AM1gest 20/21 lezione 1
29/9/2020

Introduzione

Docenti: Giovanni Alberti, Alessandra Pluda

Programma

- ripasso nozioni di base
- derivate: calcolo e applicazioni
- integrali: calcolo e applicazioni
- serie numeriche
- equazioni differenziali ← forse l'argomento più importante per i corsi che seguono

Nota: in questo corso si da più peso agli aspetti operativi (risoluzione di problemi) che a quelli teorici (che comunque verranno trattati). In questo senso il corso è più vicino ad un corso di "Calcolo" che di "Analisi".

↑ nel senso americano del termine

Esame

Ogni anno avete 7 occasioni di passare l'esame (7 "appelli"): in pratica si tratta di 7 date in cui si svolge la prova scritta (3 a gennaio-febbraio, 3 a luglio-agosto, 1 a settembre).

Attenzione: potete tentare l'esame al più 4 volte.

Struttura esame:

SCRITTO + ORALE

^{a}

1ª parte

domande
a cui dare
solo la
risposta
di solito:
8 in un'ora

2ª parte

esercizi
di cui dare
soluzioni
motivate
di solito:
3 in due ore

esercizi (se lo
scritto e solo suff.)
+
enunciati dei
teoremi
+
dimostrazioni
(per i voti alti)

Nota: la consegna della prima parte dello scritto conta come aver tentato l'esame.

Strumenti del corso

TEAMS

- lezioni
- ricevimento : G.A. : Ven. 11.30-13
  A.P. : Lun. 18-19.30
- registrazioni delle lezioni

portale E-LEARNING di Ingegneria

https://elearn.ing.unipi.it

e poi cercate questo corso ....

- Comunicazioni (sugli esami e altro)
- materiale didattico
  - liste di esercizi
  - appunti delle lezioni
  - testi e soluzioni degli esami

pagina web di G.A.

http://pagine.dm.unipi.it/alberti

- testi e soluzioni degli scritti degli anni passati.
- breve presentazione del corso

e-mail di G.A.

giovanni.alberti@unipi.it

Solo per le emergenze!

libri di testo

Non seguiamo un testo preciso:

come supporto o complemento più o meno ogni testo universitario va bene!

registro delle lezioni

link sulla mia pagina web.

Osservazioni sparse

- il corso inizia lento poi si accelera;
  è facile rimanere indietro!
- il voto finale dipende solo dall'esame;
- la frequenza non è obbligatoria
  (anche perché ci sono le registrazioni delle lezioni!);
- durante le lezioni fate domande
  (a voce meglio che in chat);
- la parte fondamentale dell'esame è lo scritto;
  l'orale serve a determinare il voto finale all'interno della fascia data dallo scritto;
  raramente si viene bocciati all'orale;
- piuttosto che imparare a memoria la procedura per risolvere gli esercizi bisogna capire il ragionamento che ci sta dietro;

- studiare insieme ad altri molto utile
  (magari non ugualmente utile per tutti);

- se qualcosa non va nel corso potete rivolgervi a:
  - me (anche se può essere difficile);
  - Alessandra Pluda;
  - rappresentanti degli studenti!

Fine della presentazione del corso

Passo ora al contenuto matematico.

Avvertenze di carattere generale

- In questo corso il logaritmo è sempre in base e (= 2,718… , costante di Napier)

$$\log x = \log_e x$$

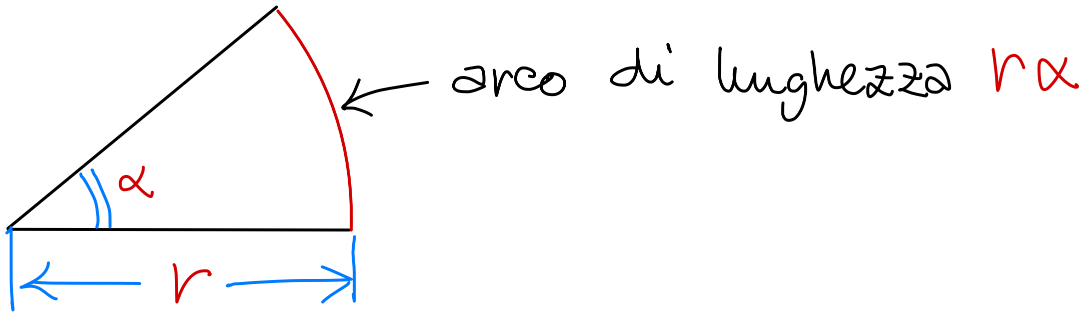
Questa scelta semplifica alcune formule nel calcolo delle derivate, ma non è quella usuale in ambito ingegneristico.

- Gli angoli sono misurati in radianti.

Quindi 90° diventa $\frac{\pi}{2}$, 45° diventa $\frac{\pi}{4}$ etc.

Questa scelta semplifica alcune formule nel calcolo delle derivate.

Significato geometrico della misura in radianti:



AM1 gest 20/21 lezione 3

1/10/20

Grafici di funzioni elementari

Perché è utile disegnare i grafici di funzioni?

Perché serve a visualizzare le informazioni contenute nella formula

Metodi per disegnare grafici:

STUDIO DI FUNZIONI

COMPUTER

GRAFICI DI FUNZIONI ELEMENTARI e operazioni sui grafici

↑ argomento delle prossime lezioni

Esercizio

Partendo dal grafico di $f(x)$ disegnato sotto risolvere (graficamente) le seg. equazioni e diseq.

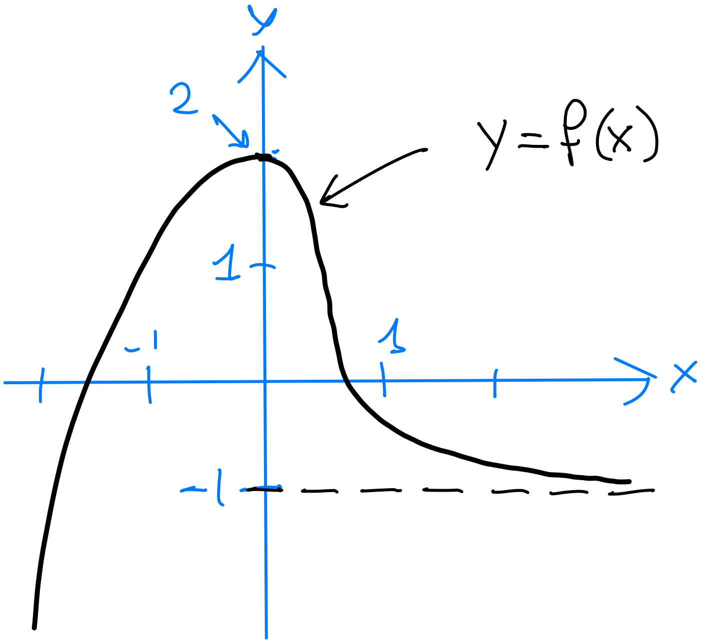
a) $f(x)=1$

b) $f(x)\geq 1$

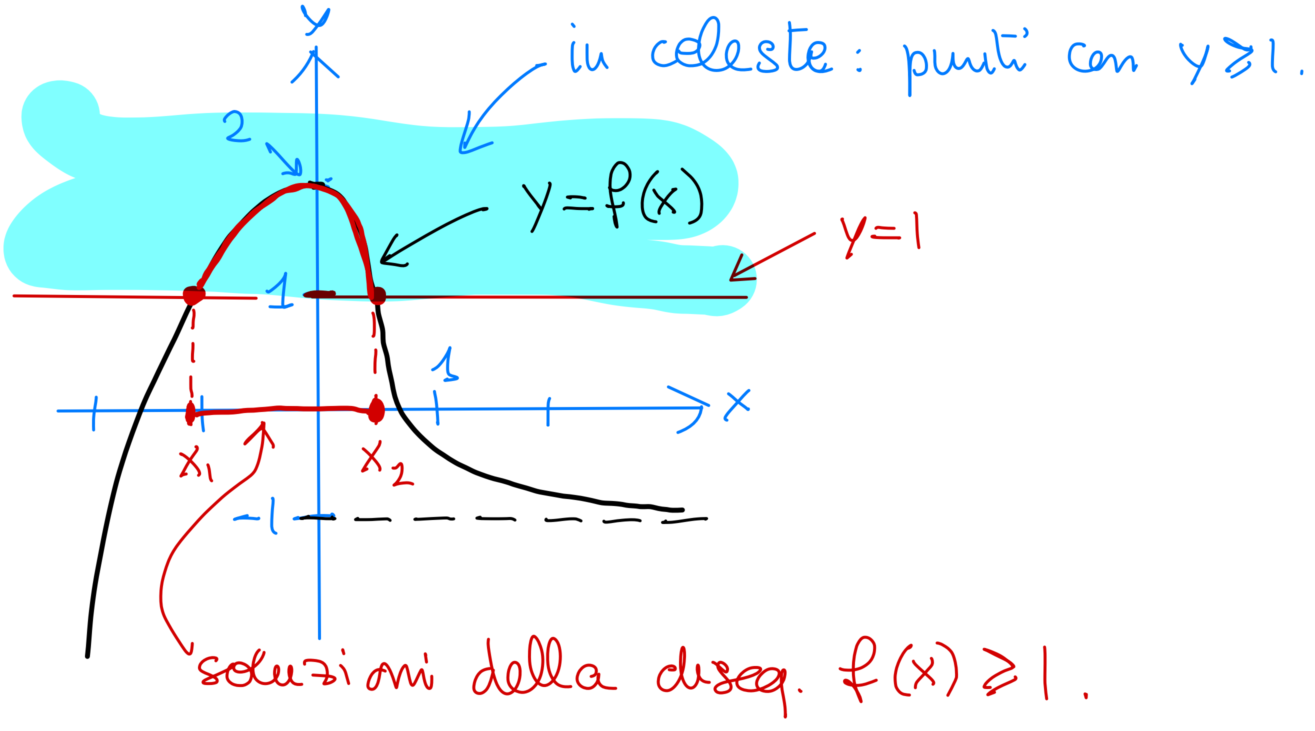
c) $f(x)=x^2$

d) $f(x)\geq x^2$

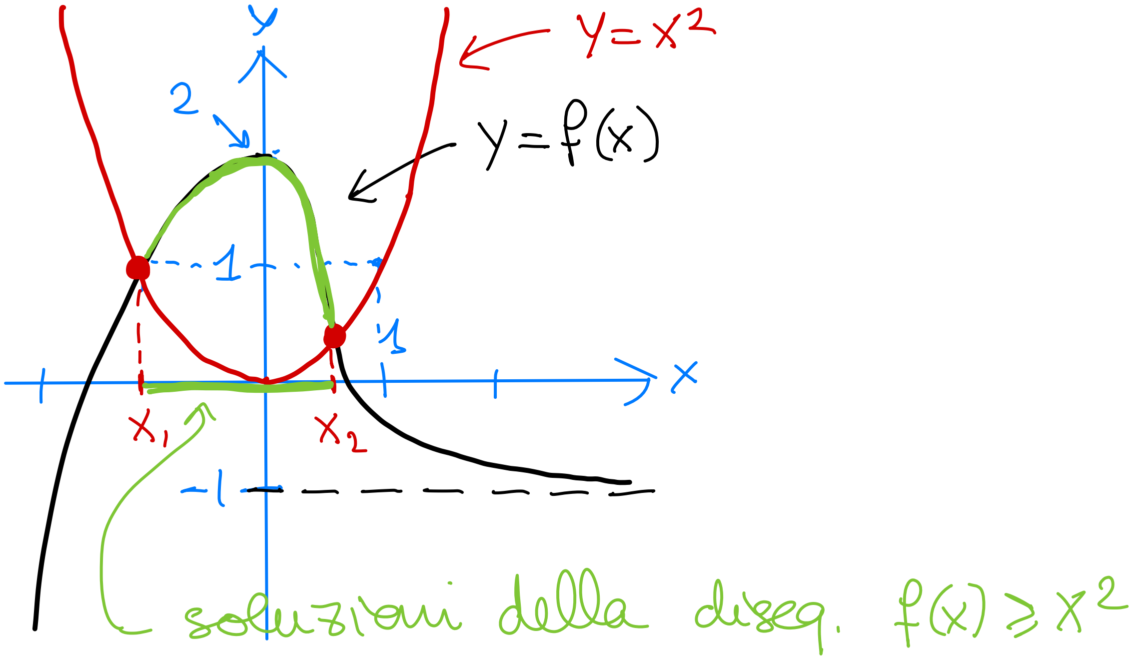
e) $f(x)\leq e^x-1$



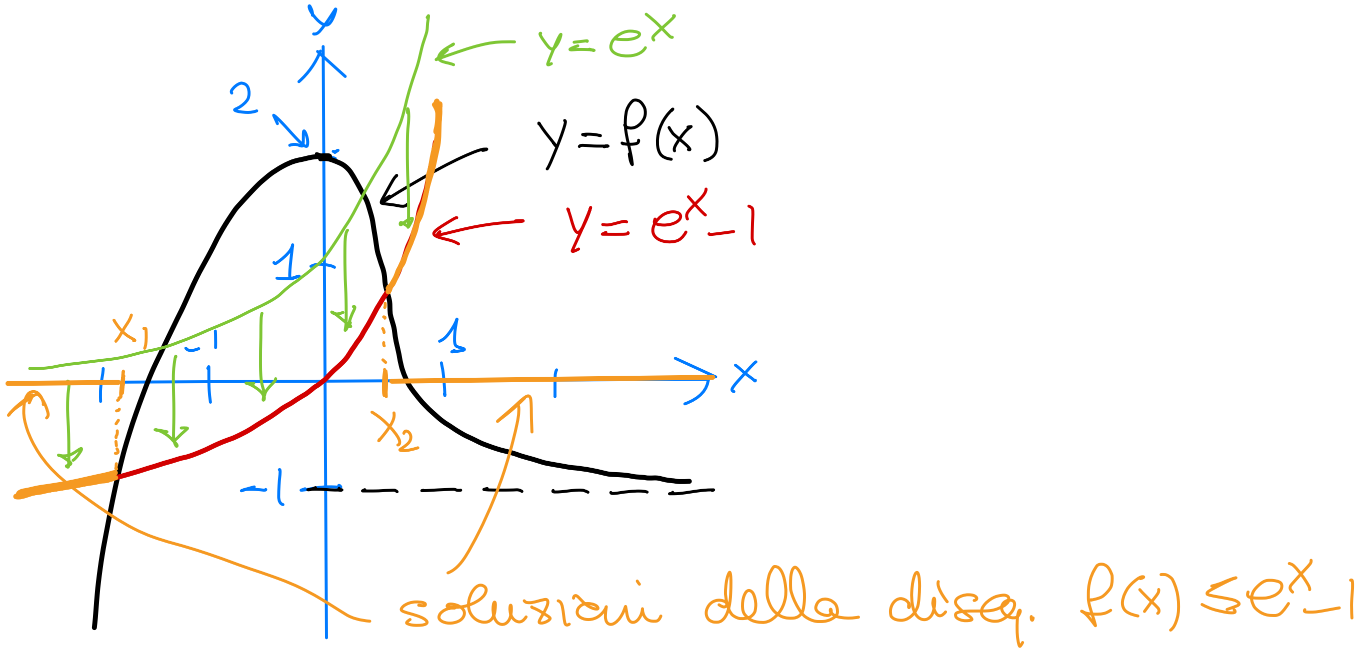
b) $f(x)\geq 1$

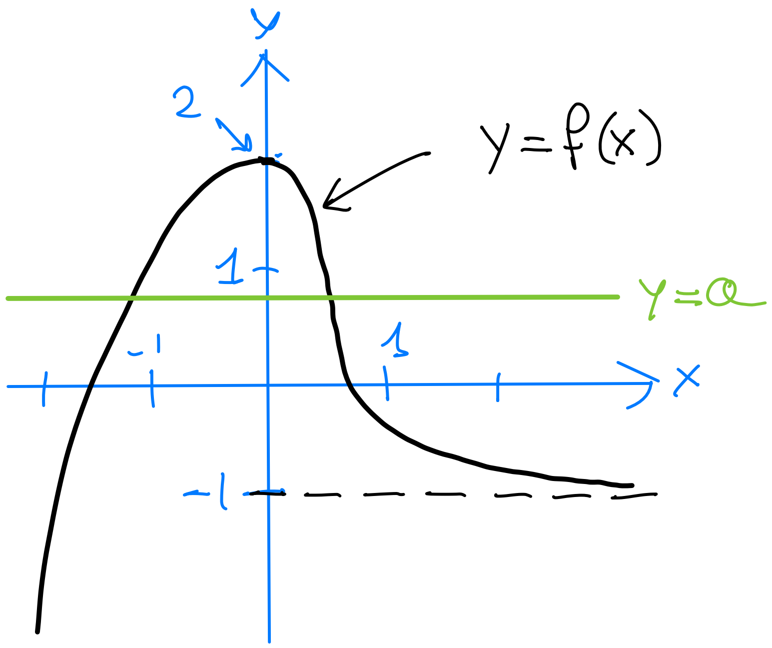


d) $f(x) \geq x^2$



e) $f(x) \leq e^x - 1$



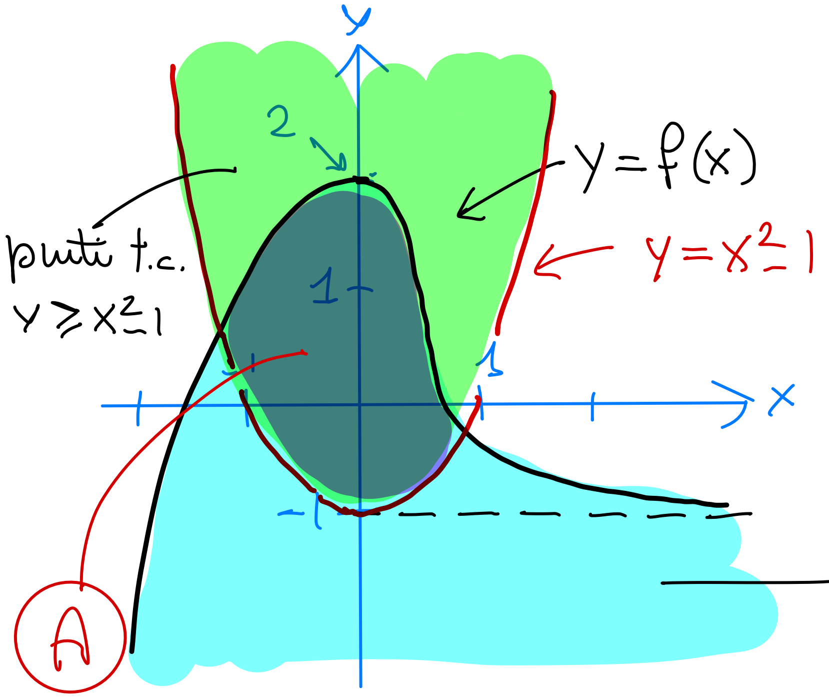


Domanda:
per quali $a \in \mathbb{R}$
l'equazione $f(x) = a$
ha 2 soluzioni?

Risp.: $-1 < a < 2$

$a \in (-1, 2)$

~~$a < 2 \wedge a > -1$~~



Disegnare l'insieme A
dei punti (x, y) tale
che $x^2 - 1 \leq y \leq f(x)$

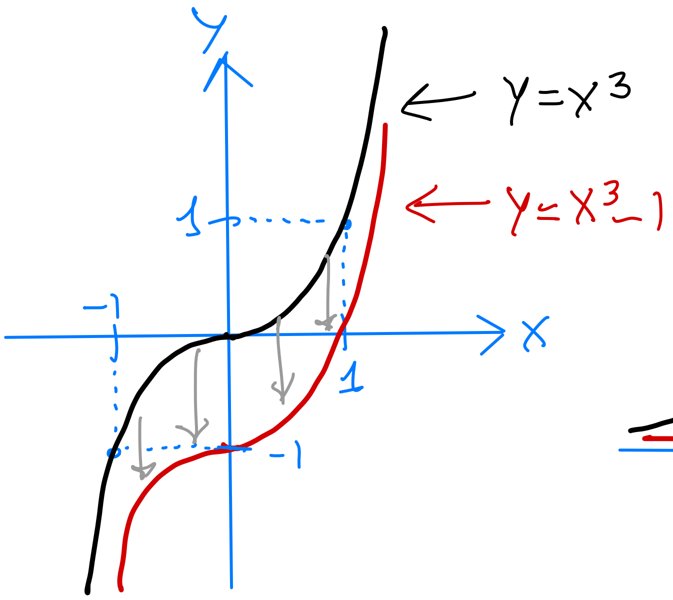
punti t.c. $y \leq f(x)$

E se avessi chiesto l'insieme dei punti
t.c. $x^2 - 1 \leq y$ oppure $y \leq f(x)$?

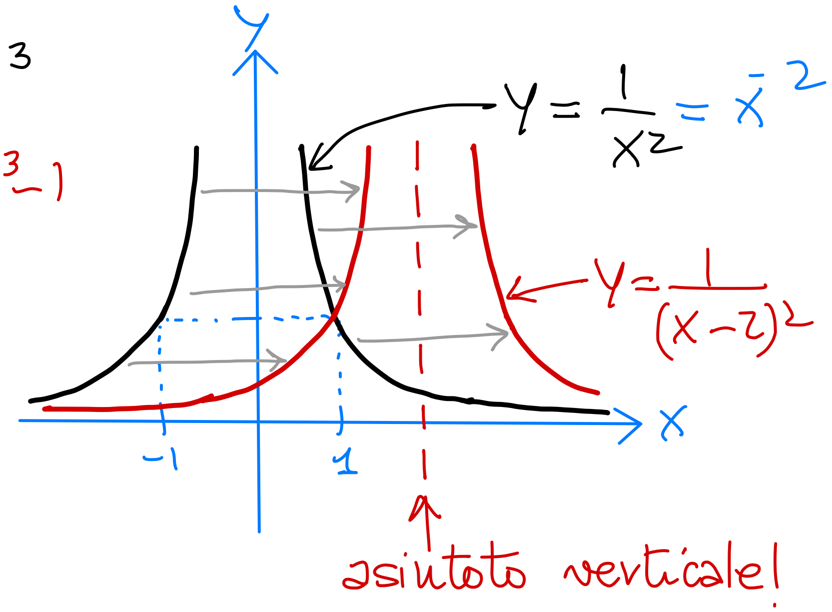
In tal caso si prende l'unione dell'area
verde e di quella celeste.

Esempi : disegnare i seguenti grafici

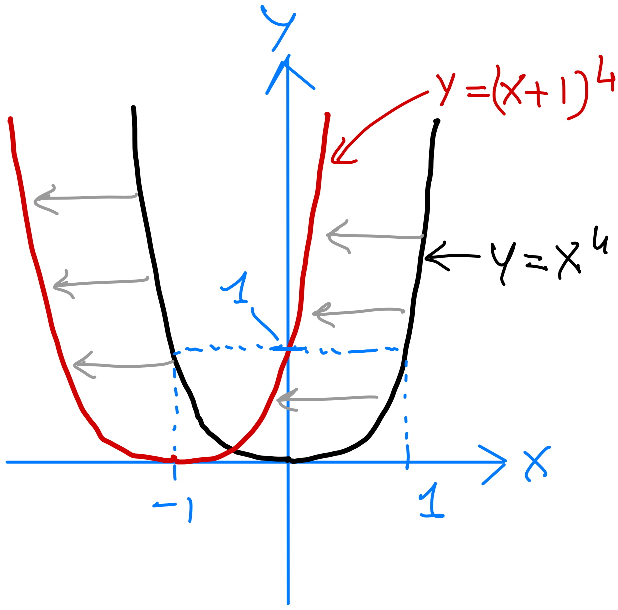
a) $y = x^3 - 1$



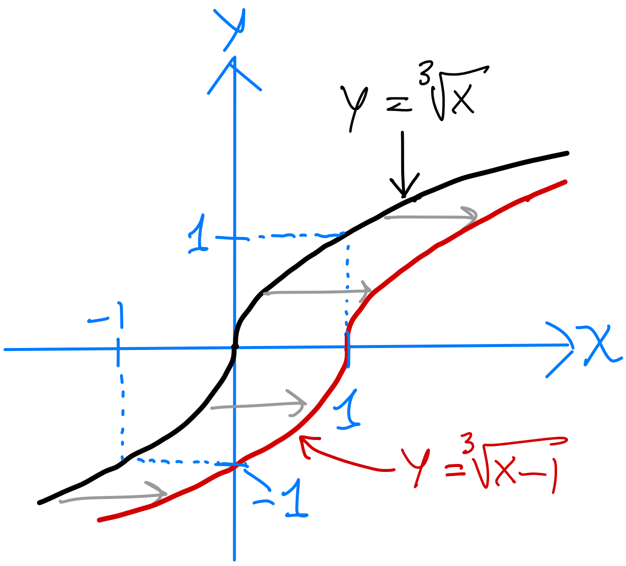
b) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$



c) $y = (x+1)^4$



d) $y = \sqrt[3]{x-1}$

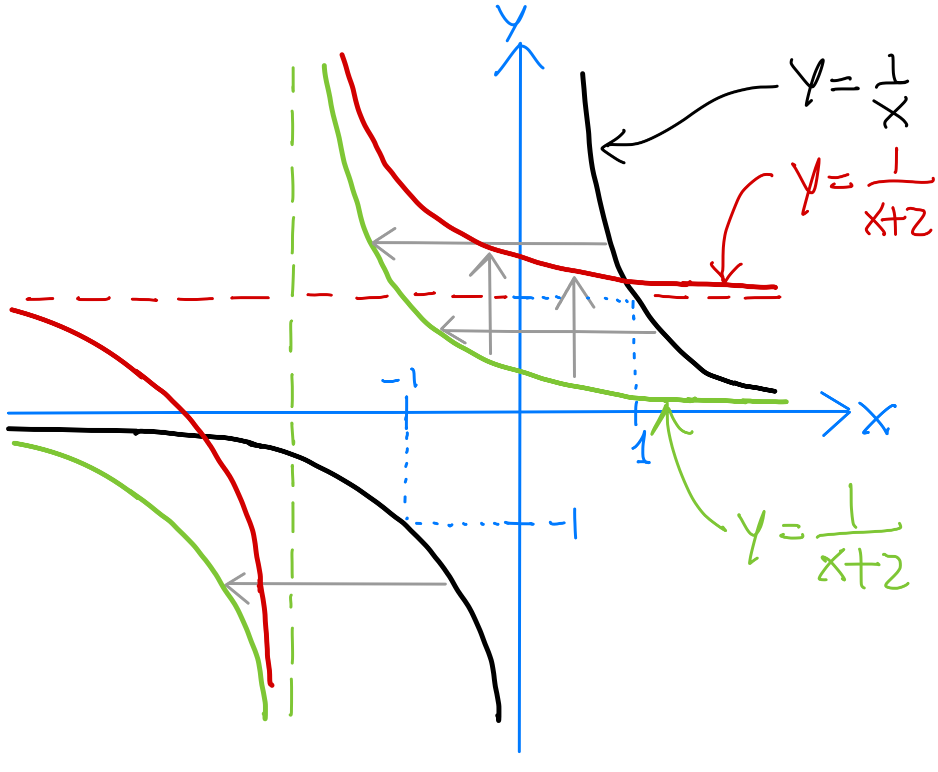


e) $\frac{1}{x+2}+1$

in due passi: $\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{x+2} \rightsquigarrow \frac{1}{x+2}+1$

$f(x) \rightsquigarrow f(x+2)$
sposto verso sinistra di 2

$f(x) \rightsquigarrow f(x)+1$
sposto verso l'alto di 1

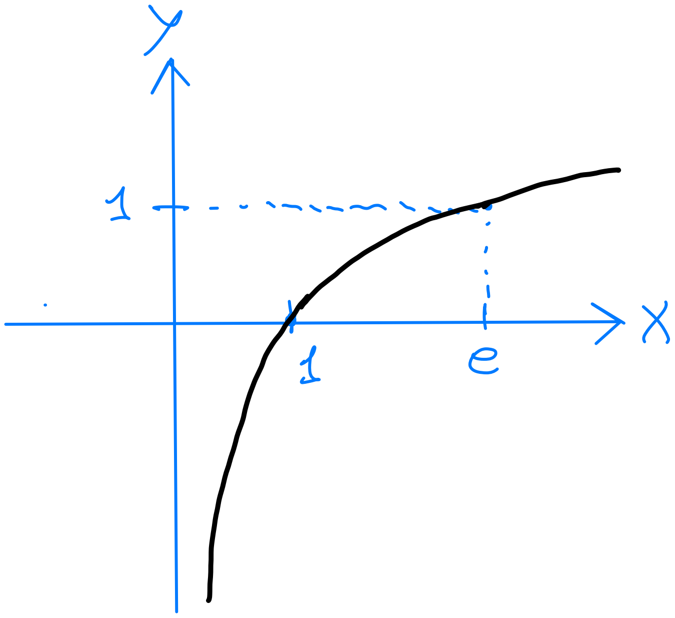


Nota: va bene invertire l'ordine delle operaz.

$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{x}+1 \rightsquigarrow \frac{1}{x+2}+1$$

grafico del logaritmo

$y = \log x = \log_e x$



AM1 gest 20/21 lezione 4

2/10/2020

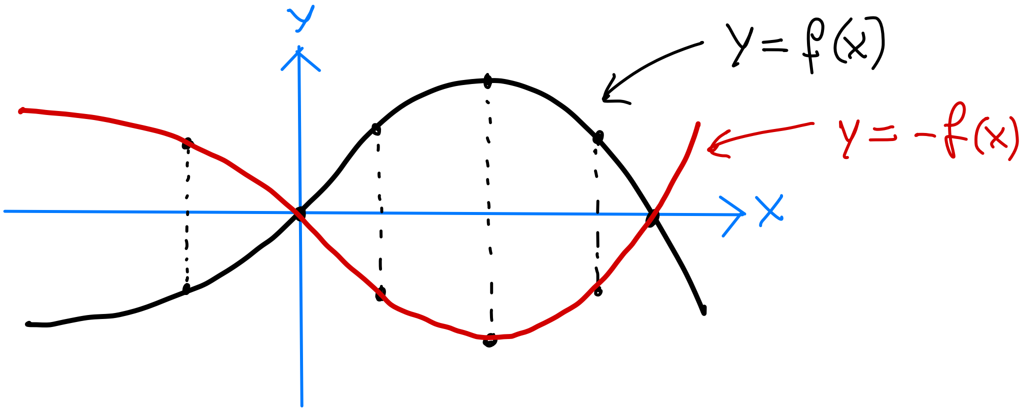
Lezione del Venerdì: 9.40 → 11.40

con pausa in mezzo

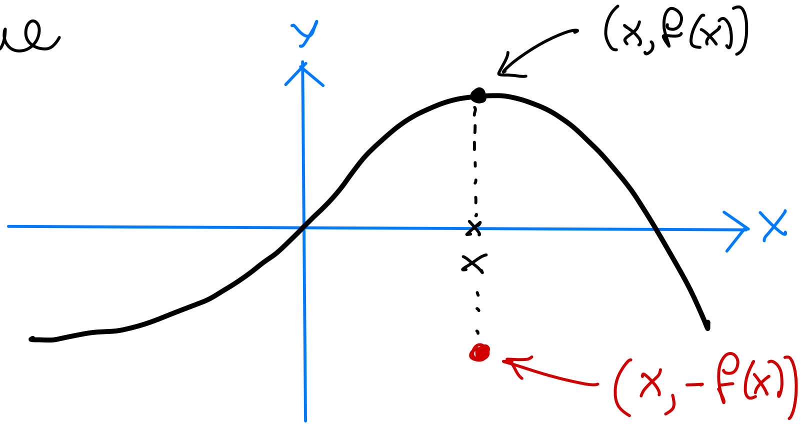
inizio reale

Operazioni sui grafici II

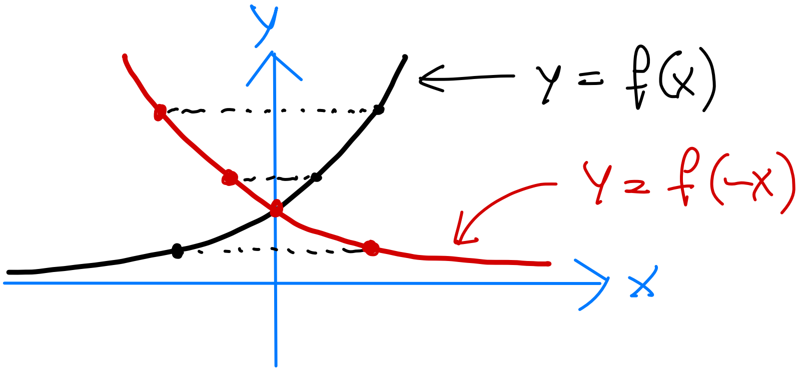
a) Il grafico di $-f(x)$ è ottenuto riflettendo quello di $f(x)$ rispetto all' asse delle x



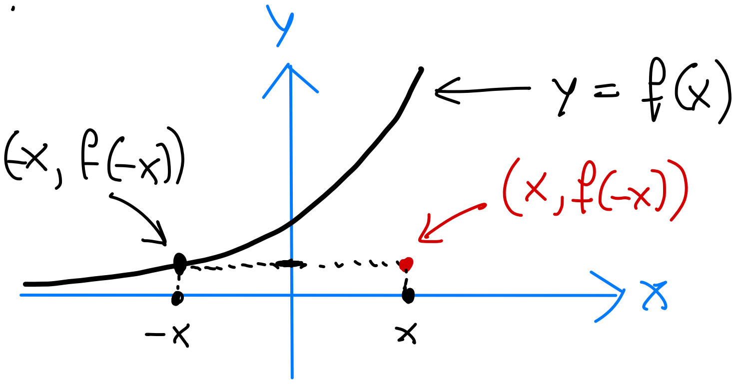
Spiegazione



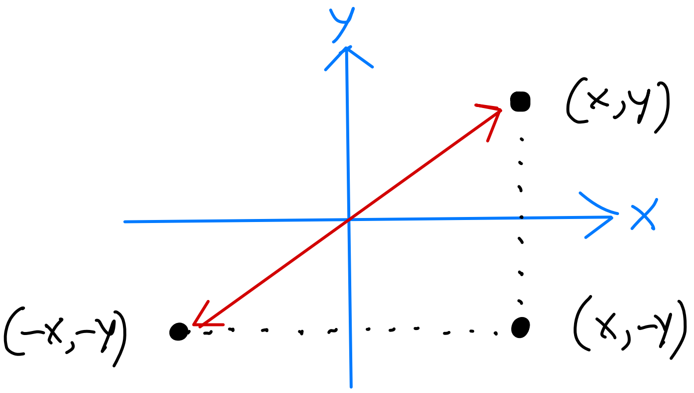
b) Il grafico di $f(-x)$ è la riflessione del grafico di f rispetto all'asse y



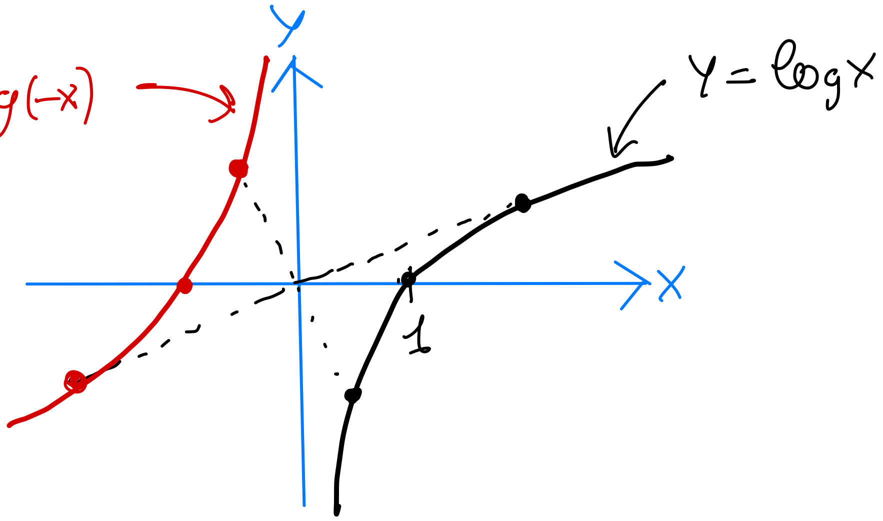
Spiegazione:



Osservazione: se rifletto un punto (x,y) rispetto ad un asse e poi rispetto all'altro ottengo la riflessione rispetto all'origine

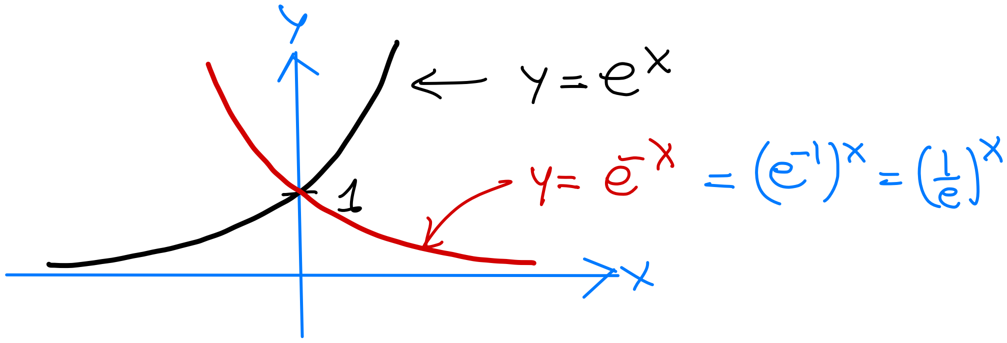


c) il grafico di $-f(-x)$ è quello di $f(x)$ riflesso prima rispetto all'asse x e poi all'asse y che è lo stesso che riflettere rispetto all'origine

