Raccolta di esercizi per le esercitazioni del corso di Algebra I

Docenti: Ilaria Del Corso e Leonardo Patimo

Anno accademico 2024/25

Questi esercizi saranno discussi ogni settimana durante le esercitazioni.

Settimana 1: 07/10

Esercizio 1

Continuare lo studio del gruppo diedrale D_n.

- Elencare tutti i sottogruppi di D_n e determinare quali tra essi sono normali o caratteristici.
- Elencare tutti i possibili quozienti di D_n.
- Descrivere le classi di coniugio in D_n.
- Determinare il numero degli automorfismi di D_n.

Esercizio 2

Sia G un gruppo, H un sottogruppo normale di G e L un sottogruppo normale di H. É vero che L è normale in G? Altrimenti produci un controesempio. (Hint: guarda ai gruppi diedrali)

E se L è un sottogruppo caratteristico di H?

Esercizio 3

Sia G un gruppo finito e H un sottogruppo proprio. Dimostra che $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1} \neq G$.

Esercizio 4

Sia G un gruppo finito con $|G| > 2$. Dimostra che esiste un automorfismo di G non triviale.

Esercizio 5

Sia G un gruppo. Definiamo il sottogruppo derivato $G' := \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\rangle$ di G. Dimostra che G' è un sottogruppo caratteristico (e in particolare normale) ed è il più piccolo sottogruppo normale di G tale che il quoziente è abeliano.

Esercizio 6

Sia G un p-gruppo finito. Allora esistono sottogruppi normali $\{e\} < H_1 < \ldots < H_n = G$ tali che H_k/H_{k-1} è un gruppo di ordine p per ogni k.

Dimostra inoltre che ogni gruppo di ordine p^2 è abeliano.

Settimana 2: 14/10

Esercizio 1

Sia G un gruppo finito e $H < G$ un sottogruppo di indice uguale al più piccolo primo che divide $|G|$. Dimostrare che H è normale in G.

Esercizio 2

Dare una dimostrazione del teorema di Cauchy tramite il seguente approccio. Sia G un gruppo finito di cardinalità divisibile per un numero primo p. Consideriamo l'insieme

$$X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = e\}.$$

Qual è la cardinalità di X? C'è un'azione di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ su X (quale? Data una p-upla $(g_1, \ldots, g_p)$ in X, anche $(g_p, g_1, g_2, \ldots, g_{p-1})$ è in X...). Le orbite possono essere solo di lunghezza 1 o p (perché?). Come sono fatte le orbite di lunghezza 1 e quante possono essere? Perché ce n'è almeno una? Dedurne il teorema di Cauchy.

Esercizio 3

(Teorema di Poincarè) Sia G un gruppo e H un sottogruppo di indice n. Dimostra che esiste un sottogruppo N normale in G, contenuto in H e il cui ordine divide $n!$.

Esercizio 4

Dimostra che ogni gruppo di ordine 10 è isomorfo al gruppo ciclico C_{10} o al gruppo diedrale D_5.

Esercizio 5

Dimostra che ogni gruppo di ordine 15 è ciclico. (Hint: prima dimostra che ha un sottogruppo normale di ordine 5, che deve essere per forza centrale)

Settimana 3: 21/10

Esercizio 1

Esprimere $\sigma = (12)(23)(34)(45)$ come prodotto di cicli.

Esercizio 2

Esprimere $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni.

Esercizio 3

- Calcolare il numero di k-cicli in S_n, per $n \geq k$.
- Calcolare il numero di elementi in S_n prodotto di due k-cicli disgiunti, per $n \geq 2k$.

Esercizio 4

- Determinare il centralizzatore $Z(\sigma)$ di $\sigma = (12345)$ in S_5.
- Determinare il centralizzatore $Z(\sigma)$ di $\sigma = (12345)$ in S_{10}.
- Determinare il centralizzatore $Z(\tau)$ di $\tau = (12345)(678910)$ in S_{10}
- Determinare il normalizzatore $N(\sigma) := N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$ di $\sigma = (12345)$ in S_5.

