1) $\sum_n a_n e_n$ converge ad un qualche $\widetilde{x} \in H$;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\langle \widetilde{x}, e_n\rangle = a_n$;

(3) $\|\widetilde{x}\|^2 = \sum_n |a_n|^2$.

Dimostrazione. (1): Dimostro che $(y_m)_m \in \mathbb{N}$ con $y_m = \sum_{n=0}^m a_n e_n$ è di Cauchy in H che è completo.

Se $m < m'$ si ha

$$\|y_{m'} - y_m\|^2 = \left\| \sum_{m+1}^{m'} a_n e_n \right\|^2 =$$

essendo gli e_n ortogonali

$$= \sum_{m+1}^{m'} |a_n|^2 \leq \sum_{m+1}^{\infty} |a_n|^2$$

ma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ cioè $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$ da cui la tesi.

(2): $\forall m \geq n$ $\langle y_m, e_n\rangle = a_n$, ma per la continuità del prodotto scalare

$$\langle y_m, e_n\rangle \to \langle \widetilde{x}, e_n\rangle \text{ per } m \to \infty$$

dunque $\forall n \in \mathbb{N}$ $\langle \widetilde{x}, e_n\rangle = a_n$.

(3): $\forall m \in \mathbb{N}$ $\|y_m\|^2 = \sum_{n=0}^m a_n^2$ e prendendo il limite per $m \to \infty$ si ottiene $\|\widetilde{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$. □

Adesso il teorema più importante della sezione

Teorema 1.2.5 (della base di Hilbert): *Sia H uno spazio di Hilbert e $\mathcal{F} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale numerabile (o finito). Chiamando $\forall x \in H$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n := \langle x, e_n\rangle$ si ha*

(1) $\sum_n |x_n|^2 \leq \|x\|^2$ (Disuguaglianza di Bessel);

(2) $\sum_n x_n e_n$ *converge ad un qualche* $\widetilde{x} \in H$ *e* $\forall n \in \mathbb{N} \quad \widetilde{x}_n = x_n$*;*

(3) $\|\widetilde{x}\|^2 = \sum_n |x_n|^2 \leq \|x\|^2$*;*

(4) $x - \widetilde{x} \perp \mathcal{F}$ *e quindi* $x - \widetilde{x} \perp \overline{span(\mathcal{F})}$*;*

(5) se $\mathcal{F}$ *è completo allora* $x = \widetilde{x}$*, cioè* $x = \sum_n x_n e_n$ *ed in particolare* $\|x\|^2 = \sum_n |x_n|^2$ *(**Identità di Parseval**).*

Dimostrazione. (1): Posso scrivere $x = \sum_{n=0}^m x_n e_n + y$ che è una somma finita di vettori ortogonali, in quanto per $i = 1, ..., m$

$$\langle y, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=0}^m x_n e_n \ , \ e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{n=0}^m x_n \langle e_n, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - x_i = x_i - x_i = 0$$

Ma essendo somma di vettori ortogonali si ha

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^m x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^m x_n^2$$

da cui la tesi mandando $m \to \infty$.

(2): Il punto (1) mi dice che $(x_n)_n \in \ell^2$ e i punti (1) e (2) del Lemma 1 mi danno il resto.

(3): Il punto (1) mi dice che $(x_n)_n \in \ell^2$ il punto (3) del Lemma 1 mi dice che la norma al quadrato è la somma delle norme al quadrato e di nuovo il punto (1) mi fornisce la disuguaglianza.

(4): Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\langle x - \widetilde{x} \ , \ e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle \widetilde{x}, e_n \rangle = x_n - \widetilde{x}_n = 0$$

in cui l'ultima uguaglianza è una conseguenza del punto (2). Dunque $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x - \widetilde{x} \perp e_n$ quindi $x - \widetilde{x} \perp \text{span}(\mathcal{F})$ e per continuità del prodotto scalare si ha infine $x - \widetilde{x} \perp \overline{\text{span}(\mathcal{F})}$.

(5): Se $\mathcal{F}$ è completo allora $x - \widetilde{x} \perp \overline{\text{span}(\mathcal{F})} = H$ da cui si deduce che $x - \widetilde{x} = 0$, cioè $x = \widetilde{x}$. □

Corollario 1.2.6: *Sia* H *uno spazio di Hilbert,* $\mathcal{F} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una base di Hilbert numerabile (o finita) e* $x, x' \in H$*. Allora*

(1) $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n = x'_n \quad \Longleftrightarrow \quad x = x'$*;*

(2) $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^\infty x_n \overline{x'_n}$ *(**Identità di Parseval v.2**);*

(3) $H \ni x \mapsto (x_n)_n \in \ell^2$ *è un'isometria surgettiva (lineare).*

Dimostrazione. (1): ($\Leftarrow$) ovvia.
($\Rightarrow$) So che $x = \sum_n x_n e_n$ e $x' = \sum_n x'_n e_n$, ma $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n = x'_n$, dunque $x = x'$ perchè so che le due serie convergono, quindi

$$\|x - x'\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^m x_n e_n \right\| + \left\| x' - \sum_{n=1}^m x'_n e_n \right\| \to 0 \ \text{ per } m \to \infty$$

da cui $x - x' = 0$.

(2): Grazie all'identità di polarizzazione posso scrivere

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

La tesi segue poi grazie all'uguaglianza di Parseval e qualche conto.

(3): Il punto (3) del Lemma 1 mi dice che è un'isometria, in quanto preserva le norme, mentre il punto (1) dello stesso lemma mi fornisce la surgettività, in quanto presa $(a_n)_n \in \ell^2$ su ha che $\sum_n a_n e_n = x \in H$ è un elemento di H ben definito con coefficienti $x_n = a_n$.

□

Osservazione 1.2.7: Come conseguenza del precedente corollario, in particolare del punto (1), si ha che dato uno spazio di Hilbert H ed una base di Hilbert numerabile $(e_n)_{n\in N}$ di H, la serie associata ad un qualunque $x \in H$ converge incondizionatamente, cioè data una bigezione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si ha $x = \sum_n x_n e_n = \sum_n x_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} =: x'$, perchè per ogni $n \in \mathbb{N}$ $x_n = x'_n$, in quanto sto semplicemente riordinando gli addendi $x_n e_n$.

Proposizione 1.2.8: *Sia H spazio di Hilbert ed $\mathcal{F}$ un sistema ortonormale infinito, allora $\mathcal{F}$ non è una base algebrica di H, ossia span$(\mathcal{F}) \subsetneq H$.*

Dimostrazione. Prendo $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ e considero $x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n$, ho che $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, dunque $x \in H$ è ben definito, ma dico che $x \notin \operatorname{span}(\mathcal{F})$.

Infatti se esistessero dei $(v_i)_{i=0,\dots,N} \subset \mathcal{F}$ e degli $\{a_i\}_{i=0,\dots,N} \subset \mathbb{C}$ t.c. $x = \sum_{n=0}^{N} a_n v_n$ allora si avrebbe

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n =: y$$

da cui $\forall n > N \;\; 0 = \langle y, e_n \rangle = 2^{-n}$ che è chiaramente un assurdo.

□

Proposizione 1.2.9: *Sia H spazio di Hilbert di dimensione infinita e $\mathcal{F}$ una base di Hilbert. Allora $\mathcal{F}$ è numerabile $\iff$ H è separabile.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Si ha $H = \overline{\operatorname{span}(\mathcal{F})} = \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$ perchè posso approssimare ogni coefficiente (che è un numero complesso) con complessi di parte reale ed immaginaria razionale e $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathcal{F})$ è numerabile se $\mathcal{F}$ è numerabile.

($\Leftarrow$): Se per assurdo ci fosse una $\mathcal{F}$ base di Hilbert più che numerabile, essendo $\forall e, e' \in \mathcal{F} \quad \|e - e'\| = \sqrt{2}$ si avrebbe H non separabile perchè ho una famiglia più che numerabile di palle disgiunte, $\left(B(e, \sqrt{2})\right)_{e\in\mathcal{F}}$ ed una famiglia numerabile non può intersecarle tutte. □

Proposizione 1.2.10: *Sia H spazio di Hilbert ed $\mathcal{F} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale numerabile.*

Allora $\mathcal{F}$ è completo $\iff$ $\mathcal{F}$ è massimale per inclusione nell'insieme dei sistemi ortonormali di H.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Se $\mathcal{F}$ è completo si ha che

$$\mathcal{F}^\perp = \operatorname{span}(\mathcal{F})^\perp = \overline{\operatorname{span}(\mathcal{F})}^\perp = H^\perp = \{0\}$$

dunque $\nexists \mathcal{F}'$ ortonormale t.c. $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$, perchè altrimenti $\exists v \in \mathcal{F}^\perp, \quad v \neq 0$ che è un assurdo per quanto detto prima, dunque $\mathcal{F}$ è massimale.

($\Leftarrow$): Se $\mathcal{F}$ non è completo allora $\exists x \in H \setminus \overline{\operatorname{span}(\mathcal{F})}$, dunque prendo $\widetilde{x} = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$, allora per il Teorema della base di Hilbert ho che $x - \widetilde{x} \in \mathcal{F}^\perp$ e $x - \widetilde{x} \neq 0$, in quanto $\widetilde{x} \in \overline{\operatorname{span}(\mathcal{F})} \not\ni x$. Dunque $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \left\{ \frac{x-\widetilde{x}}{\|x-\widetilde{x}\|} \right\}$ è un sistema ortonormale che contiene strettamente $\mathcal{F}$ che quindi non è massimale.

□

Proposizione 1.2.11: *Dato uno spazio di Hilbert separabile H, ogni sistema ortonormale di H si completa ad una base di Hilbert di H.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un sistema ortonormale di H e X l'insieme dei sistemi ortonormali di H che contengono $\mathcal{F}$ chiaramente una qualsiasi sottocatena per inclusione di X ha maggiorante (basta prendere l'unione), dunque per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale che è la base di Hilbert cercata.

□

1.3 Decomposizione ortogonale e proiezioni

Teorema 1.3.1 (di decomposizione ortogonale (nel caso separabile)): *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e $V \subset H$ un suo sottospazio vettoriale chiuso. Allora*

(1) Vale la decomposizione $H = V + V^\perp$, cioè $\forall x \in H \quad \exists x_V \in V \quad \exists x_{V^\perp} \in V^\perp$ t.c. $x = x_V + x_{V^\perp}$;

*(2) x_V e $x_{V^\perp}$ sono univocmente determinati, cioè $H = V \oplus V^\perp$, e sono detti **proiezioni ortogonali** di x su V e $V^\perp$ rispettivamente;*

(3) $x_V \in V$ è caratterizzato come l'elemento di V più vicino ad x.

Dimostrazione. (1): H è completo e V chiuso $\Rightarrow$ V è completo $\Rightarrow$ V è uno spazio di Hilbert col prodotto scalare ereditato da H separabile (perchè lo era H) $\Rightarrow$ V ammette base di Hilbert numerabile $\mathcal{F} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Prendo $\overline{x} = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$ allora $\overline{x} \in \overline{\operatorname{span}(\mathcal{F})} = V$ e per il Teorema della base di Hilbert $x - \overline{x} \in \overline{\operatorname{span}(\mathcal{F})}^\perp = V^\perp$, ma $x = \overline{x} + \widetilde{x}$ con $\widetilde{x} = x - \overline{x}$ che è quanto voluto.