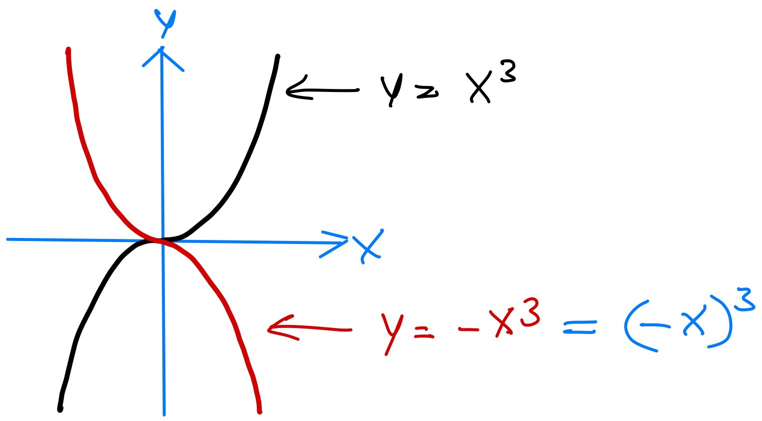


Esempi

1) e^{-x}



2) $-x^3$

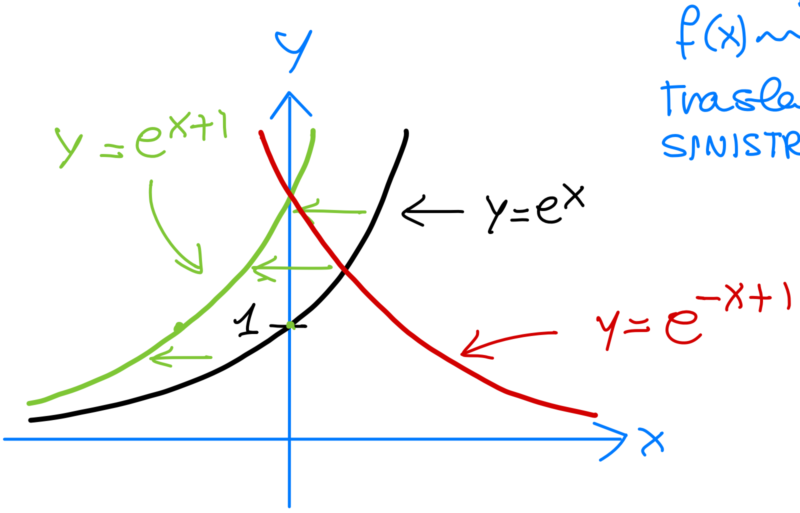


3) e^{1-x}

ci arrivo in due mosse: $e^{x} \rightsquigarrow e^{x+1} \rightsquigarrow e^{-x+1}$

$f(x) \rightsquigarrow f(x+1)$
traslaz. verso SINISTRA di 1

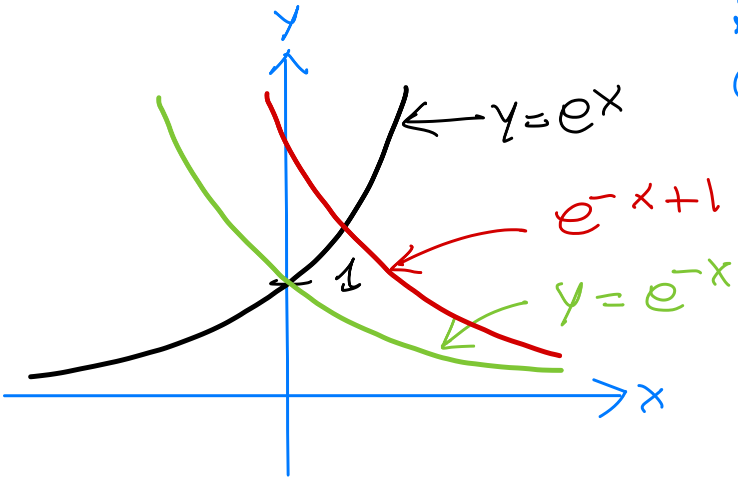
$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$
riflessione rispetto asse y



Versione alternativa $e^{x} \rightsquigarrow e^{-x} \rightsquigarrow e^{-x+1}$

rifless. risp. asse y

$f(x) \rightsquigarrow f(\overset{x-1}{\cancel{x+1}})$
traslaz. verso ~~sinistra~~ destra di 1



Funzioni pari

Una funzione $f(x)$ si dice "pari" se

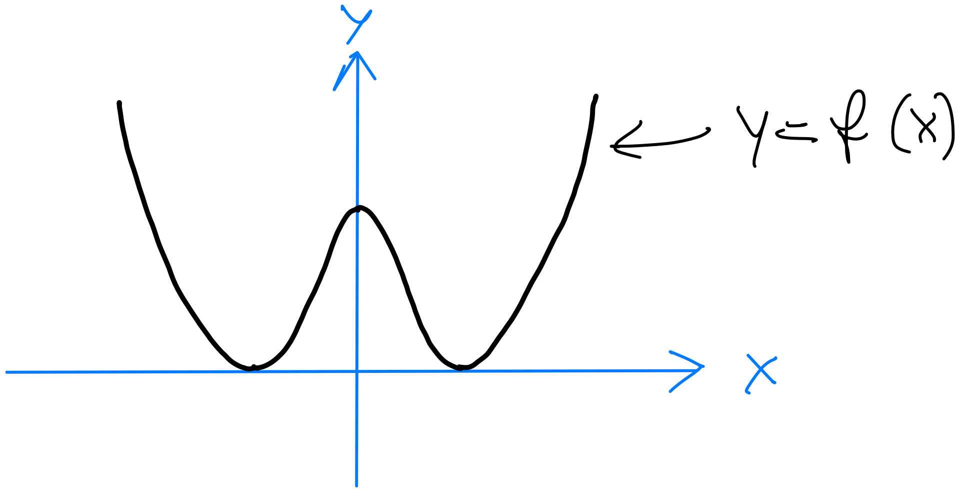
$f(-x) = f(x)$ per ogni x

esempio base $f(x) = x^n$ con n pari

altro esempio $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1}$

$f(x)$ è pari se riflettendo il grafico rispetto asse y ottengo lo stesso grafico

cioè se il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all' asse y

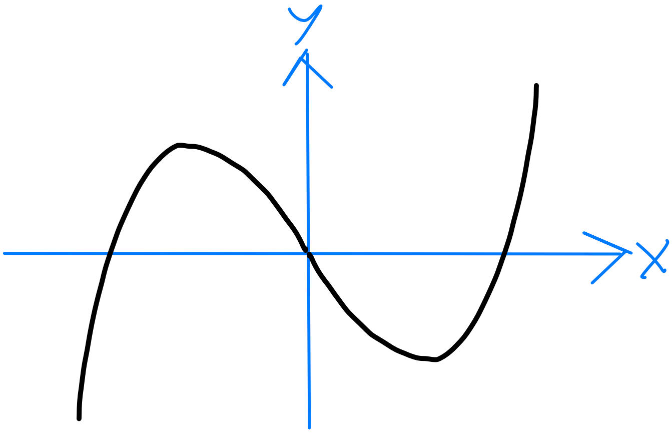


Funzioni dispari

Una funz. $f(x)$ si dice "dispari" se
$f(-x) = -f(x)$ per ogni x.

Esempio base: x^n con n dispari

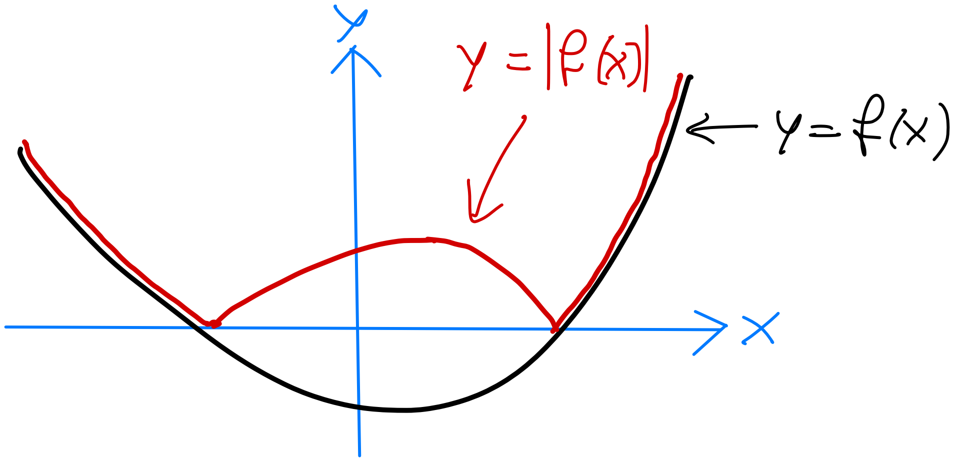
L'equazione $f(-x) = -f(x)$ equivale a $f(x) = -f(-x)$ e quindi $f(x)$ è dispari se riflettendo il suo grafico rispetto all'origine ottengo lo stesso grafico, cioè il grafico è simmetrico rispetto all'origine.



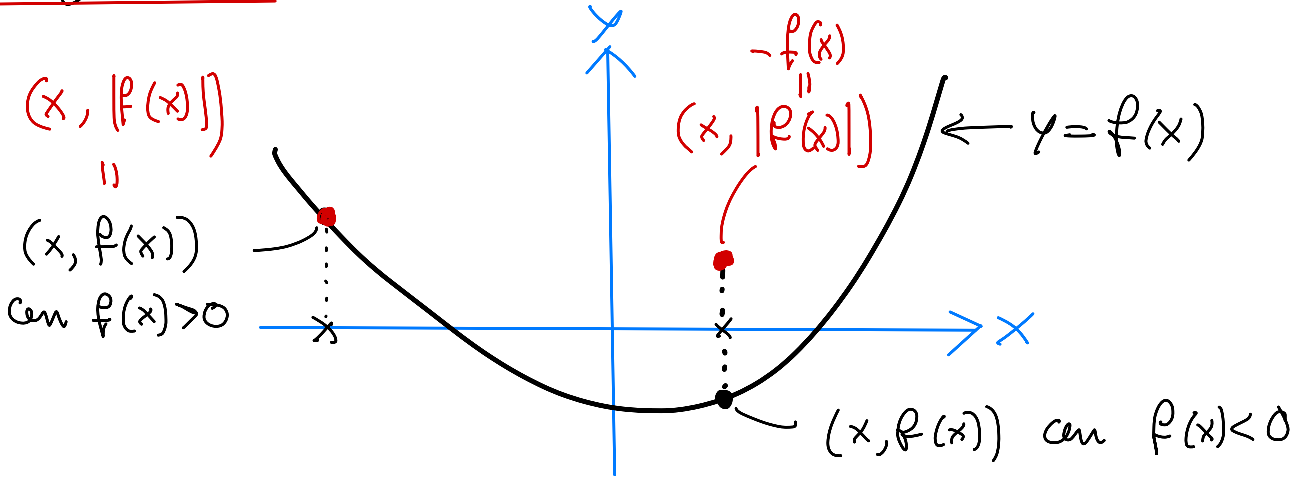
Esistono funzioni né pari né dispari
es.: e^x, $\log x$, $(x+1)^2$, x^3-1

Operazioni sui grafici III

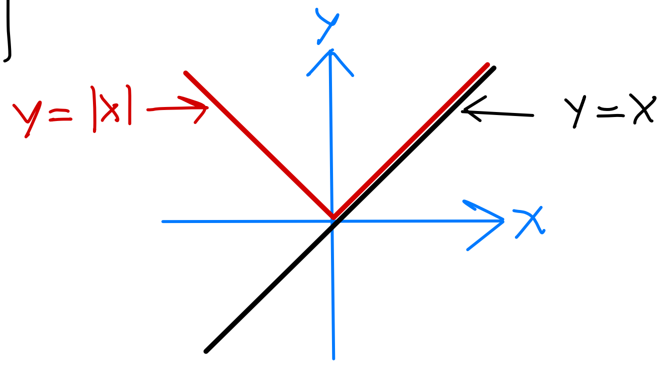
a) Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene ribaltando la parte del grafico di $f(x)$ sotto l'asse x (e portandola sopra l'asse x)



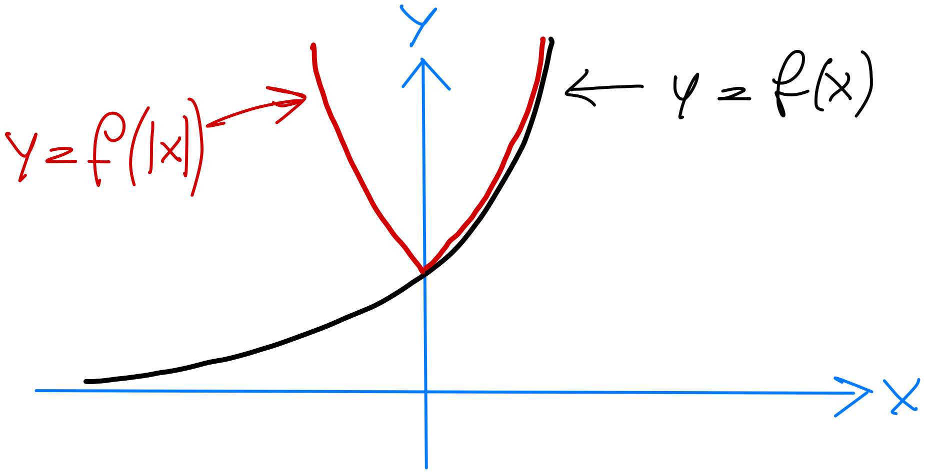
Spiegazione



Esempio : $|x|$



b) Il grafico di $f(|x|)$ è dato dalla parte del grafico di $f(x)$ a destra dell'asse y unita alla sua riflessione rispetto all'asse y.



Spiegazione: se $x > 0$, $f(|x|) = f(x)$

quindi il graf. di $f(|x|)$ a destra dell'asse y coincide con quello di $f(x)$;

inoltre $f(|x|)$ è una funzione pari.

quindi la parte del grafico a sinistra dell'asse y si ottiene riflettendo quella a destra!

(qualunque sia f !!)

Esempio: $e^{-|x|}$

strategia: $e^{x} \rightsquigarrow e^{-x} \rightsquigarrow e^{-|x|}$

$\uparrow$ $f(x) \rightsquigarrow f(-x)$ riflessione risp. asse y

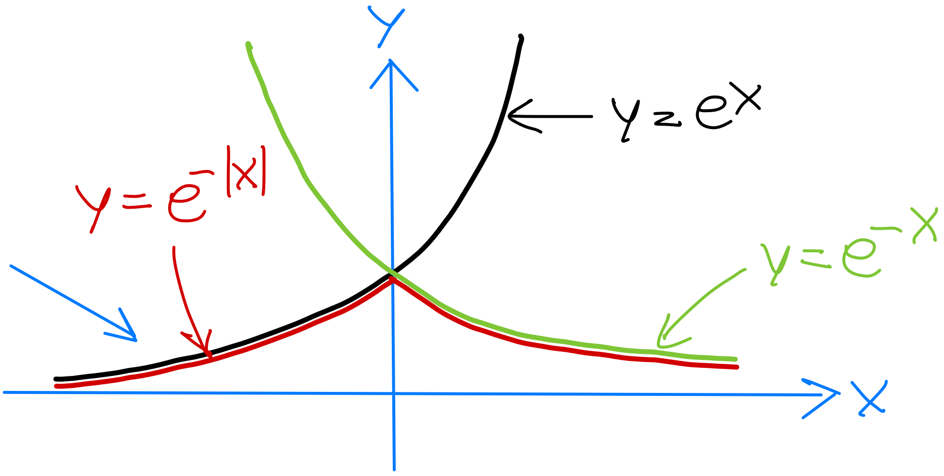
$\uparrow$ $f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$ ....

per $x<0$

$|x| = -x$

$-|x| = x$

$e^{-|x|} = e^{x}$



versione alternativa?

$e^{x} \rightsquigarrow e^{|x|} \rightsquigarrow e^{+|x|}$

$\uparrow$ $f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$

$\cancel{\uparrow}$ $f(x) \rightsquigarrow f(-x)$

non funziona!

AM1 gest 20/21

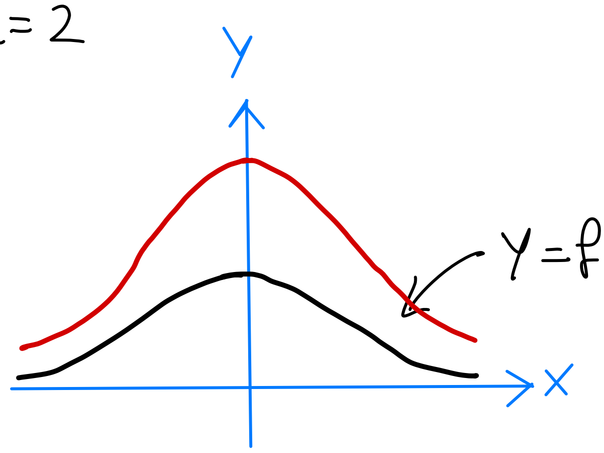
Lezione 5
prima parte

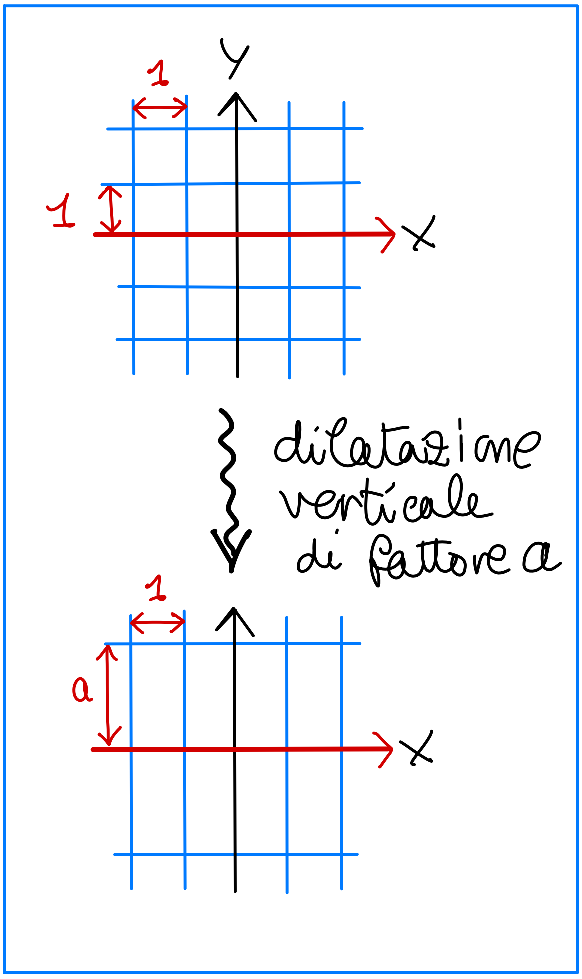
3/10/2020

Operazioni sui grafici IV

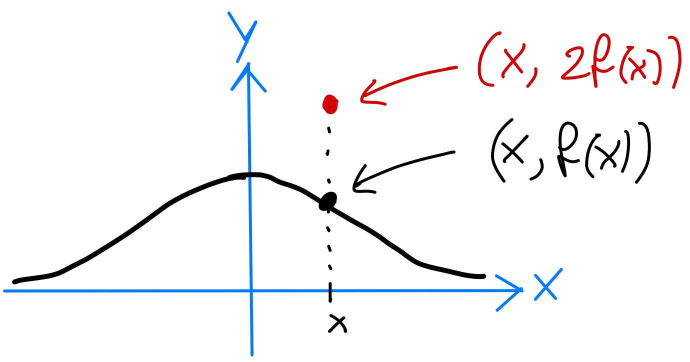
a) Dato $a > 1$ il grafico $a \cdot f(x)$ è ottenuto dilatando il grafico di $f(x)$ verticalmente di un fattore a (lasciando fisso l'asse x)

$a = 2$



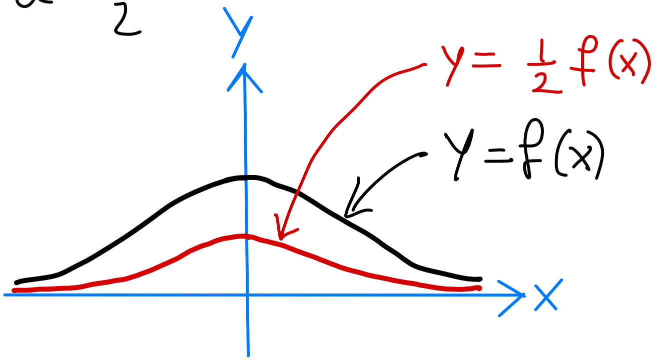


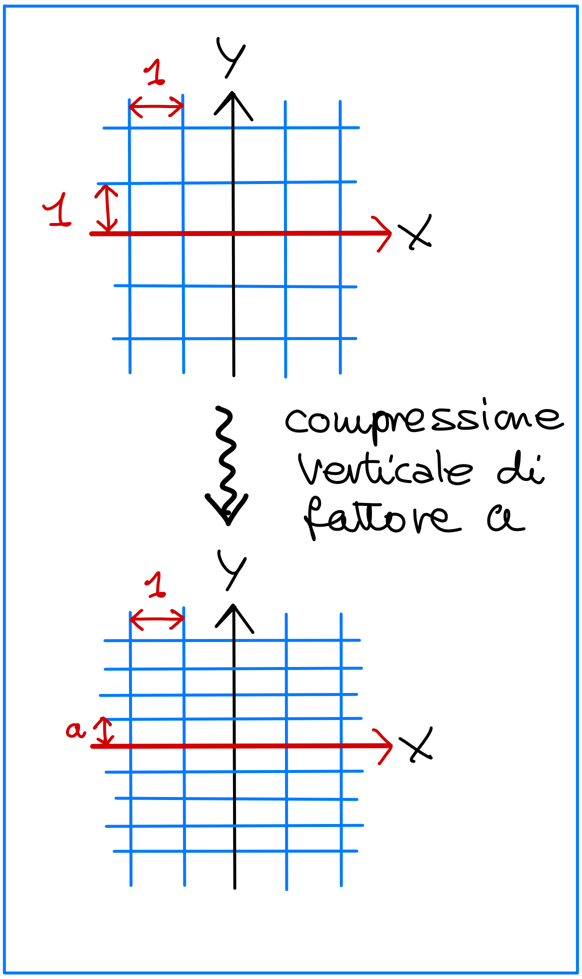
spiegazione:



b) Dato $0<a<1$ il grafico di $a\,f(x)$ si ottiene comprimendo verticalmente il grafico di $f(x)$ di un fattore a (lasciando fisso l'asse x)

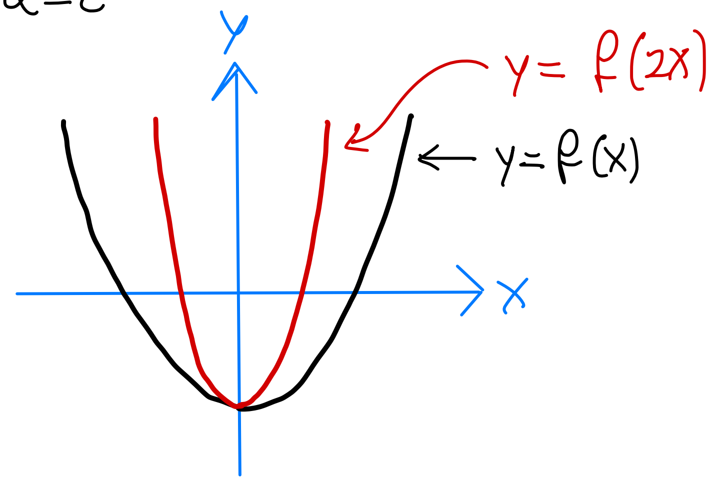
$a = \frac{1}{2}$

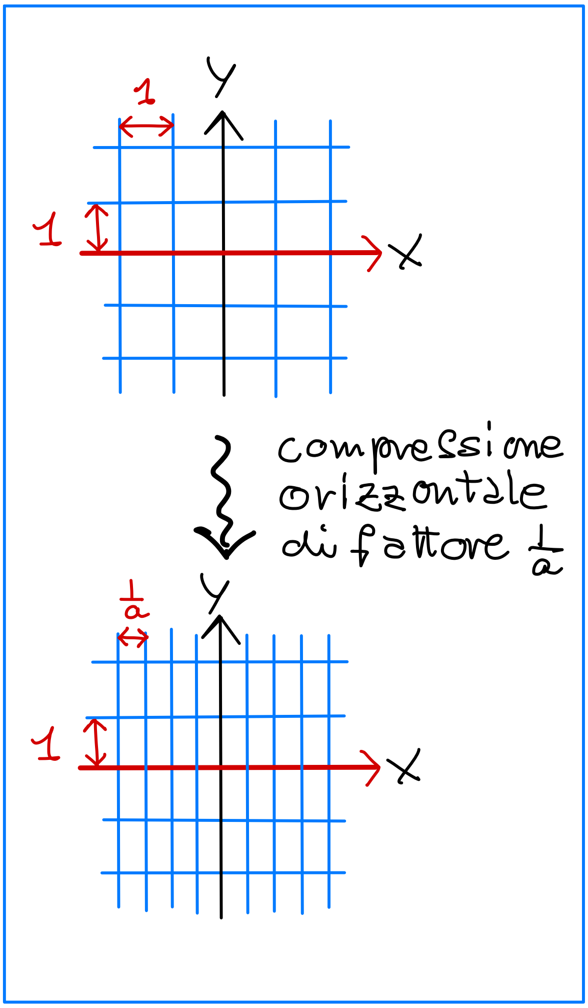




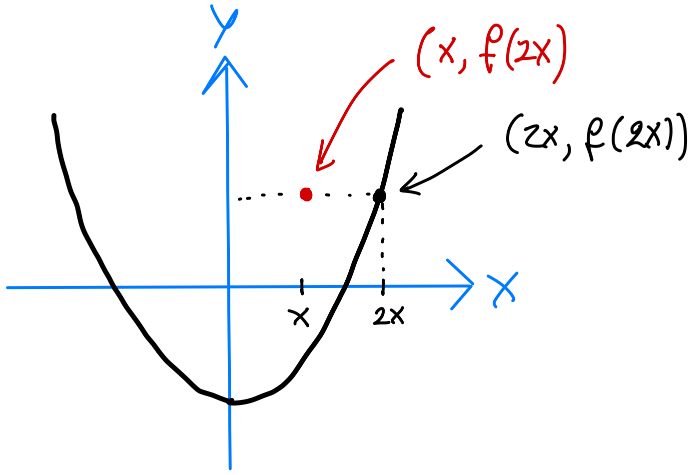
c) per $a>1$ il grafico di $f(ax)$ si ottiene comprimendo orizzontalmente il grafico di $f(x)$ di un fattore $\frac{1}{a}$ (lasciando fisso l'asse delle y)

$a=2$





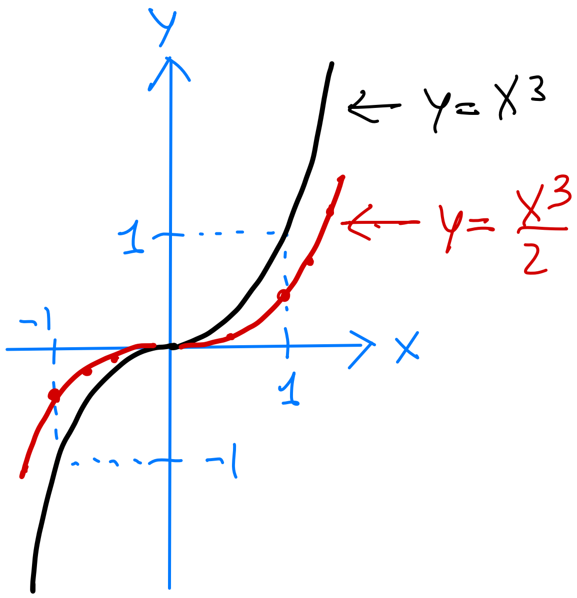
spiegazione:



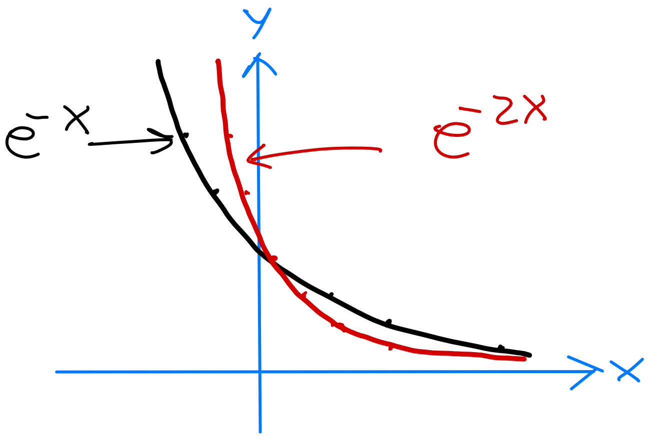
d) Se $0<a<1$, il grafico di $f(ax)$ si ottiene dilatando orizzont. il grafico di $f(x)$ di un fattore $\frac{1}{a}$ etc. etc.

Esempi

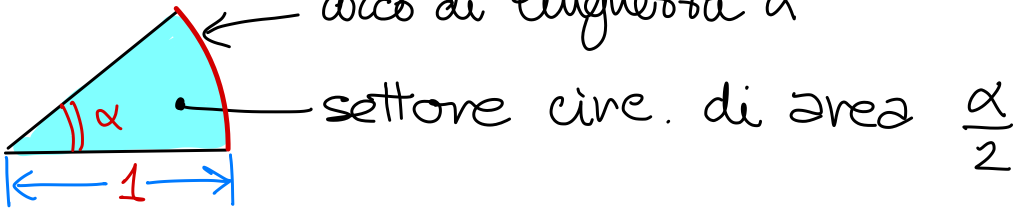
a) $\frac{x^3}{2}$ $\qquad x^3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}\cdot x^3$ compressione verticale di fattore $\frac{1}{2}$



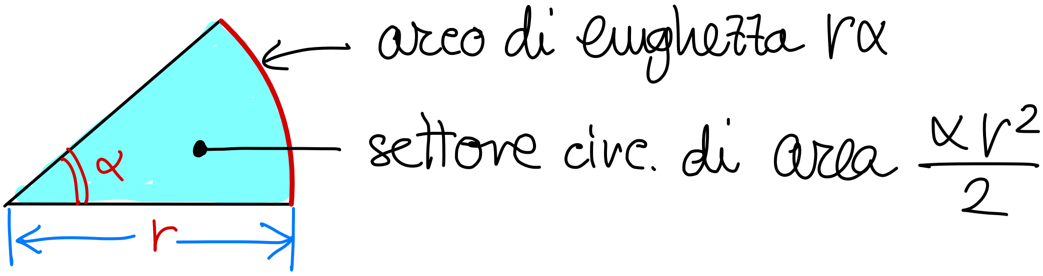
b) e^{-2x} $\qquad e^{-x} \rightsquigarrow e^{-(2\cdot x)}$ compressione orizzontale di fattore $\frac{1}{2}$



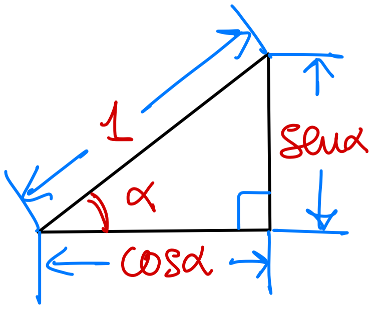
Ripasso di trigonometria

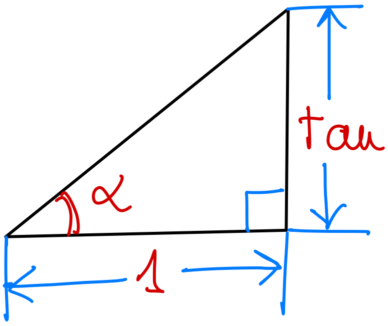


e per similitudine (cosa vuol dire?) ottengo



Definizione di senα, cosα, tanα per $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$



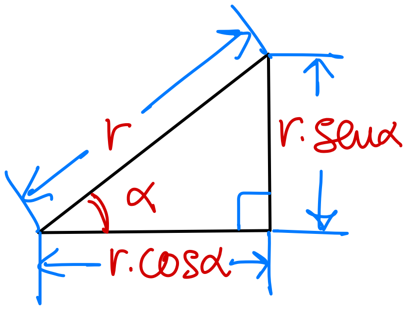


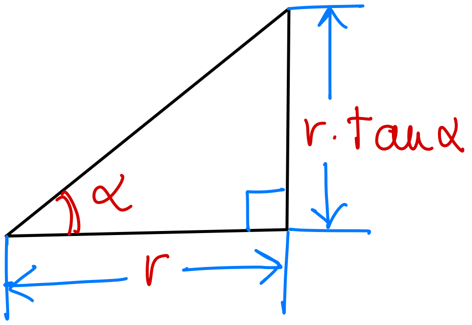
Proprietà

- $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftarrow$ teor. di Pitagora

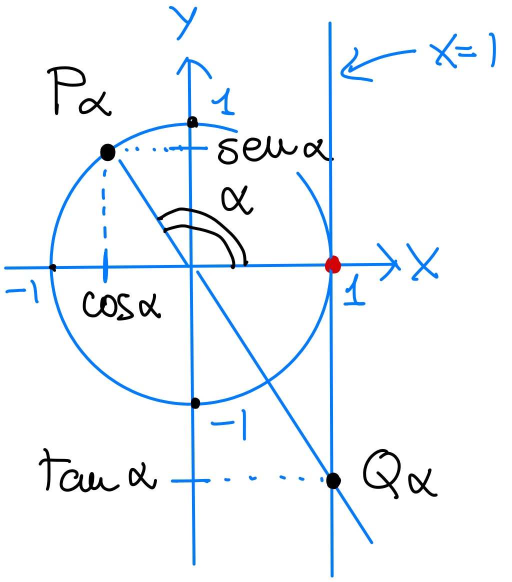
  notazione: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 \neq \cos\alpha^2 = \cos(\alpha^2)$

- $\tan\alpha = \dfrac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Leftarrow$ similitudine





Definizione di senα, cosα, tanα per $\alpha \in \mathbb{R}$



P_α punto ottenuto partendo da $(1,0)$ e percorrendo una distanza $|\alpha|$ lungo la circonferenza in senso antiorario se $\alpha > 0$ e in senso orario se $\alpha < 0$.

P_α ha coordinate $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

Q_α intersezione della retta verticale di eq. $x=1$ con la retta che passa per P_α e l'origine.

Q_α ha coordinate $(1, \tan\alpha)$

Osservazioni

- $\tan\alpha$ non è definita se $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k intero (anche negativo) perchè Q_α non esiste;
- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ possono essere negativi
- $P_{\alpha+2\pi} = P_\alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha \\ \sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha \end{cases}$

  cioè le funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ hanno periodo 2π.

  Ricordo che una funzione $f(x)$ ha periodo T se $f(x+T) = f(x)$ per ogni x
  ↑ numero positivo

- $P_{\alpha+\pi}$ è l'opposto (risp. all'origine) di P_α

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \\ \sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \end{cases}$$

- $Q_{\alpha+\pi} = Q_\alpha \Rightarrow \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$

  cioè la funz. $\tan\alpha$ ha periodo π

- Valori per alcuni angoli significativi

α	$\cos\alpha$	$\text{sen}\,\alpha$	$\text{Tan}\,\alpha$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	non def.

- formule utili :

a) $$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \boxed{\pm}\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos\alpha = \boxed{\pm}\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \end{cases}$$

che significa?

b) $$\text{Tan}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Tan}(-\alpha) = -\text{Tan}\,\alpha$$

Quindi seno e tangente sono funzioni dispari mentre il coseno è pari.

d) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

Da d) si ottengono diversi casi particolari utili

e) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

etc. etc.

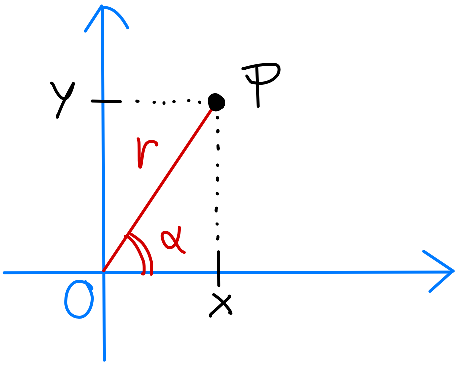
AM1 gest

Lezione 6

6/10/2020

Ripasso di trigonometria (continuazione)

Coordinate polari



(x,y) coordinate cartesiane di P

(r,α) coordinate polari di P

$r :=$ distanza di P dall' origine O

$\alpha :=$ angolo tra segmento $\overline{OP}$ e asse x.

Osservazioni

- per l'origine O, $r=0$ e α non è definito.
- α è un numero positivo o negativo.
- α non è univocamente determinato:

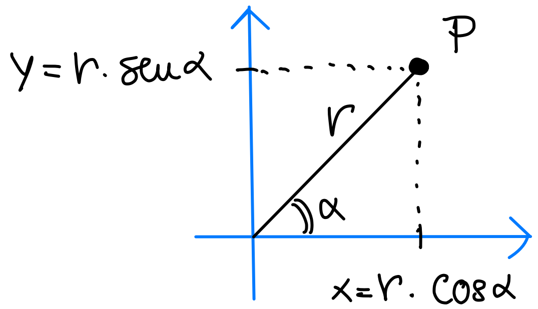
  se α è un angolo per P, allora anche $\alpha + 2k\pi$ con k intero è un angolo per P.