Esercizio 5

Determinare le classi di coniugio in S_5 e in A_5.

Esercizio 6

- Dimostrare che per $n \geq 3$
$$A_n = \langle (i\ j\ k) \mid i, j, k \in \{1, \ldots, n\},\ i, j, k \text{ distinti}\rangle \subset S_n.$$
- Dimostrare che
$$A_n = \langle (i\ j)(k\ l) \mid i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j, k \neq l\rangle \subset S_n.$$
per $n \geq 5$. Cosa succede per $n = 4$?

Esercizio 7

Dimostrare che gli omomorfismi da D_n in un gruppo G sono in bigezione con l'insieme $\{(x, y) \in G^2 \mid x^2 = y^n = e \text{ e } xyx = y^{-1}\}$.

Esercizio 8

Siano p e q due primi tali che q divide $p-1$. Dimostrare che esistono, a meno di isomorfismo, 2 gruppi di ordine pq.

Settimana 4: 28/10

Esercizio 1

Sia $\sigma \in A_n$.

1. Sia $Z_{S_n}(\sigma)$ lo stabilizzatore di σ in S_n. Si dimostri che $Z_{S_n}(\sigma) \subset A_n$ se e solo se σ è prodotto di cicli dispari disgiunti di lunghezza diversa (attenzione: contano anche i cicli di lunghezza 1)
2. Si consideri una permutazione $\sigma \in A_n$, e sia $Cl_{A_n}(\sigma)$ la sua classe di coniugio in A_n. Sia poi $Cl_{S_n}(\sigma)$ la classe di coniugio di σ in S_n. Si dimostri che $|Cl_{A_n}(\sigma)|$ è uguale o a $|Cl_{S_n}(\sigma)|$ o a $\frac{1}{2}|Cl_{S_n}(\sigma)|$.
3. Dimostrare che se $|Cl_{S_n}(\sigma)| = 2|Cl_{A_n}(\sigma)|$, allora $Cl_{S_n}(\sigma)$ si suddivide in due classi di coniugio per A_n.

Esercizio 2

Ricordiamo che un gruppo G si dice ***semplice*** *se non ha sottogruppi normali non banali, cioè diversi da $\{e\}$ e G.*

Dimostrare che A_5 è semplice

Esercizio 3

Dimostrare che gli unici sottogruppi normali N di S_n sono $\{e\}$, A_n e S_n, per $n \geq 5$.
Hint: Considera il commutatore $[\tau, \sigma] = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ dove τ è una trasposizione e $\sigma \in N$.

Esercizio 4

(difficile) Dimostrare che A_n è semplice per $n \geq 5$.
Hint: Se N è normale in A_n, dimostra che per ogni trasposizione $\tau \in S_n$ si ha che $N \cap \tau N \tau^{-1}$ e $N \cdot \tau N \tau^{-1}$ sono entrambi normali in S_n.

Settimana 5: 04/11

Esercizio 1

Determinare la struttura di gruppo di un 2-sylow in S_4 e di un 3-Sylow in S_9.

Esercizio 2

Determinare il numero di 2-Sylow in S_5.

Esercizio 3

Siano p, q, r primi con $p < q < r$. Sia G un gruppo di ordine pqr. Dimostra che G ha un sottogruppo di Sylow normale.

Esercizio 4

Sia $p \geq 5$ un primo $\equiv 3 \pmod 4$. Classifica i gruppi di ordine $4p$, a meno di isomorfismo

Esercizio 5

Dimostra che ogni gruppo di ordine 45 è abeliano.

Esercizio 6

Classifica i gruppi di ordine 66 a meno di isomorfismo.

Esercizio 7

Dimostra che non esistono gruppi semplici di ordine 80.