(2): Se $y, y' \in V$ e $z, z' \in V^\perp$ sono t.c. $x = y + z = y' + z'$ allora si ha

$$V \ni y - y' = z - z' \in V^\perp$$

da cui $y - y' = z - z' = 0$ essendo $V \cap V^\perp = \{0\}$. Dunque $y = y' = x_V$ e $z = z' = x_{V^\perp}$.

(3): Per ogni $h \in V$ sia $f(h) := \|x-h\|^2$, la tesi equivale a dimostrare che y è l'unico minimo assoluto di f.

Ora $\forall h \in V$

$$f(h) = \|x - h\|^2 = \|(x - x_V) + (x_V - h)\|^2 =$$

chiaramente $x_V - h \in V$ mentre per quanto dimostrato in (1) e (2) necessariamente $x - x_V \in V^\perp$, dunque $x_V - h \perp x - x_V$ e quindi

$$= \|x - x_V\|^2 + \|x_V - h\|^2 = f(x_V) + \|x_V - h\|^2 \geq f(\overline{x})$$

in cui vale l'uguaglianza se e solo se $h = x_V$, dunque x_V è l'unico minimo assoluto di f.

$\square$

Osservazione 1.3.2 (Necessità delle ipotesi): Affinchè la decomposizione sopra esista è necessario che V sia chiuso.

Infatti se $\mathcal{F}$ è una base di Hilbert di H spazio di Hilbert di dimensione infinita e $V := \operatorname{span}(\mathcal{F})$ so che

$$V \subsetneq \overline{V} = H$$

e quindi grazie alla continuità del prodotto scalare

$$V^\perp = \overline{V}^\perp = H^\perp = \{0\}$$

da cui $V + V^\perp = V \subsetneq H$.

Si potrebbe mostrare che anche l'ipotesi di completezza di H è necessaria.

1.4 Spazio duale di uno spazio di Hilbert

Teorema 1.4.1 (di rappresentazione di Riesz): *Sia H spazio di Hilbert e $f : H \to \mathbb{C}$ funzionale lineare continuo su H.*

Esiste un unico $y \in H$ t.c. $\forall x \in H \quad f(x) = \langle x, y\rangle$.

Dimostrazione. (Unicità). Se $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$ per ogni $x \in H$, prendendo $x = y - y'$ si ha

$$\langle y - y', y\rangle - \langle y - y', y'\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \|y - y'\|^2 = 0$$

da cui $y = y'$.

(Esistenza). Se f è il funzionale identicamente nullo allora chiaramente $y = 0$. Altrimenti considero il sottospazio di H

$$V = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$$

essendo f non identicamente nulla si ha che $V \subsetneq H$ e quindi $V^\perp \neq \{0\}$ per il Teorema 3, in quanto altrimenti $H = V \oplus \{0\} = V$. Prendendo $z \in V^\perp$ con $\|z\| = 1$ si ha che $f(x)z - f(z)x \in V$ e quindi

$$0 = \langle f(x)z - f(z)x \ , \ z\rangle = f(x)\|z\|^2 - f(z)\langle x, z\rangle = f(x) - \langle x, \overline{f(z)}z\rangle$$

da cui $f(x) = \langle x, y \rangle$ con $y = \overline{f(z)}z$.

$\square$

Osservazione 1.4.2 (Il caso reale): Per quanto detto sugli spazi duali nell'Osservazione 1, lo stesso risultato di rappresentazione vale anche nel caso reale. Infatti sia H spazio di Hilbert reale ed $f : H \to \mathbb{R}$ un funzionale continuo, prendo il complessificato $\widetilde{f} : H_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ allora anche questo è continuo ed esiste un unico $y = a + ib \in H_{\mathbb{C}}$ che rappresenta $\widetilde{f}$.

Ora preso $x \in H \subset H_{\mathbb{C}}$, si ha

$$\mathbb{R} \ni f(x) = \widetilde{f}(x) = \langle x, a + ib \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, a \rangle_{\mathbb{C}} - i\langle x, b \rangle_{\mathbb{C}} =$$

ricordando che $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ ristretto a $H \times H \subset H_{\mathbb{C}} \times H_{\mathbb{C}}$ è uguale a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che è a valori reali

$$= \langle x, a \rangle - i\langle x, b \rangle =$$

necessariamente essendo reale

$$= \langle x, a \rangle$$

dunque il vettore che rappresenta f sarà a.

Inoltre dal fatto che deve essere $\langle x, b \rangle = 0$ per ogni $x \in H$ si ottiene $b = 0$, ossia che $y = a \in H$, da cui, in particolare, anche l'unicità del rappresentante di f.

Osservazione 1.4.3 (Esistenza di funzionali non continui): Se H ha dimensione infinita allora esistiono funzionali non continui.

Infatti sia G una base algebrica di H di vettori unitari, G è infinito allora contiene una successione numerabile $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Prendo $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ lineare data da

$$\Lambda(e_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Lambda(e) = 0 \quad \forall e \in G \setminus \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

allora

$$+\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\Lambda(e_n)| \leq \sup_{\|e\|=1} |\Lambda(e)|$$

dunque Λ non è limitato in 0 che ci dice che non è continuo.

Capitolo 2

Serie di Fourier

2.1 Base di Fourier e serie di Fourier

Lo scopo è quello di scrivere una $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ o $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica come

$$f(x) = \sum_{n+-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

una scrittura di questo tipo è detta **serie di Fourier** di f.

La scrittura di funzioni in questa forma ci permetterà di risolvere particolari classi di EDP che compaiono nella fisica e nella matematica.

Ricordiamo adesso il fondamentale Teorema di Stone e dimostriamo un suo utile corollario.

Teorema 2.1.1 (di Stone (complesso)): *Siano X uno spazio topologico compatto e $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{C})$ un'algebra chiusa, separante e auto-coniugata di funzioni complesse continue su X. Allora $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$ se non vi sono zeri comuni a tutte le funzioni di $\mathcal{A}$ oppure se $\exists x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{A}$ si ha $\mathcal{A} = \mathcal{I}_{x_0}^{\mathbb{C}}$, in cui $\mathcal{I}_{x_0}^{\mathbb{C}} := \{u \in C(X, \mathbb{C}) \mid u(x_0) = 0\}$*

Corollario 2.1.2: *Siano X uno spazio topologico compatto e $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{C})$, un'algebra chiusa, che non ha in X zeri comuni e auto-coniugata.*

Definendo su X la relazione d'equivalenza data da

$$x \sim y \iff \forall f \in \mathcal{A}\ f(x) = f(y)$$

e l'insieme di funzioni continue

$$C_\sim(X, \mathbb{C}) := \{f \in C(X, \mathbb{C}) \mid \forall x_1, x_2 \in X\ x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\}$$

si ha che $\mathcal{A} = C_\sim(X, \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Consideriamo la relazione d'equivalenza su X data da

$$x \sim y \iff \forall f \in \mathcal{A}\ f(x) = f(y)$$

è ben definito il quoziente $\widetilde{X} := X/\sim$ (stiamo rendendo equivalenti tutti i punti che $\mathcal{A}$ non riesce a separare) e per la proprietà universale dei quozienti topologici è ben definito l'insieme

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \left\{ \widetilde{f} \mid \exists f \in \mathcal{A} \text{ t.c. } f = \widetilde{f} \circ \pi \right\} \subset C(\widetilde{X}, \mathbb{C})$$

in cui $\pi : X \to \widetilde{X}$ è la proiezione al quoziente e si osserva che per come è definita $\sim$ ogni $f \in \mathcal{A}$ ammette un trasporto al quoziente.

$\widetilde{\mathcal{A}}$ è un'algebra (verifiche semplici) e per costruzione è separante, inoltre è l'immagine di $\mathcal{A}$, che è completo, mediante

$$\mathcal{A} \ni f \mapsto \widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}}$$

che è un'isometria surgettiva (rispetto alle norme uniformi), infatti essendo π surgettiva si ha

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X} |\widetilde{f}(\pi(x))| = \sup_{x \in \widetilde{X}} |\widetilde{f}(x)| = \|\widetilde{f}\|_{\infty,\widetilde{X}}$$

ed è surgettiva per come è fatta $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Dunque anche $\widetilde{\mathcal{A}}$ è completo e quindi chiuso in $C(\widetilde{X}, \mathbb{C})$, ma $\mathcal{A}$ è auto-coniugata, allora anche $\widetilde{\mathcal{A}}$ è auto-coniugata, infatti se $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ con $f = \widetilde{f} \circ \pi$, si ha $\overline{f} = \overline{\widetilde{f} \circ \pi} = \overline{\widetilde{f}} \circ \pi$ e $\overline{f} \in \mathcal{A}$ allora $\overline{\widetilde{f}} \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Dunque ci sono tutte le ipotesi del Teorema di Stone (sia nel caso reale che in quello complesso), il quale ci dice che $\widetilde{\mathcal{A}}$ è tutto $C(\widetilde{X}, \mathbb{C})$, in quanto non ci sono in $\widetilde{X}$ zeri comuni a tutte le funzioni in $\widetilde{\mathcal{A}}$ (se ci fosse ci sarebbe in X uno zero comune a tutte le funzioni in $\mathcal{A}$).

Ma allora definendo

$$C_\sim(X, \mathbb{C}) := \{f \in C(X, \mathbb{C}) \mid \forall x_1, x_2 \in X \ x_1 \sim x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) = f(x_2)\}$$

si ha che queste sono tutte e sole le funzioni che ammettono un trasporto al quoziente continuo (sempre per la proprietà universale dei quozienti topologici) e quindi $\mathcal{A} = C_\sim(X, \mathbb{C})$.

Infatti chiaramente $\mathcal{A} \subset C_\sim(X, \mathbb{C})$, mentre $\mathcal{A} \supset C_\sim(X, \mathbb{C})$ perché presa una $f \in C_\sim(X, \mathbb{C})$ esiste una $\widetilde{f} \in C(\widetilde{X}, \mathbb{C})$ t.c. $f = \widetilde{f} \circ \pi$ ma essendo $C(\widetilde{X}, \mathbb{C}) = \widetilde{\mathcal{A}}$ esiste una $f' \in \mathcal{A}$ t.c.

$$f' = \widetilde{f} \circ \pi = f$$

da cui $f \in \mathcal{A}$.

□

Dunque dimostriamo il fondamentale

Teorema 2.1.3 (della base di Fourier): *La famiglia di funzioni* $\mathcal{F} = \left\{ e_n(x) := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *forma una base di Hilbert di* $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Bisogna vedere che $\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale completo.