  Per avere un unico α si impone talvolta $0 \leq \alpha < 2\pi$ (oppure $-\pi < \alpha \leq \pi$).

Formule di conversione

note r e α, x e y sono date da:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

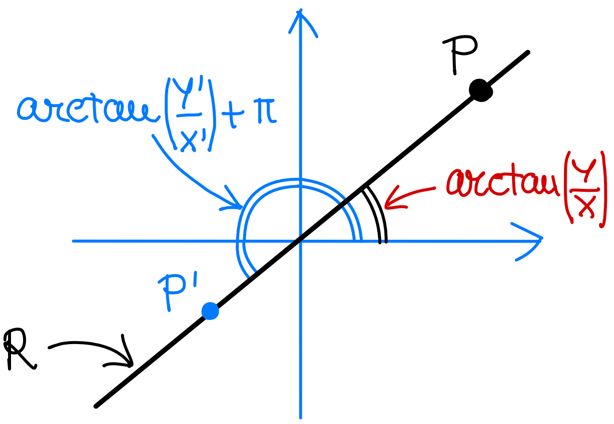


note x e y, r e α sono date da

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} & \Leftarrow \text{teorema di Pitagora} \\ \boxed{\tan\alpha = \dfrac{y}{x}} & \Leftarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cancel{r}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cancel{r}\cos\alpha} = \tan\alpha \end{cases}$$

non basta a trovare α!

$\alpha = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ non è la formula corretta.



Infatti per ogni P, P' sulla retta R vale $y/x = y'/x'$ e quindi

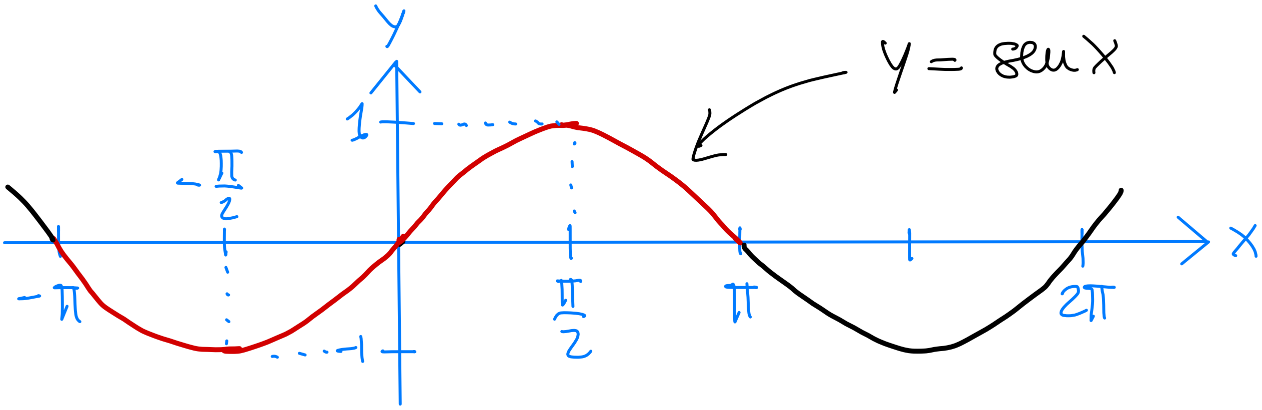
$$\arctan(y/x) = \arctan(y'/x')$$

Ma quest'angolo non va bene per tutti i punti.

Formula corretta :

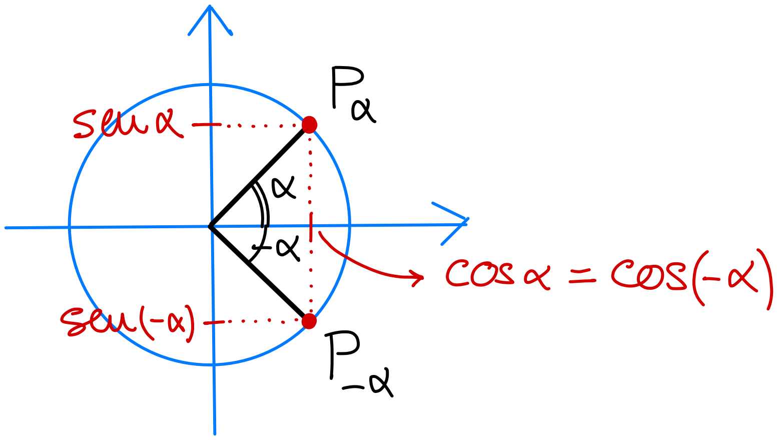
$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0,\ y>0 \\ \frac{\pi}{2}+\pi & \text{se } x=0,\ y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Grafici delle funzioni sen x, cos x, tan x



Disegno la parte in rosso usando la definiz. di sen x (con la circonferenza trigonometrica) e la parte in nero usando il fatto che sen x è una funzione di periodo 2π e quindi il grafico si "ripete" sugli intervalli $[-\pi,\pi]$, $[\pi,3\pi]$, $[-3\pi,-\pi]$ etc.

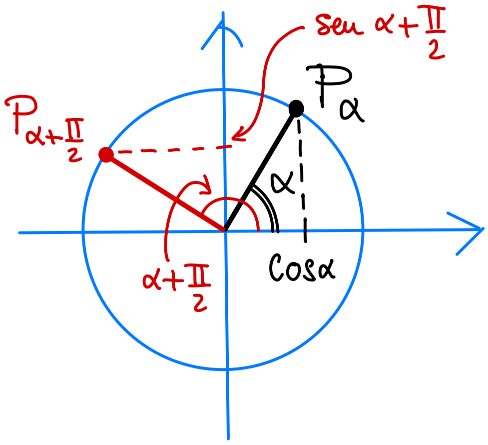
Il disegno suggerisce che $\operatorname{sen} x$ è una funzione dispari, cosa che si verifica dalla definizione:



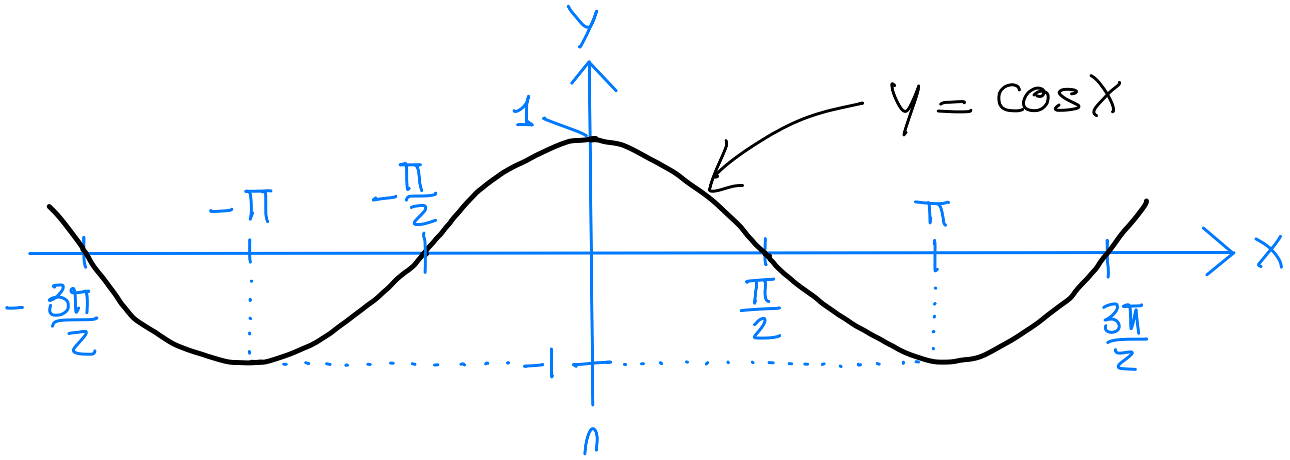
Questo mostra anche che la funzione coseno è pari: $\cos(-x) = \cos x$.

Inoltre vale $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

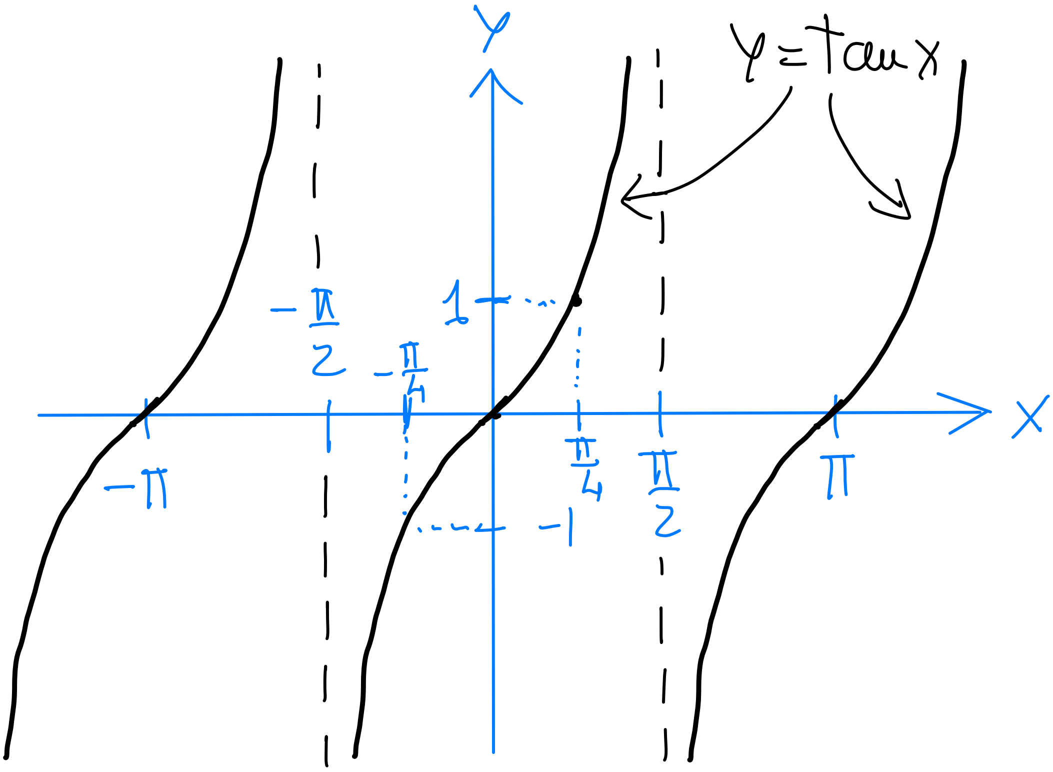
Posso verificarlo usando la formula per il seno della somma di due angoli o direttamente dalla definizione:



Quindi il grafico di $\cos x$ si ottiene traslando quello di $\sin x$ verso sin. di $\frac{\pi}{2}$



Infine il grafico della tangente



Ho usato che $\tan x$ ha periodo π.

Funzioni (terminologia)

Intervalli: dati $a < b$

$$[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x : a < x < b\}$$

$$[a, b) := \dots, \qquad (a, b] := \dots$$

$$[a, +\infty) := \{x : x \geq a\}$$

$$(-\infty, b] := \{x : x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) := \dots \qquad (-\infty, b) := \dots$$

Definizione di funzione (non precisa)

Dati due insiemi X e Y (di numeri o altro) una funzione f da X a Y $(f : X \to Y)$ è una "procedura" che ad ogni $\boxed{x \in X}$ associa un elemento $y \in Y$, indicato con $\boxed{f(x)}$. ← output

input

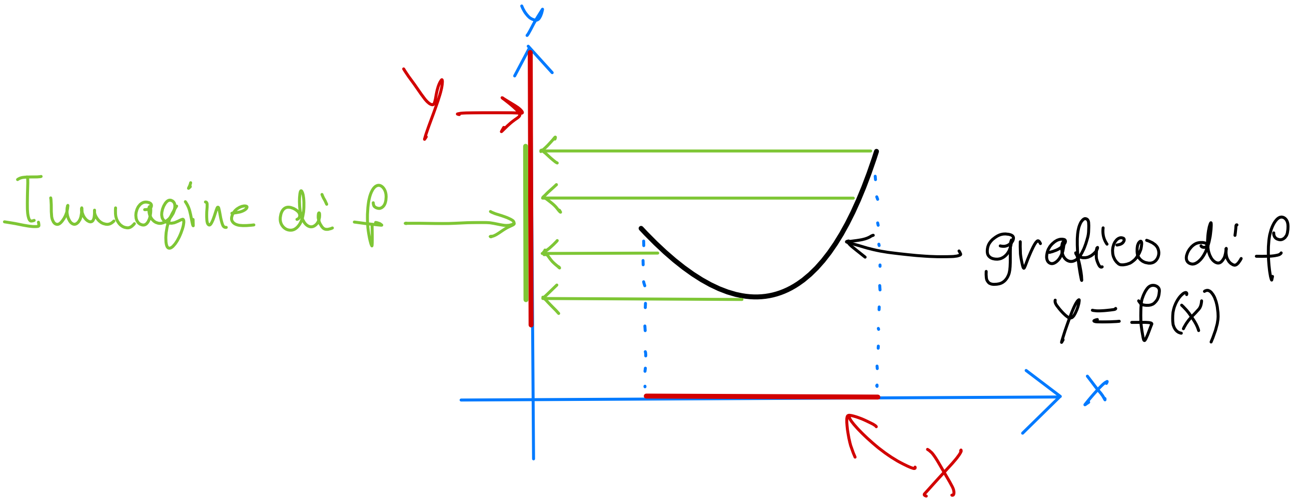
X si chiama dominio di f;

Y si chiama codominio di f;

$\{f(x) : x \in X\}$ si chiama immagine di f.

Se X, Y sono contenuti in $\mathbb{R}$ il grafico di f è l'insieme dei punti del piano (curva)

$$\{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$



L' immagine si ottiene "proiettando" il grafico sull' asse delle y.

AM1 gest 20/21

lezione 7
7/10/2020

Ancora funzioni

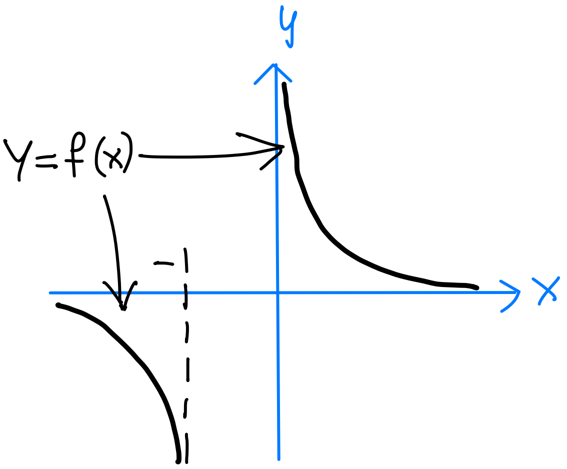
Richiamo: X, Y insiemi, f funzione da X in Y:

- dominio di f $:= X$;
- codominio di f $:= Y$;
- immagine di f $:= \{\text{valori di } f\} = \{f(x) : x \in X\}$.

Inoltre, se X e Y sono insiemi di numeri $(X, Y \subset \mathbb{R})$:

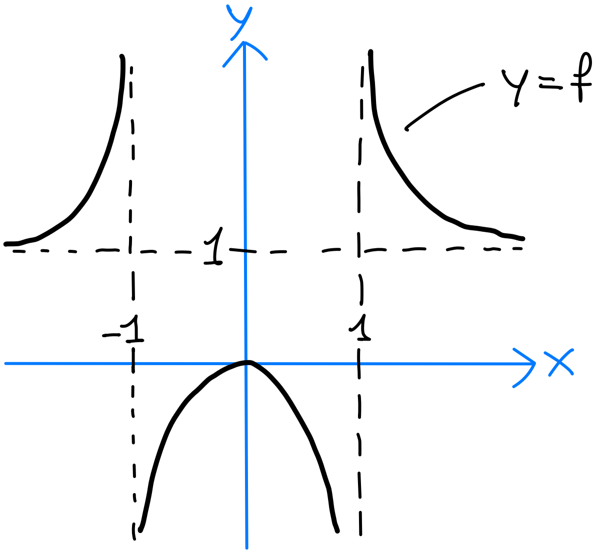
- grafico di f $= \{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$

Esempi



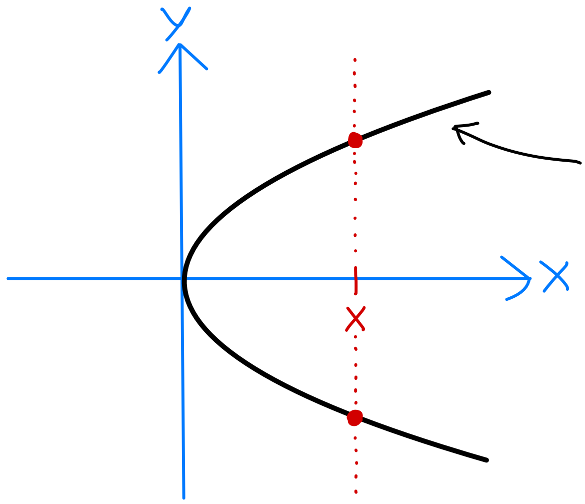
dominio $= (-\infty,-1) \cup (0,+\infty) = \{x : x<-1 \text{ opp. } x>0\}$

immagine $= (-\infty,0) \cup (0,+\infty) = \{y : y \neq 0\}$



dominio $= \{x : x \neq \pm 1\}$

immagine $= \{ y : \ y \leq 0$ opp. $y > 1\} = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.



$x = y^2$ cioè insieme dei punti (x,y) t.c. $x = y^2$

Questo NON è il grafico di una funzione $f(x)$

Infatti un grafico del tipo $y = f(x)$ interseca ogni retta verticale in al più un punto, e questo insieme non ha questa proprietà.

(Ma questo è un grafico del tipo $x = f(y)$, con $f(y) = y^2$)

Osservazioni

- L'uso della x per la variabile indip. (input) e della y per la variabile dipend. (output) è puramente convenzionale, ogni tanto si usano altre lettere.

- Quasi sempre in questo corso X e Y sono insiemi di numeri ($X, Y \subset \mathbb{R}$) e $f(x)$ è data da una formula (per es., $f(x) = \tan(1+x^3)$).

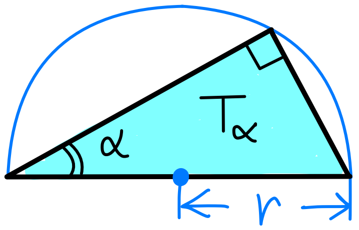
  In tal caso il dominio di f è l'insieme di definizione della formula cioè l'insieme degli x per cui $f(x)$ si può calcolare.

Esempi

insieme degli y t.c. l'eq. $f(x)=y$ ha almeno una soluzione x

formula	insieme di definizione	immagine
x^2-4	$\mathbb{R}$	$[-4,+\infty)$
$\dfrac{1}{x-2}$	$\{x : x \neq 2\}$	$\{y : y \neq 0\}$
$\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$	$[0,+\infty)$
2	$\mathbb{R}$	$\{2\}$

- Considero $f(\alpha) := \text{area}(T_\alpha)$ dove T_α è il triangolo rettangolo in figura.



Quindi il dominio di f è l'insieme degli angoli α per cui si può definire T_α, cioè $\{\alpha : 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\}$.
I cateti di T_α sono $2r\cos\alpha$ e $2r\,\text{sen}\,\alpha$ e quindi

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}(2r\cos\alpha)(2r\,\text{sen}\,\alpha) = r^2\,\text{sen}(2\alpha).$$

Anche se $r^2\,\text{sen}\,\alpha$ è definita per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ il dominio "naturale" di f resta $(0,\frac{\pi}{2})$.

- Considero le formule x^2-1 e $(x-1)(x+1)$: sono diverse ma danno lo stesso risultato per ogni x. Per noi queste sono la stessa funzione.

- Altri esempi di funzioni

A) $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x<-1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$

dominio: $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$; trovate l'immagine.

B) Legge oraria di un punto P in movimento nello spazio (o nel piano).

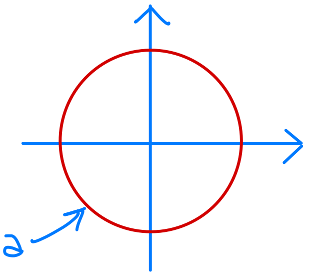
Dato t tempo, $f(t)$ è la posizione di P all' istate t, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

coordinate di P al tempo t

Dominio: intervallo di tempi

Codominio: lo spazio $\mathbb{R}^3$ (o il piano $\mathbb{R}^2$)

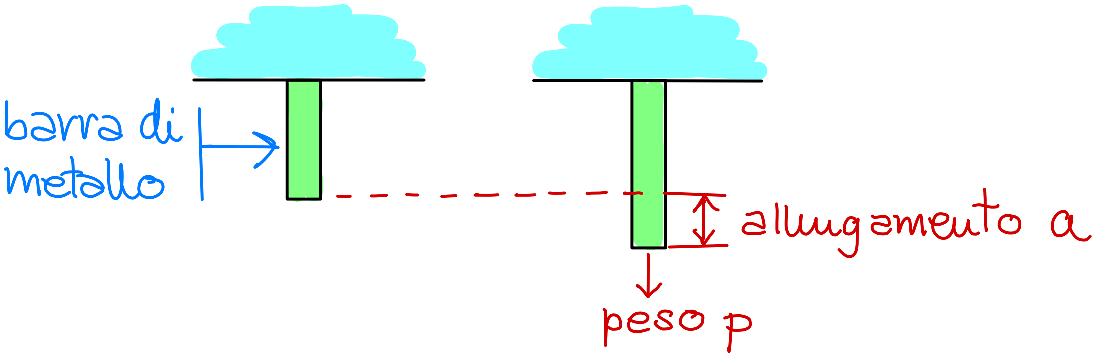
immagine: traiettoria di P.



Esempio: $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

moto circolare uniforme; traiettoria

C) Faccio delle misurazioni sperimentali:

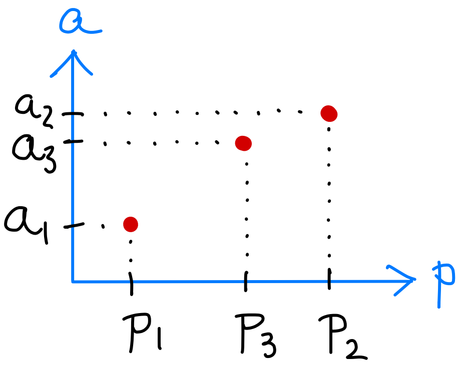


L' allungamento a dipende dal peso p: $a = a(p)$.

Se ripeto la misurazione con i pesi p_1, p_2, p_3 ottengo una funzione $a(p)$ con

dominio $= \{p_1, p_2, p_3\}$

immagine $= \{a_1, a_2, a_3\}$



D) f funzione che ad ogni targa di automobile associa il codice fiscale del proprietario.

Qual è il dominio? E l'immagine?

E) Esistono funzioni il cui "input" sono più numeri:

$$f(\underbrace{x_1, x_2}_{x}) \,,\quad f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x})$$

Queste si chiamano funzioni di n variabili, e verranno studiate nel corso di Analisi II.

funzioni iniettive

$f: X \to Y$ si dice iniettiva se a input diversi corrispondono sempre output diversi, cioè

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

cioè l'equaz. $f(x) = y$ ha al più una soluz. x per ogni valore del parametro y.

Graficamente: il grafico di f interseca ogni retta orizzontale in al più un punto.

Esempi: $f(x) = e^{1-x}$ è iniettiva, infatti l'eq. $y = e^{1-x}$ ha al più la soluz. $x = 1 - \log y$; $f(x) = x^2$ non è iniettiva (infatti $f(-2) = f(2)$).

funzioni surgettive

$f: X \to Y$ si dice surgettiva se l'immagine è Y, cioè l'equazione $y = f(x)$ ammette almeno una soluz. x per ogni $y \in Y$.

Graficamente: il grafico di f interseca ogni retta orizzontale ad altezza y con $y \in Y$.

Esempi: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ data da $f(x):=\log x$ è surgettiva, infatti l'eq. $y=\log x$ ammette sempre la sol. $x=e^y$.

La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=x^2$ non è sur., infatti l'eq. $x^2=-1$ non ammette soluzioni.

funzione inversa

Date $f:X\longrightarrow Y$ e $g:Y\to X$ si dice che g è l'inversa di f (ed f è l'inversa di g) se

$$g(f(x))=x \text{ per ogni } x\in X,$$
$$f(g(y))=y \text{ per ogni } y\in Y.$$

In altre parole la funzione g "disfa" quello che fa f e viceversa.

L'inversa di f (se esiste) è una sola e si indica talvolta con f^{-1} (pessima notazione, perché si confonde con il reciproco $1/f$).

L'inversa esiste se e solo se f è sia iniettiva che surgettiva (cioè, è bigettiva).

In tal caso l'equazione $f(x)=y$ ha un'unica soluzione x per ogni $y \in Y$, e $g(y)$ è proprio questa soluzione x.

Esempi facili di inversa

A) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax+b$ con $a \neq 0$.

Risolvo l'equazione $y = ax+b$ e ottengo
$ax = y-b$, $x = \frac{1}{a}(y-b)$;

dunque l'eq. ha un'unica soluzione per ogni $y \in \mathbb{R}$, e questo significa che f è bigett. (cosa che si vede anche dal grafico);

l'inversa di f è $g(y) = \frac{1}{a}(y-b)$.

B) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3+1$.

Risolvo l'eq. $y = x^3+1$ e ottengo $x = \sqrt[3]{y-1}$;

dunque l'eq. ha un'unica soluzione per ogni $y \in \mathbb{R}$ e quindi f è bigettiva (si vede anche dal grafico);

l'inversa di f è $g(y) := \sqrt[3]{y-1}$.

Grafici delle funzioni elementari

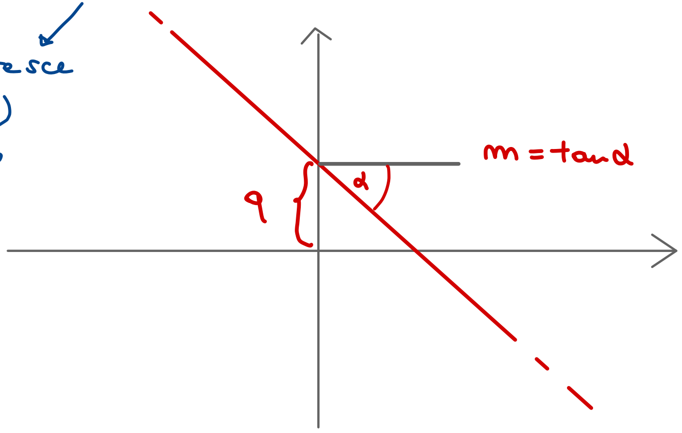
In questo corso considereremo quasi sempre funzioni $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

GRAFICO di una funzione $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\Gamma_f := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \text{ con } x \in X \}$

RETTE

* Come disegnare una retta $y = mx + q$
q mi indica l'altezza con cui la retta interseca l'asse delle y ed
m mi indica la pendenza

di quanto sale|cresce (scende | decresce) la y aumentando la x di 1.



α è l'angolo acuto formato dalla retta e da una qualsiasi retta orizzontale

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

senso antiorario ↺ α positivo
senso orario ↻ α negativo

In questo modo disegno tutte le rette, tranne quelle verticali che NON sono funzioni

POTENZE

Ricordiamo che

se $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ è la radice quadrata positiva di a.

se $a \in \mathbb{R}$, b intero positivo non nullo allora $a^b = a \cdot \ldots \cdot a$ b volte

se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, b intero positivo non nullo $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $a^0 := 1$ (0^0 non viene definito)

se $a \geq 0$, $b > 0$, $b = \frac{p}{q}$ (con p, q interi positivi non nulli) $a^b = \sqrt[q]{a^p}$

se $a > 0$, $b < 0$, $b = -\frac{p}{q}$ $a^b = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Perché serve a positivo?
Supponiamo $b = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $a = -8$.

Allora avremmo $-8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8^1} = -2$

$-8^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{-8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Si definisce a^b con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($a > 0$ se b neg) per approssimazione $\pi = 3{,}1416..$
$2^{\pi} = 2^{3{,}1416..}$ → limite $2^3, 2^{3{,}1}, 2^{3{,}14}..$

* Funzioni potenza x^a

$y = x^a$

(per quali $x \in \mathbb{R}$, l'espressione x^a ha significato ⤳ l'insieme di definizione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

insieme di definizione

Se $a > 0$ con a intero, l'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$

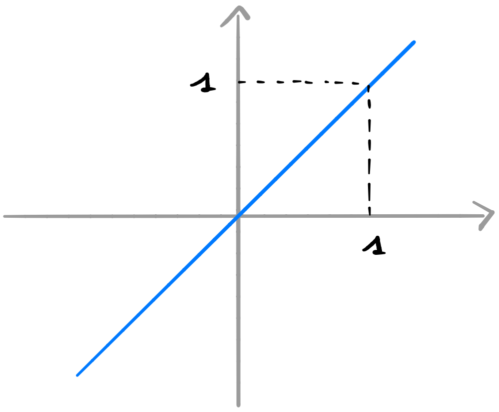
se $a \leq 0$ con a intero, $x \neq 0$, ossia l'insieme di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

se $a > 0$, con a non intero, $x \geq 0$, l'insieme di definizione è $\mathbb{R}^+$

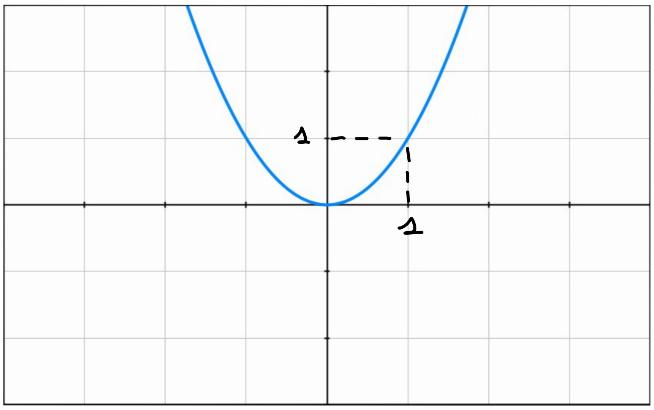
se $a < 0$, con a non intero, $x > 0$, l'insieme di definizione è $(0, +\infty)$.

GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $a \geq 1$

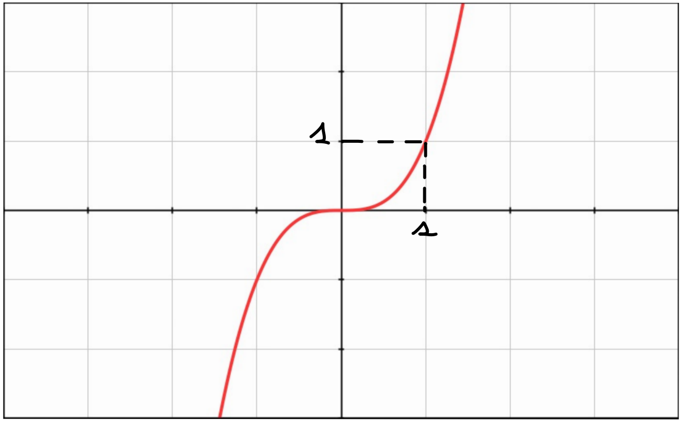
$y = x$



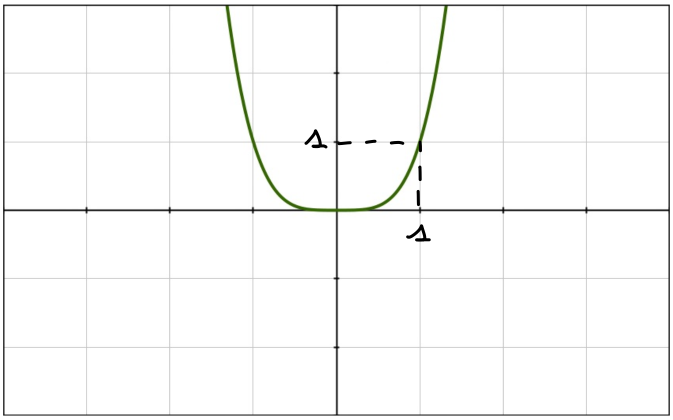
$y = x^2$



$y = x^3$



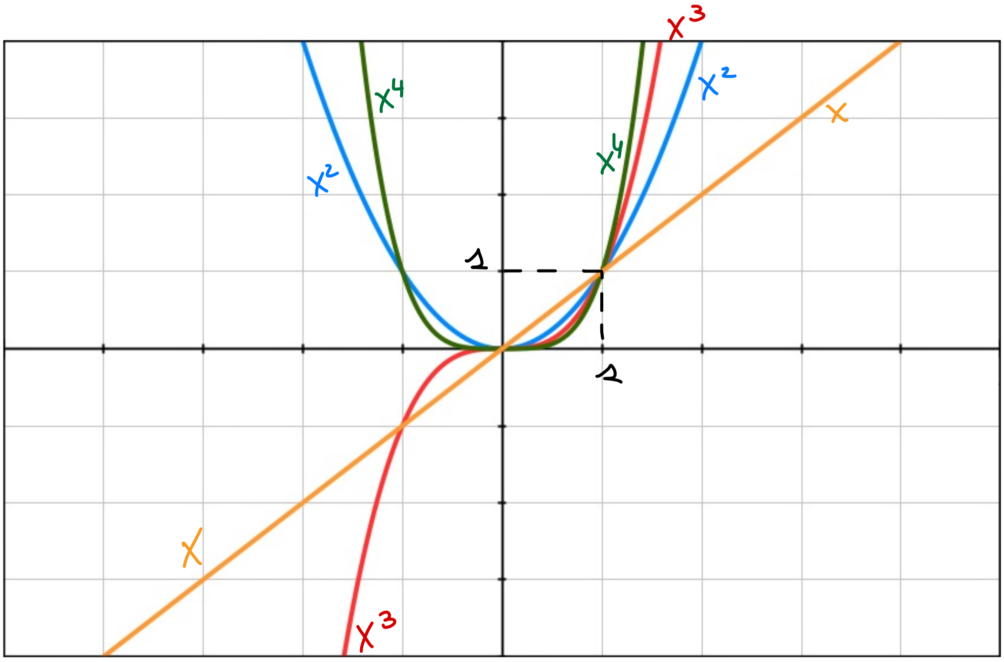
$y = x^4$



Notiamo che:

per a pari → funzione pari
per a dispari → funzione dispari

f PARI: $f(-x) = f(x)$
simmetria rispetto asse y
f DISPARI: $f(-x) = -f(x)$
simmetria centrale rispetto all'origine.

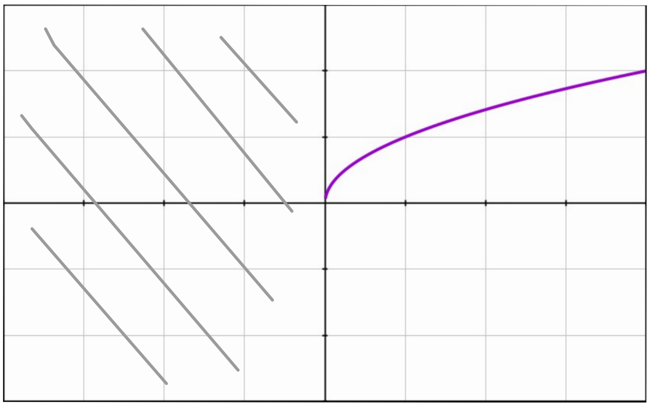


tutte passano per (0,0) e per (1,1)

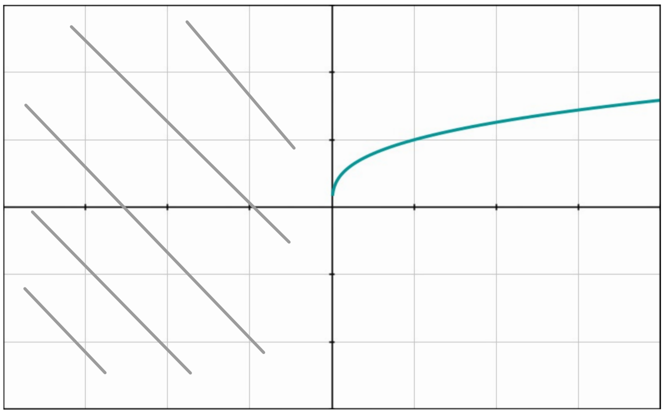
ATTENZIONE ALLA CRESCITA! (in che "ordine" sono le funzioni prima di 1 e dopo 1)

GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $0 \le a \le 1$

$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$



$y = x^{1/3}$

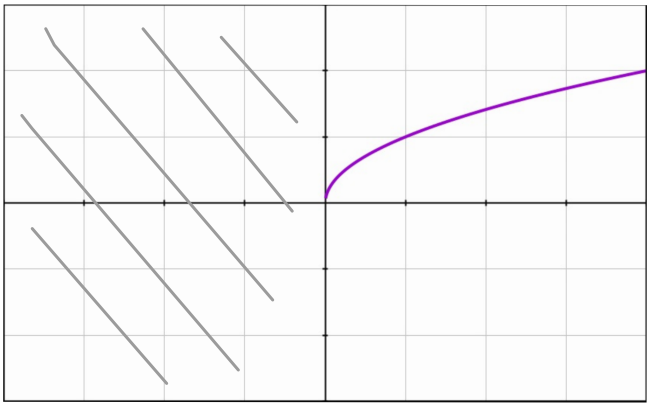


Attenzione: DIFFERENZA tra funzioni POTENZA e RADICI: abbiamo visto che se $0 < a < 1$, allora il dominio di $y = x^a$ è $x \geqslant 0$.