Esercizio 8

Sia G un gruppo finito che agisce transitivamente su un insieme X (transitivamente vuol dire che c'è una sola orbita, ovvero che per ogni coppia di elementi (x, y) di X esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$).

1. Siano $x, y \in X$. Dimostrare che i sottogruppi $\mathrm{Stab}_G(x)$ e $\mathrm{Stab}_G(y)$ di G sono coniugati fra loro.

2. Supponiamo che $|X| \geq 2$. Dimostrare che esiste un elemento $g \in G$ che agisce su X senza punti fissi, ovvero, esiste un elemento $g \in G$ tale che $g \cdot x \neq x$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 9

Un'azione di un gruppo G su un insieme X si dice doppiamente transitiva se per tutte le coppie ordinate di elementi distinti (x, y) e (z, w) di X con $x \neq z$ e $y \neq w$ esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = z$ e $g \cdot z = w$. Si dimostri che le seguenti sono equivalenti se $|X| \geq 3$.

1. L'azione di G su X è doppiamente transitiva.
2. L'azione indotta di G su $X \times X$ data da $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$ ha esattamente due orbite.
3. Per tutti gli $x \in X$ l'azione di $\mathrm{Stab}_G(x)$ su $X \setminus \{x\}$ è transitiva.
4. L'azione è transitiva ed esiste x_0 tale che l'azione $\mathrm{Stab}_G(x_0)$ su $X \setminus \{x_0\}$ è transitiva.

Esercizio 10

Sia G un gruppo che agisce su un insieme X. Fissiamo $x \in X$ e sia $S = \mathrm{Stab}_G(x)$ e sia H un sottogruppo proprio di G che contiene S.

1. Dimostrare che l'azione di H su X non è transitiva.
2. Supponiamo che l'azione di G è doppiamente transitiva. Allora S è un sottogruppo massimale.

Dedurre che S_{n-1} è un sottogruppo massimale di S_n, A_{n-1} è un sottogruppo massimale di A_n e le matrici triangolari superiori sono un sottogruppo massimale di $GL_2(\mathbb{F}_p)$.

Esercizio 11

(difficile) L'obiettivo di questo esercizio è di costruire un automorfismo di S_6 che non sia interno.

1. Dimostrare che S_5 possiede sei 5-Sylow.
2. Considerando l'azione di coniugio sui Sylow, costruire un omomorfismo iniettivo $S_5 \to S_6$, tale che l'immagine è un sottogruppo transitivo (cioè agisce transitivamente su $\{1, 2, \ldots, 6\}$) che chiamiamo H
3. Considerando l'azione di moltiplicazione a sinistra di S_6 su S_6/H, costruire un ulteriore omomorfismo iniettivo $\phi : S_6 \to S_{S_6/H}$. Osserva che $\phi(H) = \mathrm{Stab}(H)$.
4. Numerando le classi in S_6/H, possiamo identificare $S_{S_6/H}$ con S_6 e interpretare $\phi \in Aut(S_6)$.
5. Dedurre che ϕ non è interno perché non preserva gli stabilizzatori.

Esercizio 12

Siano p, q primi distinti, siano G, H rispettivamente un p-gruppo e un q-gruppo, e siano ϕ , ψ due omomorfismi $H \to Aut(G)$. Dimostrare che, se i prodotti semidiretti $G \rtimes_\phi H$ e $G \rtimes_\psi H$ sono isomorfi, allora $\ker \phi$ è isomorfo a $\ker \psi$.

Settimana 6: 11/11

Esercizio 1

(difficile) L'obiettivo di questo esercizio è costruire un isomorfismo tra $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ e A_5. Ricordiamo che $SL_2(\mathbb{F}_5)$ è il gruppo delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{F}_5$ di determinante 1 e che $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ è il quoziente di $SL_2(\mathbb{F}_5)$ per il sottogruppo $\{\pm Id\}$.