(Ortonormalità). Per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

e questo integrale ha, banalmente, come risultato 1 se $n = m$, mentre se $n \neq m$ è uguale a

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(Completezza). A questo punto entra in gioco Stone, considero sul compatto $[-\pi, \pi]$ l'algebra di funzioni continue in $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$

$$\mathcal{A} := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{\substack{n \in J \\ J \subset \mathbb{Z} \\ J \text{finito}}} c_n e^{inx} \mid \{c_n\}_n \subset \mathbb{C} \right\}$$

questa separa i punti di $[-\pi, \pi]$ tranne $-\pi$ e π, contiene le costante dunque non ha zeri comuni ed è auto-coniugata, quindi per il Corollario 3

$$\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = \{f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$$

ma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|c_n e^{inx}\right|^2 dx = c_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi c_n^2$$

dunque $\mathcal{A} \subset L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ da cui, ricordando che in spazi di misura finiti la convergenza uniforme implica la convergenza L^p (a noi serve L^2),

$$\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})}} \supset \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = \{f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$$

ed infine osservando che presa una $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ questa si può approssimare il norma L^2 con la successione $(f_n := \varphi_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni in $\{f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$, in cui φ_n è costante 1 in $[-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]$, costante 0 in $(-\infty, -\pi] \cup [\pi, +\infty)$ e affine in $[-\pi, -\pi + \frac{1}{n}] \cup [\pi - \frac{1}{n}, \pi]$ in modo che sia continua, infatti

$$\|f - \varphi_n f\|^2_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} \leq \left(\frac{2\|f\|_\infty}{n}\right)^2 \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

da cui

$$\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})}} \supset \overline{\{f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}}^{\|\cdot\|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})}} \supset C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$$

e ricordando che

$$\overline{C([-\pi, \pi], \mathbb{C})}^{\|\cdot\|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})}} = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$$

si ottiene

$$\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})}} \supset L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$$

che ci permette di concludere $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})}} = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

$\square$

Corollario 2.1.4 (Serie di Fourier): *Per ogni* $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ *si ha*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right] e^{inx}$$

in cui l'uguaglianza va intesa come una convergenza in $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Per il Teorema della base di Hilbert si ha

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle e_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\overline{e^{int}}}{\sqrt{2\pi}}dt\right] \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

che è uguale a quanto voluto.

□

Definizione 2.1.5 (Coefficienti di Fourier): Data una $f \in L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ si definiscono i **coefficienti di Fourier** di f come

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 2.1.6: Per definire formalmente i coefficienti di Fourier basta richiedere $f \in L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Si ricorda che essendo $[-\pi,\pi]$, con l'usuale misura di Lebesgue, uno spazio di misura finito si ha $L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C}) \supset L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Corollario 2.1.7 (Uguaglianze di Parseval-Fourier): *Per ogni* $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ *si ha*

$$\|f\|^2_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

e per ogni $f, g \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$

$$\langle f, g\rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

Dimostrazione. Sono le uguaglianze di Parseval.

□

Risoluzione del problema di Basilea

Consideriamo la funzione $f(x) = x$ e calcoliamone i coefficienti di Fourier

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}dx =$$

essendo l'integrale nell'ultimo pezzo nullo

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^k i}{n}$$

Dunque

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

ma contemporaneamente

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{\pi^2}{3}$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.2 Regolarità di f e coefficienti di Fourier

Proposizione 2.2.1: *Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ t.c.*

(R) $f \in C^1$ (o anche f continua e C^1 a tratti);

(CB) $f(-\pi) = f(\pi)$.

Allora $c_n(f') = inc_n(f)$.

Dimostrazione. Si ha

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx =$$

intengrando per parti

$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{-inx}dx =$$

$$= in\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = inc_n(f).$$

□

Osservazione 2.2.2: L'ipotesi in (R) sono quelle minimali affinchè si possa applicare l'integrazione per parti. Inoltre implicano f limitata in $[-\pi,\pi]$ e quindi in $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Proposizione 2.2.3: *Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ per cui valgano (R) e (CB).*

Allora per ordine di implicazione

(1) vale

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|_{L^2}^2}{2\pi} < +\infty$$

(2) Per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$$

(3) la serie di Fourier di f converge totalmente, cioè

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n(f) e^{inx}\|_\infty < +\infty$$

Dimostrazione. (1). Si ha usando la Proposizione 10

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2 =$$

per Parseval

$$= \frac{\|f'\|_{L^2}^2}{2\pi}$$

(2). Considero prima la somma senza il termine di indice $n = 0$ e ottengo

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} |n|^\alpha |c_n(f)| = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} |n||c_n(f)| \frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \leq$$

per Cauchy-Schwarz

$$\leq \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} n^2 |c_n(f)| \right)^{\frac{1}{2}} \left(2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e il primo fattore del RHS è finito per il punto (1), mentre il secondo è finito se e solo se

$$2 - 2\alpha > 1 \iff \alpha < \frac{1}{2}$$

da cui facilmente la tesi in quanto aggiungere un addendo (finito) non influisce sulla convergenza di una serie.

(3). Dal punto (2) con $\alpha = 0$ ottengo

$$+\infty > \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n(f) e^{inx}\|_\infty$$

□

Osservazione 2.2.4: Dunque, dalla proposizione qua sopra, si evince il seguente ragionamento: se una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ è abbastanza regolare (C^1) allora i coefficienti di Fourier tendono a zero velocemente e quindi la serie di Fourier converge non solo puntualmente, ma addirittura uniformemente ad una funzione che sappiamo dover essere proprio f visto che già vi converge in L^2.

Proposizione 2.2.5: *Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ t.c.*

(R_k) $f \in C^k$ (o anche $f \in C^{k-1}$ e $D^{k-1}f$ è C^1 a tratti);

(CB_{k-1}) $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ per ogni $h = 0, 1, ..., k-1$.

Allora

(1) Per ogni $h = 0, 1, ..., k$ e $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(D^h f) = (in)^h c_n(f)$$

(2) vale

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2k} |c_n(f)|^2 = \frac{\|D^k f\|_{L^2}^2}{2\pi} < +\infty$$

(3) Per ogni $\alpha < k - \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$$

(4) la serie di Fourier di f converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine $k-1$.

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 11.

□

Proposizione 2.2.6: *Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continua. Se*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{k-1} |c_n(f)| < \infty$$

allora $f \in C^{k-1}$ e soddisfa (CB_{k-1}).

Dimostrazione. Preso $h = 0, 1, ..., k-1$ si ha che $D^h(c_n(f)e^{inx}) = c_n(f)(in)^h e^{inx}$, dunque

$$\|D^h(c_n(f)e^{inx})\|_\infty = |c_n(f)||n|^h \leq |c_n(f)||n|^{k-1}$$

dunque grazie all'ipotesi $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D^h(c_n(f)e^{inx})$ converge totalmente e quindi uniformemente per ogni $h = 0, 1, ..., k-1$. Prendendo ora la funzione limite per $h = 0$ $\widetilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, questa è di classe C^{k-1} per il Teorema di Limite sotto il segno di Differenziale. Inoltre

$$\left\| \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx} - \widetilde{f} \right\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi} \left\| \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx} - \widetilde{f} \right\|_\infty \to 0$$

per $N \to +\infty$. Dunque la convergenza a $\widetilde{f}$ è in L^2, ma già la serie convergeva ad f in L^2, dunque $f = \widetilde{f}$ q.o., ma le funzioni in questione sono continue, quindi $f = \widetilde{f}$ ovunque, cosa che conclude. Inoltre f soddisfa (CB_{k-1}) perché, sempre per il Teorema di Limite sotto il segno di Differenziale, si ha

$$D^h f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(in)^h e^{inx}$$

$\square$

Osservazione 2.2.7: Nella dimostrazione precedente si è usato il fatto che se due funzione f, g continue ed uguali q.o. allora sono uguali ovunque.

Questo è vero perchè se esiste un punto x t.c. $f(x) - g(x) \neq 0$ allora esiste per continuità tutta una palla in cui tale funzione è non nulla, ma tale palla ha misura positiva, che è un assurdo.

Osservazione 2.2.8: La proposizione precedente ci dice che una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continua con coefficienti di Fourier che decadono a 0 ad una certa velocità ha una regolarità proporzionale a tale velocità di decadimento.

2.3 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Iniziamo con una semplice osservazione.

Lemma 2.3.1: *Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è T-periodica e $L^1([0, T])$ allora per ogni $c, s \in \mathbb{R}$*

$$\int_0^T g(t)dt = \int_c^{T+c} g(t-s)dt$$

L'obbiettivo di questa sezione è investigare la convergenza puntuale della serie di Fourier, ossia sotto quali condizioni si può assicurare la convergenza della serie di Fourier di una $f \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ (estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$) in un dato punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.3.2 (Rappresentazione per convoluzione delle somme parziali): *Sia $f \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ e sia*

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}$$

allora vale

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t)dt$$

dove

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Dimostrazione.

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)} \right) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy =$$

pongo $t = x - y$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

in cui l'ultima uguaglianza segue dal Lemma 2 accorgendosi che l'integranda è $2\pi-$periodica. Inoltre

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} (e^{it})^n = e^{-iNt} \sum_{n=0}^{2N} (e^{it})^n =$$

$$= e^{-iNt} \frac{e^{(2N+1)t-1}}{e^{it}-1} = \frac{e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{-\frac{it}{2}}} \frac{e^{(2N+1)t-1}}{e^{it}-1} =$$

$$= \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

□

Osservazione 2.3.3: Vale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$$

Lemma 2.3.4 (di Riemann-Lebesgue generalizzato): *Siano $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ $T-$periodica.*

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx) dx \overset{y \to \pm\infty}{\longrightarrow} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) \left(⨍_0^T h(x) dx \right)$$

Dimostrazione. Pongo $a := \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$ e $m := ⨍_0^T h(x) dx$.

Per ogni $s, y \in \mathbb{R}$ pongo

$$\Phi(y, s) := \int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx + s) dx$$

dunque la tesi equivale a

$$\Phi(y, 0) \overset{y \to \pm\infty}{\longrightarrow} am$$

Dimostriamo

(1) per ogni $y \in \mathbb{R}$

$$⨍_0^T \Phi(y, s) ds = am$$

(2) per ogni $s \in \mathbb{R}$

$$\Phi(y,s) - \Phi(y,0) \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

Infatti da (1) e (2) segue la tesi

$$\Phi(y,0) - am = \Phi(y,0) - \fint_0^T \Phi(y,s)ds =$$

$$= \fint_0^T (\Phi(y,0) - \Phi(y,s))\, ds \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

per convergenza dominata, infatti per (2) si ha la convergenza puntuale dell'integranda a 0 e per Hölder

$$|\Phi(y,s)| \le \|g\|_{L^1}\|h\|_\infty$$

dunque la dominazione è data da

$$|\Phi(y,0) - \Phi(y,s)| \le 2\|g\|_{L^1}\|h\|_\infty \in L^1([0,T])$$

Dunque dimostriamo (1) e (2).

(1).

$$\fint_0^T \Phi(y,s)ds = \fint_0^T \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx+s)dxds =$$

per Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}} \fint_0^T h(yx+s)dsg(x)dx = m\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = am$$

e posso usare Fubini perchè

$$\fint_0^T \int_{\mathbb{R}} |g(x)h(yx+s)|\, dxds = \int_{\mathbb{R}} \fint_0^T |h(yx+s)|\, ds\, |g(x)|\, dx \le$$

$$\le \|h\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx = \|h\|_\infty \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

(2).

$$\Phi(y,s) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h\left(y\left(x + \frac{s}{y}\right)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} g\left(t - \frac{s}{y}\right) h(yt)dt$$

in cui si è posto $t = x + \frac{s}{y}$.