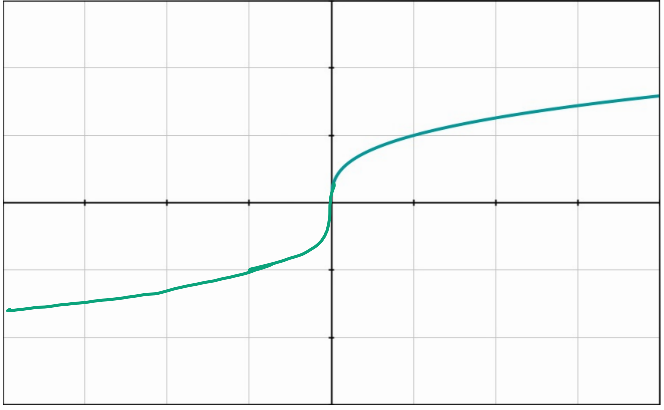
Se però parliamo della funzione $y = \sqrt[m]{x}$ con $m \in \mathbb{N}$ dispari allora l'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$.

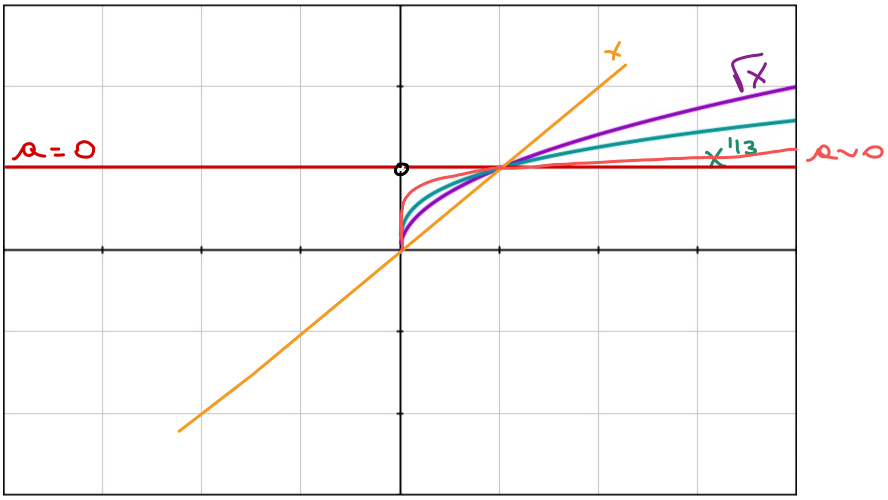
sono funzioni dispari, simmetriche rispetto all'origine

$y = \sqrt{x}$

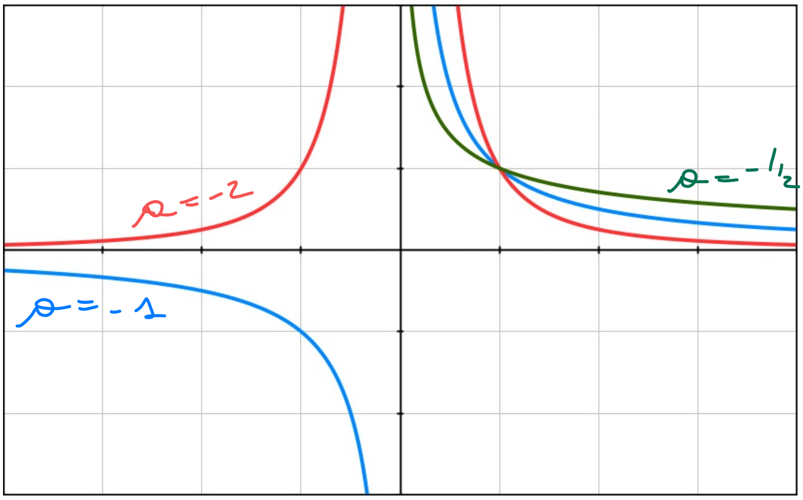


$y = \sqrt[3]{x}$





GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $a<0$

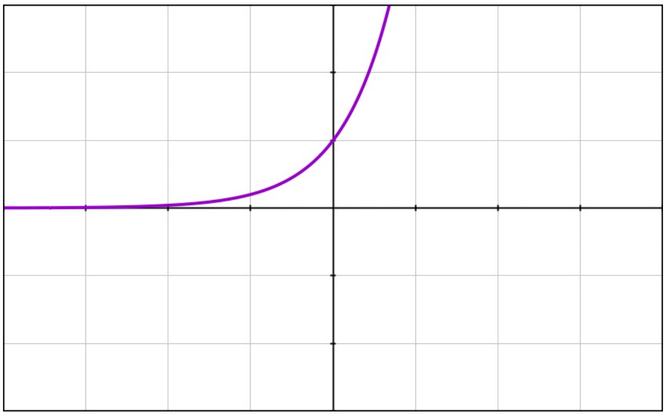


Se a è intero, sappiamo che la funzione ha come insieme di definizione $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
E' dunque definita simmetricamente per gli x negativi.
Di nuovo se a pari la funzione è pari,
per a dispari, la funzione è dispari

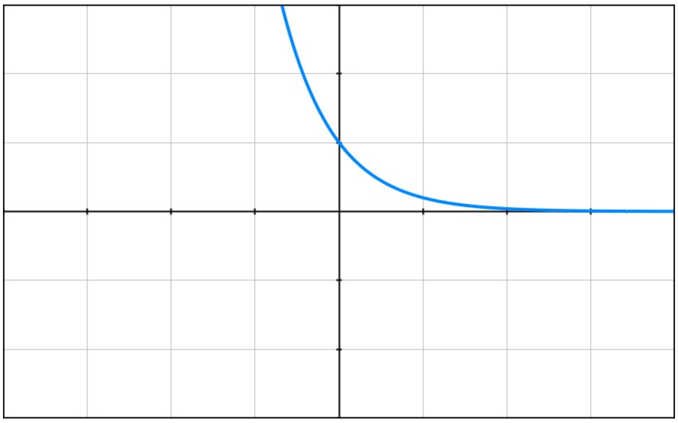
ESPONENZIALI

Sia $a>0$, consideriamo $y = a^x$
Notiamo che qualsiasi sia a, $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Inoltre la funzione è sempre positiva.



$a > 1$



$a < 1$

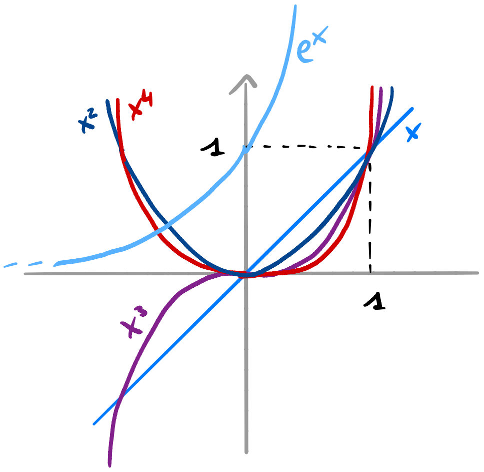
Tra tutti gli $a>0$ possibili come base dell'esponenziale privilegiamo il numero

$$e \simeq 2,718\ldots$$

"e" è il numero di Nepero

Notiamo che ogni potenza può essere scritta in base e

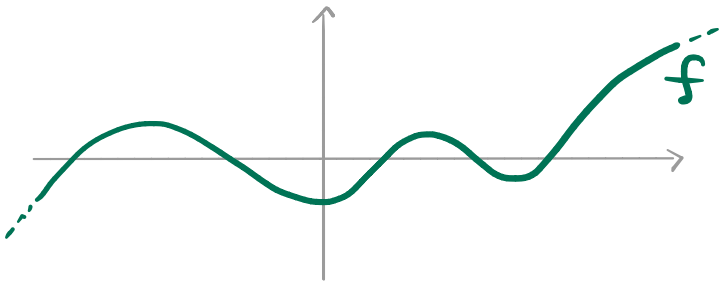
$$\boxed{a^b = e^{\log_e a^b} = e^{b \log_e a}}$$



Confronto con le funzioni potenza x^a con $a \in \mathbb{N}$
La funzione e^x va all'infinito PIU' VELOCEMENTE di x^a, non importa quanto grande sia a.

Operazioni sui grafici

Dato il grafico di una funzione f e un numero reale a



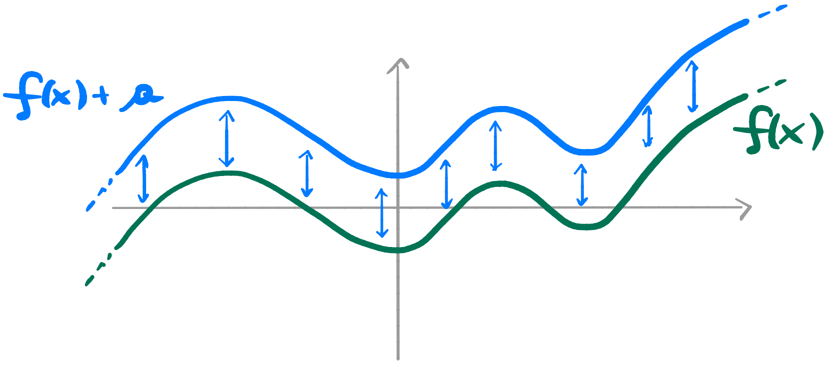
vogliamo disegnare:

i) il grafico di $f(x)+a$

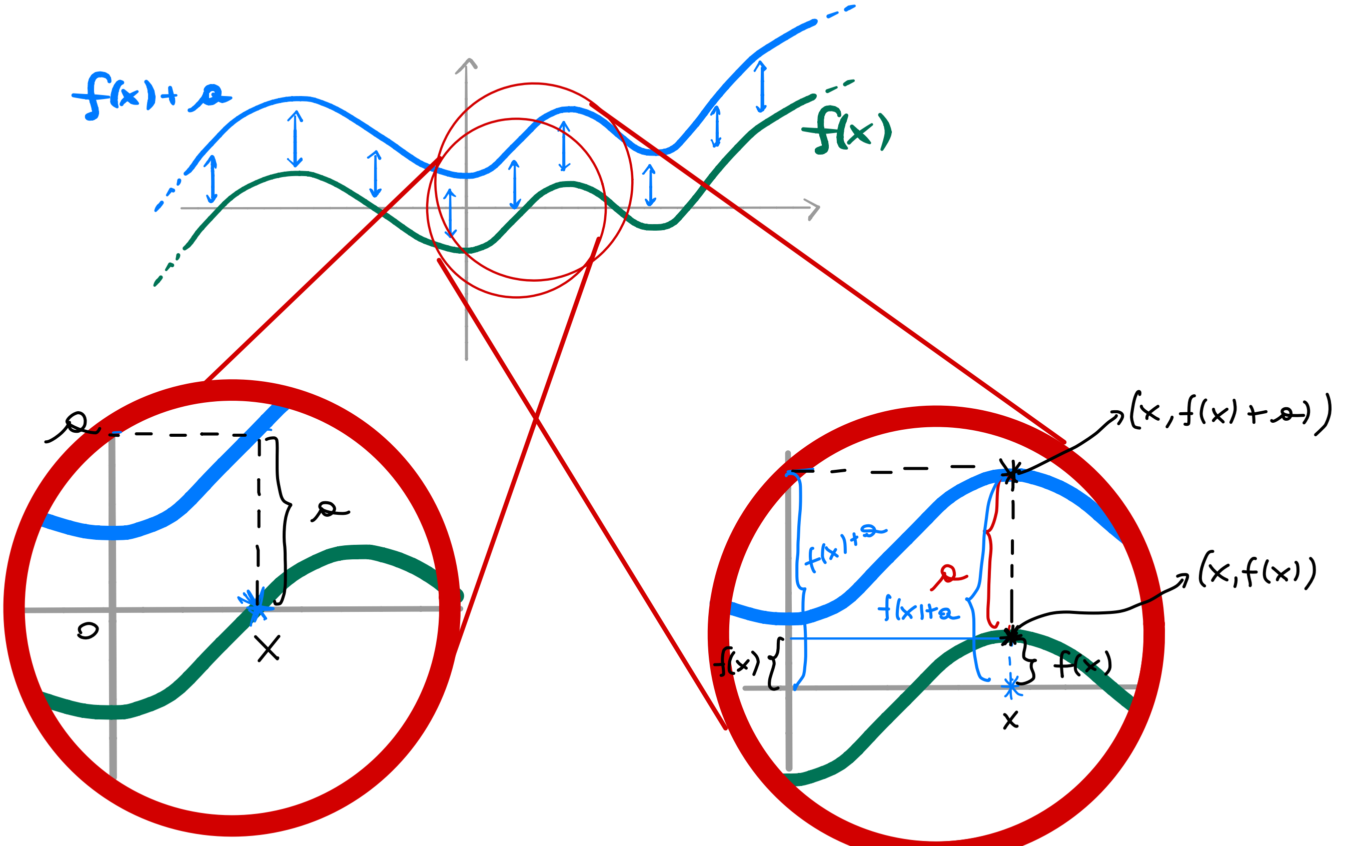
ii) il grafico di $f(x+a)$

Data $f(x)$ il grafico di $f(x)+a$ si ottiene per traslazione verticale ↕

verso l'alto di $+a$, se a è positivo
verso il basso di $-a$, se a è negativo.



Consideriamo il caso $a>0$
(chiaramente se $a=0$ non succede niente)



Prendiamo un punto in cui la funzione vale zero
(ossia un $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x)=0$, $(x,0)\in\mathbb{R}^2$,
→ dove il grafico della funzione interseca l'asse delle x)
Allora $f(x)+a$ varrà a
$(f(x)+a = 0+a = a)$

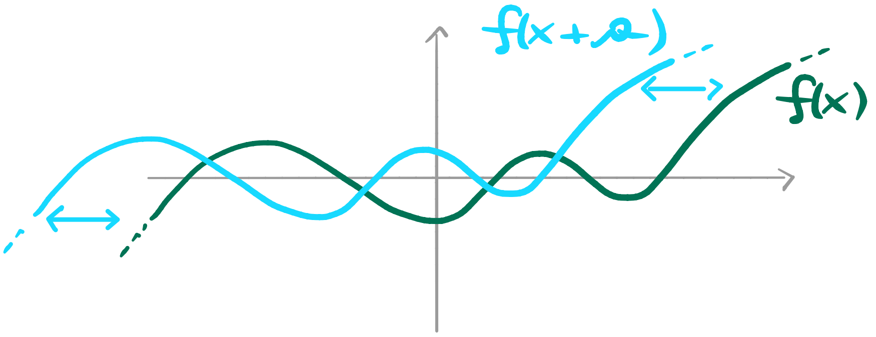
Prendiamo un punto qualsiasi del grafico $(x,f(x))$
Vogliamo disegnare il punto $(x, f(x)+a)$

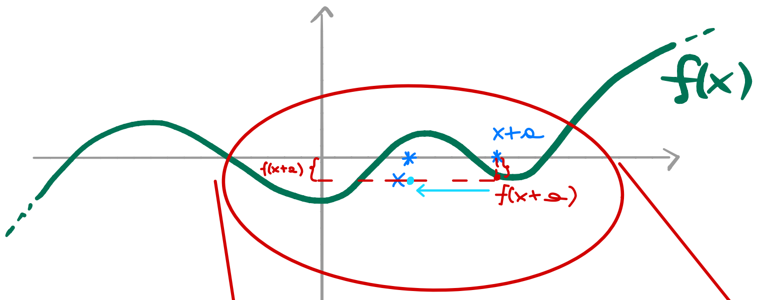
Gli zeri della funzione cambiano!

↳ $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
i punti $x \in X$ tali che $f(x)=0$

Data $f(x)$ il grafico di $f(x+a)$ si ottiene per traslazione orizzontale ⟷

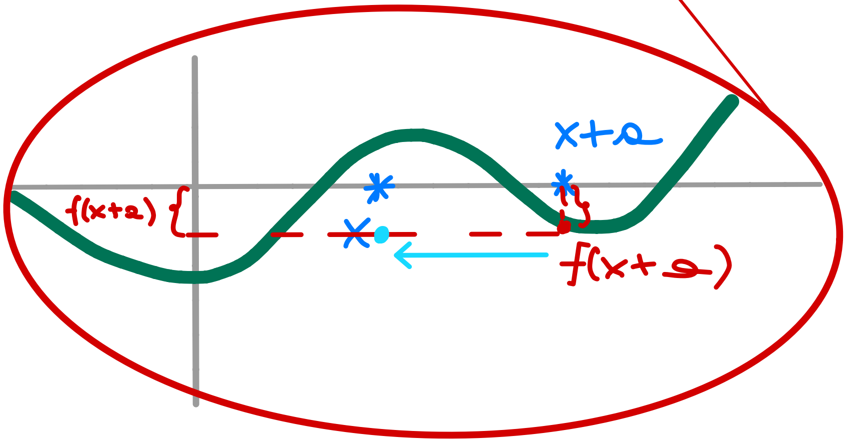
verso sinistra di $+a$, se a è positivo
verso destra di $-a$, se a è negativo.





Partiamo dal grafico di f, abbiamo l'insieme di tutte le coppie $(x, f(x))$
Ora dobbiamo disegnare l'insieme di tutte le coppie $(x, f(x+a))$
Supponiamo che $a>0$ (come prima, se $a=0$ non succede nulla), ad esempio $a=2$.

Prendiamo un punto x qualsiasi, ci segniamo sull'asse delle x il punto $x+a$
L'altezza sulle ascisse (valore della funzione) che dobbiamo ora associare a x per disegnare il punto $P=(x, f(x+a))$ è il valore della funzione in $x+a$.



Lezione 5 - II^a PARTE

* Esercizio : Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) del piano tali che

$$-1 \leq x \leq 1 , \quad (x+1)^3 \leq y \leq e^{-x}$$

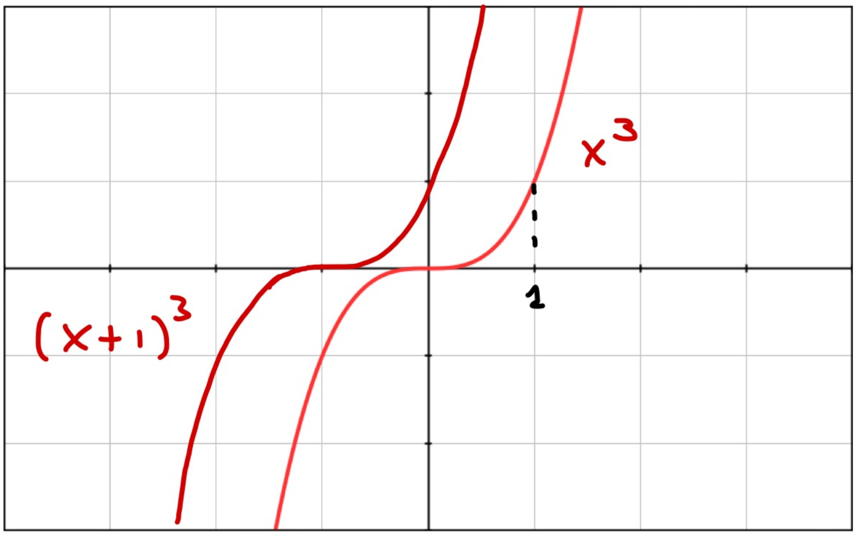
Soluzione:

PRIMO PASSO : disegno il grafico di $y = (x+1)^3$

Il disegno del grafico della funzione $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)^3 \end{cases}$

si ottiene traslando orizzontalmente a sinistra di 1 il disegno del grafico della funzione $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$

(come ottenere il grafico di $g(x) = f(x+a)$ con $a > 0$ a partire dal grafico di $f(x)$).

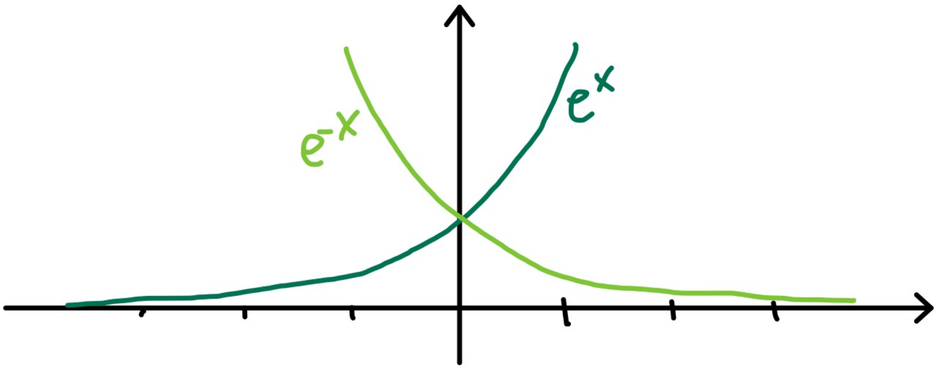


SECONDO PASSO : disegno il grafico di e^{-x}

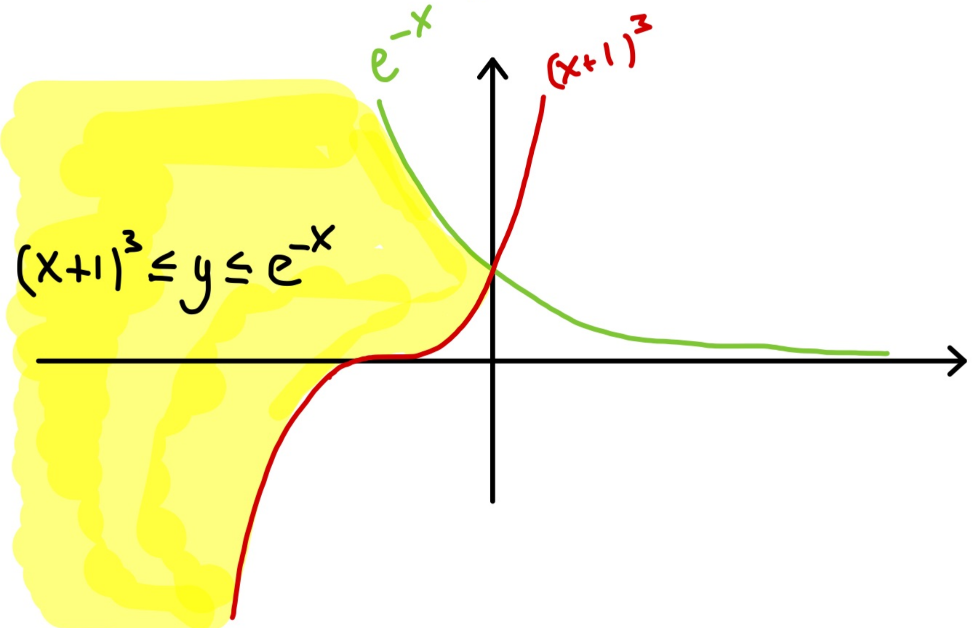
Il disegno del grafico della funzione $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{cases}$

si ottiene riflettendo rispetto all'asse delle y il disegno del grafico della funzione esponenziale con base e

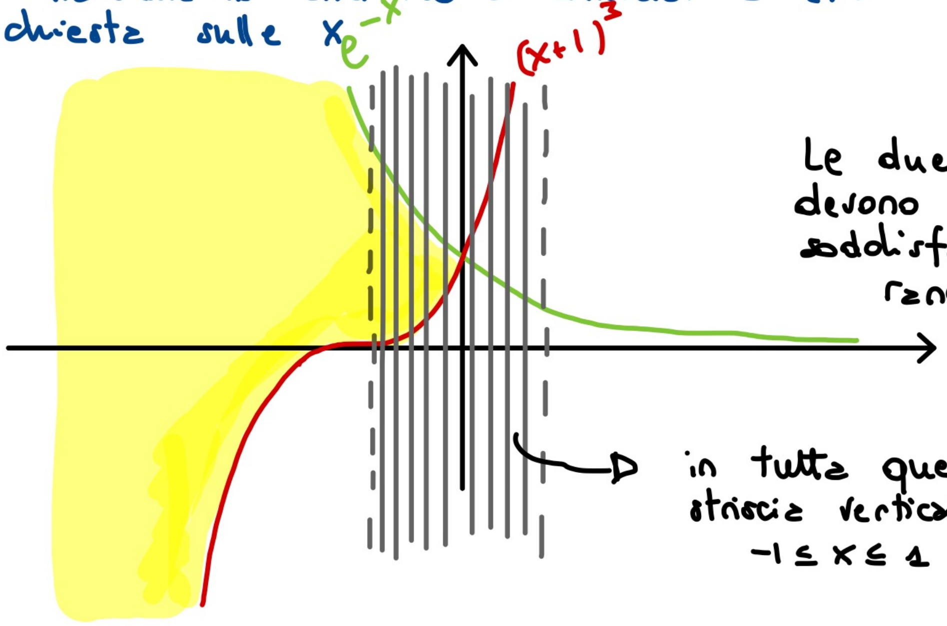
(come ottenere il grafico di $f(-x)$ a partire dal grafico di $f(x)$).



PASSO 3: Riportiamo i grafici delle due funzioni in un unico disegno e individuiamo le y richieste



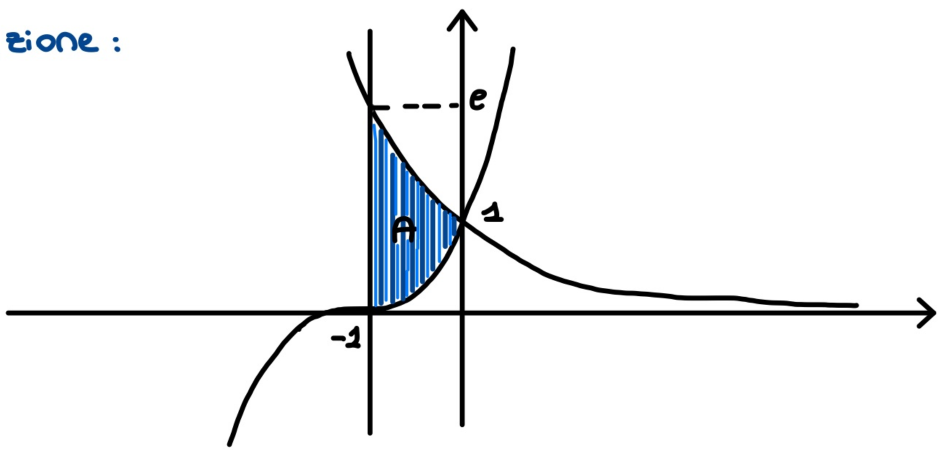
PASSO 4: Concludiamo andando a considerare anche la richiesta sulle x



Le due richieste devono essere soddisfatte contemporaneamente

→ in tutta questa striscia verticale $-1 \leq x \leq 1$

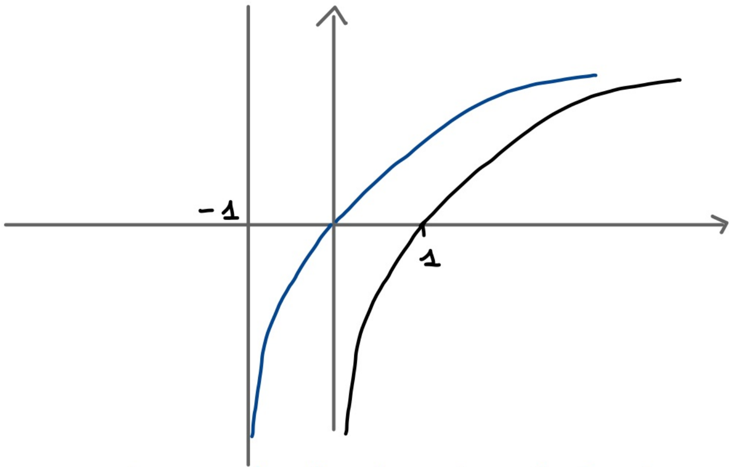
Soluzione:



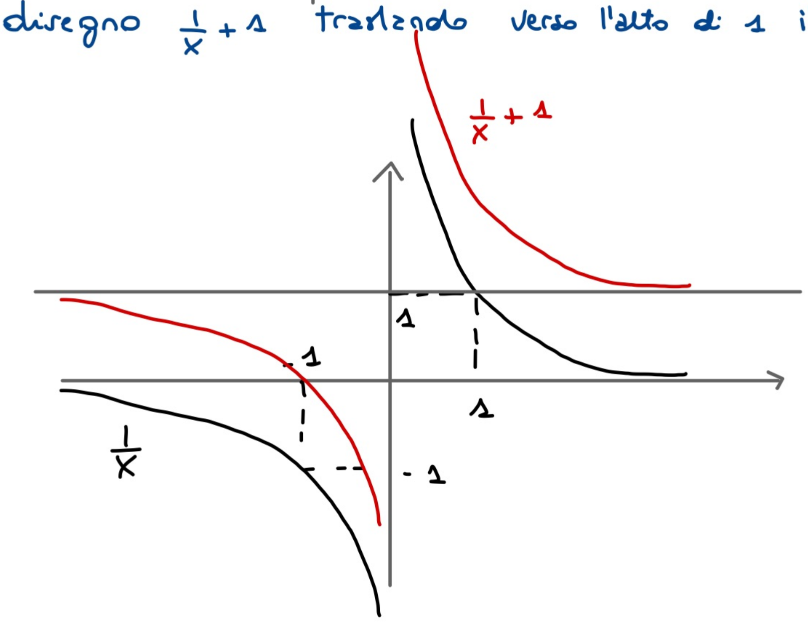
* Esercizio : Risolvere graficamente la disequazione
$\log(x+1) \geq \frac{1}{x} + 1$.

Osservazione preliminare: le soluzioni della disequazione sono delle $x \in \mathbb{R}$. Quando vado a rappresentare nel piano cartesiano il grafico di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'insieme di partenza $\mathbb{R}$, dove variano le x, è identificato (rappresentato nel disegno) con l'asse delle ascisse. Dovremo dunque andare a evidenziare parti di questo asse.

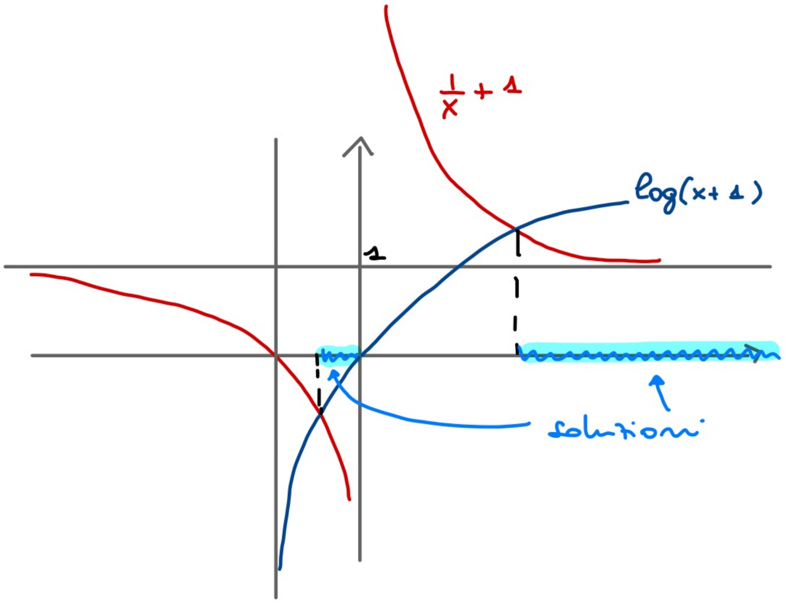
PASSO 1: disegno $\log(x+1)$ → traslazione orizzontale verso sinistra di 1 della funzione logaritmo naturale.



PASSO 2: disegno $\frac{1}{x} + 1$ traslando verso l'alto di 1 il grafico di $\frac{1}{x}$



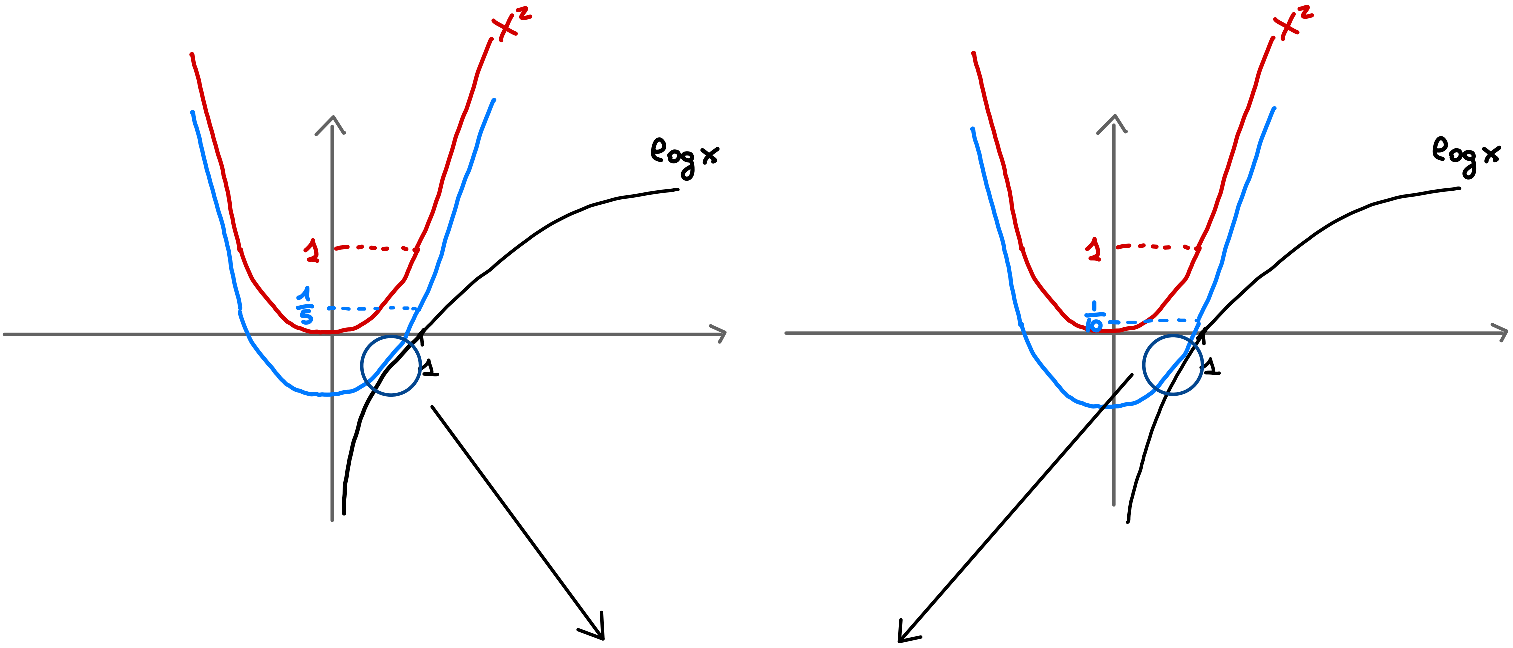
Soluzione:



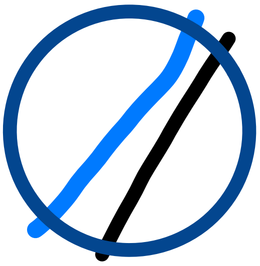
ATTENZIONE: la risoluzione grafica di una disequazione è sempre attendibile?

ESEMPIO: Risolvere graficamente la disequazione

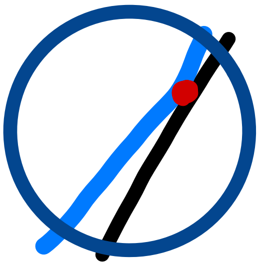
$\log(x) \geq x^2 - \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\log(x) \geq x^2 - \frac{9}{10}$



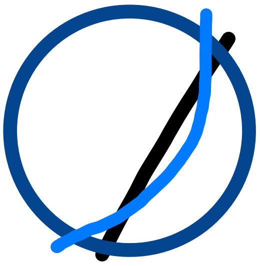
che comportamento abbiamo nella zona cerchiata?



nessuna intersezione?



un punto di contatto?



due intersezioni?

Il disegno del grafico non è abbastanza preciso per fornirmi questa informazione.

* Esercizio : disegnare il grafico della funzione

$$f(x)=\left|\frac{1}{(x+2)^2}-1\right|$$

Soluzione : Ci chiediamo qual è l'insieme di definizione di f: x deve essere diverso da -2. (Il disegno del grafico dovrà rispecchiare questa proprietà).

Quindi:

$$f:\left\{\begin{array}{l}(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \to \mathbb{R}\\ \qquad\qquad x \qquad\qquad \mapsto \left|\dfrac{1}{(x+2)^2}-1\right|\end{array}\right.$$

Notiamo inoltre che la funzione è sempre positiva.

Dobbiamo cercare di ridurci ad una funzione elementare: la potenza $\frac{1}{x^2}$.

Cerchiamo di fare operazioni sui grafici che ci permettano di passare da $\frac{1}{x^2}$ a f.