- Calcolare l'ordine di $SL_2(\mathbb{F}_5)$ e di $PSL_2(\mathbb{F}_5)$.
- Sia $x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_5)$. Calcola l'ordine di x, il suo centralizzatore e il normalizzatore di $\langle x \rangle$.
- Deduci che il normalizzatore è un 2-sylow, ed è isomorfo al gruppo dei quaternioni.
- Osserva che $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ in $\mathbb{F}_5[x]$. Quindi tutti gli elementi di ordine 4, sono diagonalizzabili. In particolare, sono tutti coniugati tra loro. Dimostra che ci sono 30 elementi di ordine 4.
- Osserva che $-Id$ è l'unico elemento di ordine 2 ed è contenuto in ogni 2-sylow.
- Dimostra che un elemento di ordine 4 appartiene ad un unico 2-sylow. Deducine che $SL_2(\mathbb{F}_5)$ ha cinque 2-sylow.
- Deduci che anche $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ ha cinque 2-sylow, ognuno isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Inoltre due 2-sylow distinti si intersecano trivialmente.
- Considera l'azione di $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ per coniugio sui suoi 2-Sylow. Questa induce un omomorfismo $\phi : PSL_2(\mathbb{F}_5) \to S_5$.
- Considera l'azione di un 2-sylow P di $PSL_2(\mathbb{F}_5)$. Allora $\phi(P)$ è generato dalle coppie di trasposizioni che fissano P.
- Deduci che $Im(\phi) = A_5$ e che $\phi : PSL_2(\mathbb{F}_5) \to A_5$ è un isomorfismo.

Esercizio 2

Sia A un anello commutativo e con identità. Siano I, J ideali. Dimostrare che:

- $I \cdot J \subset I \cap J$.
- $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
- $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Esercizio 3

Sia $A = \mathbb{F}_5[x]$, $I = (x^2+1)$ e $J = (x^3-1)$. Descrivere $I+J$, $I \cdot J$ e $I \cap J$

Esercizio 4

Sia $A = \mathbb{Q}[x,y]$, $I = (x-1, y-1)$ e $J = (1-xy)$. Mostrare che I è massimale, mentre J non è massimale.

Settimana 7: 18/11

I nostri anelli sono sempre commutativi e con identità.

Esercizio 1

1. Sia A un dominio di integrità finito. Allora A è un campo.
2. Sia A un anello con $|A| = p$ primo. Allora A è un campo.
3. Classificare gli anelli con 4 elementi, a meno di isomorfismo.

Esercizio 2

Sia $A = \mathbb{Q}[x, y]$. Mostrare che $J = (1 - xy)$ è un ideale primo.

Esercizio 3

Descrivere $\mathbb{Q}[x, y]/(x - y, x^3 + y^3 - x)$ come prodotto di campi.

Esercizio 4

Sia A un dominio commutativo con identità ed S una sua parte moltiplicativa. Dimostrare che ogni ideale di $S^{-1}A$ è della forma $S^{-1}I$, dove I è un ideale di A.

Settimana 8: 25/11

Esercizio 1

Sia A un dominio commutativo con identità ed S una sua parte moltiplicativa. Mostrare che c'è una bigezione fra gli ideali primi di $S^{-1}A$ e gli ideali primi P di A tali che $P \setminus S = \emptyset$.

Esercizio 2

Sia $S = \mathbb{Z} \setminus (2)$. Descrivere tutti gli ideali dell'anello $Z_{(2)} := S^{-1}\mathbb{Z}$. Consideriamo l'immersione naturale $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(2)}$. Dato un ideale I di $\mathbb{Z}$, descrivere l'ideale J generato da $i(I)$ e l'ideale $i^{-1}(J)$.

Esercizio 3

Sia $A = \mathbb{Z}[x]$. Vogliamo studiarne gli ideali massimali I di A.