Dunque

$$\Phi(y,s) - \Phi(y,0) = \int_{\mathbb{R}} \left[g\left(t - \frac{s}{y}\right) - g(t)\right] h(yt)dt$$

e

$$|\Phi(y,s) - \Phi(y,0)| \le \int_{\mathbb{R}} \left|\tau_{\frac{s}{y}} g(t) - g(t)\right| |h(yt)|\, dt \le \left\|\tau_{\frac{s}{y}} g - g\right\|_{L^1} \|h\|_\infty \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Adesso il risultato principale della sezione.

Teorema 2.3.5: *Sia $f \in L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ e sia $\overline{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists \alpha > 0$ t.c. f è $\alpha-$hölderiana in $\overline{x}$, ossia $\exists \delta \in (0,\pi]$ e $M < +\infty$ t.c. $\forall t \in [-\delta,\delta]$*

$$|f(\overline{x}+t) - f(\overline{x})| \leq M\,|t|^\alpha$$

Allora la serie di Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{in\overline{x}}$ converge a $f(\overline{x})$.

Dimostrazione. Ricordando l'osservazione 14 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_N f(\overline{x}) - f(\overline{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x}-t)D_N(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})D_N(t)dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\overline{x}-t) - f(\overline{x})\right) D_N(t)dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x}-t)-f(\overline{x})}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \end{aligned}$$

per il Lemma di Riemann-Lebesgue, se $g(t) = \frac{f(\overline{x}-t)-f(\overline{x})}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \in L^1([-\pi,\pi])$

$$\overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x}-t)-f(\overline{x})}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt\right)\left(⨍_0^{2\pi} \sin(x)dx\right) = 0$$

essendo $⨍_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$. Dunque vediamo che effettivamente $g \in L^1([-\pi,\pi])$. Per $|t| \leq \delta$ con $\delta \in (0,\pi]$ dato dall'hölderianità di f in $\overline{x}$ (in questo intervallo c'è un problema al denominatore perché c'è $t=0$ e $\sin(0)=0$) si ha

$$|g(t)| = \frac{|f(\overline{x}-t)-f(\overline{x})|}{|\sin\left(\frac{t}{2}\right)|} \leq \frac{M|t|^\alpha}{|t|/\pi} = \frac{M\pi}{|t|^{1-\alpha}} \in L^1([-\pi,\pi])$$

in cui si è usato che per $t \in [-\pi,\pi]$ si ha, per concavità, $\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \geq \frac{|t|}{\pi}$. E per $\delta \leq |t| \leq \pi$ si ha

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\overline{x}-t)| + |f(\overline{x})|}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \in L^1([-\pi,\pi])$$

Dunque si può concludere $g \in L^1([-\pi,\pi])$.

□

2.4 Serie di Fourier estesa e reale

Sia $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, ricordando l'identità di Eulero

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

prendiamo le somme parziali della serie di Fourier di f e otteniamo

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left[c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right]$$

$$= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left[(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i\, (c_n(f) + c_{-n}(f)) \sin(nx) \right]$$

e quindi definendo

$$a_n(f) := c_n(f) + c_{-n}(f) \qquad b_n(f) := i\,(c_n(f) + c_{-n}(f))$$

si ottiene

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \right].$$

Lemma 2.4.1 (Base di Fourier estesa): *La famiglia*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \geq 1}$$

forma una base di Hilbert di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Chiaramente per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

$$\langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0$$

perché $\sin(mx)$ è dispari mentre $\cos(nx)$ è pari dunque il prodotto è dispari e di conseguenza l'integrale sull'intervallo simmetrico $[-\pi, \pi]$ è nullo. Inoltre se $n \neq m$

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \left\langle \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{4} \left\langle e^{inx} - e^{-inx}, e^{imx} - e^{-imx} \right\rangle = 0$$

e similmente se $n \neq m$

$$\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = \frac{1}{4} \left\langle e^{inx} + e^{-inx}, e^{imx} + e^{-imx} \right\rangle = 0$$

Calcoliamo adesso le norme

$$\| \sin(nx) \|^2_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2(nx)) dx =$$

$$= 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx =$$

$$2\pi - \left(- \int_{\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} (-n \sin(nx)) dx + \left[\frac{cos(nx) \sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

$$= 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = 2\pi - \| \sin(nx) \|^2_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})}$$

da cui

$$\| \sin(nx) \|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} = \sqrt{\pi}$$

E similmente si ottiene

$$\| \cos(nx)\|_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} = \sqrt{\pi}$$

Infine il sistema ortonormale considerato è completo in quanto

$$\operatorname{span}\left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\geq 1} = \operatorname{span}\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

che sappiamo essere completo.

□

Teorema 2.4.2 (Serie di Fourier estesa): *Sia $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, vale*

$$f(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)]$$

in cui l'uguaglianza è intesa come convergenza in L^2.

Dimostrazione. Essendo $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ vale $(c_n(f))_n \in \ell^2$ dunque anche $(a_n(f))_n, (b_n(f))_n \in \ell^2$ e quindi la serie nel RHS converge in quanto $\left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\geq 1}$ formano una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Dunque la serie converge in L^2 ad un elemento di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ che però deve essere $f(x)$ essendo

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = f(x)$$

in cui ancora tutte le uguaglianze sono intese come convergenza in L^2.

□

Proposizione 2.4.3: *Sia $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$. Vale $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ ossia a è valori reali, se e solo se $c_0(f) \in \mathbb{R}$ e $a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Se $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ si ottiene

$$c_0(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \in \mathbb{R}$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \in \mathbb{R}$$

$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \in \mathbb{R}$$

Il viceversa si ottiene dalla rappresentazione in serie di Fourier estesa.

□

Corollario 2.4.4 (Serie di Fourier reale): *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$, vale*

$$f(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)]$$

in cui tutti i coefficienti sono reali e l'uguaglianza è sempre intesa come convergenza in L^2.

Ora un interessante caratterizzazione delle funzioni L^2 q.o. reali in termini dei coefficienti di Fourier.

Proposizione 2.4.5: *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi); \mathbb{C})$. Allora f è reale q.o. su $[-\pi, \pi]$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.*

Dimostrazione. Posso supporre wlog che f sia reale ovunque. Dalla serie di Fourier estesa si ha che f è reale se e solo se $a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$ per ogni $n \geq 1$ e questo è se e solo se per ogni $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n(f) = \overline{a_n(f)} \\ b_n(f) = \overline{b_n(f)} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} c_n(f) + c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)} + \overline{c_{-n}(f)} \\ i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = i(-\overline{c_n(f)} + \overline{c_{-n}(f)}) \end{cases}$$

da cui semplificando i nella seconda equazione e sommando l'una all'altra si ottiene

$$2c_n(f) = 2\overline{c_{-n}(f)}$$

che equivale alla tesi.

□

2.5 Serie in seni

Teorema 2.5.1 (Serie in seni): *Sia $f \in L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$ allora*

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n(f)\sin(nx)$$

in cui

$$b_n(f) := \frac{2}{n}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$$

e l'uguaglianza è intesa come convergenza in $L^2([0, \pi])$.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n \geq 1}$ è una base di Hilbert per $L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$. L'ortonormalità segue da semplici conti simili ad alcuni già fatti e sono quindi omessi. Vediamo la completezza. Sia $f \in L^2([0,\pi];\mathbb{R})$, la estendiamo ad una $\widetilde{f} \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ in modo dispari e questa è scrivibile come serie di Fourier reale

$$\widetilde{f}(x) = c_0(f) + \sum_{n\geq 1} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)]$$

$$= \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx)$$

in cui $a_n(f) = 0$ per ogni $n \geq 1$ perché $\widetilde{f}$ è dispari e $[-\pi,\pi]$ è un intervallo simmetrico.

Inoltre $\widetilde{f}|_{[0,\pi]} = f$ e

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

□

Proposizione 2.5.2: *Sia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ t.c.*

(R) $f \in C^2([0,\pi])$;

(CBD) $f(0) = f(\pi) = 0$.

allora per ogni $n \geq 1$ vale $b_n(f'') = -n^2 b_n(f)$.

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 1$ si ha

$$b_n(f'') = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f''(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[f'(x)\sin(nx)\right]_0^{\pi} - n\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\cos(nx)dx$$

$$= -n\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\cos(nx)dx = -n\frac{2}{\pi}\left[f(x)\cos(nx)\right]_0^{\pi} - n^2\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$= -n^2 b_n(f).$$

□

2.6 Alcune applicazioni

In questa sezione vedremo alcune interessanti ed utili applicazioni della serie di Fourier.

Nel seguito per una funzione di due variabili $u(t,x)$ con u_t e u_x intenderemo le derivate nella prima e nella seconda variabile rispettivamente.

2.6.1 Equazione del calore su un anello

Supponiamo di avere un anello conduttore omogeneo e sottile. Parametrizziamo l'anello con $[-\pi, \pi]$. Pongo $u : [0, T) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione "calore" su tale anello nell'intervallo di tempo $[0, T)$. Allora u risolve il seguente problema che chiamerò (P)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad (\text{per } t > 0) \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \quad (\text{per } t > 0) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \quad (\text{per } t > 0) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

in cui la seconda e la terza riga sono **condizioni di periodicità** mentre l'ultima è la **condizione iniziale**.

Per prima cosa risolviamo il problema formalmente, ossia attraverso dei passaggi puramente formali. Scriviamo u in serie di Fourier rispetto ad x

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

in cui $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$. Allora

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx}$$

$$u_{xx}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [-n^2 c_n(t)] e^{inx}$$

da cui

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad \forall t \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \iff c_n(0) = c_n^0 := c_n(u_0).$$

Dunque u risolve (P) se e solo se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{c}_n = -n^2 c_n \\ c_n(0) = c_n^0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione

$$c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}.$$

Quindi la candidata soluzione di (P) è

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$$

Teorema 2.6.1 (Esistenza e regolarità): *Sia u_0 è continua e t.c. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$. Allora*

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \tag{2.1}$$

definisce una funzione $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ t.c.

(1) u è continua;

(2) u è $2\pi-$periodica in x ed è reale se u_0 è reale;

(3) $u \in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R})$;

(4) u risolve (P).

Dimostrazione. Chiamo per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$u_n(t,x) = c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

(1). Sia $R = [0,+\infty)\times\mathbb{R}$ allora

$$\|u_n\|_{\infty,R} = |c_n^0|$$

ma per ipotesi $(c_n^0)_n$ è assolutamente convergente, dunque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge totalmente e quindi uniformemente ad una u ben definita e continua su R.

(2). Prendo u_0 reale allora $c_{-n}^0 = \overline{c_n^0}$ da cui $c_{-n^0} e^{-(-n)^2 t} = \overline{c_n^0} e^{-n^2 t}$, ossia

$$c_{-n}(u(t,\cdot)) = \overline{c_n(u(t,\cdot))}$$

e quindi la soluzione definita da (1) è reale per ogni tempo per cui è definita.

(3). Siano $h,k \in \mathbb{N}$

$$D_t^h D_x^k u_n = c_n^0 (-n^2)^h (in)^k i^{-n^2 t} e^{inx}$$

e quindi

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{\infty,R} = |c_n^0||n|^{2h+k}.$$

Ora fisso $\delta > 0$ e considero $R_\delta := (\delta,\infty)\times\mathbb{R}$ e si ha

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{\infty,R_\delta} = |c_n^0||n|^{2h+k} e^{-n^2\delta} \leq M_{h,k}|c_n^0|$$

con $M_{h,k} = \max_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2h+k} e^{-n^2\delta}$, che esiste perchè la successione $(|n|^{2h+k}e^{-n^2\delta})_{n\in\mathbb{Z}}$ è infinitesima e quindi limitata.

