Teorema di Stone

Emanuele Pardini

Algebre e Reticoli di Funzioni

Definizione 1 (Algebra di Funzioni): Dato un campo $\mathbb{K}$ ed un insieme S, diciamo che $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}^S$ è un $\mathbb{K}-$**algebra** di funzioni da S in $\mathbb{K}$ se e solo se è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^S$ e

$$\forall f, g \in \mathcal{A} \quad fg \in \mathcal{A}.$$

Inoltre se la funzione costante 1 (elemento neutro per la seconda operazione) è in $\mathcal{A}$ questa è detta **algebra unitaria**.

In tutto quel che segue useremo le seguenti notazioni. Dato un campo ordinato $\mathbb{K}$ per $a, b \in \mathbb{K}$

$$a \vee b := \max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

$$a \wedge b := \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

Definizione 2 (Reticolo di Funzioni): Dato un campo ordinato $\mathbb{K}$ ed un insieme S, diciamo che $\mathcal{R} \subset \mathbb{K}^S$ è un **reticolo** da S in $\mathbb{K}$ se e solo se

$$\forall f, g \in \mathcal{R} \quad f \vee g \in \mathcal{R} \quad e \quad f \wedge g \in \mathcal{R}$$

Per noi sarà sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Inoltre indicheremo con $\mathcal{B}(S, \mathbb{K})$ le funzioni limitate da S in $\mathbb{K}$ e con $C(S, \mathbb{K})$ le funzioni continue da S in $\mathbb{K}$.

Lemma 1: *Una $\mathbb{R}$-algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(S, \mathbb{R})$ uniformemente chiusa, ossia t.c. ogni successione convergente di elementi di $\mathcal{A}$ converge in $\mathcal{A}$, di funzioni limitate è un reticolo.*

Proof. Essendo per ogni $f, g \in \mathcal{A}$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

basta provare che $\forall f \in \mathcal{A}$ si ha $|f| \in \mathcal{A}$. Essendo

$$|f| = \|f\|_\infty \left| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right|$$

si può supporre wlog $\|f\|_\infty \leq 1$. Sia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di polinomi uniformemente convergente alla funzione radice quadrata su $[0,1]$

$$[0,1] \ni x \mapsto \sqrt{x} \in [0,1]$$

si possono prendere ad esempio i polinomi di Bernstein ad esempio. Dunque $\forall n \in \mathbb{N}\ \ p_n \circ (f)^2 \in \mathcal{A}$ e

$$\|p_n \circ (f)^2 - |f|\|_\infty = \sup_{s\in S} |p_n(f^2(x)) - \sqrt{f^2(x)}| \leq \sup_{t\in[0,1]} |p_n(t) - \sqrt{t}| \to 0$$

per $n \to +\infty$, in quanto $f(S) \subset [0,1]$. $\square$

Lemma 2: *Sia X uno spazio topologico compatto e $\mathcal{R} \subset C(X,\mathbb{R})$ un reticolo.*

Se in $\mathcal{R}$ ogni problema di interpolazione su due punti ha soluzione, cioè

$$\forall x, y \in X\ \forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists g \in \mathcal{R}\ t.c.\ g(x) = a\ \ e\ g(y) = b$$

allora $\mathcal{R}$ è denso uniformemente in $C(X,\mathbb{R})$.

Proof. Siano $f \in C(X,\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$.

Ora $\forall x, y \in X$ esiste una $g_{x,y} \in \mathcal{R}$ t.c. $f(z) < g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$ per $z = x, y$, infatti basta prendere nel problema di interpolazione su x, y

$$a \in (f(x), f(x) + \varepsilon)\ \text{ e }\ b \in (f(y), f(y) + \varepsilon)$$

.

Dunque essendo f continua vale $f(z) < g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$ in tutto un intorno aperto $U_{x,y}$ di entrambi $\{x, y\}$.

E fissato $x \in X$ la famiglia $\{U_{x,y}\}_{y\in X}$ forma un ricoprimento aperto di X che è compatto, dunque posso estrarre un sotto-ricoprimento finito $\{U_{x,y_j}\}_{j=1,...,m_x}$.