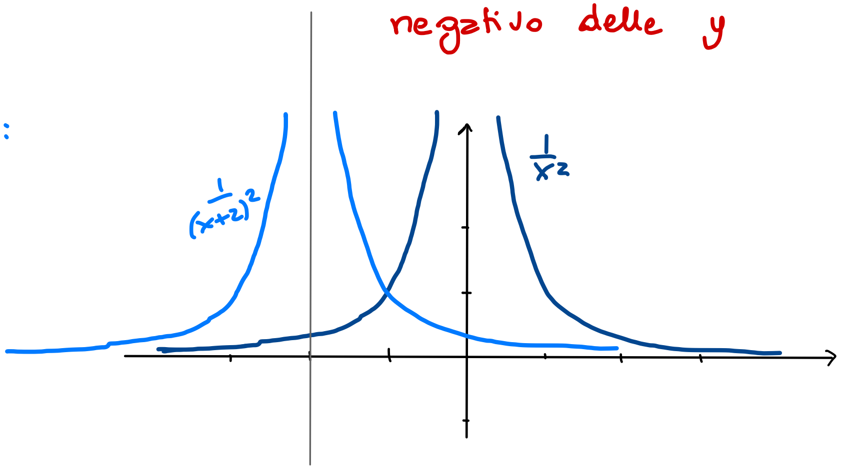
PASSO 0 : $\frac{1}{x^2}$

PASSO 1 : $\frac{1}{(x+2)^2}$ → traslazione orizzontale di $\frac{1}{x^2}$ a sinistra di 2

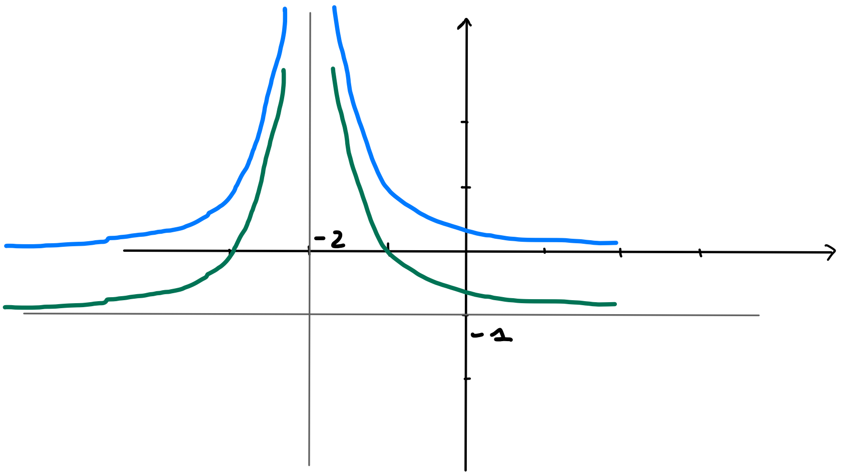
PASSO 2 : $\frac{1}{(x+2)^2}-1$ → traslazione verticale di $\frac{1}{(x+2)^2}$ verso il basso di 1

PASSO 3 : $\left|\frac{1}{(x+2)^2}-1\right|$ → rifletto rispetto all'asse x tutta la parte del grafico di $\frac{1}{(x+2)^2}-1$ che sta nel semipiano negativo delle y

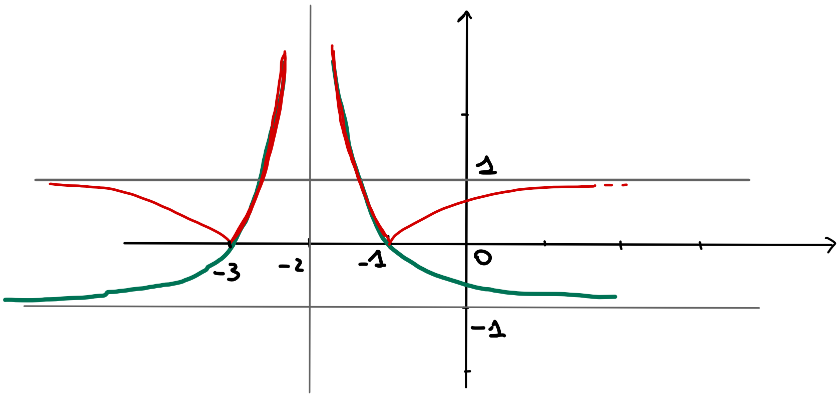
PASSO 1 :



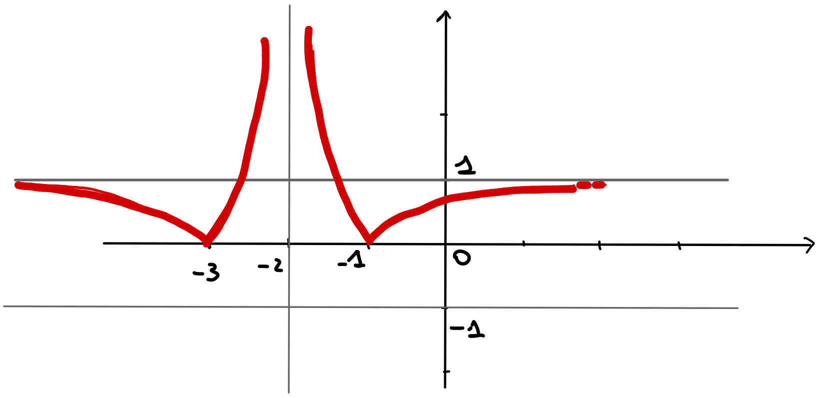
PASSO 2 :



PASSO 3:



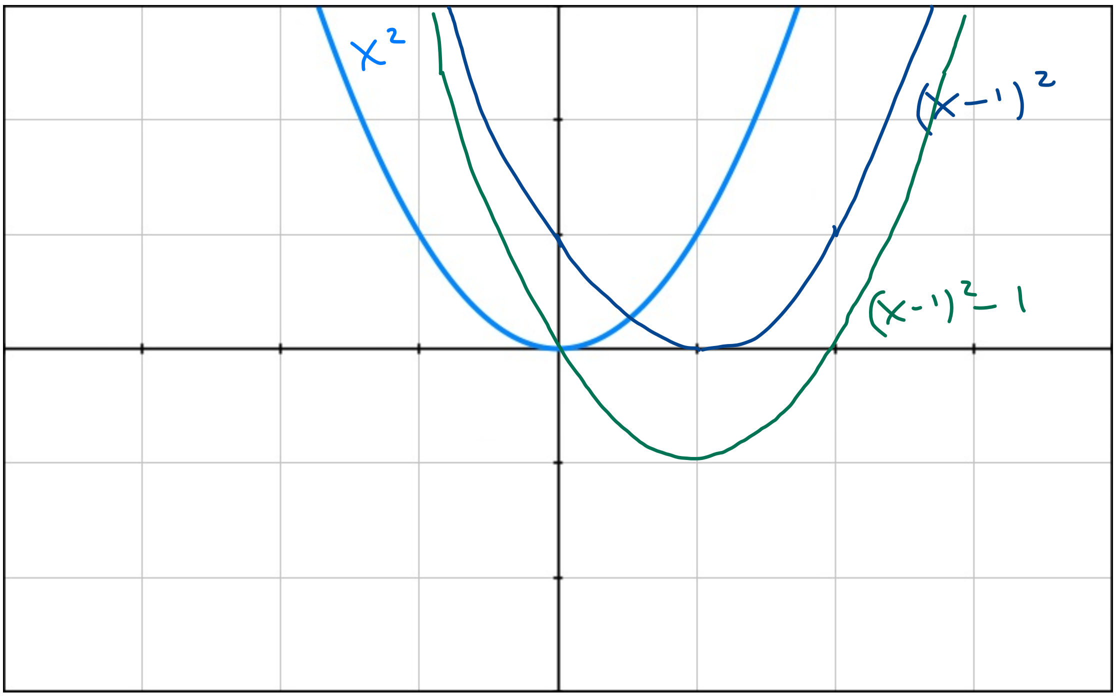
Soluzione:



controllo 1: insieme di definizione
controllo 2: funzione positiva.

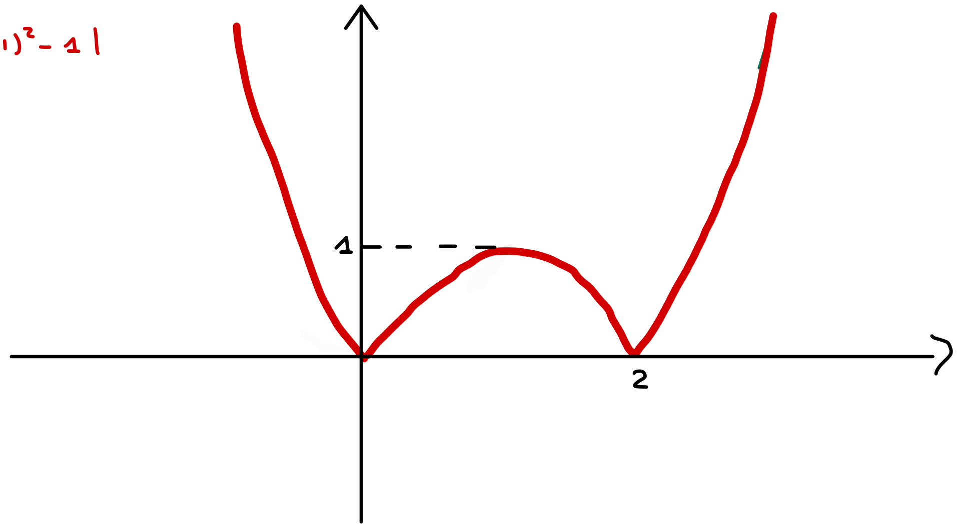
* Esercizio : Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $|(x-1)^2 - 1| = a$

Soluzione: disegno il grafico della funzione data dalla formula $|(x-1)^2 - 1|$



disegno del grafico di:

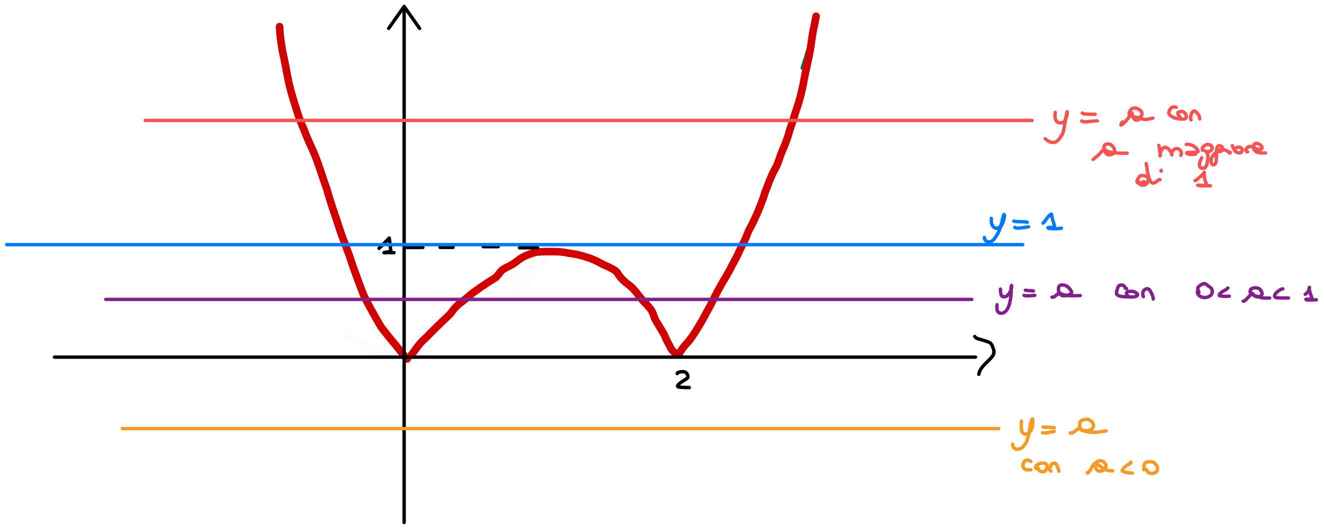
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |(x-1)^2 - 1| \end{cases}$$



$y = a$ è una retta orizzontale.
Al variare di a dobbiamo contare quante sono le intersezioni di questa retta con il grafico di f.

Se a è negativo non c'è nessuna intersezione
se a è zero, ce ne sono 2
se a è compreso tra zero e 1 ce ne sono 4

se a è maggiore di 1 ce ne sono 2



soluzione: il numero di soluzioni è
0 se $a \in (-\infty, 0)$
2 se $a \in (1, +\infty) \cup \{0\}$
3 se $a = 1$
4 se $a \in (0, 1)$

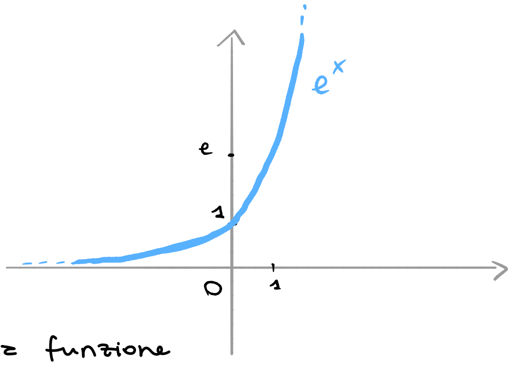
Lezione 8

Funzioni inverse - esempi

ESEMPIO 1: Logaritmi

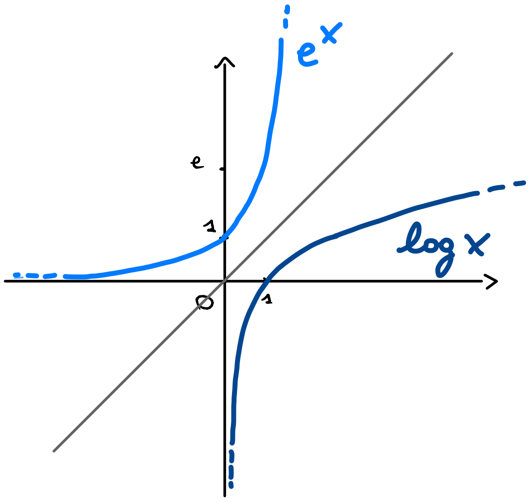
Consideriamo la funzione esponenziale con base e.

$$f: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}\right.$$



Questa funzione è iniettiva ma non suriettiva.
Si vede facilmente che l'immagine è $(0,+\infty)$.
Se consideriamo $\tilde{f}: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to (0,+\infty) \\ x \mapsto e^x \end{array}\right.$ abbiamo una funzione che è sia iniettiva che suriettiva che quindi ammette inversa, che è $g: \left\{\begin{array}{l} (0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \log y \end{array}\right.$

Infatti: $\tilde{f}(g(y)) = \tilde{f}(\log y) = e^{\log y} = y$
e $g(\tilde{f}(x)) = g(e^x) = \log(e^x) = x$.



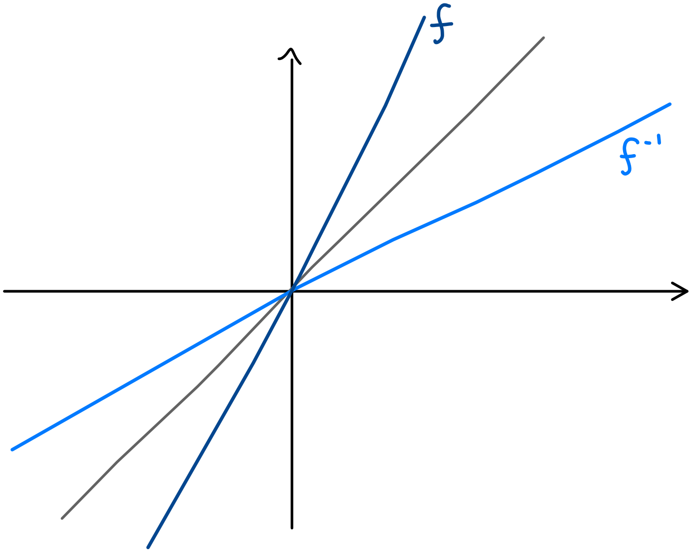
ESEMPIO 2: rette

Sia $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\quad f: \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax+b \end{array}\right.$

f è biiettiva. Sappiamo allora che esiste l'inversa g.
Possiamo trovare la sua formula esplicitando la x in funzione della y nell'equazione $y = f(x) = ax+b$

$y = ax+b \iff ax = y-b \iff x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Quindi la formula dell'inversa è $x = g(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Il dominio di g è $\mathbb{R}$ e l'immagine di g è $\mathbb{R}$.



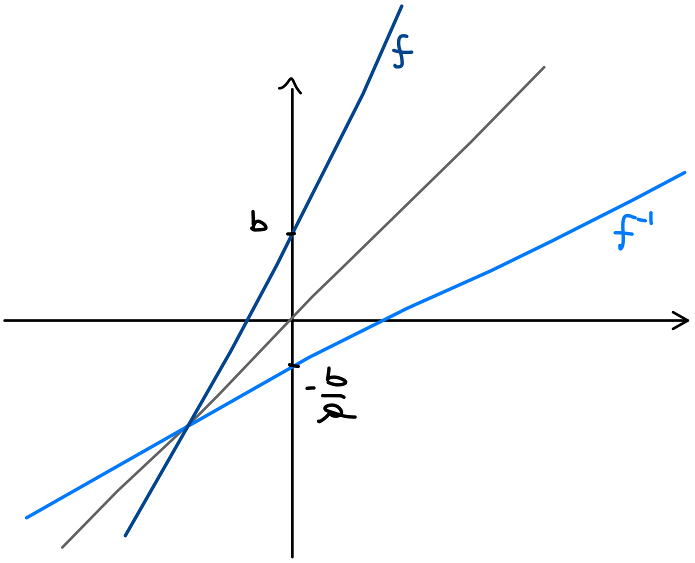


GRAFICO della funzione inversa.

Osservazione : preso un qualsiasi punto nel piano $P = (a, b)$, il punto $P' = (b, a)$, ottenuto scambiando le coordinate di P, è il simmetrico di P' rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

Siano $X, Y \subset \mathbb{R}$.
Ricordiamo che $g: Y \to X$ è l'inversa di $f: X \to Y$ se
$\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$$g(f(x)) = x \qquad e \qquad f(g(y)) = y .$$

Abbiamo che , se g e' l'inversa di f

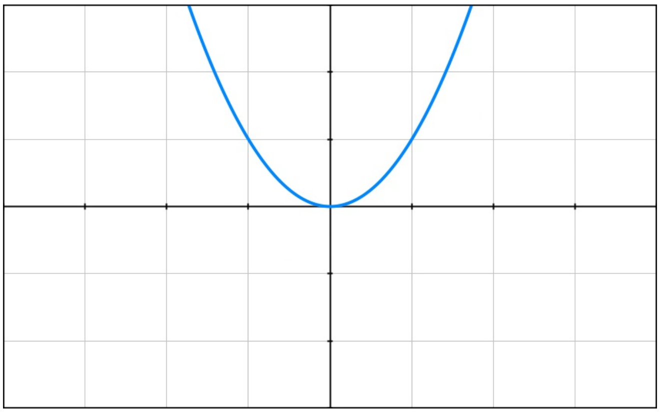
$$\text{grafico di } f = \{ (x,y) \in X \times Y : \quad y = f(x) \}$$
$$= \{ (y,x) \in Y \times X : \quad x = g(y) \} \quad = \quad \text{grafico di } g.$$

Infatti gli elementi del grafico di f sono gli y che soddisfano l'equazione
$y = f(x)$ con $x \in X$ $(*)$
mentre gli elementi del grafico di g sono gli x che soddisfano l'equazione
$x = g(y)$ con $y \in Y$ $(**)$
ma $(*)$ e $(**)$ sono equivalenti
se $y = f(x)$ allora $g(y) = g(f(x))$ e poiche' g è l'inversa di f $g(y) = x$,
se $x = g(y)$ allora $f(x) = f(g(y))$ e poiche' g è l'inversa di f $f(x) = y$.

Quindi il grafico di f $(y = f(x))$ e della sua inversa $(x = g(y))$ coincidono.

Noi pero' non disegnamo il grafico di $x = g(y)$, bensì vorremmo disegnare il grafico di $y = g(x)$. Per farlo dobbiamo scambiare le coordinate di ogni punto . L' osservazione ci dice che stiamo facendo un' operazione di riflessione rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

ESEMPIO 3: radice quadrata.



Consideriamo la funzione potenza $f:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}\right.$

Questa funzione non è ne' iniettiva, ne' suriettiva, quindi non ammette inversa.
In particolare notiamo che qualsiasi $y>0$ è immagine di due x diversi:
esempio: $y=4$, $f(-2)=4$ e $f(2)=4$.

Abbiamo visto nel caso della funzione esponenziale come cavarcela quando non abbiamo la suriettività: al posto di considerare come codominio tutto $\mathbb{R}$, ci restringiamo all'immagine della funzione. Anche in questo caso si vede facilmente che l'immagine è $[0,+\infty)$.
Iniziamo dunque a considerare $\tilde{f}:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to[0,+\infty)\\ x\mapsto x^2\end{array}\right.$

Proviamo a esprimere x in funzione di y:

$$y=f(x)=x^2 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{y}$$

Purtroppo la legge che ad ogni $y\in[0,+\infty)$ associa $\pm\sqrt{y}$ non è una funzione (dato un input ottengo due output!).
D'altra parte se scelgo arbitrariamente uno dei due output e considero le funzioni $h_1:\left\{\begin{array}{l}[0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ y\mapsto\sqrt{y}\end{array}\right.$ e $h_2:\left\{\begin{array}{l}[0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ y\mapsto-\sqrt{y}\end{array}\right.$
nessuna delle due scelte soddisfa la proprietà di essere l'inversa di $\tilde{f}$.

$$h_1(\tilde{f}(-2))=h_1(4)=2$$
$$h_2(\tilde{f}(2))=h_2(4)=-2$$

Per riuscire a scrivere l'inversa dobbiamo rende $\tilde{f}$ iniettiva.
Decidiamo di modificare il dominio restringendoci a $[0,+\infty)$.
Abbiamo quindi $\hat{f}:\left\{\begin{array}{l}[0,+\infty)\to[0,+\infty)\\ x\mapsto x^2\end{array}\right.$

e la sua inversa è $g:\left\{\begin{array}{l}[0,+\infty)\to[0,+\infty)\\ y\mapsto\sqrt{y}\end{array}\right.$

Esercizio: trovare l'inversa di $f:\left\{\begin{array}{l}(-\infty,0]\to[0,+\infty)\\ x\mapsto x^2\end{array}\right.$

ESEMPIO 3 bis: radici m-esime con m pari

Come per $y=x^2$, non esiste l'inversa di $f:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^m\end{array}\right.$

Possiamo trovare l'inversa di $\hat{f}:\left\{\begin{array}{l}[0,+\infty)\to[0,+\infty)\\ x\mapsto x^m\end{array}\right.$, che è

$$g:\left\{\begin{array}{l}[0,+\infty)\to[0,+\infty)\\ y\mapsto\sqrt[m]{y}\end{array}\right.$$

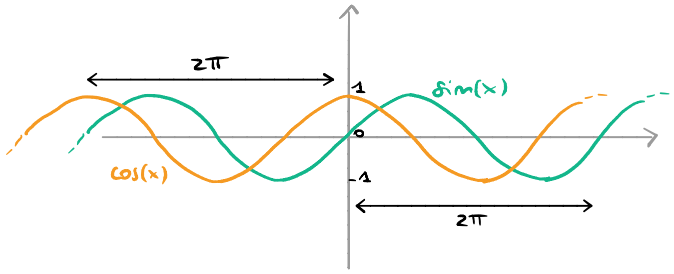
ESEMPIO 4: radici m-esime con m dispari

Come per $y=x^3$, l'inversa di $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^m \end{cases}$ con m dispari esiste ed è

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt[m]{y} \end{cases}$$

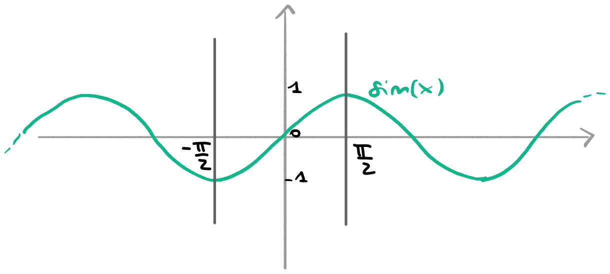
ESEMPIO 5: inverse delle funzioni trigonometriche

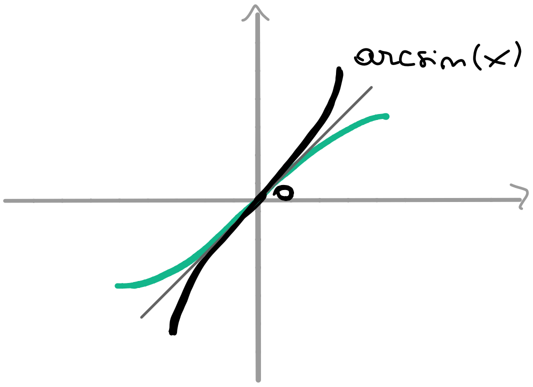
Le funzioni $s: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$ e $c: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ non sono biettive.



Per quanto riguarda il seno prendiamo la sua restrizione

$$s^*: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

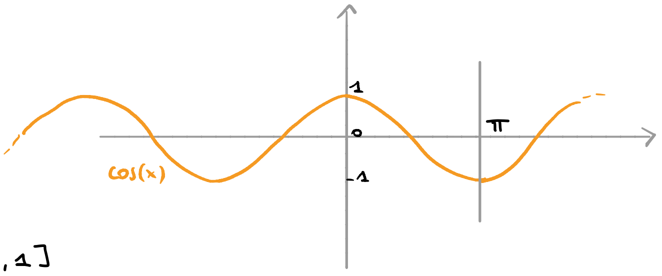


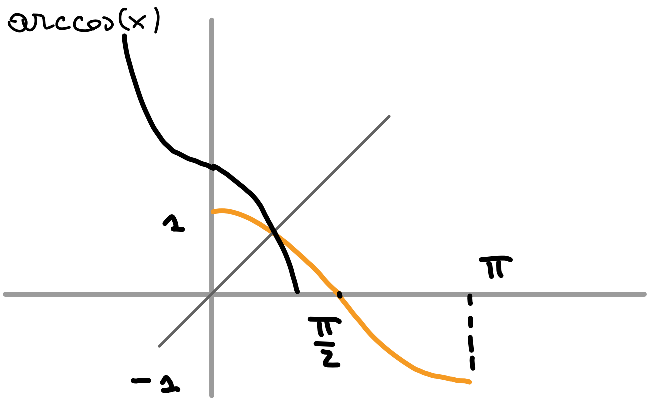


L'inversa $g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è detta arcoseno (arcsin)

arcsin(x) è l'unico angolo in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ il cui seno vale x.

Analogamente, per quanto riguarda il coseno, prendiamo la restrizione $c^*: \begin{cases} [0,\pi] \to [-1,1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$



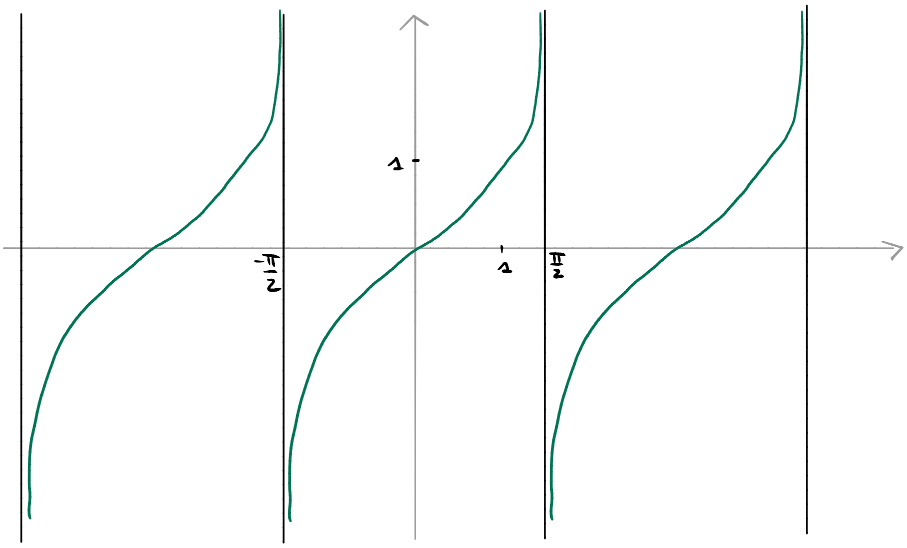


L'inversa $g: [-1,1] \to [0,\pi]$ è detta arcocoseno (arccos)

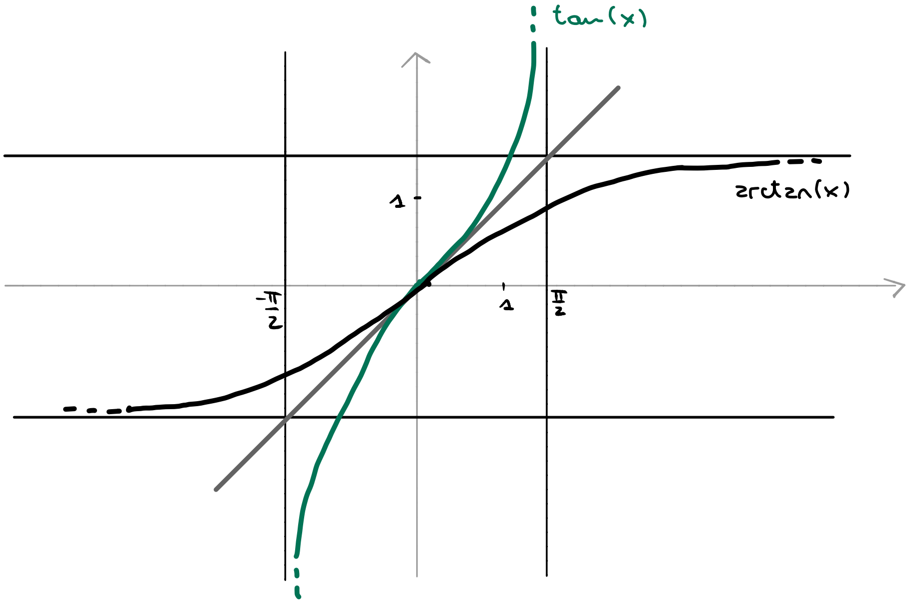
arccos(x) è l'unico angolo in $[0, \pi]$ il cui coseno vale x.

Infine per quanto riguarda la tangente, ci restringiamo a

$$t^*: \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad \mapsto \tan(x) \end{cases}$$

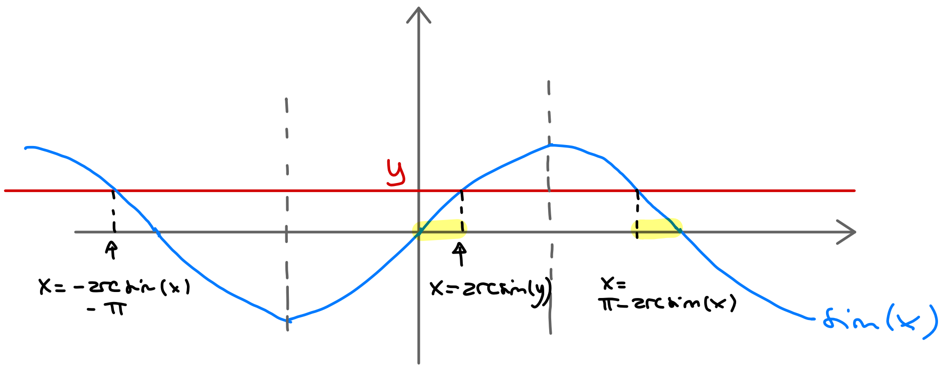


L'inversa di t^* è arctan : $\mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è chiamata arcotangente
arctan(x) è l'unico angolo in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la cui tangente vale x.



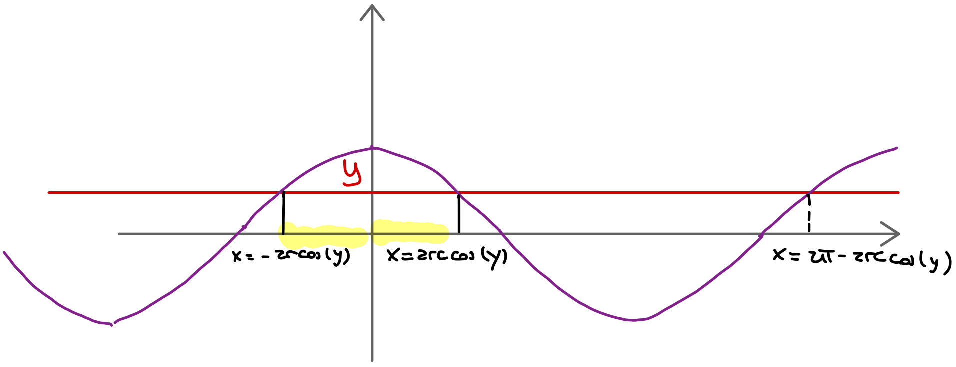
Attenzione: risoluzione di equazioni trigonometriche con le funzioni inverse.

Sia $y \in [-1, 1]$. Consideriamo l'equazione $\sin(x) = y$.
La soluzione compresa nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è $x = \arcsin(y)$.
Però in $\mathbb{R}$ ci sono altre infinite soluzioni



Soluzioni : $x = \arcsin(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Sia $y \in [-1, 1]$. Consideriamo l'equazione $\cos(x) = y$.
La soluzione compresa nell'intervallo $[0, \pi]$ è $x = \arccos(y)$.
In $\mathbb{R}$ ci sono altre infinite soluzioni



Soluzioni : $x = \arccos(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$x = -\arccos(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

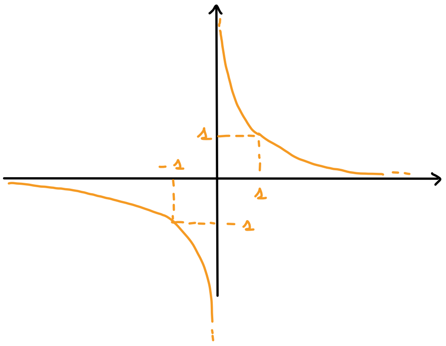
Esercizio: Disegnare il grafico, trovare dominio e immagine, limiti rilevanti e inversa di

$$f(x) = \frac{x-5}{x+3}$$

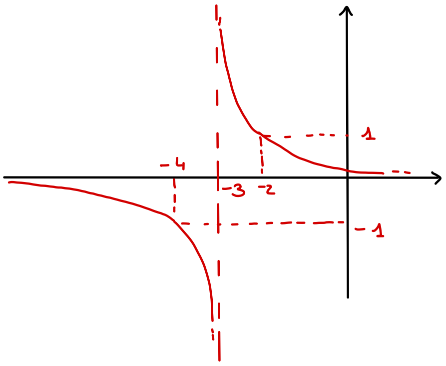
Svolgimento: $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

Per disegnare il grafico scrivo $f(x)$ come $\frac{x-5\pm3}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{8}{x+3} = 1 - \frac{8}{x+3}$

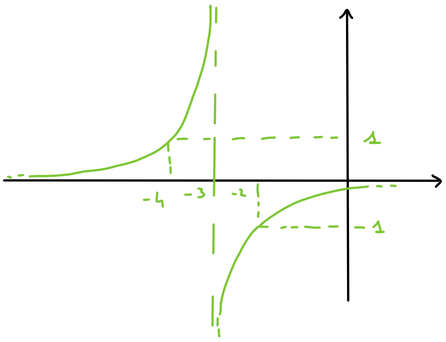
. disegno $f_1(x) = \frac{1}{x}$



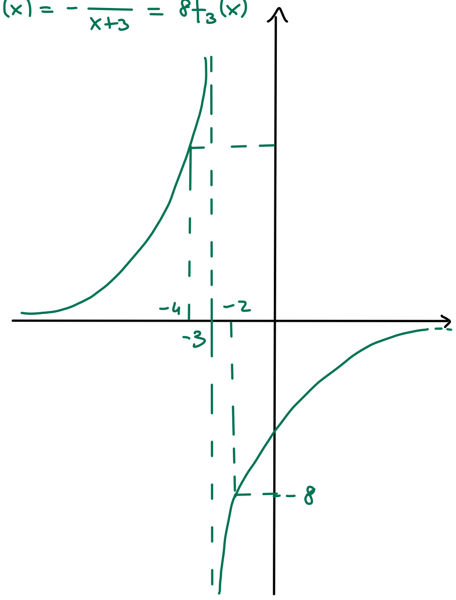
$f_2(x) = \frac{1}{x+3} = f_1(x+3)$



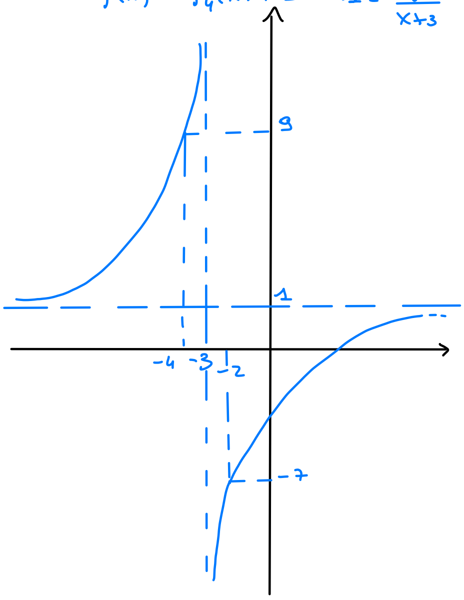
$f_3(x) = -\frac{1}{x+3} = -f_2(x)$



$f_4(x) = -\frac{8}{x+3} = 8f_3(x)$



$f(x) = f_4(x) + 1 = 1 - \frac{8}{x+3}$



$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-3} f(x)$ non esiste

Calcoliamo ora l'inversa di $f: \mathrm{Dom}(f) \to (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$y = \frac{x-5}{x+3}$ con $x \neq -3$

$(x+3)y = x-5$ $\qquad xy - x = -3y-5$ $\qquad x(y-1) = -3y-5$ $\qquad x = \frac{-3y-5}{y-1}$ con $y \neq 1$

L'inversa g è:

$$g: \begin{cases} (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) \\ y \longmapsto \frac{-3y-5}{y-1} \end{cases}$$

Esercizio: trovare l'inversa di $y=f(x)=e^{2x}+4e^{x}$

Svolgimento: $\mathrm{Im}(f)=(0,+\infty)$. Cerchiamo l'inversa di $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to (0,+\infty)\\ x \mapsto e^{2x}+4e^{x}\end{cases}$

Chiamo $e^x=t$, quindi $e^{2x}+4e^{x}=t^2+4t$

$y=t^2+4t$

$t^2+4t-y=0$ $\qquad t=-2+\sqrt{4+y}$

$\qquad\qquad\qquad\quad t=-2-\sqrt{4+y}$

>0 infatti $\sqrt{4+y}>0$ quando $y>0$

Sostituisco t con e^x: $\quad e^x=\boxed{-2+\sqrt{4+y}} \Rightarrow \quad x=\log(-2+\sqrt{4+y})$

>0 poiché $y>0$

$e^x=\boxed{-2-\sqrt{4+y}}$ $\qquad$ nessuna soluzione

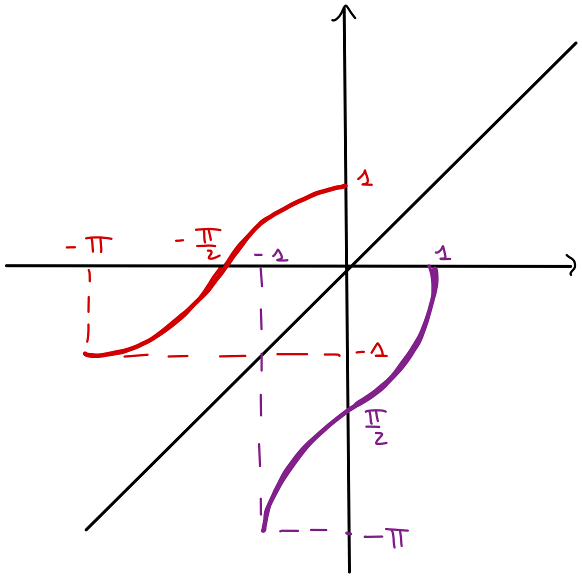
<0

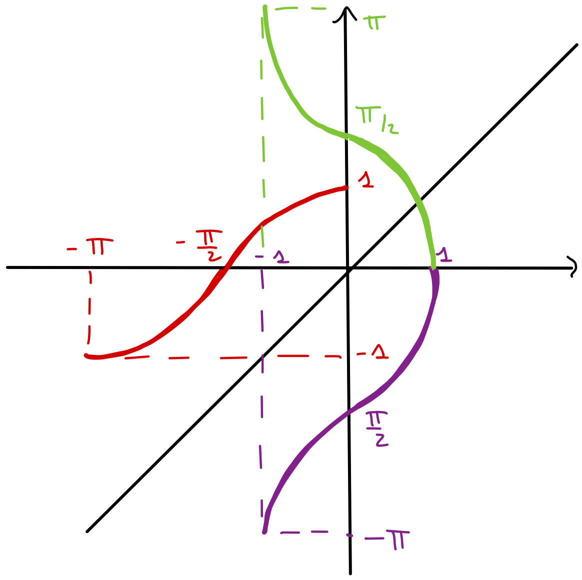
quindi $x=\log(-2+\sqrt{4+y})$

L'inversa è $g:\begin{cases}(0,+\infty) \to \mathbb{R}\\ y \mapsto \log(-2+\sqrt{4+y})\end{cases}$

Esercizio: Calcolare l'inversa di $f\begin{cases}[-\pi,0] \to [-1,1]\\ x \mapsto \cos(x)\end{cases}$

In rosso è rappresentato il grafico di f e in viola il grafico della sua inversa (una volta scambiati i ruoli di x e y). Chiamo g l'inversa di f





Se lo andiamo a confrontare con il grafico dell'arcoseno vediamo che $g(y)=-\arccos(y)$.