1. Se I contiene un primo $p \in \mathbb{Z}$, allora $I = (p, f(x))$ con $f(x)$ irriducibile $\mod p$.
2. Supponiamo che I non contiene un primo $p \in \mathbb{Z}$. Sia $S = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Allora $S^{-1}I$ è principale, e quindi $I = (f(x))$ con f primitivo e di grado ≥ 1.
3. Se $I \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, trovare p primo tale che (p, I) è un ideale proprio più grande di I.

Esercizio 4

Sia R un dominio a fattorizzazione unica.

1. Sia $q \in Quot(R)$ un elemento del suo campo di frazioni con $q^n \in R$. Allora $q \in R$.
2. Sia (a) un ideale principale in R. Allora $R/(a)$ è un dominio se e solo se a è irriducibile.

Esercizio 5

Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2+5)$ è un dominio non a fattorizzazione unica. Questo si può fare seguendo i passi:

1. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$, e quindi un dominio.
2. 2 e 3 sono irriducibili (considera la norma come numero complesso)
3. Trovare un ideale massimale M che contiene (2) e mostrare che $M^2 = (2)$.
4. Trovare due decomposizioni in irriducibili di 6.

Settimana 9: 02/12

Esercizio 1

Sia R un dominio a fattorizzazione unica.

1. Sia $q \in Quot(R)$ un elemento del suo campo di frazioni con $q^n \in R$. Allora $q \in R$.
2. Sia (a) un ideale principale in R. Allora $R/(a)$ è un dominio se e solo se a è irriducibile.

Esercizio 2

Sia A anello commutativo con unità. Dimostrare che $\sqrt{(0)}$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi di A.

Esercizio 3

Sia R un anello commutativo e $K \subset R$ un campo. Se R ha dimensione finita come spazio vettoriale su K ed è un dominio di integrità, allora R è anch'esso un campo.

Esercizio 4

Sia K un campo e $K(X)$ il campo delle frazioni di $K[x]$. Gli unici elementi di $K(X)$ che sono algebrici su K sono gli elementi di K.

Esercizio 5

Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e siano $a, b \in K^*$. Dimostrare che $K(\sqrt{a}) = K(\sqrt{b})$ se e solo se a/b è un quadrato in K.

Esercizio 6

Siano $p, q \in \mathbb{Z}$ primi distinti. Dimostra che $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ e calcola il polinomio minimo di $\sqrt{p}+\sqrt{q}$. Dimostra che $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$ e calcola le immersioni di $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ in $\bar{\mathbb{Q}}$ che fissano $\mathbb{Q}$.

Esercizio 7

Sia K un campo e siano $f, g \in K[x]$ due polinomi irriducibili con grado coprimo. Sia α una radice di f. Dimostra che g è irridubile su $K(\alpha)$.

Esercizio 8

Sia L il campo di spezzamento di un polinomio $f \in K[x]$ (non per forza irriducibile). Dimostra che $[L : K] | n!$.

Esercizio 9

Calcola il grado del campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei seguenti polinomi.

1. $x^4 - 5$
2. $x^3 + x + 1$
3. $x^4 + 3x^2 + 1$

Esercizio 10

Sia p primo. Dimostrare che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$ è una chiusura algebrica di $\mathbb{F}_p$.

Esercizio 11

Determinare il polinomio minimo di α^2 su un campo K conoscendo il polinomio minimo di α.
Sia $\alpha = 2 + \sqrt{5 + \sqrt{-5}}$. Determinare il polinomio minimo di α^2.

Esercizio 12

Sia ζ_n una radice primitiva n-esima dell'unità su $\mathbb{Q}$. Dimostrare che i gruppi $\{f \in Aut(\mathbb{Q}(\zeta_n)) \mid f|_{\mathbb{Q}} = id\}$ e $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ sono isomorfi.

Settimana 10: 09/12

Esercizio 1

Determinare tutti i sottocampi di $\mathbb{Q}(\zeta_{12})$, dove $\zeta_{12} \in \mathbb{C}$ è una radice primitiva dodicesima dell'unità.