Dunque prendo la funzione

$$g_x := g_{x,y_1} \vee ... \vee g_{x,y_{m_x}} \in \mathcal{R}$$

per ogni $z \in X$ esiste necessariamente un $1 \leq j_z \leq m_x$ per il quale $z \in U_{x,y_k}$, quindi $f(z) < g_{x,y_{j_z}}(z) \leq g_x(z)$, dunque

$$f(z) < g_x(z)\ \ \forall z \in X\ \ \forall x \in X$$

Ora consideriamo $\forall x \in X$ l'intorno aperto $V_x := \bigcap_{1\leq j\leq m_x} U_{x,y_j}$.

$\forall z \in V_x$ si ha $\forall j = 1, ..., m_x\ \ f(z) < g_{x,y_j}(z) < f(z) + \varepsilon$ e quindi anche

$$f(z) < g_x(z) < f(z) + \varepsilon\ \ \forall z \in V_x$$

Ora $\{V_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X compatto, dunque esiste un sotto-ricoprimento finito $\{V_{x_i}\}_{i=1,...,n}$.

Dunque prendo la funzione

$$g := g_{x_1} \wedge \dots \wedge g_{x_n} \in \mathcal{R}$$

Per ogni $z \in X$ esiste necessariamente un $1 \leq i_z \leq n$ per il quale $z \in V_{x_{i_z}}$, quindi $f(z) < g_{x_{i_z}}(z) < f(z) + \varepsilon$, dunque, insieme al fatto che $f(z) < g_x(z) \ \ \forall x \in X$ prima provato, si ottiene

$$f(z) < g(z) < f(z) + \varepsilon$$

In conclusione si può scrivere

$$\|g - f\|_{\infty, X} < \varepsilon$$

□

Il Teorema di Stone

Definizione 3: Dato un insieme S dico che una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^S$ è **separante** (o che **separa i punti**) se e solo se

$$\forall x, y \in S \ , \ x \neq y \ \ \exists f \in \mathcal{F} \ \text{ t.c. } \ f(x) \neq f(y)$$

Teorema 1 (di Stone): *Siano X uno spazio topologico compatto e $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ un'algebra chiusa e separante di funzioni reali continue su X.*

Allora $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{R})$ se non vi sono zeri comuni a tutte le funzioni di $\mathcal{A}$ oppure se $\exists x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{A}$ si ha $\mathcal{A} = \mathcal{I}_{x_0}$ in cui $\mathcal{I}_{x_0} = \{u \in C(X, \mathbb{R}) \mid u(x_0) = 0\}$.

Proof. Per Weierstrass $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ dunque, per il Lemma 1, $\mathcal{A}$ è un reticolo. Ora si distinguono due casi:

- Non vi sono zeri comuni a tutte le funzioni di $\mathcal{A}$;
- Esiste uno zero comune a tutte le funzioni di $\mathcal{A}$.

Nel caso non vi siano zeri comuni a tutte le funzioni di $\mathcal{A}$ allora $\forall x \in X$ esiste una $g \in \mathcal{A}$ t.c. $g(x) \neq 0$. Poiché $\mathcal{A}$ è separante $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ esiste una $f \in \mathcal{A}$ t.c. $f(x) \neq f(y)$ e si può assumere wlog che $f(x), f(y) \neq 0$, infatti se ad esempio $f(x) = 0$ basterebbe rimpiazzare f con $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$ con $g \in \mathcal{A}$ t.c. $g(x) \neq 0$ ed $\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.c. $f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)$ siano ancora diversi ed entrambi non nulli. Ora

$$\{(u(x), u(y)) \mid u \in \mathcal{A}\}$$

è un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^2$ (in quanto $\mathcal{A}$ è un'agebra) e contiene

$$(f(x), f(y)) \qquad (f^2(x), f^2(y))$$

che sono linearmente indipendenti, infatti essendo $f(x) \neq 0$ e $f(x) \neq f(y)$ si ha

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & f^2(x) \\ f(y) & f^2(y) \end{pmatrix} = f(x)[f^2(y) - f(x)f(y)] \neq 0.$$

Dunque

$$\{(u(x), u(y)) \mid u \in \mathcal{A}\} = \mathbb{R}^2$$

e, per il Lemma 2, $\mathcal{A}$ è uniformemente densa in $C(X, \mathbb{R})$. Ma $\mathcal{A}$ è anche uniformemente chiusa, quindi necessariamente $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{R})$.