Potevamo risolvere l'esercizio anche nel seguente modo:

$y=\cos(x)$ con $x\in[-\pi,0]$.

Chiamo $t=-x$, quindi $t\in[0,\pi]$ $\qquad$ stiamo usando la definizione di arcoseno

$y=\cos(x)=\cos(-t)=\cos(t) \quad\Rightarrow\quad t=\arccos(y)$

poiché il coseno è una funzione pari $\qquad \Rightarrow\quad -x=\arccos(y)$

e dunque $x=-\arccos(y)$ è l'inversa cercata.

AM1 gest 20/21 lezione 9

9/10/2020

Limiti di funzioni

Argomento trattato velocemente.

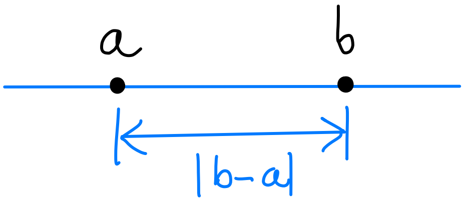
Il calcolo dei limiti viene dopo...

Notazione

Simbolo	significato
$\forall$	"per ogni"
$\exists$	"esiste"
$\nexists$	"non esiste"
$\exists!$	"esiste ed è unico"
$\Longrightarrow$	"implica"

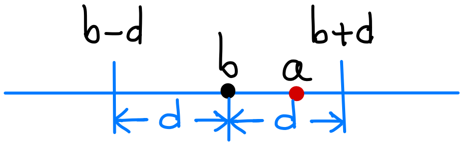
$|a-b|$ è la distanza tra due punti $a, b \in \mathbb{R}$

$$\overset{\displaystyle |a-b|}{\underset{\displaystyle |b-a|}{\|}}$$



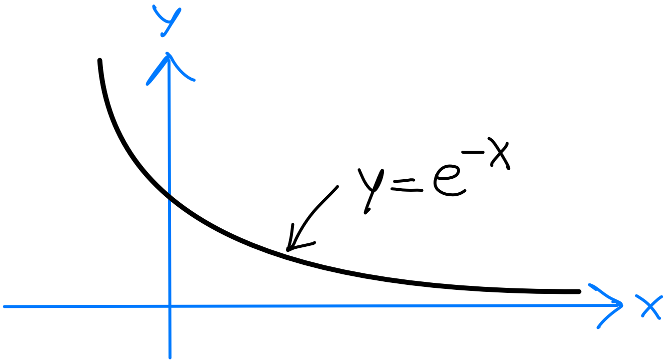
la disequazione $|a-b| \leqslant d$ equivale a:

- $-d \leqslant a-b \leqslant d$
- $b-d \leqslant a \leqslant b+d$
- $a-d \leqslant b \leqslant a+d$



Esempio

Considero il grafico di e^{-x}



Cosa succede all'output e^{-x} quando l'input x si muove "verso $+\infty$"?

Risposta: e^{-x} si muove "verso 0".

Per la precisione e^{-x} si avvicina sempre di più a 0 quanto più x diventa grande (ma $e^{x} \neq 0$ sempre).

Esprimo quanto osservato dicendo che "e^{x} tende a 0 quando x tende a $+\infty$" oppure "il limite di e^{x} per x che tende a $+\infty$ è 0".

Più in generale, dati $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e L numero reale, se $f(x)$ si avvicina sempre di più a L quando x diventa sempre più grande, dico che

"$f(x)$ tende a L quando x tende a $+\infty$"

oppure

"il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è L"

e scrivo $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}L$ oppure $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Queste espressioni a parole sono però vaghe.

Definizione precisa

Si dice che $f(x)\to L$ per $x\to+\infty$ se:

per ogni $\varepsilon>0$

$f(x)$ approssima L con errore inferiore a ε

da un certo x_ε in poi.

cioè per ogni $x\geq x_\varepsilon$

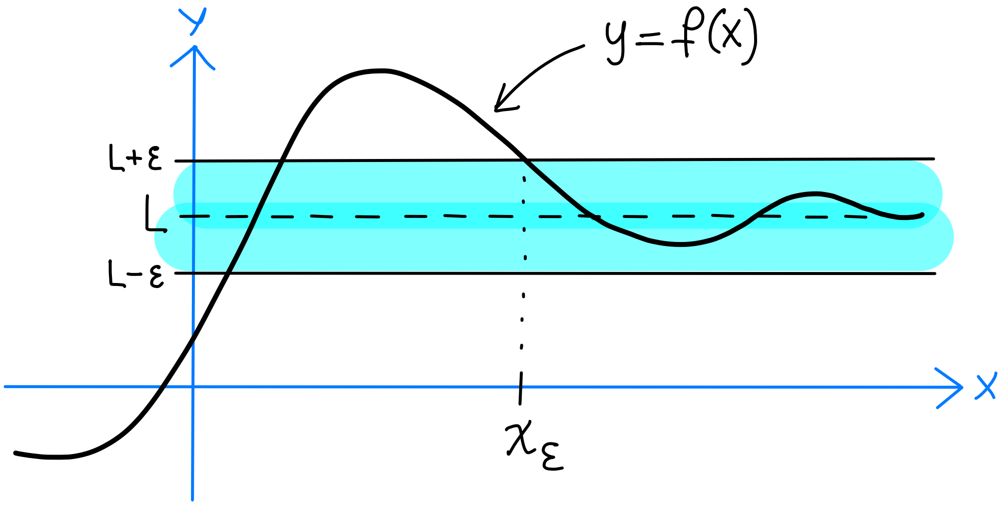
cioè $|f(x)-L|\leq\varepsilon$

$(L-\varepsilon\leq f(x)\leq L+\varepsilon)$

Versione compatta:

$$\boxed{\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,x_\varepsilon \text{ tale che } x\geq x_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-L|\leq\varepsilon}$$

Interpretazione grafica:



Osservazioni

- Posso usare il disegno del grafico di f per dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$?

  No, perché nel disegno non si vede cosa succede per x molto grande e per ε molto piccolo.
  Il grafico serve solo a farsi un'idea.

- Per le stesse ragioni non posso usare neanche un computer.

- Dimostro che $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

  Dato $\varepsilon > 0$ (qualunque) voglio trovare x_ε tale che $|e^{-x} - 0| \leq \varepsilon$ se $x \geq x_\varepsilon$.

  Per farlo risolvo la diseq. $|e^{-x} - 0| \leq \varepsilon$:

  Siccome $|e^{-x} - 0| = |e^{-x}| = e^{-x}$, ho $e^{-x} \leq \varepsilon$ cioè $-x \leq \log \varepsilon$, $x \geq -\log \varepsilon = \log(1/\varepsilon)$.

  Riassumendo $|e^{-x} - 0| \leq \varepsilon$ se $x \geq \log(1/\varepsilon)$.

  Prendo allora $x_\varepsilon := \log(1/\varepsilon)$.

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+1}{e^x - 6x} = 0$,

  ma questo lo si dimostra con tecniche che vedremo più in là.

- Per poter parlare di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non serve che il dominio X di f sia $\mathbb{R}$, basta che X contenga numeri che "si avvicinano a $+\infty$" cioè

$$\forall M \ \exists x \in X \text{ tale che } x \geq M.$$

Cosa significa che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

Attenzione: la definizione di prima non funziona perché $|f(x) - (+\infty)| \leq \varepsilon$ non ha senso ($+\infty$ non è un numero).

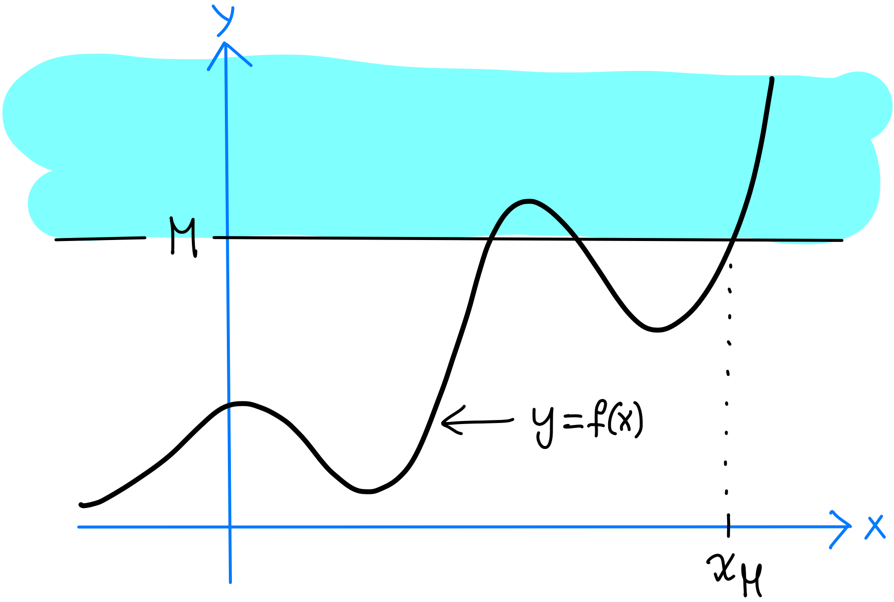
Definizione (di limite infinito per $x \to +\infty$)

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oppure $f: X \to \mathbb{R}$ con X t.c. ....)

si dice che $f(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \to +\infty$ se

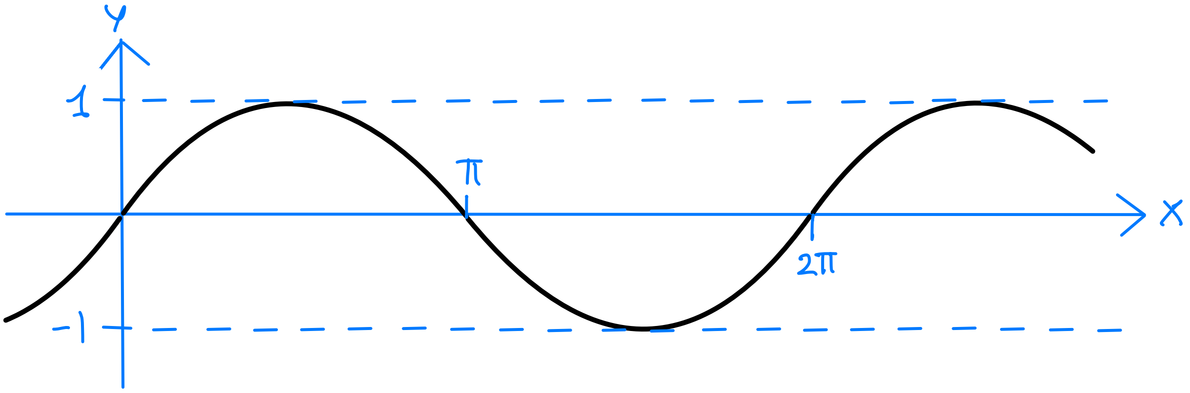
per ogni "soglia" M, vale $f(x) \geq M$ per x da un certo punto x_M in poi, cioè:

$$\boxed{\forall M \ \exists x_M \text{ tale che } x \geq x_M \Rightarrow f(x) \geq M}$$



Scrivete voi la definizione di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Attenzione non sempre il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ esiste. Per esempio $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste!



Definizione (di limite finito per $x \to x_0$)

Dati $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$ se:

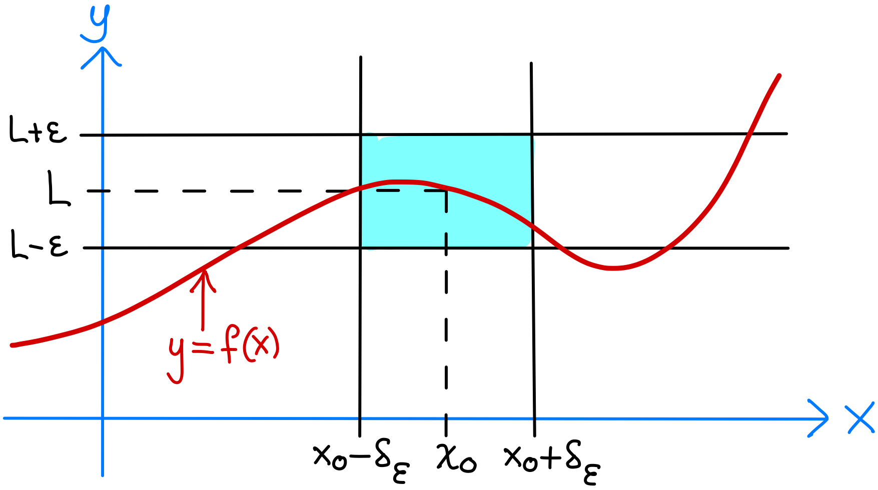
per ogni $\varepsilon > 0$

$f(x)$ approssima L con errore $\leqslant \varepsilon$ → cioè $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$
$(L - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant L + \varepsilon)$

per ogni x sufficientemente vicino a x_0 → per ogni x t.c. $|x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon$
per un certo δ_ε

Versione compatta:

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon. \\ \& \ x \neq x_0 \end{array}}$$



Osservo.

Come prima, per parlare di limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non serve che il dominio X di f sia $\mathbb{R}$ ma basta che X contenga punti arbitrariamente vicini a x_0, cioè:

$$\forall \delta>0 \ \exists \ x \in X \text{ tale che } x \neq x_0 \text{ e } |x-x_0| \leq \delta .$$

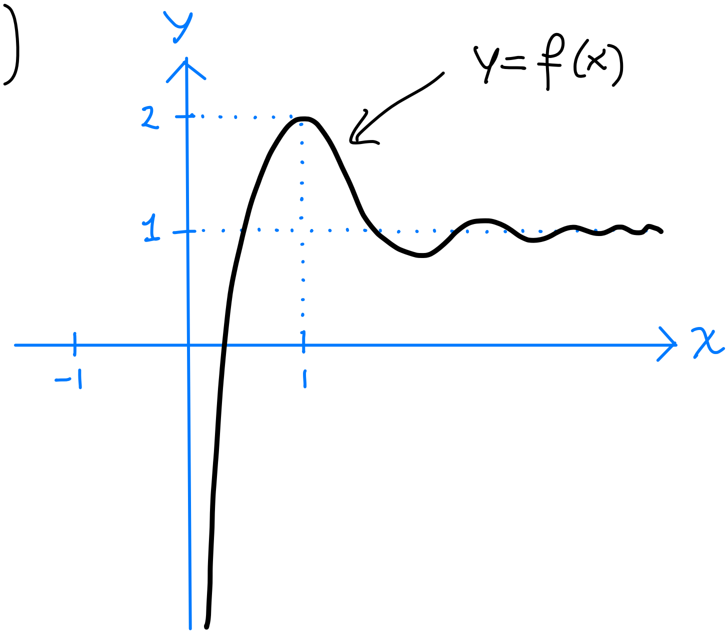
Scrivete per esercizio le definizioni mancanti:

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty,$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} L, \quad f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty.$$

Esempi

1)



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

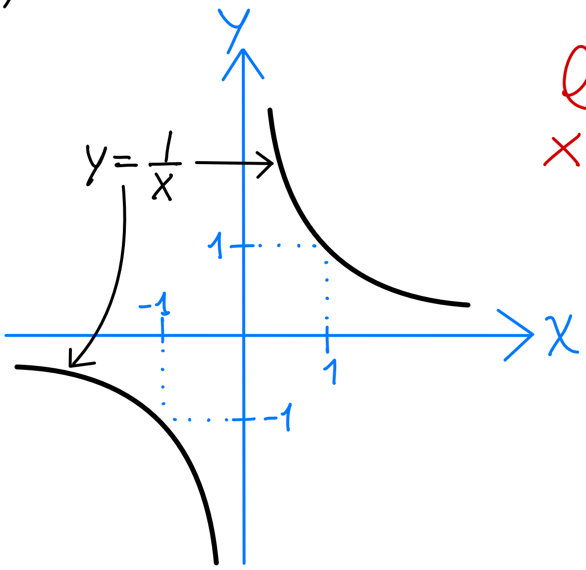
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\cancel{\lim_{x\to -1} f(x) =}$$

non si può parlare di limite per $x \to -1$!

2)



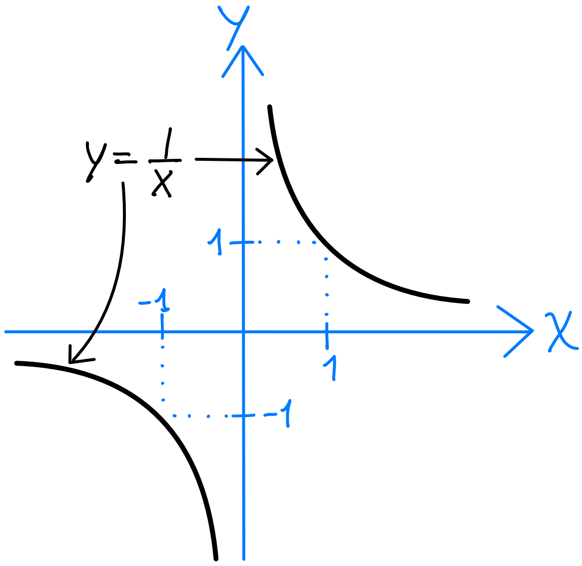
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste!

AM1 gest 20/21

Lezione 10
10/10/2020

Proseguo dall' ultimo esempio di ieri:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.



Ma se considero solo $x>0$, [$x<0$] cioè x tende a 0 "da destra" ["da sinistra"], allora $\frac{1}{x}$ tende a $+\infty$ [$-\infty$]

Definizione di limite destro e sinistro

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$,

dico che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 da destra (da sinistra) è L

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \text{opp.} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} L$$

$$(x \to x_0^-) \qquad\qquad (x \to x_0^-)$$

se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \text{t.c.} \ x_0 < x \leq x_0 + \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \\ (x_0 - \delta_\varepsilon \leq x < x_0)}$$

Osserv.

- Per parlare di limite destro (sinistro) di $f(x)$ in x_0 basta che il dominio X di f contenga punti x arbitrariam. vicini a x_0 e strettamente maggiori (minori) cioè

$$\forall \delta > 0 \ \exists x \in X \ \text{t.c.} \ x_0 < x \leq x_0 + \delta$$
$$(x_0 - \delta \leq x < x_0)$$

Per esempio, non ha senso parlare di $\lim_{x \to 0^-} \log x$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

- se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (oppure uno dei due non esiste) allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste.

- la def. precedente vale per $L \in \mathbb{R}$ ma si può estendere a $L = \pm\infty$. Fatelo per esercizio. E dimostrate che $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Funzioni continue

Definizione

Data $f: \overset{\subset \mathbb{R}}{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, dico che

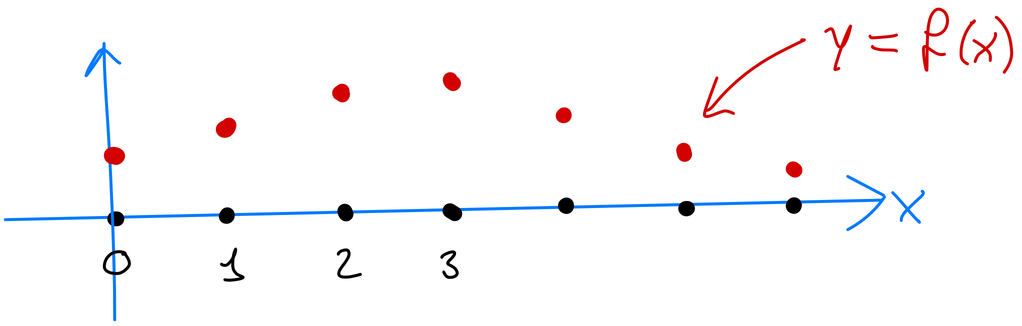
f è continua in x_0 se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \underbrace{|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon}_{\substack{x \text{ approssima} \\ x_0 \text{ con err. } \leq \delta_\varepsilon}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon}_{\substack{f(x) \text{ approssima } f(x_0) \\ \text{con errore } \leq \varepsilon}}}$$

Dico che f è continua se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Osserv.

- La continuità viene data per scontata quando si usa la calcolatrice o il computer per calcolare $f(x_0)$ se x_0 ha infinite cifre decimali
- Se f è continua in x_0 allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  (se si può parlare di limite)



ogni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è continua

← numeri naturali $= \{0, 1, 2, \ldots\}$

ma non si può parlare di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ per alcun x_0 (tranne $+\infty$).

- Tutte le funzioni elementari viste finora sono continue (in tutti i punti dell'insieme di definizione). (NON LO DIMOSTRO)

Domanda: la funzione $\frac{1}{x}$ è continua in 0?

La domanda è mal posta perché 0 NON appartiene al dominio di $\frac{1}{x}$.

- Tutte le operazioni elementari sulle funzioni: somma $(f(x)+g(x))$, prodotto $(f(x) \cdot g(x))$, composizione $(f(g(x)))$ mandano funzioni continue in funzioni continue. (NON LO DIMOSTRO)

Quindi tutte le funzioni date da un'unica formula sono continue.

- La funzione $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$ il dominio è $\mathbb{R}$ è discontinua (non è continua) in 0 perché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

ma

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Calcolo dei limiti (facili)

Regole "di buon senso" spiegate per esempi.

- $$\lim_{x\to-\infty}\Big(\underset{\substack{\downarrow\\0}}{e^{x}}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x}}\Big)=0+0=0$$

Regola: se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_1$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_2$ $(L_1, L_2\in\mathbb{R})$

allora $f_1(x)+f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_1+L_2$

In sintesi "il limite della somma è la somma dei limiti".

- $$\lim_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\substack{\downarrow\\\cos(0)=1}}{\cos x}=+\infty$$

Regola: Se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}+\infty$ $(-\infty)$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L$ con $L\in\mathbb{R}$

allora $f_1(x)+f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}+\infty$ $(-\infty)$

Sintesi: "$+\infty+L=+\infty$" e "$-\infty+L=-\infty$"

- $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^x}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{x^2}_{\downarrow\, +\infty} = +\infty$$

Regola : "$(+\infty)+(+\infty) = +\infty$"

e analogamente "$(-\infty)+(-\infty) = -\infty$"

Attenzione Se $f_1(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ e $f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$ allora non posso dire qual'è il limite di $f_1(x)+f_2(x)$ per $x\to x_0$ senza informaz. più precise.

In sintesi : "$(+\infty)+(-\infty)$ forma indeterm."

Es. $$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{x}_{\downarrow\, -\infty} = +\infty$$ (lo vediamo dopo)

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{x^3}_{\downarrow\, -\infty} = -\infty$$ " "

- $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{\cos x}_{\downarrow\, \text{non ha limite}} = +\infty \Leftarrow x+\cos x \geq x-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

- $$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(3+\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\frac{1}{x}}\right)}_{\overset{\downarrow}{3+0=3}}\underbrace{\left(-2+\overset{\overset{0}{\uparrow}}{e^{x}}\right)}_{-2+0=-2} \longrightarrow 3\cdot(-2)=-6$$

Regola Se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L_1$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L_2$, $L_1,L_2\in\mathbb{R}$

allora $f_1(x)\cdot f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L_1\cdot L_2$

(" il limite del prod. è il prod. dei lim.")

- $$\lim_{x\to0^+} \underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\frac{1}{x}}\cdot \underset{\underset{\cos(\pi)=-1}{\downarrow}}{\cos(x+\pi)} = -\infty$$

Regola " $+\infty\cdot L=\begin{cases}+\infty & \text{se } L>0\\ -\infty & \text{se } L<0\end{cases}$ "

incluso $L=+\infty$

incluso $L=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{e^{x}}\,\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\log x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to0^+}\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{\log x}\cdot\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\frac{1}{x}}=-\infty$$

Attenzione "$+\infty \cdot 0$" e "$-\infty \cdot 0$" sono forme indeterminate.

Es $\lim_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\log x} = 0$ (più in là)

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{(1+4^x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{-x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\left(\frac{4}{e}\right)^x} = +\infty$$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\substack{1 \\ \uparrow}}{\cos x}}{\underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\log x}} = 0$$

Regola "$\frac{L}{\pm\infty} = 0$"

Attenzione "$\cancel{\frac{1}{0} = +\infty}$" **Es** $x \to 0$ ma $\frac{1}{x}$ non ha limite $x \to 0$

Ma vale

"$\frac{1}{0^+} = +\infty$" "$\frac{1}{0^-} = -\infty$"

$\downarrow$

il reciproco di una funzione che tende a 0 da destra (cioè è pos) tende a +

Più in generale

$$"\frac{L}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L>0 \ (\text{incluso } +\infty) \\ -\infty & \text{se } L<0 \ (\text{incluso } -\infty) \end{cases}"$$

$$"\frac{L}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } L>0 \ (\text{incluso } +\infty) \\ +\infty & \text{se } L<0 \ (\text{incluso } -\infty) \end{cases}"$$

Infine

$$"\frac{0}{0} \ \text{forma indeterminata}"$$

AM1gest 20/21

Lezione 11

13/10/2020

Limiti "facili" (conclusione)

Per il calcolo dei limiti valgono tutte le regole "intuitive" che uno si aspetta.

Ma attenzione alle forme indeterminate:

"$(+\infty)+(-\infty)$" ("$+\infty-\infty$")

"$(\pm\infty)\cdot 0$"

"$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" ; "$\frac{0}{0}$" ; "$\frac{1}{0}$"

ma "$\frac{1}{0^+}=+\infty$" ; "$\frac{1}{0^-}=-\infty$" ; "$+\infty+\infty=+\infty$"

"$\frac{1}{\pm\infty}=0$" "$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$"

Formula di cambio di variabile

Se $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{cambio di variabile}\\ y=f(x)}}{=} \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$

$$\lim_{x\to-\infty}\cos(e^x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\cos y = \cos(0) = 1$$

cambio var.
$y = e^x$
osservo che
se $x \to -\infty$
allora $y \to 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\arctan(\log x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to-\infty}\arctan y = -\frac{\pi}{2}$$

$y = \log x$
se $x \to 0^+$
allora $y \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\log(\log(\log x)) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to+\infty}\log(\log y) \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to+\infty}\log z = +\infty$$

$y = \log x$ $\qquad$ $z = \log y$

Curiosità: se calcolate $\log(\log(\log x))$ con la calcolatrice ottenete sempre numeri < 2.

Attenzione Può succedere che $\lim_{y\to y_0} g(y)$ NON esiste mentre esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$.

Va bene applicare la formula se $\lim_{y\to y_0} g(y)$ esiste.

Esempio

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \underset{\substack{\uparrow\\ y=-x}}{=} \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

ma

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} \underset{\substack{\uparrow\\ y=e^x}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1}{y} \quad \text{non esiste!}$$

In effetti basta stare più attenti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} \underset{\substack{\uparrow\\ y=e^x}}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y} = +\infty.$$

e osservo che
se $x\to-\infty$,
allora $y=e^x\to 0^+$

Lezione 10 - seconda parte.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2-x$

Soluzione: $\lim_{x\to+\infty} x^2-x = +\infty$

Sappiamo che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ e la somma $\ell+\ell'$ è definita, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \ell+\ell'$.

Come primo tentativo calcolo $\lim_{x\to+\infty} x^2$ e $\lim_{x\to+\infty} -x$ e provo a vedere se in questo caso la somma dei limiti è definita.

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ e $+\infty-\infty$ è una forma indeterminata.

Quindi non vale che $\lim_{x\to\infty} x^2-x = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \lim_{x\to+\infty} -x$

Scriviamo $x^2-x = x^2(1-\frac{1}{x})$

In questo caso vediamo l'espressione come $f(x)\,[g(x)+h(x)]$ con $f(x)=x^2$, $g(x)=1$ e $h(x)=-\frac{1}{x}$

Sappiamo che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ e il prodotto $\ell\cdot\ell'$ è definito, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \ell\cdot\ell'$.

Vediamo se possiamo ora applicare le regole di somma e prodotto.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$1+0=1$ è definito $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 1+0=1.$

$+\infty\cdot 1$ è definito $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} x^2(1-\frac{1}{x}) = \left(\lim_{x\to+\infty} x^2\right)\left(\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}\right) = +\infty.$

Osservazione: in questo caso avrei potuto anche scrivere

$x^2-x = x(x-1)$ e

$\lim_{x\to+\infty} x(x-1) = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\left[\left(\lim_{x\to+\infty} x\right)+\left(\lim_{x\to+\infty} -1\right)\right] = +\infty$ infatti

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} -1 = -1$, la somma $+\infty-1$ è definita e vale $+\infty$, il prodotto $+\infty\cdot+\infty$ è definito e vale $+\infty$.

Ci sono casi in cui raccogliere il termine di grado massimo funziona, ma raccogliere il termine di grado minimo no.
Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2+x$$

$x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$1+0+0=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 1$

$+\infty\cdot 1$ è definito $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x^3\right)\left(\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$x(x^2-x+1)$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

ma la somma $+\infty-\infty+1$ non è definita.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+x^2}$

Soluzione:

Come primo tentativo calcolo $\lim_{x\to-\infty} x^3$ e $\lim_{x\to-\infty} x^2$ e provo a vedere se in questo caso la somma dei limiti è definita.

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ e $-\infty+\infty$ è una forma indeterminata.

Quindi non vale che $\lim_{x\to-\infty} x^3+x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 + \lim_{x\to-\infty} x^2$.

Scrivo $x^3+x^2 = x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Vale $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty$.

Possiamo concludere $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x^2}$

Soluzione: Negli esercizi precedenti abbiamo visto che

$\lim_{x\to+\infty} x^2-x = +\infty$. Inoltre, visto che $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Abbiamo $\lim_{x\to+\infty} x^3+x^2 = +\infty$.

Però il quoziente $\frac{+\infty}{+\infty}$ è una forma indeterminata.

In questo caso possiamo scrivere $\frac{x^2-x}{x^3+x^2} = \frac{x^2(1-\frac{1}{x})}{x^3(1+\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Vale : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$.

Il prodotto $0\cdot1\cdot1$ è ben definito e vale zero.

Dunque $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$

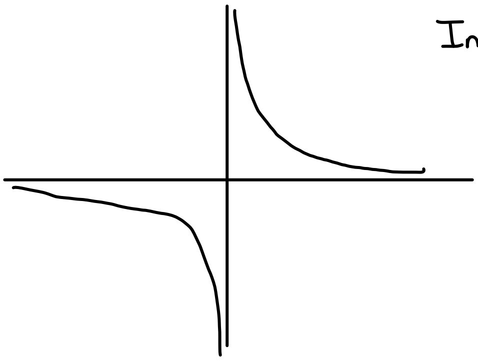
$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\right) = 0\cdot1\cdot1 = 0.$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to+\infty} e^x + \frac{1}{x}$

Soluzione: $\lim_{x\to+\infty} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to0} e^x + \frac{1}{x}$

Soluzione: Il limite NON ESISTE.



Infatti $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ non esiste.

Se però l'esercizio avesse chiesto di calcolare $\lim_{x\to0^+} e^x + \frac{1}{x}$ oppure $\lim_{x\to0^-} e^x + \frac{1}{x}$ avremmo avuto:

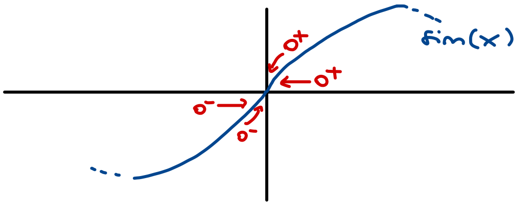
$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e

$$\lim_{x\to0^+} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to0^+} e^x + \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = 1 + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to0^-} e^x + \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = 1 + (-\infty) = -\infty$$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to0} \frac{1}{\sin(x)}$

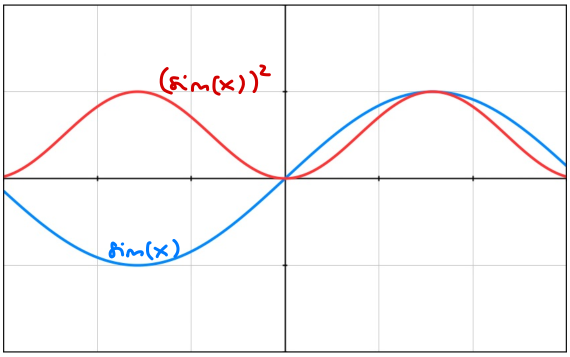
Soluzione: Il limite NON ESISTE



Esercizio: Calcolare $\lim_{x\to0} \frac{1}{(\sin(x))^2}$

Soluzione:

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{(\sin(x))^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} (2 + \cos(x))\, x$

Soluzione: Sappiamo che $\lim_{x \to +\infty} \cos(x)$ non esiste, ma

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$1 \leq \cos(x) + 2 \leq 3$$

quindi $\quad (2 + \cos(x))\, x \geqslant x$

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, quindi $\lim_{x \to +\infty} (2 + \cos(x))\, x = +\infty$.

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

Soluzione: In questo caso $\quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

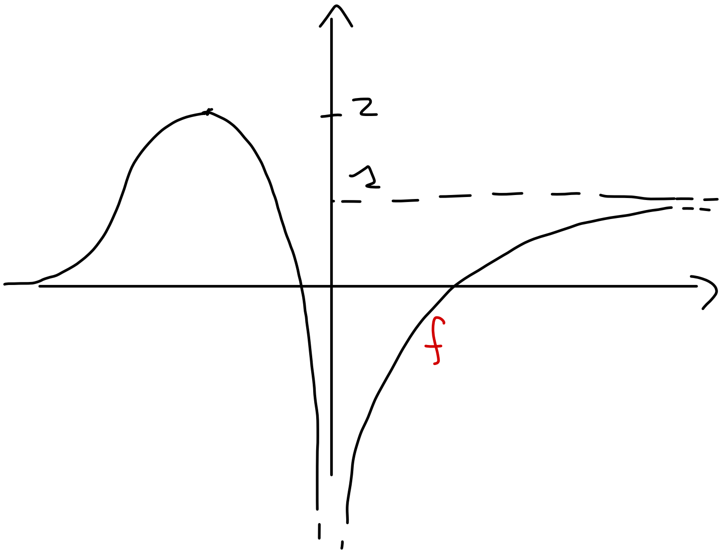
Vale $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

Esercizio: Calcolare $\lim_{x \to +\infty} e^x (2 + \sin(x))$

Soluzione:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3$$
$$\begin{array}{ccccc} e^x & \leq & e^x(2 + \sin(x)) & \leq & 3e^x \\ \big\downarrow {\scriptstyle +\infty} & & & & \big\downarrow {\scriptstyle x \to +\infty} \\ +\infty & & & & +\infty \end{array}$$

quindi $\lim_{x \to +\infty} e^x (2 + \sin(x)) = +\infty$.