Ora $(M_{h,k}c_n^0)$ è assolutamente sommabile per ipotesi e quindi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su R_δ per ogni $h,k \in \mathbb{N}$.

Quindi per il Teorema di Limite sotto il segno di Dofferenziale $u \in C^\infty(R_\delta)$ per ogni $\delta > 0$, ma gli R_δ sono aperti in R (con la topologia di sottospazio), dunque u è C^∞ su $\bigcup_{\delta>0} R_\delta = (0,+\infty)\times\mathbb{R}$.

(4). u è $2\pi-$periodica in x quindi valgono le condizioni di periodicità. Poi

$$u(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{inx} = u_0(x)$$

per q.o. x ma entrambe le funzioni coinvolte sono continue allora $u(0,\cdot) = u_0$ ovunque. Infine ogni u_n risolve $(u_n)_t = (u_n)_{xx}$ allora per il Teorema di Limite sotto al Segno di Differenziale anche $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ risolve $u_t = u_{xx}$ per $t > 0$.

$\square$

Lemma 2.6.2: *Sia* $u : I \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *con* I *intervallo di* $\mathbb{R}$*, continua su tutto* $I \times \mathbb{R}$ *e di classe* C^k *in* t*. Allora*

$$c_n\left(D_t^h u(t,\cdot)\right) = D_t^h c_n(u(t,\cdot))$$

Dimostrazione.

$$c_n(u(t,\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)e^{-inx}dx$$

e quindi per il Teorema di Derivazione sotto al Segno d'Integrale si ha

$$\dot{c}_n(u(t,\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_t(t,x)e^{-inx}dx = c_n(u_t(t,\cdot))$$

I bound per applicare il Teorema di Derivazione sotto al Segno d'Integrale ci sono grazie alla regolarità in tutte le variabili di u che si ha per ipotesi.

□

Teorema 2.6.3 (Unicità):

Sia $u : [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ *continue,* C^1 *in* t *e* C^2 *in* x *per* $t > 0$.

Se u *risolve (P) allora* u *è l'unica soluzione di (P).*

Dimostrazione.

Pongo $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot))$.

So che per $t > 0$

$$\dot{c}_n(t) = c_n(u_t(t,\cdot)) = c_n(u_{xx}(t,\cdot)) = -n^2 c_n(t)$$

allora c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{c}_n = -n^2 c_n \\ c_n(0) = c_n^0 \end{cases}$$

problema ben posto anche in $t = 0$ perché c_n è continua in $t = 0$ dunque è c^1 anche in $t = 0$ e risolve l'equazione anche in $t = 0$.

Il problema è fatto da un'equazione lineare che di conseguenza ha le ipotesi di Lipschitz grazie alle quali si può applicare il Teorema di Cauchy-Lipschtz che ci permette di concludere l'unicità dei coefficienti e quindi anche di u.

□

Nel seguito si utilizzerà il seguente spazio di funzioni

$$C^k_{per} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f\ 2\pi - \text{periodica}\ ,\ f \in C^k \right\}$$

Teorema 2.6.4 (Potenziale Non Esistenza per Tempi Negativi):
Esiste $u_0 \in C^k_{per}$ *t.c.* $\forall \delta > 0$ *non esiste una* $u : (-\delta, 0] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *soluzione di (P).*

Dimostrazione.
Sia $u : (-\delta, 0] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ un eventuale soluzione.
Sia $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$.
Dalla dimostrazione del Teorema 11 sappiamo che c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{c}_n = -n^2 c_n \\ c_n(0) = c_n^0 \end{cases}$$

da cui $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$.
Ora scelgo $c_n^0 = e^{-|n|}$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0 |n|^k < +\infty$$

da cui $u_0 \in C^\infty_{per}$.
Ma $(c_n^0 e^{-n^2 t})_{n \in \mathbb{Z}}$ non è infinitesima per $n \to \pm\infty$ per ogni $t < 0$, dunque la soluzione u non esiste per $t < 0$ in quanto se esistesse allora $u(t, \cdot)$ sarebbe in $L^2([-\pi, \pi])$ e quindi i suoi coefficienti di Fourier $c_n^0 e^{-n^2 t}$ sarebbero infinitesime per $n \to \pm\infty$, che è un assurdo.

$\square$

2.6.2 Equazione delle Onde su un anello

Parametrizziamo l'anello con $[-\pi, \pi]$.
Pongo $u : I \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, la funzione che descrive un onda che attraversa l'anello.
Allora u risolve il problema che chiamerò (Q)

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \quad \text{su } [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases}$$

in cui la seconda e la terza equazione sono le **condizioni di periodicità** e le ultime due sono le **condizioni iniziali**.

Come per l'equazione del calore risolviamo il problema formalmente.

Pongo

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

allora

$$u_{tt}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ddot{c}_n(t) e^{inx}$$

$$v^2 u_{xx}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} [-v^2 n^2 c_n(t)] e^{inx}$$

da cui

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \iff \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n$$

$$u(0,\cdot) = u_0 \iff c_n(0) = c_n^0 := c_n(u_0)$$

$$u_t(0,\cdot) = u_1 \iff \dot{c}_n(0) = c_n^1 := c_n(u_1)$$

Quindi u risolve (Q) se e solo se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \end{cases}$$

che ha soluzione $c_n(t) = \frac{1}{2}\left(c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv}\right) e^{invt} + \frac{1}{2}\left(c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv}\right) e^{-invt}$ per $n \neq 0$ e $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$ per $n = 0$.

Nel seguito chiamerò

$$\alpha_n^+ := \frac{1}{2}\left(c_n^0 + \frac{c_n^1}{inv}\right)$$

$$\alpha_n^- := \frac{1}{2}\left(c_n^0 - \frac{c_n^1}{inv}\right)$$

in modo che la soluzione per $n \neq 0$ si scriva $c_n(t) = \alpha_n^+ e^{invt} + \alpha_n^- e^{-invt}$.

Quindi la candidata soluzione è

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left[\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)}\right] \tag{2.2}$$

che si può riscrivere

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x+vt) + \varphi^-(x-vt) \tag{2.3}$$

in cui

$$\varphi^+(x+vt) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \alpha_n^+ e^{in(x+vt)}$$

$$\varphi^-(x-vt) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \alpha_n^- e^{in(x-vt)}$$

Si osserva che la (3) ha un interessante interpretazione fisica: le due funzioni $\varphi^{\pm}$ descrivono due onde che viaggiano in direzioni opposte.

Lemma 2.6.5:

Siano $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue con g primitiva di h e $T > 0$.

Allora g è $T-$periodica se e solo se h è $T-$periodica e $\int_0^T hdx = 0$.

Dimostrazione.

Se g è $T-$periodica allora $h = g'$ è $T-$periodica e

$$\int_0^T h(x)dx = g(T) - g(0) = 0$$

Viceversa se h è $T-$periodica e $\int_0^T hdx = 0$ si ha che per ogni x

$$g(x+T) - g(x) = \int_x^{x+T} h(y)dy = \int_0^T h(y)dy = 0$$

da cui g $T-$periodica.

□

Teorema 2.6.6 (Esistenza a partire da (3)):

Siano $u_0 \in C^2_{per}$ e $u_1 \in C^1_{per}$.

Allora esistono c^0_0, c^1_0 costanti e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{per}$ t.c. u definita da (2) è di classe C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $2\pi-$periodica in x e risolve (Q).

Dimostrazione.

Passo 1:

Se $c^0_0, c^1_0 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{per}$ allora la u data da (3) è C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (è definita su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ perché lo sono $\varphi^{\pm}$), $2\pi-$periodica in x e risolve l'equazione $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

Infatti

$$u_{tt} = {\varphi^+}''(x+vt)v^2 + {\varphi^-}''(x-vt)v^2 = v^2\left[{\varphi^+}''(x+vt) + {\varphi^-}''(x-vt)\right]$$

$$u_{xx} = {\varphi^+}''(x+vt) + {\varphi^-}''(x-vt)$$

Passo 2:

Dimostriamo che esistono $c^0_0, c^1_0 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{per}$ t.c. la u data da (3) soddisfa le condizioni iniziali in (Q).

Imposto il sistema

$$\begin{cases} u(0,\cdot) = c^0_0 + \varphi^+ - \varphi^- = u_0 \\ u_t(t,\cdot) = c^1_0 + v{\varphi^+}' - v{\varphi^-}' = u_1 \end{cases}$$

che riscrivo

$$\begin{cases} \varphi^+ - \varphi^- = u_0 - c_0^0 =: g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = \frac{u_1 - c_0^1}{v} =: h_1 \end{cases}$$

prendo quindi

$$c_0^1 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_1(x)dx$$

in modo tale che h_1 abbia media nulla e poi prendo c_0^0 come voglio (non è importante la sua scelta), ad esempio

$$c_0^0 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_0(x)dx$$

Adesso essendo h_1 una derivata posso scegliere una primitiva g_1 di h_1, che sarà $2\pi-$periodica per il Lemma 7, e scrivere

$$\begin{cases} \varphi^+ - \varphi^- = g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = g_1' \end{cases}$$

adesso quest'ultimo sistema è implicato da

$$\begin{cases} \varphi^+ - \varphi^- = g_0 \\ \varphi^+ - \varphi^- = g_1 \end{cases}$$

che mi dà

$$\begin{cases} \varphi^+ = \frac{g_0 + g_1}{2} \\ \varphi^- = \frac{g_0 - g_1}{2} \end{cases}$$

ed ho $g_0 \in C^2_{per}$ ed essendo $h_1 \in C^1_{per}$ anche $g_1 \in C^2_{per}$ e quindi $\varphi^\pm \in C^2_{per}$.

□

Teorema 2.6.7 (Esistenza a partire da (2)):

Siano $u_0, u_1 \in C^0_{per}$ t.c. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 |c_n^0| < +\infty$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||c_n^1| < +\infty$.

Allora (2) definisce una $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^2, $2\pi-$periodica in x e che risolve (Q).

Dimostrazione.

Passo 1:

$u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ed è $2\pi-$periodica in quanto la serie in (2) converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Infatti se $v_n^\pm = \alpha_n^\pm e^{in(x \pm vt)}$

$$\|v_n^\pm\|_{\infty, \mathbb{R}\times\mathbb{R}} = |\alpha_n^\pm| = O\left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{|n|}\right)$$

e $(c_n^0)_n, (c_n^1)_n$ sono assolutamente sommabili.

Passo 2:

Vediamo che $u \in C^2$.

Siano $h, k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$

$$D_t^h D_x^k v_n^\pm = \alpha_n^\pm e^{in(x \pm vt)}(in)^k (inv)^h$$

da cui

$$\|D_t^h D_x^k v_n^\pm\|_{\infty, \mathbb{R}\times\mathbb{R}} = |\alpha_n^\pm||v|^h|n|^{k+h} = O\left(|c_n^0||n|^{k+h} + |c_n^1||n|^{k+h-1}\right)$$

e guardando le ipotesi fatte $|c_n^0||n|^{k+h}$ è sommabile se $k+h \leq 2$, mentre $|c_n^1||n|^{k+h-1}$ è sommabile se $k+h-1 \leq 1 \iff k+h \leq 2$, dunque se $k+h \leq 2$ la serie dei $D_t^h D_x^k v_n^\pm$ è totalmente convergente, da cui si conclude che $u \in C^2$.