Nel caso in cui invece esiste uno zero comune x_0 a tutte le funzioni in $\mathcal{A}$, si considera la mappa

$$\mathbb{R} \times \mathcal{A} \ni (\lambda, f) \longmapsto \lambda + f \in \mathbb{R} + \mathcal{A}$$

questo è un omeomorfismo (lineare) e $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$ è completo in quanto $\mathbb{R}$ è completo e $\mathcal{A}$ è un chiuso di $C(X, \mathbb{R})$ che è completo, dunque anche $\mathbb{R} + \mathcal{A}$ è completo ed essendo completo $\mathbb{R} + \mathcal{A}$ è chiuso. Dunque $\mathbb{R} + \mathcal{A}$ è un'algebra chiusa, separante e che non ha zeri comuni a tutte le sue funzioni, infatti contiene le costanti, quindi ricade nel punto precedente, il quale ci assicura che $\mathbb{R} + \mathcal{A} = C(X, \mathbb{R})$. Ma allora $\mathcal{A} \supset \mathcal{I}_{x_0}$ in quanto ogni $u \in \mathcal{I}_{x_0}$ è scrivibile come $u = \lambda + f$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $f \in \mathcal{A}$, e valutando in x_0, essendo $u(x_0) = f(x_0) = 0$, si ottiene $\lambda = 0$. Dunque $u = f \in \mathcal{A}$. Ma $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}_{x_0}$, quindi $\mathcal{A} = \mathcal{I}_{x_0}$. $\square$

Facciamo in conclusione alcune considerazioni sul caso complesso.

Definizione 4: Dato un insieme S, dico che $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^S$ è un'**algebra autoconiugata** se e solo se

$$\forall f \in \mathcal{A} \quad \overline{f} \in \mathcal{A}$$

Teorema 2 (di Stone Complesso): *Siano X uno spazio topologico compatto e $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{C})$ un'algebra chiusa, separante e autoconiugata di funzioni complesse continue su X. Allora $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$ se non vi sono zeri comuni a tutte le funzioni di $\mathcal{A}$ oppure se $\exists x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{A}$ si ha $\mathcal{A} = \mathcal{I}^{\mathbb{C}}_{x_0}$, in cui $\mathcal{I}^{\mathbb{C}}_{x_0} := \{u \in C(C, \mathbb{C}) \mid u(x_0) = 0\}$.*

Proof. Infatti essendo auto-coniugata si ha $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ e $\forall f \in \mathcal{A}$ anche $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{A}$ in quanto $\Re(f) = \frac{f + \overline{f}}{2}$ e $\Im(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i}$. Dunque presa

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \{f \in \mathcal{A} \mid \Im(f) = 0\}$$

si ha $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ e facilmente si vede che $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ è un'algebra chiusa e separante di funzioni reali continue, quindi se $\mathcal{A}$ non ha zeri comuni nemmeno $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ ne ha ($f(z) = u(z) + iv(z) \neq 0$ se e solo se $u(z) \neq 0$ o $v(z) \neq 0$) e quindi $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = C(X, \mathbb{R})$, dunque $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$. Se invece $\mathcal{A}$ ha uno zero comune x_0 allora x_0 è zero comune anche per $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{I}_{x_0}$ e quindi, essendo $\mathcal{I}^{\mathbb{C}}_{x_0} = \mathcal{I}_{x_0} + i\mathcal{I}_{x_0}$, si ha $\mathcal{A} = \mathcal{I}^{\mathbb{C}}_{x_0}$. $\square$

Adesso una discussione che ci porterà ad un utile corollario.