Esercizio:

Qual è:

i) il dominio,

ii) l'immagine

iii) i limiti rilevanti

della funzione f il cui grafico è rappresentato nella figura.

Svolgimento:

i) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 2]$.

iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Esercizio: Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e data $f: \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 0 \\ \lambda x + 1 & x > 0 \end{cases}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dire per quali λ
1) la funzione è continua
2) la funzione è invertibile. Per questi valori scrivere l'inversa.

Svolgimento: 1) la funzione è definita a tratti e sia per $x<0$ che per $x>0$ è definita tramite una formula, sia per $x<0$ che per $x>0$ è una funzione elementare e sappiamo che è continua. Resta da vedere cosa succede in $x=0$.

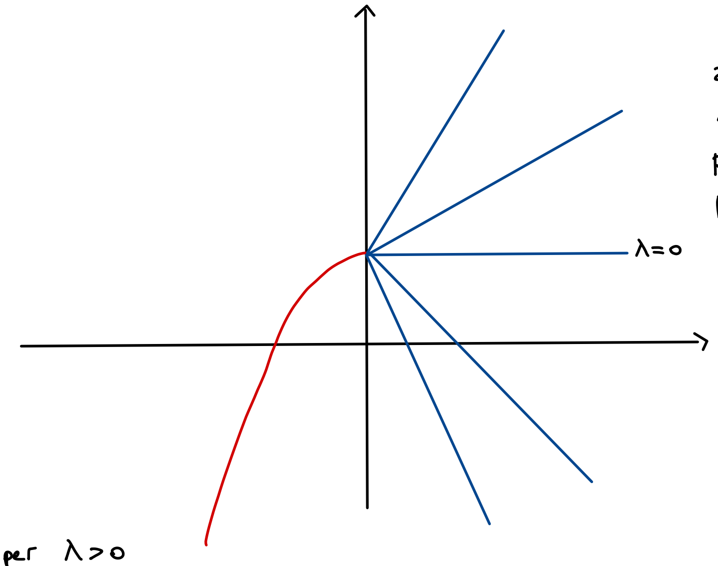
Affinché sia continua anche in zero serve che

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Abbiamo $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e anche $\lim_{x\to 0^+} \lambda x + 1 = 0$.

Quindi $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ la funzione è continua.

2) Affinché sia invertibile vogliamo che la funzione sia biiettiva.
È facile disegnare il grafico di f:



al variare di λ
$\lambda x + 1$ sono rette con pendenze diverse, tutte passanti per $(0,1)$.

Se $\lambda > 0$ f è biiettiva.

Solo per $\lambda > 0$
calcoliamo l'inversa: per $x \leq 0$ abbiamo che $y = 1 - x^2$, dunque $x^2 = 1-y$

$\Rightarrow$ se $y < 1$ allora $1-y > 0$, quindi posso fare la radice

$\Rightarrow$ $x = -\sqrt{1-y}$ con $y \leq 1$.
↳ poiché $x \leq 0$

Per $x > 0$ si ha $y = \lambda x + 1$ $\Rightarrow$ $x = \frac{y-1}{\lambda}$ e $y > 1$ poiché $x > 0$.

Dunque

$$g(y) = \begin{cases} -\sqrt{1-y} & \text{se } y \leq 1 \\ \frac{y-1}{\lambda} & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

Limiti "facili" (conclusione)

Per il calcolo dei limiti valgono tutte le regole "intuitive" che uno si aspetta.

Ma attenzione alle forme indeterminate:

"$(+\infty)+(-\infty)$" ("$+\infty-\infty$")

"$(\pm\infty)\cdot 0$"

"$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" ; "$\frac{0}{0}$" ; "$\frac{1}{0}$"

ma "$\frac{1}{0^+}=+\infty$" ; "$\frac{1}{0^-}=-\infty$" ; "$+\infty+\infty=+\infty$"

"$\frac{1}{\pm\infty}=0$" "$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$"

Formula di cambio di variabile

Se $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$ allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to y_0} g(y)$

cambio di variabile
$y=f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\cos(e^x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\cos y = \cos(0) = 1$$

cambio var.
$y = e^x$
osservo che
se $x\to-\infty$
allora $y\to 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\arctan(\log x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to-\infty}\arctan y = -\frac{\pi}{2}$$

$y = \log x$
se $x\to 0^+$
allora $y\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\log(\log(\log x)) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to+\infty}\log(\log y) \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to+\infty}\log z = +\infty$$

$y = \log x$ $\qquad$ $z = \log y$

Curiosità : se calcolate $\log(\log(\log x))$ con la calcolatrice ottenete sempre numeri < 2.

Attenzione Può succedere che $\lim_{y\to y_0} g(y)$ NON esiste mentre esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$.

Va bene applicare la formula se $\lim_{y\to y_0} g(y)$ esiste.

Esempio

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \underset{\substack{\uparrow\\ y=-x}}{=} \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

ma

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} \underset{\substack{\uparrow\\ y=e^x}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1}{y} \quad \text{non esiste!}$$

In effetti basta stare più attenti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} \underset{\substack{\uparrow\\ y=e^x}}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y} = +\infty.$$

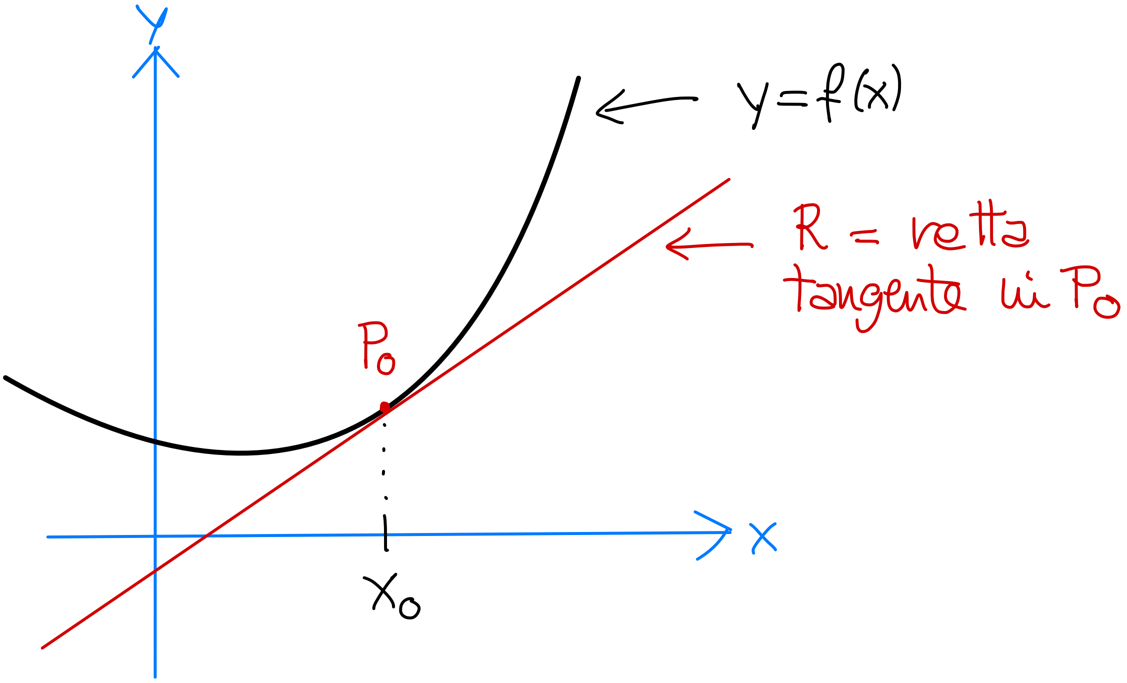
e osservo che
se $x\to-\infty$,
allora $y=e^x\to 0^+$

Derivate

Definizione e motivazioni

1. Motivazione geometrica

Problema: trovare l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto P_0 di ascissa x_0



Siccome $P_0 = (x_0, f(x_0))$, le rette passanti per P_0 hanno equazione

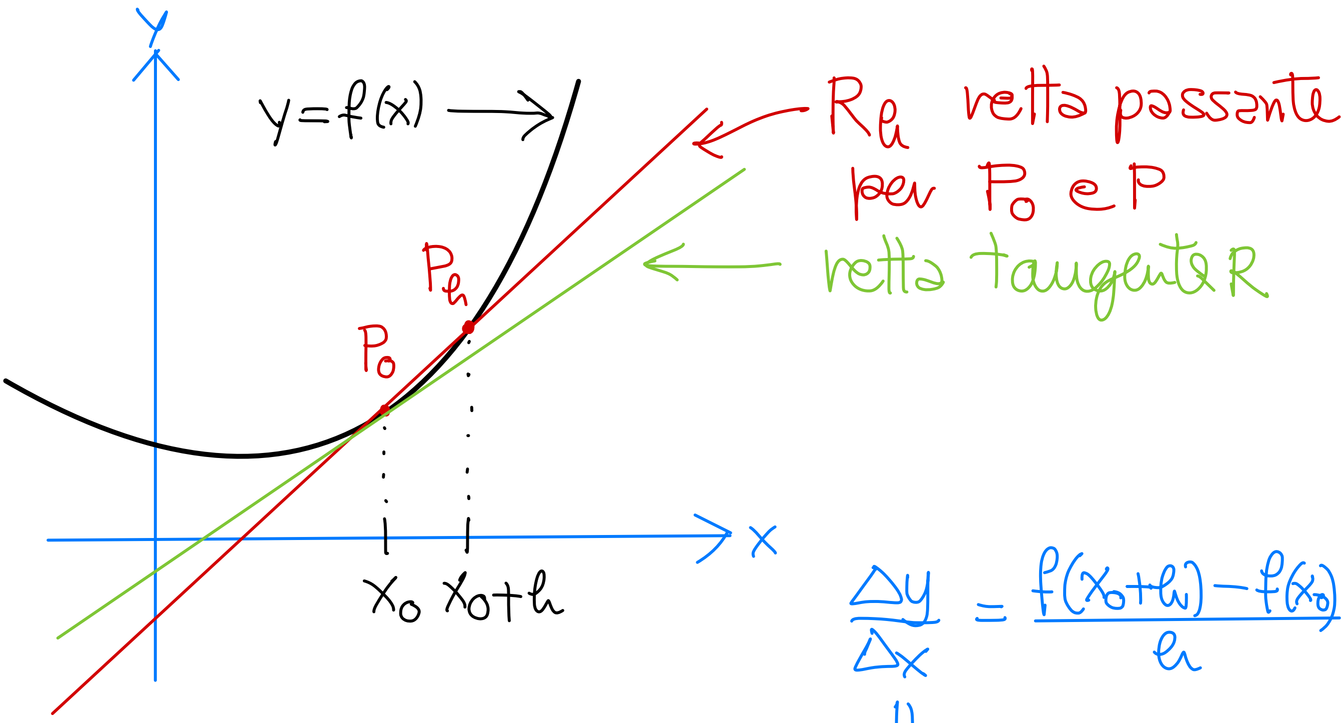
$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

coefficiente angolare

Resta da trovare il valore di m.

Prendo $h > 0$ piccolo e considero la retta R_h che passa per P_0 e P_h

punto del grafico di ascissa x_0+h, cioè $(x_0+h, f(x_0+h))$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$\|$

Idea: il coeff. angolare m_h di R_h tende a m quando $h \to 0$ cioè

$$m = \lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale}}$$

2. Definizione di derivata

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, la derivata di f in x è il limite (se esiste)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notazioni alternative : $\dot{f}(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$

$\uparrow$ la usiamo

$\uparrow$ si usa in fisica

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \cup \end{array}$$

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x \in X$, per parlare di derivata di f in x serve che esistono h arbitrariamente piccoli t.c. $x+h \in X$.

Se $f'(x)$ esiste e appartiene a $\mathbb{R}$ dico che f è derivabile in x.

Se la derivata esiste in tutti i punti del dominio di f dico che f è derivabile (su X)

Osservaz.

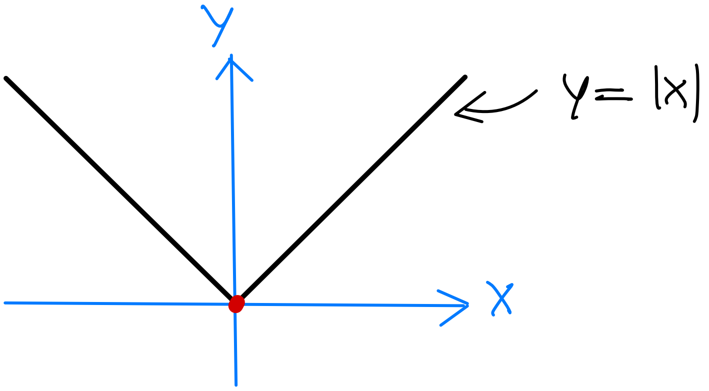
- Non sempre la derivata esiste.

Es.: se $f(x) = |x|$ allora la derivata in 0 non esiste.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$$

quindi $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ non esiste.

In questo caso però esistono i limiti destri e finistri, chiamati derivata destra e sinistra.

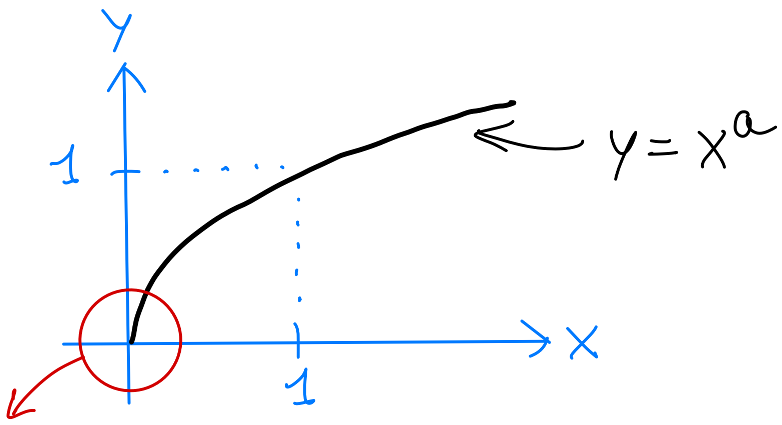


- La derivata può essere $+\infty$ (o $-\infty$).

Es.: se $f(x) := x^a$ con $0<a<1$, allora

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^a}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1-a}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



"il grafico ha pendenza +∞ in 0"

- Se f è derivabile in x allora è continua in x (non lo dimostro).

- Calcolo la derivata di $f(x) = x^2$ a partire dalla definizione:

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2hx - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x.$$

Non è così che si calcolano le derivate!

Altre interpretazioni della derivata

- **Velocità** (scalare)

  Considero P punto in movimento nello spazio. Indico con d(t) la distanza percorsa da P a partire dall'istante iniziale.

  velocità media nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ è

$$v_m = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t_1)-d(t_0)}{t_1-t_0}$$

  velocità all'istante t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v \text{ media in } [t, t+\Delta t] \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t+\Delta t)-d(t)}{\Delta t} = d'(t).$$

  Cioè

  velocità (scalare) = derivata della distanza percorsa.

- Velocità (vettore)

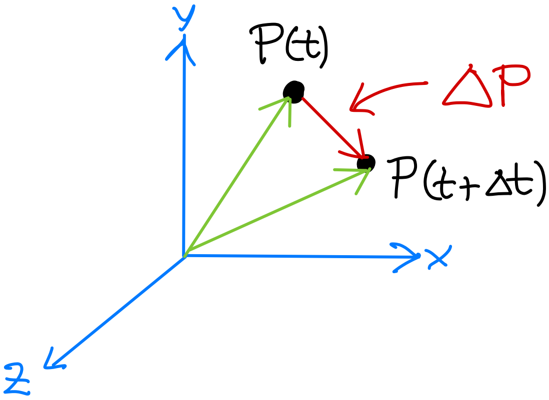
P come prima. La posizione al tempo t

è $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ← vettore in $\mathbb{R}^3$

Spostamento tra l'istante t e l'istante $t+\Delta t$

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) \longleftarrow \text{vettore in } \mathbb{R}^3$$

$$= (x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t))$$



Velocità (istantanea) al tempo t

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P'(t)$$

$$= (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

AM1 gest 20/21

Lezione 12
14/10/2020

Calcolo delle derivate

Le derivate si calcolano utilizzando
- l'elenco delle derivate delle funzioni elementari
- un insieme di regole (usate per combinare le derivate delle funzioni elementari e ottenere quelle di funzioni più complesse).

Oggi do l'elenco e le regole, spiegando come usarle.
Le dimostrazioni verranno date nella prox. lezione.

Tavola delle derivate elementari (a, b sono numeri)

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
$ax+b$	a
x^a $a \neq 0$	$a x^{a-1}$
e^x	e^x
a^x $a>0$	$\log a \cdot a^x$
$\log x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Ogni formula vale in tutto l'insieme di definizione di f (e in particolare f è derivabile in tutto il dominio) con le seguenti eccezioni:

- per $0<\alpha\ 1$, x^a è definita su $[0,+\infty)$, continua ovunque, e la derivata in 0 e $+\infty$, mentre ax^{a-1} non è definita in 0.

- $\arcsin x$ è definita su $[-1,1]$, continua ovunque, e la derivata in ± 1 e $+\infty$, mentre $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ non è definita in ± 1.

  Un discorso analogo vale per $\arccos x$.

Regole (f, g sono funzioni, a, b sono numeri)

1. Derivata della somma: $(f+g)' = f'+g'$

   cioè $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; non scrivo la var. x per semplificare la formula

   Caso particolare: $(f+a)' = f'$

   Esempio:

   $$(e^x+x^2)' = (e^x)'+(x^2)' = e^x+2x^{2-1} = e^x+2x$$

1 bis. Derivata della differenza: $(f-g)' = f'-g'$

2. Derivata del prodotto: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

Caso particolare : $(af)' = af'$

Esempi

$$(x^2\cdot \log x)' = (x^2)'\cdot \log x + x^2\cdot (\log x)'$$

$$= 2x^{2-1}\log x + x^2\frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$$

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)' = \left(2\cdot x^{1/2} - 3\cdot x^{-1}\right)'$$

$$= 2\left(x^{1/2}\right)' - 3\left(x^{-1}\right)'$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} - 3\cdot(-1)\,x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$$

3. Derivata del rapporto: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

Caso particolare: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Esempio:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+\cancel{1})'\cdot(x^2-1) - (x^2+1)\cdot(x^2-\cancel{1})'}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x\,(x^2-1) - (x^2+1)\,2x}{(x-1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2}$$

4. Derivata della funzione composta:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Caso particolare: $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$

Nell' uso introduco la variabile $y = g(x)$ e la formula diventa

$$[f(\underbrace{g(x)}_{y})]' = f'(y)\cdot g'(x)$$

derivata risp. alla variabile y

e sostituisco a y il valore $g(x)$ in un passaggio successivo.

Esempi

$$(\underbrace{e^{x^2+1}})' = \underbrace{(e^{y})'}\cdot(x^2+\cancel{1})' = e^{y}\cdot 2x = e^{x^2+1}\cdot 2x.$$

$f(y) = e^{y}$

$g(x) = x^2+1$

derivata risp. alla variab. y

$$(\underbrace{\sqrt{1-2x}})' = \overbrace{(y^{\frac{1}{2}})'}(1-2x)' = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2)$$

$f(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$

$g(x) = 1-2x$

$$= -\frac{1}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

Esercizi

1. $$\left(\underbrace{e^{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{y}}}\right)' = (e^y)'(\operatorname{sen} x)' = e^y \cdot \cos x = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$

funzione composta
$f(y) = e^y$; $g(x) = \operatorname{sen} x$

funzione composta
$f(y) = y^{1/2}$, $g(x) = 1 - x^2$

2. $$x\sqrt{1-x^2} = (x)' \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(\overbrace{(\underbrace{1-x^2}_{y})^{\frac{1}{2}}}\right)'$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(y^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot (\cancel{1} - x^2)'$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x)$$

$$= \sqrt{1-x^2} - x^2 y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $$\left(\underbrace{\log(\overbrace{\log(\log x)}^{y})}\right)' = (\log y)' \cdot \left(\underbrace{\log(\overbrace{\log x}^{z})}\right)'$$

funzione comp.
$f(y) = \log y$
$g(x) = \log(\log x)$

funzione comp.
$f(z) = \log x$, $g(x) = \log x$

$$= \frac{1}{y} \cdot (\log z)' \cdot (\log x)'$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \log x \cdot \log(\log x)}$$

4. $$\left(\arctan\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{y}\right)\right)' = (\arctan y)' \cdot \left(\overbrace{\frac{1}{x}}^{x^{-1}}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+y^2} \cdot \left((-1)\cdot x^{-2}\right)$$

$$= \frac{-1}{(1+y^2)x^2} = \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

5. $$\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]'$$ prima semplificare!!

$$\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right) = \log\left(\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \log\left(\frac{(x+1)^{3/4}}{(x-1)^{3/2}}\right)$$

$$= \log\left((x+1)^{\frac{3}{4}}\right) - \log\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4}\log(x+1) - \frac{3}{2}\log(x-1)$$

$$\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]' = \left[\frac{3}{4}\log(x+1) - \frac{3}{2}\log(x-1)\right]'$$

$$= \frac{3}{4}\left(\log(x+1)\right)' - \frac{3}{2}\left(\log(x-1)\right)'$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} = -\frac{3x+9}{4(x^2-1)}$$

6. $$(x^x)' = \Big(\exp\big(\overbrace{x\log x}^{y}\big)\Big)' = (e^y)'(x\log x)'$$

$$\uparrow$$

$$a^b = e^{b\log a}$$
$$= \exp(b\log a)$$

$$= e^y\big((x)'\cdot\log x + x(\log x)'\big)$$
$$= e^{x\log x}(\log x + 1)$$
$$= x^x(\log x+1)$$

Torno agli esercizi sui limiti.

7. "$0^{+\infty}$" è una forma indeterminata o no?

Traduzione: date $f(x)$ e $g(x)$ tali che

$$f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+ \quad e \quad g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty,$$

posso dire qual è il limite di $f(x)^{g(x)}$ (per $x\to x_0$) senza bisogno di altre info?

Per rispondere scrivo $f(x)^{g(x)}$ come potenza in base e:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\Big(\underbrace{\overset{\overset{+\infty}{\uparrow}}{g(x)}\cdot\overbrace{\log(f(x))}^{\overset{-\infty}{\uparrow}}}_{\underset{-\infty}{\downarrow}}\Big) \longrightarrow \text{“}e^{-\infty}\text{''} = 0$$

Dunque "$0^{+\infty} = 0$" (non è una forma indet.)

Allo stesso modo si ottiene "$0^{-\infty} = +\infty$".

8. Far vedere che "$1^{+\infty}$" è una forma indet.

Procedo come prima:

$$\underbrace{f(x)}_{\underset{1}{\downarrow}}{}^{\overbrace{g(x)}^{\overset{+\infty}{\uparrow}}} = \exp\Big(\overbrace{g(x)}^{\overset{+\infty}{\uparrow}}\cdot\overbrace{\log(f(x))}^{\overset{\log 1 = 0}{\uparrow}}\Big)$$

e "$+\infty\cdot 0$" è una forma indeterminata

Nota: anche $1^{-\infty}$ è una forma indet.

9. "0^0" è una forma indeterminata.

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}{}^{\overbrace{g(x)}^{\substack{0 \\ \uparrow}}} = \exp\Big(\overbrace{g(x)}^{\substack{0 \\ \uparrow}} \cdot \overbrace{\log(f(x))}^{\substack{-\infty \\ \uparrow}}\Big)$$

e "$0 \cdot (-\infty)$" è una forma indeterminata

10. Dire se le seguenti sono forme indet. oppure no:

"$+\infty^{+\infty}$" ; "$+\infty^{-\infty}$" ; "$+\infty^{0}$" ; "$2^{+\infty}$"

AM1 gest 2021

Lezione 14

16/10/2020

Dimostrazioni delle regole di derivazione e delle derivate delle funzioni elementari

E' importante farle nell'ordine giusto!

Regola 1 $(f+g)' = f' + g'$

Versione precisa: date $f, g : X \to \mathbb{R}$ derivabili in un punto $x \in X$, allora $f+g$ è derivabile in x e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(Per le prossime regole NON enuncerò la versione precisa.)

Dim.

Parto dal rapporto incrementale di $f+g$:

$$\frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ f'(x)}} + \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ g'(x)}} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)+g'(x)$$

$\square$

Regola 2 $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Dim.

Parto dal rapporto incrementale di $f \cdot g$:

$$\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\big\downarrow h\to 0 \\ f'(x)}} \underbrace{g(x+h)}_{\substack{\big\downarrow h\to 0 \\ g(x)}} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\substack{\big\downarrow h\to 0 \\ g'(x)}}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

□

Regola 4 $[f(g(x))]' = f'(y) \cdot g'(x)$ con $y = g(x)$.

Dim.

Parto dal rapporto incrementale di $f(g(x))$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}}_{\substack{\| \\ \frac{f(y+k)-f(y)}{k} \\ \downarrow k\to 0 \\ f'(y)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ g'(x)}} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(y)\cdot g'(x)$$

Sostituzione:
$y:=g(x)$
$k:=g(x+h)-g(x)$
allora:
$y+k=g(x+h)$
$k\to 0$ per $h\to 0$

Questa dimostrazione non è del tutto corretta perché si divide per $g(x+h)-g(x)$, che potrebbe essere 0. □

Regola 5 (Derivata dell' inversa)

Se g è l'inversa di f allora

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad \text{dove } x=g(y) \text{ cioè } y=f(x).$$

In questo enunciato conviene usare lettere diverse per le variabili di f e g.

Dim.

Per definizione di inversa ho che $x=g(f(x))$ per ogni x.
Derivando questa identità ottengo:

$$1=\big(g(\overbrace{f(x)}^{y})\big)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reg.}4}}{=} g'(y)\cdot f'(x) \,.$$

□

$(ax+b)' = a$

Dim. Calcolo il rapporto incrementale:

$$\frac{(a(x+h)+b)-(ax+b)}{h} = \frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h} = a$$

e anche il limite per $h \to 0$ è a. □

$(e^x)' = e^x$

Problema: non ho mai definito il numero "e".
Darò la definizione più in là nel corso.
Uso qui la seguente proprietà caratterizzante:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1 .$$

Dim. Scrivo il rapporto increm. di e^x:

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0 \\ 1}} \xrightarrow[h\to 0]{} e^x .$$

□

$(a^x)' = \log a \cdot a^x$

Dim.

Scrivo $a^x = e^{x\cdot\log a}$. Quindi

$$(a^x)' = \left(e^{\overbrace{x\cdot\log a}^{y}}\right)' \overset{\text{Reg.4}}{=} (e^y)' \cdot (x\cdot\log a)'$$
$$= e^y \cdot \log a$$
$$= e^{x\cdot\log a} \cdot \log a = \log a \cdot a^x$$

$\square$

$(\log x)' = \frac{1}{x}$

Dim.

Ricordo che $\log y$ è l'inversa di e^x.

Come al solito, uso y come variabile dell'inversa

Quindi

$$(\log y)' \overset{\text{Reg.5}}{\underset{\substack{x=\log y\\ \text{cioè } y=e^x}}{=}} \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Quindi $(\log y)' = \frac{1}{y}$.

$\square$

$$(x^a)' = a\,x^{a-1}$$

Dim. (solo per $x > 0$)

Scrivo $x^a = e^{a\cdot\log x}$ e quindi

$$\begin{aligned}
(x^a)' = \Big(e^{\overbrace{a\cdot\log x}^{y}}\Big)' &\overset{\substack{\text{Reg. 4}\\ \downarrow}}{=} (e^y)'\cdot(a\cdot\log x)' \\
&= e^y\cdot a\cdot(\log x)' \\
&= e^{a\cdot\log x}\cdot a\cdot\frac{1}{x} \\
&= x^a\cdot a\cdot\frac{1}{x} = a\,x^{a-1} \qquad \square
\end{aligned}$$

Regola 3, caso particolare: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

Dim.

$$\begin{aligned}
\Bigg(\frac{1}{\underbrace{g(x)}_{y}}\Bigg)' &\overset{\substack{\text{Reg. 4}\\ \downarrow}}{=} \left(\frac{1}{y}\right)'\cdot g'(x) = (y^{-1})'\cdot g'(x) \\
&= (-y^{-2})\cdot g'(x) \\
&= -\frac{g'(x)}{y^2} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Regola 3, caso generale: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Dim.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \overset{\text{Reg. 2}}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$\underset{\text{Reg. 3 caso partic.}}{=} \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} .$$

$\square$

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

Dim. Si parte dal rapporto incrementale:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} h \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} h \cdot \cos x}{h} + \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x}{h}$$

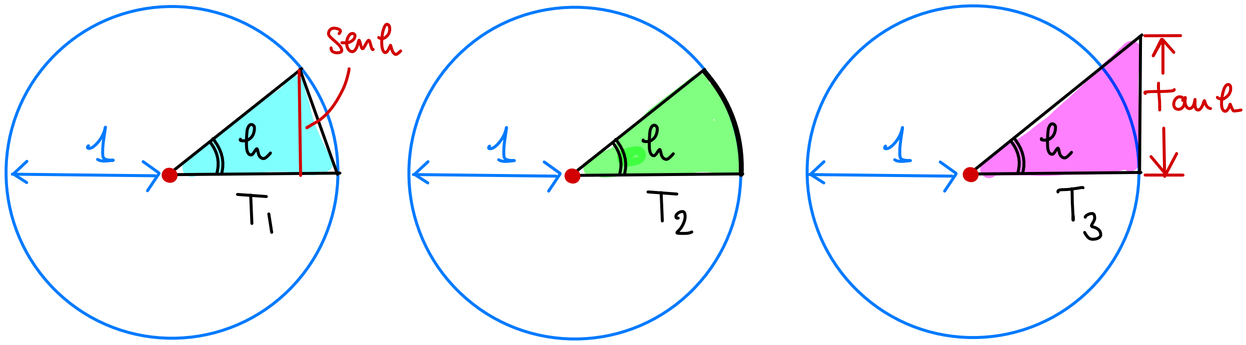
$$= \cos x \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 1}} - \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos h}{h}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 0}} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x$$

Resta da dimostrare che:

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$; (2) $\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$.

forma indet. $\frac{0}{0}$ forma indet. $\frac{0}{0}$

Dimostro (1). Considero le seguenti figure piane:



Se sovrappongo le tre circonferenze, T_1, T_2 e T_3 sono contenute una nell'altra ($T_1 \subset T_2 \subset T_3$) e quindi

$$\begin{array}{ccccc} \text{area}(T_1) & \leqslant & \text{area}(T_2) & \leqslant & \text{area}(T_3) \\ \| & & \| & & \| \\ \frac{1}{2}\,\text{sen}\,h & & \frac{1}{2}h & & \frac{1}{2}\tan h = \frac{1}{2}\frac{\text{sen}\,h}{\cos h} \end{array}$$

formula per l'area del settore circol.

cioè

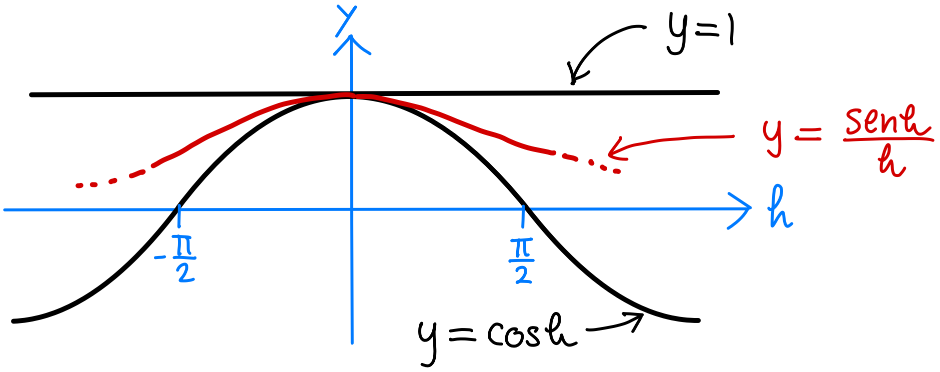
$$\text{sen}\,h \leqslant h \leqslant \frac{\text{sen}\,h}{\cos h}$$

$$\cos h \leqslant \frac{\text{sen}\,h}{h} \leqslant 1$$

Siccome $\frac{\text{sen}\,h}{h}$ è compreso tra $\cos h$ e 1, e $\cos h \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(0) = 1$ ($\cos h$ è una funz. continua)
ne deduco che

$$\frac{\text{sen}\,h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \quad .$$

Un altro modi di interpretare l'ultimo passaggio è questo: il grafico di $\frac{\text{sen}\, h}{h}$ (funzione della var. h) è compreso tra quello di $\cos h$ e quello di 1:



Siccome i grafici di 1 e $\cos h$ si toccano per $h=0$ (perché $\cos 0=1$) necess. $\frac{\text{sen}\, h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$.

Dimostro (2):

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h\,(1+\cos h)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 h}{h\,(1+\cos h)} = \underbrace{\frac{\text{sen}\, h}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\text{sen}\, h}{1+\cos h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ \frac{\text{sen}(0)}{1+\cos(0)} = 0}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$1-\cos^2 h = \text{sen}^2 h$

□

Lezione 13

Esercizio: calcolare la derivata di

a) $\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)$

b) $\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right)$

c) $\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}}$

d) $\arctan(x^2)$

e) $\frac{x^4-1}{x^4+1}$

a) $$\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right) = \log\left(\frac{x^{2x}}{2^x\cdot x^x}\right) = \log\left(\frac{x^x}{2^x}\right) = \log(x^x) - \log(2^x) = x\log x - x\log 2 = x(\log x - \log 2)$$

quindi $$\left(\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)\right)' = \left(x(\log x - \log 2)\right)' \underset{\uparrow}{=} \log x - \log 2 + 1 = \log\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

$x = f$ $(\log x - \log 2) = g$ $(fg)' = f'g + g'f$

b) $$\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right) = \log(5x^6) - \log(3^x) = \log 5 + \log(x^6) - x\log 3 = \log 5 + 6\log x - \log 3\cdot x$$

quindi $$\left(\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right)\right)' = \left(\log 5 + 6\log x - \log 3\cdot x\right)' = 0 + \frac{6}{x} - \log 3 = \frac{6}{x} - \log 3$$

c) $$\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}} = \frac{(3^2)^{(x-3)}}{3^{x-1}} = \frac{3^{2x-6}}{3^{x-1}} = 3^{2x-6-x+1} = 3^{x-5}$$

quindi $$\left(\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}}\right)' = \left(3^{x-5}\right)' = 3^{x-5}\cdot\log 3 = \frac{\log 3}{3^5}\cdot 3^x$$

d) $$(\arctan(x^2))' \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$$

$\arctan(x^2) = f(g(x))$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

e) $$\left(\frac{x^4-1}{x^4+1}\right)' = \frac{4x^3(x^4+1) - 4x^3(x^4-1)}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^7+4x^3-4x^7+4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Lezione 15- prima parte

Derivata del coseno

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Osservo che :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(g(x))$ con $g(x) = x+\frac{\pi}{2}$, $f(y) = \sin(y)$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\cos(x))' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = \cos(x)\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sin(x)\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\sin(x)$$

Derivata della tangente

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Derivata dell'arcotangente.

Per derivare l'arcotangente utilizziamo la formula della derivata della funzione inversa.
Se $g(y)$ è l'inversa di $f(x)$ abbiamo $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ con $x = g(y)$.

Dunque $$(\arctan(y))' = \frac{1}{(\tan(x))'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(y)))^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Derivata dell'arcocoseno

Ricordiamo che l'arcocoseno è definito in $[-1,1]$, ma è derivabile in $(-1,1)$.

Anche in questo caso utilizziamo la formula della derivata della funzione inversa.

$$(\arccos(y))' = \frac{1}{(\cos(x))'} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{1}{-\sqrt{1-(\cos(\arccos(y)))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

se $y \in (-1,1)$, allora $x \in (0,\pi)$, dunque $\sin(x) > 0$
$\Rightarrow \sin(x) = +\sqrt{1-\cos^2(x)}$

Derivata dell'arcoseno

Anche l'arcoseno è derivabile in $(-1,1)$.
Similmente abbiamo

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$y \in (-1,1)$, allora $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, dunque $\cos(x) \geq 0$
$\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$

Esercizio: trovare l'equazione della retta tangente in $x = 2$ a $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$.

Svolgimento:

1) la retta tangente passa per $P = (2, f(2)) = (2, \frac{4}{3})$.

2) il coefficiente angolare della retta tangente è $m = f'(2)$.

$$f'(x) = \frac{x^2-1-(x+2)(2x)}{(x^2-1)^2} - \frac{2}{2x-3}$$

$$f'(2) = -\frac{31}{9}$$

$$y = mx + q \quad \text{con} \quad m = -\frac{31}{9}$$

Trovo q imponendo il passaggio per P:

$$\frac{4}{3} = -\frac{31}{9} \cdot 2 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{74}{9}$$

La retta è $9y = -31x + 74$

Esercizio: sia $f(x) = \begin{cases} e^{x+a} & x \geq 0 \\ x + b & x < 0 \end{cases}$

i) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è continua?

ii) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile?

Svolgimento: La funzione è definita a tratti.

i) Per $x < 0$ e $x > 0$ la funzione è continua, dobbiamo vedere cosa succede in zero.

Affinchè sia continua anche in zero serve che

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^a \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = b$$

quindi vogliamo che $b = e^a$.