Passo 3:

Vediamo che u risolve (Q).

u è $2\pi-$periodica e risolve l'equazione $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ perché la risolvono $c_0^0 + c_0^1 t$ e $v_n^\pm(t, x)$ ed è possibile commutare serie e derivata, questo perché si ha la convergenza totale delle serie delle derivate fino all'ordine 2, che è quanto ci serve (si usa il Teorema di Limite sotto il segno di Differenziale).

E per le condizioni iniziali impostate nei problemi di Cauchy dei c_n si ha che i coefficienti di $u(0, \cdot)$ e $u_t(t, \cdot)$ sono esattamente quelli di u_0 e u_1 rispettivamente, dunque u soddisfa anche le condizioni iniziali di (Q).

□

Teorema 2.6.8 (Unicità):

Se $u : I \times [-\pi, \pi \to \mathbb{C}]$, con I intervallo di $\mathbb{R}$ t.c. $0 \in I$, è continua in entrambe le variabili, C^2 in t e risolve (Q) allora u è unica.

Dimostrazione.

Pongo $c_n(t) = c_n(u(t, \cdot))$. Grazie alle ipotesi di regolarità di u possiamo applicare il Lemma 6 e scrivere, per $t \in I$

$$\ddot{c}_n(t) = c_n(u_{tt}(t, \cdot)) = c_n(v^2 u_{xx}(t, \cdot)) = -v^2 n^2 c_n(t)$$

allora c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \end{cases}$$

la cui equazione differenziale è lineare e che soddisfa quindi le ipotesi di Lipschitz grazie alle quali possiamo utilizzare il Teorema di Cauchy-Lipschitz per affermare l'unicità dei coefficienti di Fourier c_n di u e quindi anche l'unicità di u.

□

2.6.3 Disuguaglianza Isoperimetrica nel Piano

Teorema 2.6.9 (Disuguaglianza Isoperimetrica nel Piano):

Sia D un aperto limitato con frontiera C^1 parametrizzata da un unico cammino γ (cioè che non ha buchi e che non è fatta da più pezzi disgiunti).

Allora

$$L^2 \geq 4\pi A$$

in cui L è la lunghezza di ∂D e A è l'area di D.

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se D è un disco.

Dimostrazione.

Posso scegliere $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ per parametrizzare ∂D (ho identificato $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$) e la posso prendere che lo parametrizzi in senso antiorario e a velocità costante ($\|\dot{\gamma}\| = \frac{L}{2\pi}$).

Passo 1:

$$L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = 2\pi \|\dot{\gamma}\|^2_{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} =$$

per Parseval

$$= 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\dot{\gamma})|^2 = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(\gamma)|^2$$

Passo 2:

$$A \overset{*}{=} \frac{1}{2}\langle -i\dot{\gamma}, \gamma\rangle =$$

per Parseval

$$= \frac{1}{2} 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |-ic_n(\dot{\gamma})||c_n(\gamma)| = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(\gamma)|^2$$

in cui la (*) è vera perché se $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$

$$\langle \dot{\gamma}, \gamma\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma}\overline{\gamma} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\dot{\gamma}_x + i\dot{\gamma}_y)(\gamma_x - i\gamma_y) dt =$$

$$= \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\gamma} (x - iy)dx + (y + ix)dy =$$

per Gauss-Green

$$= \int_D 2i dx dy = 2iA$$

Passo 3:

Per il Passo 1

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(\gamma)|^2$$

e per il Passo 2

$$4\pi A = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(\gamma)|^2$$

ed essendo $n^2 \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\gamma)|^2 \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(\gamma)|^2$$

da cui $L^2 \geq 4\pi A$.

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha o $n^2 = n$ o $|c_n(\gamma)| = 0$ e questo è possibile se e solo se $c_n(\gamma) = 0$ per ogni $n \neq 0, 1$, cioè se e solo se $\gamma(t) = c_0(\gamma) + c_1(\gamma)e^{it}$, che è la parametrizzazione complessa del bordo del disco di raggio $|c_1(\gamma)|$ centrato in $c_0(\gamma)$.

□

Capitolo 3

Trasformata di Fourier su $\mathbb{R}$

3.1 Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e Prime Proprietà

La Trasformata di Fourier sostanzialmente sostituisce la serie di Fourier quando si passa da funzioni $2\pi-$periodiche su $\mathbb{R}$ a funzioni "qualsiasi" su $\mathbb{R}$.

Definizione 3.1.1 (Trasformata di Fourier):
Data una $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ si definisce, per ogni $y \in \mathbb{R}$, la **trasformata di Fourier** di f

$$\widehat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx$$

Osservazione 3.1.2:
Da notare la somiglianza con i coefficienti di Fourier.

Teorema 3.1.3:
Sia $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, allora $\widehat{f}$ è ben definita su tutto $\mathbb{R}$ e appartiene a $C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Inoltre $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Dimostrazione.
Essendo $f \in L^1$ anche $f(x)e^{-iyx} \in L^1$ dunque $\widehat{f}(y)$ è ben definita per ogni $y \in \mathbb{R}$.
Inoltre per ogni $y \in \mathbb{R}$

$$|\widehat{f}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)e^{-iyx}\right| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_1$$

dunque $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Ora presa $(y_n)_n$ t.c. $y_n \to y$ si ha

$$\widehat{f}(y_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iy_n x}dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx = \widehat{f}(y)$$

per convergenza dominata infatti per la continuità dell'esponenziale si ha la convergenza puntale degli integrandi e la dominazione è data da

$$|f(x)e{-}iyx| = |f(x)| \in L^1$$

Quindi $\widehat{f}$ è continua.

Infine $\widehat{f}(y) \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ per Riemann-Lebesgue, infatti prendendo $g(z) = e^{-iz}$ si ha

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(yx)dx \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right)\left(⨍_{-\pi}^{\pi} g(x)dx\right) = 0$$

perchè $⨍_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 0$.

Quindi $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

□

Corollario 3.1.4:

L'operatore $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $\mathfrak{F}f = \widehat{f}$, è ben definito, lineare e continuo.

Vediamo ora alcune proprietà della trasformata.

Prima di tutto definiamo degli operatori utili, sia $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e siano $h \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, definisco

$$\sigma_\delta f(x) := \frac{1}{\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right)$$
$$\tau_h f(x) = f(x-h)$$

Proposizione 3.1.5:

Sia $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, allora

(1) $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh}\widehat{f}(y)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$;

(2) $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$;

(3) $\widehat{\sigma_\delta f}(y) = \widehat{f}(\delta y)$ per ogni $\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;

Dimostrazione.

(1)

$$\widehat{\tau_h f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-h)e^{-iyx}dx = e^{-iyh}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-iyt}dt = e^{-iyh}\widehat{f}(y)$$

ponendo $t = x - h$.

(2)
$$\widehat{e^{ihx} f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{ihx} f(x) e^{-iyx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(y-h)x} dx = \tau_h \widehat{f}(y)$$

(3)
$$\widehat{\sigma_\delta f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right) e^{-iyx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\delta yt} dt = \widehat{f}(\delta y)$$

ponendo $t = \frac{x}{\delta}$.

□

Proposizione 3.1.6 (Trasformata di Fourier della Derivata):

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ *con* $f, f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Allora $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$.

Dimostrazione.

Essendo $f \in L^1$ si ha che $\liminf_{x \to \pm\infty} |f(x)| = 0$ in quanto se fosse $l > 0$ si avrebbe $|f(x)|$ definitivamente maggiore di $l - \varepsilon$ per un qualsiasi $\varepsilon > 0$ (dalla definizione di $\liminf$), cosa che mi darebbe integrale infinito, ossia avrei $f \notin L^1$.

Detto questo si possono allora trovare due successioni $a_n \to -\infty$ e $b_n \to +\infty$ t.c. $f(a_n) \to 0$ e $f(b_n) \to 0$.

Quindi

$$\widehat{f'}(y) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} f'(x) e^{-iyx} \chi_{[a_n, b_n]}(x) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-iyx} dx =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{x=a_n}^{x=b_n} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx \right) =$$

essendo $\lim_{n \to +\infty} \left[f(x) e^{-iyx} \right]_{x=a_n}^{x=b_n} = 0$

$$= \lim_{n \to +\infty} iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx = iy \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iyx} dx = iy\widehat{f}(y)$$

in cui nella prima e nell'ultima uguaglianza si è usato il Teorema di Convergenza dominata maggiorando i moduli degli integrandi rispettivamente con $|f'| \in L^1$ e $|f| \in L^1$.

□

Proposizione 3.1.7 (Derivata della Trasformata di Fourier):

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ *con* $xf \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Allora $\widehat{f} \in C^1_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ *con* $(\widehat{f})' = \widehat{-ixf}$.

Dimostrazione.

Voglio usare il derivare sotto al segno d'integrale e lo posso fare in quanto $g(y,x) = f(x)e^{-iyx}$ è C^1 in y per ogni x e

$$|g(y,x)| \leq f(x)| \in L^1$$

$$|D_y g(y,x)| \leq |xf(x)| \in L^1$$

Quindi

$$(\widehat{f})'(y) = D_y \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx = \int_{\mathbb{R}} (-ix)f(x)e^{-iyx}dx = \widehat{-ixf}(y)$$

allora $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e quindi $f \in C^1_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per quanto dimostrato nel Teorema 17.

□

Corollario 3.1.8:

Sia $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $x^k f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Allora $x^h f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni $h = 0,1,...,k$ e $\widehat{f} \in C^k_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ con $D^h \widehat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$ per ogni $h = 0,1,...,k$.

In particolare se $x^k f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni $k \in N$ allora $\widehat{f} \in C^\infty_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ con le derivate nella forma detta precedentemente.

Dimostrazione.

Per ogni $h = 0,1,...,k$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$|x|^h \leq 1 + |x|^k$$

infatti si distinguono i casi $|x| \leq 1$ e $|x| > 1$: nel primo caso $|x|^h \leq 1$ nel secondo $|x|^h \leq |x|^k$ da cui la disuguaglianza voluta.

Quindi $|x^h f| \leq (1 + |x|^k)|f| \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ipotesi, dunque effettivamente $x^h f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni $h = 0,1,...,k$.

Il resto segue per induzione su $k \in \mathbb{N}$.

Infatti il passo base con $k = 0$ è stato provato nel Teorema 17 e se la tesi vale per k e suppongo che $x^{k+1} f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora $x^h f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni $h = 0,1,...,k+1$, per quanto detto precedentemente.

Ora per ipotesi induttiva $\widehat{f} \in C^k_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ con $D^k \widehat{f} = \widehat{(-ix)^k} f$ e $x(-ix)^k f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, infatti

$$|x(-ix)^k f| = |x^{k+1} f| \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

Allora per la Proposizione 18

$$\left(\widehat{(-ix)^k} f\right)' = D^{k+1}\widehat{f} = \widehat{(-ix)^{k+1}} f$$

da cui la tesi (l'ultimo termine vuole essere la trasformata di Fourier di tutto $(-ix)^{k+1} f$).