Sia X uno spazio compatto e $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{K})$ una sottoalgebra chiusa, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Consideriamo la relazione d'equivalenza su X data da

$$x \sim y \iff \forall f \in \mathcal{A} \ f(x) = f(y)$$

è ben definito il quoziente $\widetilde{X} := X/\sim$ (stiamo rendendo equivalenti tutti i punti che $\mathcal{A}$ non riesce a separare) e per la proprietà universale dei quozienti topologici è ben definito l'insieme

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \left\{ \widetilde{f} \mid \exists f \in \mathcal{A} \text{ t.c. } f = \widetilde{f} \circ \pi \right\} \subset C(\widetilde{X}, \mathbb{K})$$

in cui $\pi : X \to \widetilde{X}$ è la proiezione al quoziente e si osserva che per come è definita $\sim$ ogni $f \in \mathcal{A}$ ammette un trasporto al quoziente. $\widetilde{\mathcal{A}}$ è un'algebra (verifiche semplici) e per costruzione è separante, inoltre è l'immagine di $\mathcal{A}$, che è completo, mediante

$$\mathcal{A} \ni f \mapsto \widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}}$$

che è un'isometria surgettiva (rispetto alle norme uniformi), infatti essendo π surgettiva si ha

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X} |\widetilde{f}(\pi(x))| = \sup_{x \in \widetilde{X}} |\widetilde{f}(x)| = \|\widetilde{f}\|_{\infty,\widetilde{X}}$$

ed è surgettiva per come è fatta $\widetilde{\mathcal{A}}$. Dunque anche $\widetilde{\mathcal{A}}$ è completo e quindi chiuso in $C(\widetilde{X}, \mathbb{K})$, inoltre nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supponendo che $\mathcal{A}$ sia autoconiugata, si ha che anche $\widetilde{\mathcal{A}}$ è autoconiugata, infatti se $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ con $f = \widetilde{f} \circ \pi$, si ha $\overline{f} = \overline{\widetilde{f} \circ \pi} = \overline{\widetilde{f}} \circ \pi$ e $\overline{f} \in \mathcal{A}$ allora $\overline{\widetilde{f}} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Dunque ci sono tutte le ipotesi del Teorema di Stone (sia nel caso reale che in quello complesso), il quale ci dice che $\widetilde{\mathcal{A}}$ è tutto $C(\widetilde{X}, \mathbb{K})$, in quanto non ci sono in $\widetilde{X}$ zeri comuni a tutte le funzioni in $\widetilde{\mathcal{A}}$ (se ci fosse ci sarebbe in X uno zero comune a tutte le funzioni in $\mathcal{A}$). Allora definendo

$$C_\sim(X, \mathbb{K}) := \{f \in C(X, \mathbb{K}) \mid \forall x_1, x_2 \in X \ x_1 \sim x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) = f(x_2)\}$$

si ha che queste sono tutte e sole le funzioni che ammettono un trasporto al quoziente continuo (sempre per la proprietà universale dei quozienti topologici) e quindi $\mathcal{A} = C_\sim(X, \mathbb{K})$. Infatti chiaramente $\mathcal{A} \subset C_\sim(X, \mathbb{K})$, mentre $\mathcal{A} \supset C_\sim(X, \mathbb{K})$ perché presa una $f \in C_\sim(X, \mathbb{K})$ esiste una $\widetilde{f} \in C(\widetilde{X}, \mathbb{K})$ t.c. $f = \widetilde{f} \circ \pi$ ma essendo $C(\widetilde{X}, \mathbb{K}) = \widetilde{\mathcal{A}}$ esiste una $f' \in \mathcal{A}$ t.c.

$$f' = \widetilde{f} \circ \pi = f$$

da cui $f \in \mathcal{A}$.

Si è quindi provato il seguente risultato.

Corollario 1: *Siano X uno spazio topologico compatto e $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, un'algebra chiusa, che non ha in X zeri comuni e autoconiugata. Definendo su X la relazione d'equivalenza data da*

$$x \sim y \iff \forall f \in \mathcal{A} \ f(x) = f(y)$$

e l'insieme di funzioni continue

$$C_\sim(X, \mathbb{K}) := \{f \in C(X, \mathbb{K}) \mid \forall x_1, x_2 \in X \ x_1 \sim x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) = f(x_2)\}$$

si ha che $\mathcal{A} = C_\sim(X, \mathbb{K})$.