Esercizio 2

Sia p un numero primo e siano $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}_p}$. Poniamo $m = [\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_p]$ e $n = [\mathbb{F}_p(\beta) : \mathbb{F}_p]$. Dimostrare che, se $(m, n) = 1$, allora

$$[\mathbb{F}_p(\alpha + \beta) : \mathbb{F}_p] = mn.$$

Esercizio 3

Sia $p(x) = x^4 + ax^2 + b$ un polinomio irriducibile a coefficienti razionali e sia K il suo campo di spezzamento. Dimostrare che il gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ è isomorfo a:

(a) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ se e solo se b è un quadrato in $\mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ se e solo se b non è un quadrato in $\mathbb{Q}$, ma $b(a^2 - 4b)$ lo è;

(c) D_4, se né b né $b(a^2 - 4b)$ è un quadrato in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4

Sia ζ_7 una radice primitiva settima dell'unità in $\mathbb{C}$ e sia $K := \mathbb{Q}(\zeta_7)$. Sia poi $\alpha := \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$ e $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dimostrare che l'estensione $L/\mathbb{Q}$ è normale e che il suo gruppo di Galois è $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Sia inoltre $m(x)$ il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$. Determinare $m(x)$ e dimostrare che le sue tre radici sono $\zeta_7 + \zeta_7^{-1}$, $\zeta_7^2 + \zeta_7^{-2}$, $\zeta_7^3 + \zeta_7^{-3}$.

Esercizio 5

Dato un campo finito F di caratteristica positiva $p > 0$, consideriamo, per $a \in F$, il polinomio $X^p - X - a$. Sia β una radice di questo polinomio in un'estensione di campi L/K, allora $F(\beta)$ è il campo di spezzamento di $X^p - X - a$.

Supponiamo che il polinomio $X^p - x - a$ non ha radici in F. Allora $x^p - x - a$ è irriducibile in $F[x]$ e $Gal(L/F)$ è un gruppo ciclico di ordine p.

Esercizio 6

Sia $K \subset \mathbb{C}$ un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$. Sia $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la coniugazione complessa. Dimostrare:

1. $\sigma(K) = K$, quindi σ definisce un elemento di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
2. $K^\sigma = K \cap \mathbb{R}$.
3. Se $[K : \mathbb{Q}]$ è dispari, allora $K \subset \mathbb{R}$.

Esercizio 7

Dato $n \geq 1$, dimostrare che $\mathbb{C}(X^n) \subset \mathbb{C}(X)$ è un'estensione di Galois di grado n con gruppo di Galois ciclico.

Esercizio 8

Trovare tutti i campi K con $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$, e determinare quali sono normali su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 9

Trovare tutti i campi K con $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$ e $[K : \mathbb{Q}] = 2$.

Esercizio 10

Sia F un campo e $K, L \subset \bar{F}$ estensioni di F tali che K/F è di Galois e L/F è finita. (Supponiamo inoltre per semplicità che F abbia caratteristica 0 o sia finito.) Allora KL/L è un estensione di Galois e inoltre $Gal(KL/L) \cong Gal(K/K \cap L)$.

Settimana 11: ?

Esercizio 1

Sia K un campo di caratteristica $\neq 2$. Sia $f \in K[x]$ un polinomio irriducibile di grado n e sia L il campo di spezzamento di f.

Supponiamo che L su K sia di Galois e sia $G = Gal(L/K)$. Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ le radici di f. Possiamo considerare G come sottogruppo di S_n, tramite l'azione di G su $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ Sia

$$\delta := \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

1. Dimostrare che $\delta^2 = 0$.
2. Se $|G|$ è dispari, allora $\delta \in K$.
3. Dimostrare che $\delta \in K \iff G \subset A_n \subset S_n$

ù

Esercizio 2

Siano p, q primi e sia $f(x) = x^p - q \in \mathbb{Q}[x]$. Sia L il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$. Dimostrare che

$$Gal(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

dove $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ agisce su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tramite la moltiplicazione.