□

Proposizione 3.1.9 (Trasformata di Fourier della Convoluzione):

Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Allora $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *e* $\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1}\widehat{f_2}$

Dimostrazione.

Il fatto che $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ è implicato dalla chiusura per convoluzione di $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Ora

$$\widehat{f_1 * f_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_1(x-t) f_2(t) dt \right] e^{-iyx} dx =$$

usando Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_1(x-t) e^{-i(x-t)y} dx \right] e^{-iyt} f_2(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(y) f_2(t) e^{-iyt} dt = \widehat{f_1}(y)\widehat{f_2}(y)$$

e posso usare Fubini perchè

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_1(x-t) f_2(t) e^{iyx}| dt dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_1(x-t)||f_2(t)| dt dx = \|f_1|_1 \|f_2\|_1 < +\infty$$

□

3.2 Formula d'Inversione in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$

Iniziamo con una definizione con la definizione di antitrasformata di Fourier.

Definizione 3.2.1 (Antitrasformata di Fourier):

Sia $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ definiamo l'**antitrasformata di Fourier** di g come

$$\check{g}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{iyx} dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{iyx} dy$$

Osservazione 3.2.2:

Vale che $\check{g}(x) = \widehat{g}(-x)$.

Quindi simili proprietà dimostrate per la trasformata valgono anche per l'antitrasformata, in particolare con le stesse ipotesi delle proposizioni 17, 18 e 19 si ha rispettivamente

$$\check{f'} = -iy\widehat{f}$$

$$(\check{f})' = \widecheck{ixf}$$

$$\widecheck{f_1 * f_2} = \check{f_1}\check{f_2}$$

.

Lemma 3.2.3:

Sia $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, per ogni $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha $\widecheck{g(\delta y)} = \sigma_\delta \check{g}$.

Dimostrazione.

Si ha

$$\widecheck{g(\delta y)}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\delta y) e^{iyx} dy = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{it\frac{x}{\delta}} dt = \sigma_\delta \check{g}(x)$$

in cui si è posto $t = \delta y$.

□

Adesso il teorema della sezione.

Teorema 3.2.4 (Formula d'Inversione di Fourier):

Sia $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Allora $\check{\widehat{f}} = 2\pi f$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$, cioè per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{iyx} dy$$

Dimostrazione.

Scelgo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ t.c.

(1) $\varphi \in C_b(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e t.c. $\varphi(0) = 1$;

(2) $\varphi \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$;

(3) $\check{\varphi} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Pongo $g_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y) dy$.

Passo 1:

Dimostriamo che $g_\delta(x) \xrightarrow{\delta \to 0} \check{\widehat{f}}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Questo è vero per convergenza dominata, infatti grazie alla continuità di φ e al fatto che $\varphi(0) = 1$ si ha la convergenza puntuale

$$\widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y) \xrightarrow{\delta \to 0} \widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(0) = \widehat{f}(y) e^{iyx}$$

mentre la dominazione è data da

$$\left| \widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y) \right| \leq \left| \widehat{f}(y) \right| \|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

che è in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ perché φ è limitata e $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Passo 2:

Vale $g_\delta(x) = \sigma_\delta \check{\varphi} * f(x)$.

Infatti
$$g_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ity} dt \right) e^{iyx} \varphi(\delta y) dy =$$
per Fubini
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy \right) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widecheck{\varphi(\delta y)}(x-t) f(t) dt =$$
per il lemma precedente
$$= \int_{\mathbb{R}} \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t) f(f) dt = \sigma_\delta \check{\varphi} * f(x)$$

E posso usare Fubini perché
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) e^{-ity} e^{iyx} \varphi(\delta y) \right| dt dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| |\varphi(\delta y)| dt dy = \|f\|_1 \|\varphi\|_1 < +\infty$$
che è finito per l'ipotesi (2) su φ.

Passo 3:

Si ha $g_\delta \stackrel{\delta \to 0}{\longrightarrow} mf$ in L^1 con $m = \int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}(x) dx$.

Questo è vero grazie al Teorema di Approssimazione per Convoluzione con σ_δ (trattato in appendice) e all'ipotesi (3) su φ.

Passo 4:

Per il Passo 3 esiste una sottosuccessione convergente q.o. a mf, ma già g_δ convergeva ovunque a $\check{\hat{f}}$ per il Passo 1, dunque deve necessariamente essere $\check{\hat{f}}(x) = mf(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Passo 5

L'uguaglianza ottenuto al Passo 4 identifica m che quindi non dipende dalla φ scelta che verifica $(1), (2), (3)$.

Quindi per il calcolo di m scelgo $\varphi(y) = e^{-|y|}$ e si ha $\widecheck{\varphi(x)} = \frac{2}{1+x^2}$ da cui
$$m = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+x^2} dx = 2\pi$$

$\square$

Osservazione 3.2.5:

Nel Passo 5 della dimostrazione precedente si è usato che la trasformata di Fourier di $e^{-|y|}$ è $\frac{2}{1+x^2}$.

Vediamolo nel dettaglio, pongo $g(y) = e^{-|y|}$.
$$\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} e^{iyx} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \cos(yx) dy + i \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \sin(yx) dy =$$
essendo $\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \sin(yx) dy = 0$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \cos(yx) dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(yx) dy = 2 \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{-y} e^{iyx} \right) dy =$$

$$= 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}e^{iyx}dy\right) = 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{y(ix-1)}dy\right) =$$
$$= 2\mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{y(ix-1)}}{ix-1}\right]_{y=0}^{y\to+\infty}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix} + \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y(ix-1)}}{ix-1}\right) =$$
$$= 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{1+ix}{1+x^2}\right) = \frac{2}{1+x^2}$$

Osservazione 3.2.6:

Da notare l'analogia con la serie di Fourier, ossia la formula d'inversione è "l'analogo continuo" della serie di Fourier.

Corollario 3.2.7 (Iniettività della Trasformata di Fourier):

Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $\widehat{f_1} = \widehat{f_2}$.

Allora $f_1 = f_2$ q.o. su $\mathbb{R}$.

Ossia una $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ è univocamente determinata dalla sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$.

Dimostrazione.

Se $f = f_1 - f_2$ allora $\widehat{f} = \widehat{f_1} - \widehat{f_2} = 0$ q.o. su $\mathbb{R}$, quindi usando la Formula d'Inversione si ottiene
$$0 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)e^{iyx}dy = 2\pi f(x)$$
per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Da cui $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$ ossia $f_1(x) = f_2(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

□

Osservazione 3.2.8:

Proseguendo quanto detto nell'osservazione 16 si ha che anche l'antitrasformata di Fourier è iniettiva su $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

3.3 Teoria $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ della Trasformata di Fourier

Proposizione 3.3.1:

Sia $f \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.

Dimostrazione.

Prendo $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ t.c.

(1) $\varphi(y)$ continua in 0 decrescente in per $y > 0$ e crescente per $y < 0$;

(2) $\varphi \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$;

(3) $\check{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

e per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ pongo

$$I_\delta := \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2 \varphi(\delta y) dy$$

Passo 1:

Vale $I_\delta \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \|\widehat{f}\|_2^2$ per convergenza monotona.

Infatti: φ è positiva, dunque l'integrando è positivo per ogni δ.

La convergenza puntuale degli integrandi c'è per il fatto che $\varphi(0) = 1$, per cui

$$|\widehat{f}(y)|^2 \varphi(\delta y) \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} |\widehat{f}(y)|^2$$

Inoltre per le ipotesi di crescenza di φ in (1) si ha che per $\delta \to 0$ (sia da destra che da sinistra) l'integrando cresce a $|\widehat{f}(y)|^2$, dunque si può effettivamente usare la convergenza monotona.

Passo 2:

$$I_\delta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\varphi(\delta y)dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}e^{iyt}dt \right) \varphi(\delta y)dy =$$

per Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(t)} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\delta y)e^{iy(t-x)}dy \right) dxdt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(t)}\widetilde{\varphi(\delta y)}(t-x)dxdt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(t)}\sigma_\delta\check{\varphi}(t-x)dxdt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\sigma_\delta\check{\varphi}(t-x)dx \right) \overline{f(t)}dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f * \sigma_\delta\check{\varphi}(t)\overline{f(t)}dt = \langle f * \sigma_\delta\check{\varphi}, f \rangle_{L^2}$$

E posso usare Fubini perché

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x)\overline{f(t)}e^{iy(t-x)}\varphi(\delta y) \right| dxdydt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||f(t)||\varphi(\delta y)|dxdydt =$$

$$= \|f\|_1^2 \|\varphi\|_1 < +\infty$$

che è finito per l'ipotesi (2) su φ.

Passo 3:

Si ha $I_\delta \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} m\|f\|_2^2$ con $m = \int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}(x)dx$.

Infatti grazie all'ipotesi (3) su φ, all'approssimazione per Convoluzione con σ_δ e alla continuità del prodotto scalare si ha

$$I_\delta = \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}, f\rangle_{L^2} \xrightarrow{\delta\to 0} \langle mf, f\rangle_{L^2} = m\|f\|_2^2$$

Ma per il Passo 1 si ha che I_δ tende a $\|\widehat{f}\|_2^2$ quindi per l'unicità del limite, deve essere $\|\widehat{f}\|_2^2 = m\|f\|_2^2$.

Passo 4:

L'identità ottenuta alla fine del Passo 3 identifica m che quindi non dipende dalla φ scelta che soddisfa (1),(2),(3).

Per calcolare m scelgo $\varphi(y) = e^{-|y|}$ e si ha

$$m = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+x^2} dx = 2\pi$$

da cui la tesi.

$\square$

Corollario 3.3.2:

L'operatore $\mathfrak{F}|_{L^2\cap L^1} : L^2 \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *t.c.* $\mathfrak{F}|_{L^2\cap L^1} f = \widehat{f}$, *è uniformemente continuo.*

Adesso un Lemma la cui dimostrazione sarà trattata in appendice.

Lemma 3.3.3 (Estensione di Funzioni Uniformemente Continue):

Siano X, Y *spazi metrici con* Y *completo,* $D \subset X$ *sottospazio denso di* X *e* $f : D \to Y$ *uniformemente continua.*

Allora esiste un'unica funzione continua $F : X \to Y$ *che estende* f.

Inoltre se X, Y *sono spazi normati e* Y *è di Banach,* $D \subset X$ *oltre ad essere denso è anche sottospazio vettoriale e* f *è lineare allora* F *è lineare.*

Teorema 3.3.4:

L'operatore $\mathfrak{F}|_{L^2\cap L^1} : L^2 \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *si estende per continuità, in modo unico ad un'operatore* $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Inoltre $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}$ *è un'isometria di* $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Dimostrazione.

Notiamo che $L^2 \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \supset C_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ che sono dense in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, dunque $L^2 \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ è denso in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Poi per il Corollario 9 ho che $\mathfrak{F}|_{L^2\cap L^1}$ è uniformemente continuo sul denso $L^1 \cap L^2$, quindi, per il Lemma 9, si estende in modo unico a $\mathfrak{F}$ operatore lineare continuo su tutto $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Inoltre $\mathfrak{F}$ è un'isometria perché la norma di L^2 è continua, infatti presa $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, si approssima in L^2 con una successione $(f_n)_n \subset L^2 \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\|\widehat{f_n}\|_2 = \|\mathfrak{F}f_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f_n\|_2$$

e mandando $n \to +\infty$ si ottiene la tesi, perché $\|f_n\|_2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_2$.

□

Corollario 3.3.5 (Identità di Plancherel):

Per ogni $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale $\left\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \right\rangle = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle$.

Dimostrazione.

Segue dal Teorema 19 e dall'identità di Polarizzazione.

Infatti prese $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \right\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\widehat{f_1}+\widehat{f_2}\|_2^2 - \|\widehat{f_1}-\widehat{f_2}\|_2^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|\widehat{f_1}+i\widehat{f_2}\|_2^2 - \|\widehat{f_1}-i\widehat{f_2}\|_2^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\widehat{f_1+f_2}\|_2^2 - \|\widehat{f_1-f_2}\|_2^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|\widehat{f_1+if_2}\|_2^2 - \|\widehat{f_1-if_2}\|_2^2\right) = \\
&= \frac{2\pi}{4}\left(\|f_1+f_2\|_2^2 - \|f_1-f_2\|_2^2\right) + \frac{2\pi i}{4}\left(\|f_1+if_2\|_2^2 - \|f_1-if_2\|_2^2\right) = \\
&= 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle
\end{aligned}$$

□

Osservazione 3.3.6:

Come si calcola $\widehat{f}$ per $f \in L^2 \setminus L^1$?

Supponiamo che per q.o. $y \in \mathbb{R}$ esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(x)e^{-iyx}dx$$

allora questo coincide con $\widehat{f}(y)$.

Infatti ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}$ $f_n := f\chi_{[-n,n]}$ si ha

$$\int_{-n}^{n} f(x)e^{-iyx}dx = \widehat{f_n}(y)$$

e $f_n \to f$ in L^2 per convergenza dominata, infatti $\left|f\chi_{[-n,n]} - f\right|^2 \to 0$ puntualmente e $\left|f\chi_{[-n,n]} - f\right|^2 \leq (2|f|)^2 = 4|f|^2 \in L^1$.

Quindi per la continuità di $\mathfrak{F}$ anche $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ in L^2 e quindi q.o. a meno di sottosuccessioni.

Ma per ipotesi si ha che $\widehat{f_n}$ converge q.o., allora necessariamente $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ q.o. su $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.3.7:
Se $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora

(1) $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh}\widehat{f}(y)$ *per ogni* $h \in \mathbb{R}$*;*

(2) $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$ *per ogni* $h \in \mathbb{R}$*;*

(3) $\widehat{\sigma_\delta f}(y) = \widehat{f}(\delta y)$ *per ogni* $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*;*

Dimostrazione.
Le identità valgono per $f \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ che è denso in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e quindi si estendono a $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per continuità di $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

□

Proposizione 3.3.8:
Sia $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $f, f' \in L^1 \cup L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Allora $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$.

Dimostrazione.
Essendo $f \in L^1 \cup L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ esistono $(a_n)_n, (b_n)_n$ t.c. $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ e $f(a_n), f(b_n) \to 0$.
Ho

$$\widehat{f'\chi_{[a_n,b_n]}}(y) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-iyx}\chi_{[a_n,b_n]}(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} f'(x)e^{-iyx}dx =$$

$$= \left[f(x)e^{-iyx}\right]_{x=a_n}^{x=b_n} + iy\int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-iyx}dx = \left[f(x)e^{-iyx}\right]_{x=a_n}^{x=b_n} + iy\widehat{f\chi_{[a_n,b_n]}}$$

Ora analizziamo i vari casi:

- se $f' \in L^1$ allora $\widehat{f'\chi_{[a_n,b_n]}} \to \widehat{f'}$ q.o. per convergenza dominata (da $|f'|$);
- se $f' \in L^2$ allora $\widehat{f'\chi_{[a_n,b_n]}} \to \widehat{f'}$ in L^2 (perché $f'\chi_{[a_n,b_n]} \to f'$ in L^2 e $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ è continua) e quindi $\widehat{f'\chi_{[a_n,b_n]}} \to \widehat{f'}$ q.o. a meno di prendere sottosuccessioni;
- se $f \in L^1$ allora $\widehat{f\chi_{[a_n,b_n]}} \to \widehat{f}$ q.o. per convergenza dominata (da $|f| \in L^1$);
- se $f \in L^2$ similmente ad f' si ha che $\widehat{f\chi_{[a_n,b_n]}} \to \widehat{f}$ q.o. a meno di prendere sottosuccessioni.

Ed inoltre $\lim_{n\to+infty} \left[f(x)e^{-iyx}\right]_{x=a_n}^{x=b_n} = 0$, dunque si ottiene la tesi passado al limite nell'uguaglianza trovata precedentemente dopo aver sostituito se necessario le successioni con sottosuccessioni adeguate.

□

Proposizione 3.3.9:
Sia $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *t.c.* $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *e* $f' \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Allora $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *(in particolare* f *soddisfa le ipotesi del Teorema d'Inversione).*

Dimostrazione.
So che $iy\widehat{f} = \widehat{f'} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, quindi $y\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\|y\widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f'}\|_2$.
Inoltre essendo $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha che $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ per un teorema precedente. Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|dy = \int_{-1}^{1} |\widehat{f}(y)|dy + \int_{|y|\geq 1} |\widehat{f}(y)|dy \leq 2\|\widehat{f}\|_\infty + \int_{|y|\geq 1} |y\widehat{f}(y)|\frac{1}{|y|}dy \leq$$

usando la Disuguaglianza di Hölder

$$\leq 2\|f\|_1 + \|y\widehat{f}\|_2 \left(\int_{|y|\geq 1} \frac{1}{y^2}dy\right)^{\frac{1}{2}} =$$

essendo per l'Identità di Plancherel $\|y\widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f'}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f'\|_2$ e $\int_{|y|\geq 1} \frac{1}{y^2}dy = 2$

$$= 2\|f\|_1 + 2\sqrt{\pi}\|f'\|_2 < +\infty$$

□

Proposizione 3.3.10: *Siano* $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, *allora* $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *e* $\widehat{f_1 f_2} = 2\pi \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$.

Dimostrazione. Il fatto che se $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ segue dalla Disuguaglianza di Hölder. Siano $f_1, f_2 \in C^1_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $f_1 f_2 \in C^1_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e quindi $f_1, f_2, f_1 f_2, \widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \widehat{f_1}\widehat{f_2} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Ora

$$\mathfrak{F}^*[2\pi\widehat{f_1} * \widehat{f_2}] = 2\pi\check{\widehat{f_1}}\check{\widehat{f_2}} = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}f_1\frac{1}{2\pi}f_2\right) = \frac{1}{2\pi}f_1 f_2 = \mathfrak{F}^*[\widehat{f_1 f_2}]$$

in cui la prima uguaglianza è stata giustificata in un osservazione precedente. Quindi per l'iniettività di $\mathfrak{F}^*$ (vedi Osservazione 19) si ha

$$2\pi\widehat{f_1} * \widehat{f_2} = \widehat{f_1 f_2}$$

Il caso generale si fa per approssimazione ricordando che $C^\infty_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (e quindi anche $C^1_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$) è denso in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ed usando la continuità della trasformata di Fourier. □

3.4 Analiticità della Trasformata di Fourier

Si è detto nel Corollario 8 che per una una funzione $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. $x^k f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, in questa sezione vogliamo dimostrare un teorema che ci fornisce una condizione su f per avere l'analiticità della sua trasformata.

Teorema 3.4.1 (di Paley-Wiener): *Sia $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ t.c. esiste $\alpha > 0$ t.c. $e^{\alpha|x|}f(x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora f è analitica, anzi è la restrizione ad $\mathbb{R}$ di una $g : \mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa.*

Dimostrazione. Pongo per $z \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{C}$, con D da definire

$$g(z) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-izx}dx$$

Passo 1:
$g(z)$ è definita per $z = y + it \in \mathbb{R} \times [-\alpha, \alpha]$. Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-izx}|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{tx}dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{\alpha|x|}dx < +\infty$$

Passo 2:
g è olomorfa su $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$. Infatti preso $y_0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e $z \in \overline{B(y_0, \alpha)}$ ho

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i(z-y_0)x}e^{-iy_0}dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iy_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i(z-y_0)x)^n}{n!} \right) dx =$$

scambio serie ed integrali usando Fubini

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iy_0} \frac{(-ix)^n}{n!} dx \right) (z-y_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-y_0)^n$$

definendo $a_n := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iy_0}\frac{(-ix)^n}{n!}dx$ per ogni $n \in N$. E posso scambiare serie ed integrali perché

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-iy_0}| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|(z-y_0)x|^n}{n!} dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{|z-y_0||x|}dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{\alpha|x|}dx < +\infty$$

E con lo stesso conto appena fatto si ottiene anche che la serie di potenze è assolutamente convergente per $z \in \overline{B(y_0, \alpha)}$ per quanto detto sopra. Quindi g è olomorfa su $B(y_0, \alpha)$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, quindi è olomorfa su tutto $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$. Si conclude notando che $g|_{\mathbb{R}} = \widehat{f}$. □

Corollario 3.4.2: *Sia $f \in C_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora f è restrizione di una $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa.*

Dimostrazione. Vero perché se $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ allora $e^{\alpha|x|}f(x) \in C_c(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni $\alpha > 0$. □

3.5 Equazione del Calore su $\mathbb{R}$

Cerco $u : [0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolve il problema, che chiamerò (PR):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione formalmente passando alla trasformata di Fourier rispetto alla variabile x.

$$\widehat{u_t}(t, y) = (\widehat{u})_t(t, y)$$

$$\widehat{u_{xx}}(t, y) = (iy)^2 \widehat{u}(t, y) = -y^2 \widehat{u}(t, y)$$

quindi impongo $\widehat{u_t}(t, x) = (\widehat{u})_t(t, x)\widehat{u_{xx}}$ che mi da $(\widehat{u})_t = -y^2 \widehat{u}$. Dunque per ogni $y \in \mathbb{R}$ $\widehat{u}(\cdot, y)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \widehat{u_0}(y) \end{cases}$$

che ha come soluzione $\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y)e^{-y^2 t}$. E ponendo $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ si ha per $t \neq 0$

$$\widehat{\sigma_{\sqrt{2t}}\rho}(y) = \widehat{\rho}(\sqrt{2t}y) = e^{-y^2 t}$$

. Quindi, ponendo $\rho_t = \sigma_{\sqrt{2t}}\rho$

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y)\widehat{\rho_t}(y) = \widehat{u_0 * \rho_t}(y)$$

da cui, tenendo a mente l'iniettività della trasformata di Fourier, la candidata soluzione per $t \neq 0$ è

$$u(t, x) = u_0 * \rho_t(x) = u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}}\rho(x)$$

Infine la candidata soluzione è

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{per } t = 0 \\ u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}}\rho(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Effettivamente vale il seguente teorema che però enunciamo soltanto.

Teorema 3.5.1: *Se $u_0 \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ allora $u(t, x)$ data da (4) è ben definita su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ e risolve (PR).*