Preso un qualsiasi $a \in \mathbb{R}$, se $b = e^a$ allora la funzione è continua.

ii) Se la funzione non fosse continua, allora non è neanche derivabile, quindi almeno dobbiamo avere che se prendiamo a qualsiasi in $\mathbb{R}$, allora $b = e^a$.

Vediamo se servono ulteriori condizioni

Per $x < 0$ e $x > 0$ la funzione è derivabile e la derivata vale

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x+a} & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Affinchè sia derivabile anche in zero serve che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \ell \quad \text{con } \ell \neq \pm\infty .$$

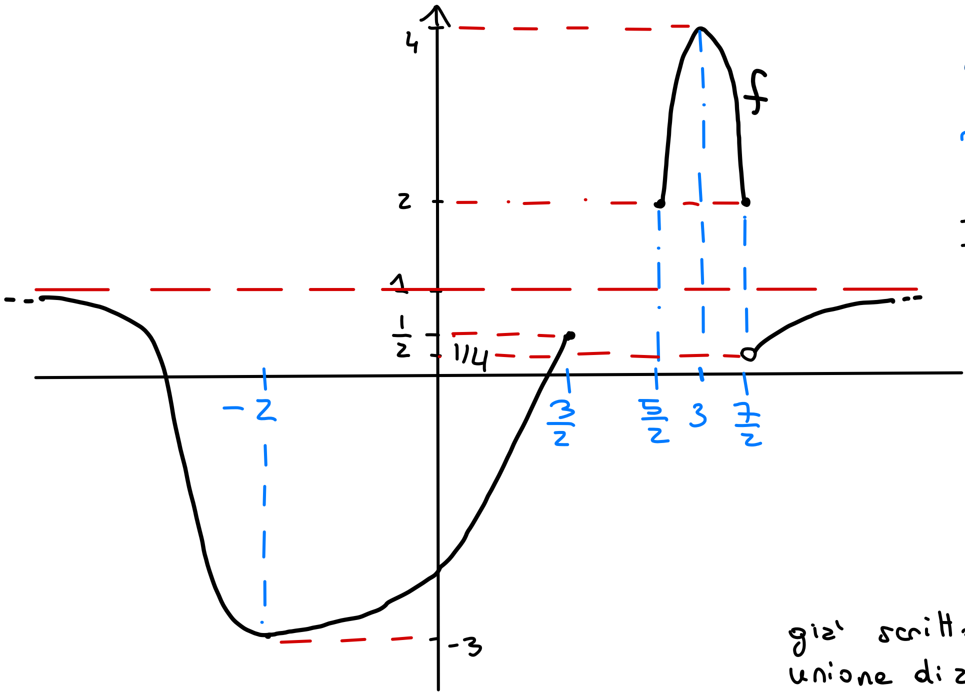
$$\lim_{x \to 0^+} e^{x+a} = e^a \qquad e \qquad \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

quindi $e^a = 1 \Rightarrow a = 0$

e $b = e^0 = 1$.

Lezione 20

Esercizio: Dato il grafico della funzione f trovare
i) massimi e minimi ASSOLUTI
ii) massimi e minimi LOCALI
iii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $A = [-1,2]$.



Soluzione:

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$

$\mathrm{Im}(f) = [-3, 1) \cup [2, 4]$.

i) Trovare il massimo e minimo della funzione f significa trovare massimo e minimo (se esistono) dell'insieme $\mathrm{Im}(f)$. Visto che abbiamo già scritto $\mathrm{Im}(f)$ sotto forma di unione di 2 intervalli, è facile vedere che

$\inf(\mathrm{Im}(f)) = -3$, inoltre -3 appartiene all'insieme quindi il minimo assoluto di f è -3 e il punto di minimo è $x = -2$.

Inoltre $\sup(\mathrm{Im}(f)) = 4$, 4 appartiene ad $\mathrm{Im}(f)$ quindi il massimo assoluto di f è 4 e il punto di massimo è $x = 3$.

ii) I massimi/minimi assoluti sono anche massimi e minimi locali. Vediamo se ce ne sono altri.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min locale:

A) punti a tangente orizzontale
B) una volta scritto il $\mathrm{Dom}(f)$ sottoforma di intervalli, estremi di questi intervalli
C) punti interni al $\mathrm{Dom}(f)$, ma punti di non derivabilità.

A) I punti del grafico $(-2,-3)$ e $(3,4)$ sono gli unici con tangente orizzontali. Non ce ne sono altri.

B) Il punto $x = \frac{3}{2}$ è un punto di massimo locale.
Esiste infatti un intervallo I del quale $x = \frac{3}{2}$ è un punto interno tale che $\forall x \in I \cap \mathrm{Dom}(f)$ vale $f(x) \leq f(\frac{3}{2})$.
Basta prendere $I := [\frac{3}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2} + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Scelgo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Abbiamo $I = [1,2]$, $I \cap \mathrm{Dom}(f) = [1, \frac{3}{2}]$ e $\forall x \in [1, \frac{3}{2}]$ vale $f(x) \leq f(\frac{3}{2})$.
Il massimo locale è $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.
Il punto $x = \frac{5}{2}$ è un punto di minimo locale.
Esiste infatti un intervallo I del quale $x = \frac{5}{2}$ è un punto interno tale che $\forall x \in I \cap \mathrm{Dom}(f)$ vale $f(x) \geq f(\frac{5}{2})$.

Basta prendere $I := [\frac{5}{2} - \varepsilon, \frac{5}{2} + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Scelgo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Abbiamo $I = [2,3]$, $I \cap Dom(f) = [\frac{5}{2}, 3]$ e $\forall x \in [\frac{5}{2}, 3]$ vale $f(x) \geq f(\frac{5}{2})$.
Il minimo locale è $f(\frac{5}{2}) = 2$.

c) L'unico punto di Dom(f) che è un punto di non derivabilità è $x = \frac{7}{2}$ visto che in $x = \frac{7}{2}$ la funzione non è neanche continua.
$x = \frac{7}{2}$ non è né un punto di massimo, né un punto di minimo locale.

Infatti non è possibile trovare nessun intervallo I che abbia $\frac{7}{2}$ come punto interno tale per cui tutti gli $x \in I \cap Dom(f)$ verifichino la proprietà

* $f(x) \geq f(\frac{7}{2})$ (necessaria affinché $x = \frac{7}{2}$ sia punto di minimo locale)

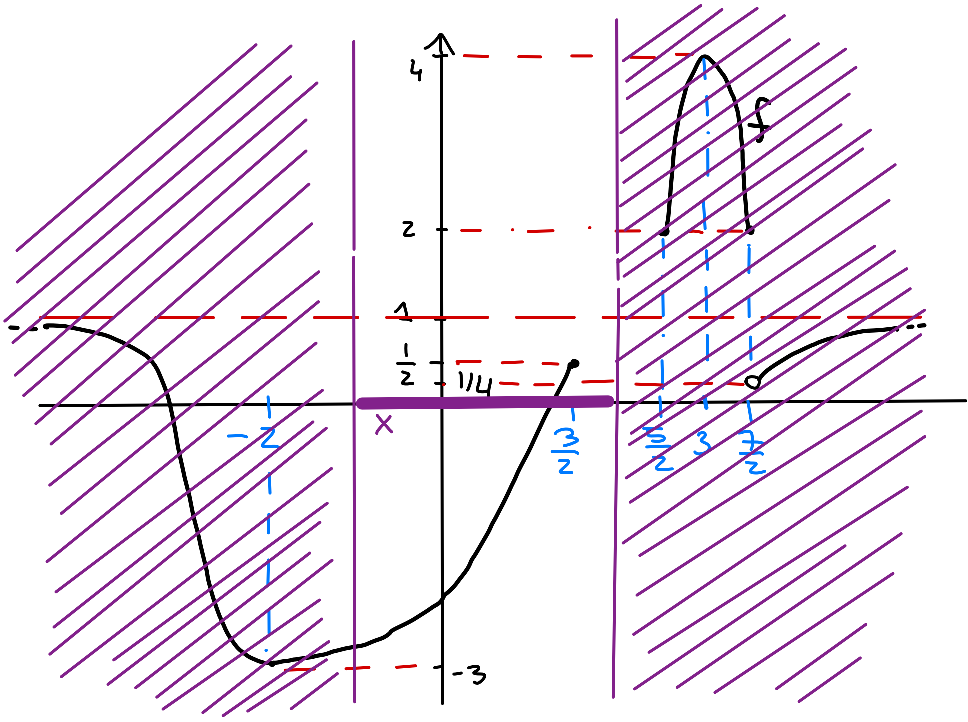
oppure

* $f(x) \leq f(\frac{7}{2})$ (necessaria affinché $x = \frac{7}{2}$ sia punto di massimo locale)

Gli intervalli per i quali $x = \frac{7}{2}$ è un punto interno sono del tipo $[\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2} + b]$ con $a, b > 0$.
Abbiamo che per a sufficientemente piccolo (ad esempio $0 < a < 1$)
$[\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2} + b] \cap Dom(f) = [\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2} + b]$.
Per quanto possa io scegliere a, b piccoli abbiamo sempre

* $f(\frac{7}{2}) = 2$
* $\forall x \in [\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2})$ vale $f(x) > 2$
* $\forall x \in (\frac{7}{2}, \frac{7}{2} + b]$ vale $f(x) < 2$, in particolare $\frac{1}{4} < f(x) < 1$.

Dunque
$x = \frac{7}{2}$ non è né un punto di massimo, né un punto di minimo locale.



iii) Ora ci interessa solo $f_{|[-1,2]}$ quindi ci chiediamo quali sono i massimi e minimi relativamente all'intervallo $[-1,2]$.
Notiamo che
$Dom(f) \cap [-1,2] = [-1, \frac{3}{2}]$.
Stiamo quindi considerando una funzione continua in un intervallo chiuso, limitato e non vuoto.
Il teorema di Weierstraß ci garantisce che massimo e minimo esistono.
Il minimo è $f(-1)$ ed il massimo è $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.
Il punto di minimo è $x = -1$ e il punto di massimo è $x = \frac{3}{2}$.
Notiamo inoltre che non ci sono ulteriori massimi e minimi locali.

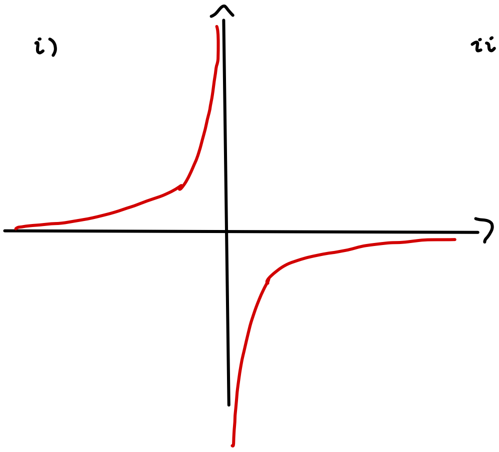
Esercizio: Dato il grafico della funzione $f(x)=-\frac{1}{x}$ trovare

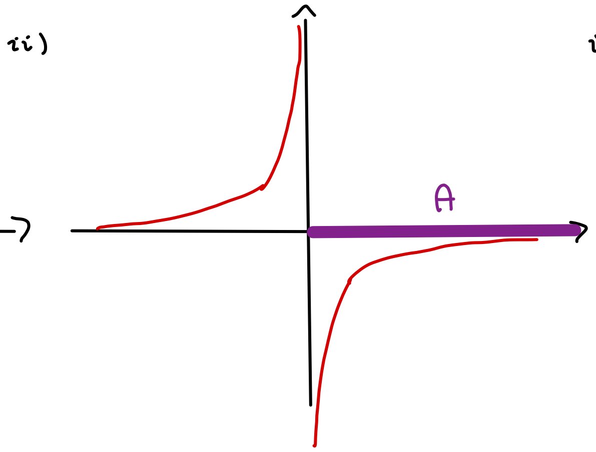
i) massimi e minimi ASSOLUTI, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

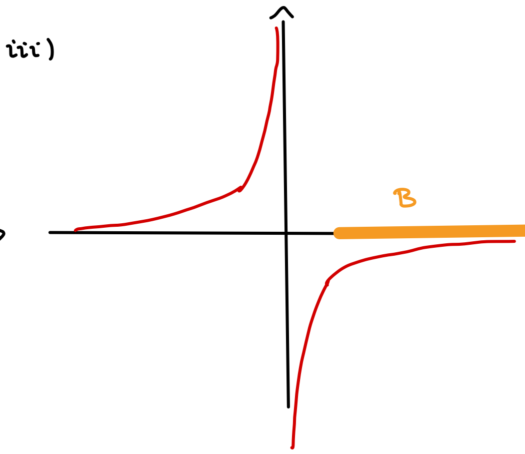
ii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $A=[0,+\infty)$, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

iii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $B=[1,+\infty)$, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

Soluzione:







i) $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\mathrm{Im}(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\sup(\mathrm{Im}(f))=+\infty$ e non esiste massimo assoluto,

$\inf(\mathrm{Im}(f))=-\infty$ e non esiste minimo assoluto.

ii) Guardiamo ora $f_{|A}$

$\mathrm{Dom}(f_{|A})=\mathrm{Dom}(f)\cap A=((-\infty,0)\cup(0,+\infty))\cap[0,+\infty)=(0,+\infty)$.

$\mathrm{Im}(f_{|A})=(-\infty,0)$

$\sup(\mathrm{Im}(f_{|A}))=0$, sebbene zero sia un valore finito, non c'è nessun $x\in\mathrm{Dom}(f_{|A})$ tale che $f(x)=0$, quindi zero non è un massimo assoluto. Non esiste il massimo.

$\inf(\mathrm{Im}(f_{|A}))=-\infty$ e non esiste minimo assoluto.

iii) Guardiamo ora $f_{|B}$

$\mathrm{Dom}(f_{|B})=\mathrm{Dom}(f)\cap B=((-\infty,0)\cup(0,+\infty))\cap[1,+\infty)=[1,+\infty)$.

$\mathrm{Im}(f_{|B})=[-1,0)$. Come prima

$\sup(\mathrm{Im}(f_{|B}))=0$, sebbene zero sia un valore finito, non c'è nessun $x\in\mathrm{Dom}(f_{|B})$ tale che $f(x)=0$, quindi zero non è un massimo assoluto. Non esiste il massimo.

$\inf(\mathrm{Im}(f_{|B}))=-1$, inoltre $f(1)=-1$, quindi -1 è il minimo assoluto di $f_{|B}$ e 1 è il punto di minimo assoluto.

Esercizio: trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = e^{(x^3-3x)}$$

relativamente all'intervallo $-2 \leq x \leq 3$.

Soluzione: Osservo che $f_{|A}$ con $A = [-2,3]$ e' una funzione continua definita su un intervallo chiuso, limitato e non vuoto, per il teorema di Weierstraß massimo e minimo esistono sicuramente. La funzione e' anche derivabile in $[-2,3]$.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min:

A) estremi dell'intervallo $[-2,3]$

B) punti a derivata nulla

A) $f(-2) = e^{(-8+6)} = e^{-2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2$

$f(3) = e^{(27-9)} = e^{18}$

B) $f'(x) = e^{(x^3-3x)} \cdot (3x^2-3) = 3(x^2-1)e^{(x^3-3x)}$

$0 = f'(x) = 3(x^2-1)e^{(x^3-3x)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$

$f(-1) = e^{(-1+3)} = e^2$

$f(1) = e^{(1-3)} = e^{-2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2.$

Confronto tutti i valori trovati ($f(-2) = e^{-2}$, $f(3) = e^{18}$, $f(-1) = e^2$, $f(1) = e^{-2}$). Abbiamo

$$e^{-2} < e^2 < e^{18}.$$

Quindi

e^{-2} e' il minimo assoluto di f in $[-2,3]$ e $x=-2$, $x=1$ sono punti di minimo.

e^{18} e' il massimo assoluto di f in $[-2,3]$ e $x=3$ e' il punto di massimo.

Esercizio: trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = x^3 e^{2x}$$

relativamente all'intervallo $x \leq -1$.

Soluzione: In questo caso $(-\infty, -1]$ non è limitato, massimo e minimo potrebbero non esistere.
Per studiare il comportamento della f agli estremi dell'intervallo dobbiamo ricorrere ai limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{2x} = 0$$

$$f(-1) = -e^{-2} \simeq -0{,}13$$

Andiamo ora a vedere i punti con derivata nulla:

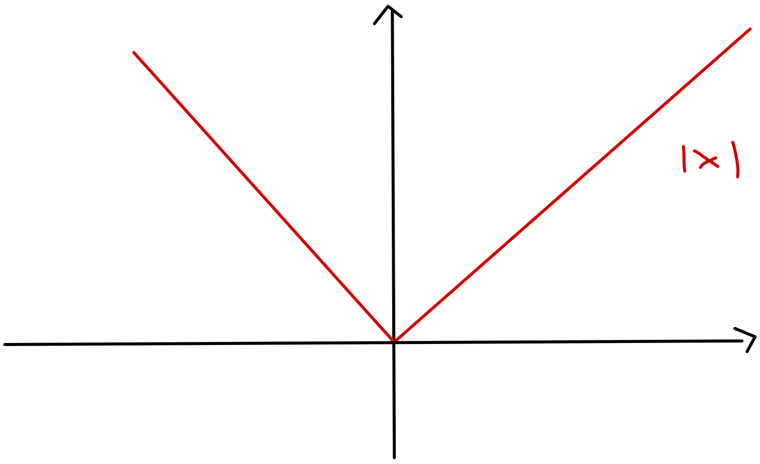
$$0 = f'(x) = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} = x^2 e^{2x} (3 + 2x) \iff x = 0, \; x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} e^{-3} \simeq -0{,}17$$

Possiamo concludere che il minimo assoluto di f ristretta a $(-\infty, -1]$ è $-\frac{27}{8} e^{-3}$ e il punto di minimo assoluto è $-\frac{3}{2}$

Il massimo assoluto non esiste e $\sup\left(\operatorname{Im}\left(f_{|(-\infty,-1]}\right)\right) = 0$

Esempio: Consideriamo $f(x) = |x|$



Il minimo della funzione è zero e il punto di minimo è zero.
Il massimo non esiste.
Questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
La sua derivata è $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

La derivata non si annulla mai.
Per trovare quindi i punti di massimo e minimo non basta cercare tra i punti in cui si annulla la derivata.

Esercizio: trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = |x^2-1|.$$

Svolgimento: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) \subseteq [0,+\infty)$.
Possiamo scrivere la funzione come $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x \leq -1 \\ 1-x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^2-1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

La funzione è derivabile in $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$ e la sua derivata vale $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{se } x > 1. \end{cases}$

La non derivabilità in $x = \pm 1$ si vede dal fatto che
$\lim_{x\to -1^-} 2x = -2$, $\lim_{x\to -1^+} -2x = 2$, $\lim_{x\to 1^-} -2x = -2$, $\lim_{x\to 1^+} 2x = 2$.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min locale:

A) punti a derivata nulla
B) punti di non derivabilità.

Abbiamo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ e il massimo non esiste.

A) $f'(x) = 0 \iff x = 0$
$f(0) = 1$

B) $f(-1) = 0$
$f(1) = 0$

$\Rightarrow$ Il minimo è 0 e i punti di minimo sono $x = \pm 1$.

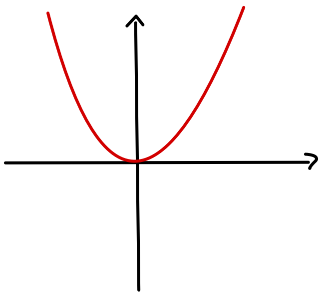
Inoltre $x = 0$ è un punto di massimo locale.

ESERCIZIO "TIPICO" : trovare massimi/minimi assoluti di f (dove f è definita nel suo dominio "naturale") oppure trovare massimi/minimi assoluti di f relativamente all'insieme X (stiamo dunque considerando $f_{|X}$ definita in $Dom(f) \cap X$).

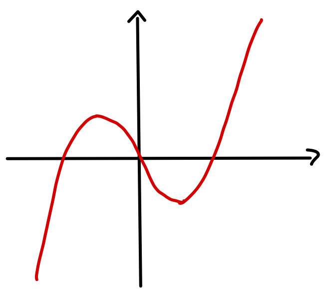
Osservazioni : consideriamo $f: X \to \mathbb{R}$ con X un intervallo / unione finita di intervalli. Sappiamo che se x_0 è un punto di massimo o minimo locale interno all'intervallo X (o a uno degli intervalli) e se x_0 è un punto in cui f è derivabile, allora $f'(x_0) = 0$.

Il viceversa non è necessariamente vero. Ciò significa che se x_0 è un punto interno ad X dove f è derivabile e $f'(x_0) = 0$ allora abbiamo varie possibilità:

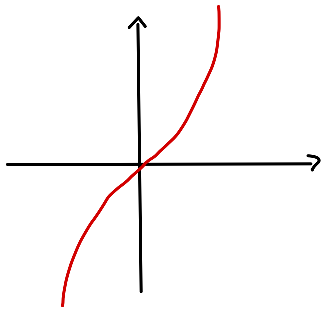
- x_0 può essere un massimo/minimo assoluto
- x_0 può essere un massimo/minimo locale
- x_0 può anche non essere né un massimo/minimo assoluto né un massimo/minimo locale



$f(x) = x^2$
$f'(0) = 0$ e 0 è punto di minimo assoluto.



$f(x) = x^3 - 3x$
$f'(1) = 0$ e 1 è punto di minimo locale



$f(x) = x^3$
$f'(0)$ e 0 non è né min/max. assoluto né min/max locale

Inoltre ci sono punti in cui f non è derivabile che possono essere punti di massimo / minimo per f, ad esempio $x = 0$ per $f(x) = |x|$.

E infine dobbiamo considerare gli estremi di $Dom(f)$ / $Dom(f) \cap X$.

Tenendo tutte queste cose a mente, abbiamo la seguente
STRATEGIA PER RISOLVERE L'ESERCIZIO TIPICO:

. ELENCO dei SOSPETTI punti di massimo e minimo assoluto :

A) estremi di Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X
B) punti in cui la funzione non è derivabile
C) punti in cui la derivata si annulla

A) Scrivo Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X come unione finita di intervalli, che possono essere chiusi/aperti e limitati/illimitati. Guardo tutti gli estremi.

- Se un estremo è $-\infty$ oppure $+\infty$:
  calcolo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2$

- Se un estremo è un numero finito $a_1 \dots a_m$ ma non appartiene a Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X calcolo il limite pertinente (per $x\to a^+$ oppure $x\to a^-$ a seconda che a sia estremo sinistro o destro)

$$\lim_{x\to a_1^+} f(x) = \ell_3 \quad \dots \quad \lim_{x\to a_m^-} f(x) = \ell_h$$

ATTENZIONE : se uno di questi limiti $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \dots \ell_h$ è $+\infty$ allora $\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ $(\sup(\mathrm{Im}(f_{|X})) = +\infty)$ è il massimo assoluto non esiste.
Se uno di questi limiti $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \dots \ell_h$ è $-\infty$ allora $\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$ $(\inf(\mathrm{Im}(f_{|X})) = -\infty)$ è il minimo assoluto non esiste.

- Calcolo la funzione in tutti gli estremi $b_1 \dots b_m$ che appartengono a Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X.

$$f(b_1) \ \dots \ f(b_m).$$

B) Se ci sono dei punti $c_1 \dots c_k$ interni a Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X i cui f non è derivabile calcolo

$$f(c_1) \ \dots \ f(c_k) \ .$$

C) Calcolo la derivata prima di f. Cerco tutti i punti $x_1 \dots x_i$ in cui si annulla la derivata prima. Calcolo

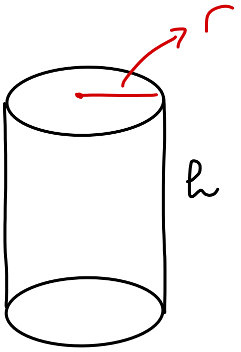
$$f(x_1) \dots \ f(x_i \ ).$$

* Confronto tutti i valori che ho ottenuto : $\ell_1, \dots, \ell_h, f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$.

Se il minore è uno tra $f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$, allora quello è il minimo assoluto.
Se il minore è uno tra quelli ottenuti come limite $\ell_1 \dots \ell_h$, allora quello è l'inf e il minimo non esiste.
Se il maggiore è uno tra $f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$, allora quello è il massimo assoluto.
Se il maggiore è uno tra quelli ottenuti come limite $\ell_1 \dots \ell_h$, allora quello è il sup e il massimo non esiste.

Esercizio: trovare le dimensioni del cilindro di area minima con volume 1.

Svolgimento:



Volume = $\pi r^2 \cdot h = 1$

$\Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

Area = $2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$

Area = $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$ con $r \in (0, +\infty)$.

Cerco il minimo assoluto:

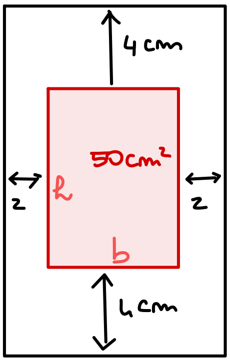
$\lim_{r\to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$

$f'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$ $\qquad f'(r) = 0 \iff \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$ ← minimo

Il cilindro di area minima ha raggio = $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ e altezza = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$.

Esercizio: Un foglio di carta deve contenere un' area di stampa di 50 cm^2, margine superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Trovare le dimensioni del foglio di area minima.



Area di stampa = $b \cdot h = 50\ cm^2$

$\Rightarrow b = \frac{50}{h}$

Area = $(h+8)(b+4) = (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right)$, $h \in (0, +\infty)$.

$\lim_{h \to 0^+} (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right) = +\infty$

$\lim_{h \to +\infty} (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right) = +\infty$

Area'(h) = $\left(\frac{50}{h} + 4\right) + (h+8)\left(-\frac{50}{h^2}\right) = -\frac{50 \cdot 8}{h^2} + 4$

$0 = $ Area'(h) $\iff h = \pm 10$

Area(10) = $18 \cdot 9$ ← minimo.

$h = 18$, $b = 9$.

Lezione 23

Sia $m \in \mathbb{N}$, con il simbolo $m!$ indichiamo il prodotto di m fattori

$$m! := m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

$m!$ si legge "m FATTORIALE".

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di e^x

Fissato $d \in \mathbb{N}$, per applicare il teorema dello sviluppo di Taylor serve che la funzione $f(x) = e^x$ sia derivabile d (oppure $d+1$) volte almeno in un certo intervallo $I \subset \mathbb{R}$ che contenga zero. Questa proprietà è vera, qualsiasi sia $d \in \mathbb{N}$, infatti $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^{(m)}(x) = e^x$.

Inoltre $f^{(m)}(0) = 1$ dunque

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1})$$

$$= \sum_{m=0}^{d} \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1}).$$

Da questo sviluppo ritroviamo che $e^x - 1 \sim x$. Infatti $e^x - 1 = x + \Theta(x^2)$ e quindi la parte principale di $e^x - 1$ è x.

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\cos(x)$.

Anche il coseno può essere derivato in tutto $\mathbb{R}$ quante volte vogliamo.

In particolare

$f(x) = \cos(x)$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos(x)$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin(x)$	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos(x)$	
$\vdots$	

Quindi:

$$\cos(x) = 1 + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0)x^4}{4!} + \frac{f^{V}(0)x^5}{5!} + \ldots + \frac{f^{(d)}(0)x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1}),$$

lo sviluppo all'ordine d con d PARI è:

$$\cos(x) = \underline{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!}} + \Theta(x^{d+1}),$$

Se ora facciamo lo sviluppo di ordine $d+1$ (che quindi è dispari) otteniamo

$$\cos(x) = \underline{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!}} + \Theta(x^{d+2}).$$

↳ informazione più accurata!

stesso polinomio di prima ma resto $\Theta(x^{d+2})$

Quindi alla fine lo sviluppo di ordine d del coseno è

con d pari $\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+2}),$

con d dispari $\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \Theta(x^{d+1}).$

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\sin(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) & f(1) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\
f^{IV}(x) &= \sin(x) & f^{IV}(0) &= 0 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

Nel caso del seno $f^{m}(0)=0$ quando m è pari

Quin $\sin(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\cancel{\frac{f''(0)\cdot x^2}{2}}+\frac{f'''(0)x}{3!}+\cancel{\frac{f^{IV}(0)x^4}{4!}}+\frac{f^{V}(0)x^5}{5!}+\dots+\frac{f^{(d)}(0)x^d}{d!}+o(x^{d+1})$,

se d è dispari $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots\pm\frac{x^d}{d!}+o(x^{d+1})$,

se ora facciamo lo sviluppo di ordine $d+1$ (che quindi è pari) otteniamo

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots\pm\frac{x^d}{d!}+o(x^{d+2}) .$$

Quindi alla fine lo sviluppo di ordine d del seno è

con d dispari $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots\pm\frac{x^d}{d!}+o(x^{d+2})$,

con d pari $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots\pm\frac{x^{d-1}}{(d-1)!}+o(x^{d+1})$.

Anche in questo caso abbiamo $\sin(x)=x+o(x^2)$, quindi riotteniamo $\sin(x)\sim x$.

Osservazione: Consideriamo una funzione f derivabile almeno d volte in $I\subset\mathbb{R}$ e supponiamo che zero sia un punto interno ad I. Consideriamo il suo sviluppo di Taylor di ordine d in zero.

SE f E' PARI nel polinomio di Taylor appaiono solo termini di ordine PARI.

SE f E' DISPARI nel polinomio di Taylor appaiono solo termini di ordine DISPARI.

Dimostrazione:

la derivata di una funzione pari è una funzione dispari

$$f(x)=f(-x)\implies f'(x)=-f'(-x)$$

la derivata di una funzione dispari è una funzione pari

$$f(-x)=-f(x)\implies -f'(-x)=-f'(x)\implies f'(-x)=f'(x)$$

Inoltre se f è dispari $f(0)=0$ infatti $f(x)=-f(-x)\implies f(0)=-f(0)\implies 2f(0)=0$
$\implies f(0)=0$.

Se f è pari, allora $f^{(m)}(x)$ con m dispari è una fz. dispari e $f^{m}(0)=0$
$f^{(m)}(x)$ con m pari è una fz. pari

Se f è dispari, allora $f^{(m)}$ con m dispari è pari
$f^{(m)}$ con m pari è dispari e $f^{m}(0)=0$

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\log(x+1)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+x) & f(0) &= 0 & & \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2}\\
f'(x) &= (1+x)^{-1} & f'(0) &= 1 & &\\
f''(x) &= -(1+x)^{-2} & f''(0) &= -1 & & \frac{f'''(0)}{3!} = +\frac{2}{2\cdot 3} = +\frac{1}{3}\\
f'''(x) &= +2(1+x)^{-3} & f'''(0) &= +2 & &\\
f^{IV}(x) &= -2\cdot 3(1+x)^{-4} & f^{IV}(0) &= -2\cdot 3 & & \frac{f^{IV}(0)}{4!} = -\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{1}{4}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$f^{(m)}(x) = \pm(m-1)!\,(1+x)^{-m} \qquad \frac{f^{m}(0)}{m!} = \pm\frac{(m-1)!}{m!} = \pm\frac{1}{m}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^d}{d} + \vartheta(x^{d+1}).$$

In particolare abbiamo che la parte principale di $\log(1+x)$ è x.

Osservazione: $\log(x+1)$ non è definita su tutto $\mathbb{R}$, però basta che $\log(1+x)$ sia definita e derivabile d volte in un intervallo che contiene zero, ad esempio $I = [-1/2, 1/2]$.

Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $(1+x)^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\alpha} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) &= \alpha\\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1)\\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} & f'''(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(m)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m} & f^{(m)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)
\end{aligned}
$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-d+1)}{d!}x^d + \vartheta(x^{d+1}).$$

In particolare per $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^d + \vartheta(x^{d+1})$$

Noto che se $b \leq \alpha \leq b+1$ con $b \in \mathbb{N}$, allora la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ b volte, invece le derivate dalla $(b+1)$-esima in poi non sono definite per $x=-1$. Se α è negativo la funzione e tutte le sue derivate non sono definite per $x=-1$. Per fare lo sviluppo di Taylor in zero questo non è un problema. Basta prendere $I \subset (-1,1)$.

Se introduciamo il simbolo $\binom{\alpha}{m} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}$ e $\binom{\alpha}{0} := 1$

↳ coefficiente binomiale generalizzato

allora possiamo scrivere:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{m=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{0} x^m$$

FORMULA del BINOMIO di NEWTON

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$. Vale

$$(x+y)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m y^{d-m}$$

dove per $m \leq d$, $m, d \in \mathbb{N}$ $\quad \binom{d}{m} := \frac{d!}{m!(d-m)!} \quad$ e $\quad \binom{d}{0} = 1$.

Alcune proprietà del COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{d}{d} = 1$$

$$\binom{d}{1} = \frac{d!}{1!(d-1)!} = d$$

$$\binom{d}{m} = \binom{d}{d-m} \quad \text{infatti} \quad \binom{d}{d-m} = \frac{d!}{(d-m)!(d-(d-m))!} = \frac{d!}{(d-m)!\,m!} = \binom{d}{d-m}$$

Osservazione: Lo sviluppo di Taylor di ordine d (o più) di un polinomio di grado d coincide con il polinomio stesso, in particolare non c'è resto.

Dimostrazione: consideriamo un qualsiasi polinomio di grado d:

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_d x^d \qquad \text{con } q_1, \dots, q_d \in \mathbb{R}$$

Scriviamo il suo sviluppo di Taylor come polinomio di Taylor di ordine d e resto di Lagrange:

$$P_d(x) + R_d(x) = \sum_{m=0}^{d} \frac{q^{(m)}(0)}{m!} x^m + \frac{q^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!} x^{m+1}$$

$$q'(x) = q_1 + 2q_2 x + 3q_3 x^2 + 4q_4 x^3 + \dots + d\, q_d\, x^{d-1}$$

$$q''(x) = 2q_2 + 3\cdot 2\, q_3 x + 4\cdot 3\, q_4 x^2 + \dots + d\cdot(d-1)\, x^{d-2}$$

$$q'''(x) = 3\cdot 2\, q_3 + 4\cdot 3\cdot 2\, q_4 x + \dots + d(d-1)(d-2)\, x^{d-3}$$

$$\vdots$$

$m < d$

$$q^{(m)}(x) = m\cdot(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\, q_m + (m+1)m\cdot(m-1)(m-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\, q_{m+1} x + \dots + d(d-1)(d-2)\cdot \dots (d-m+1)\, x^{d-m}$$

$$\vdots$$

$$q^{(d)}(x) = d\cdot(d-1)(d-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\, q_d$$

$$q^{(d+1)}(x) \equiv 0.$$

Calcoliamo ora le derivate in zero

$$q(0) = q_0$$

$$q'(0) = q_1$$

$$q''(0) = 2q_2$$

$$q'''(0) = 3\cdot 2 q_3 = 3!\, q_3$$

$$\vdots$$

$$q^{(m)}(0) = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot \dots 3\cdot 2\, q_m = m!\, q_m$$

$$\vdots$$

$$q^{(d)}(0) = d(d-1)(d-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\, q_d = d!\, q_d$$

$$\frac{q''(0)}{2!} = q_2 \qquad \frac{q'''(0)}{3!} = \frac{3!\, q_3}{3!} = q_3$$

$$\frac{q^{(m)}(0)}{m!} = \frac{m!\, q_m}{m!} = q_m \qquad \frac{q^{(d)}(0)}{d!} = \frac{d!\, q_d}{d!} = q_d$$

Inoltre, visto che $q^{(d+1)}(x) \equiv 0$, allora il resto di Lagrange è zero, quindi

$$P_d(x) + R_d(x) = \sum_{m=0}^{d} \frac{q^{(m)}(0)}{m!} x^m + \overset{=0}{\cancel{\frac{q^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!} x^{m+1}}}$$

$$= \sum_{m=0}^{d} q_m x^m = q(x).$$

Dimostrazione della FORMULA del BINOMIO di NEWTON

Possiamo supporre $y \neq 0$, altrimenti se $y=0$ allora $(x+y)^d = x^d$ e non c'è niente da calcolare.

$$(x+y)^d = \left[y\left(\frac{x}{y}+1\right)\right]^d = y^d \left(\frac{x}{y}+1\right)^d$$

Chiamo $\frac{x}{y} = t$, $(t+1)^d$ è un polinomio di grado d e coincide con il suo polinomio di Taylor di ordine .

$$(t+1)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m$$

quindi $\left(\frac{x}{y}+1\right)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \left(\frac{x}{y}\right)^m$ e

$$(x+y)^d = y^d \left(\frac{x}{y}+1\right)^d = y^d \left(\sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \frac{x^m}{y^m}\right) = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \frac{x^m}{y^m} \cdot y^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m y^{d-m}$$

Es 1 Trovare la parte principale di

1) $e^x - 1 - 2x$ per $x \to 0$

2) $e^{2x} - 1 - 2x$ per $x \to 0$

3) $e^x - \cos(x)$ per $x \to 0$

4) $e^{x^2} - \cos(2x)$ per $x \to 0$

Es 2 Ordinare le funzioni

$-\log x$, x^2 , 3 , $x^2 + x^{-2}$

rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0^+$

Es 3 Ordinare le funzioni

$x^2 \log x$, $\frac{x^4}{x^2+2}$, $\log(x + \sin(x))$, $\frac{2^x}{3^x+1}$

rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$

Es 4 Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3)}{\log(1+x^3)}$

Svolgimento:

Es 1

1) Lo sviluppo di Taylor al primo ordine di e^x e'

$$e^x = 1 + x + \Theta(x^2)$$

dunque

$$e^x - 1 - 2x = 1 + x + \Theta(x^2) - 1 - 2x$$

$$= -x + \Theta(x^2)$$

$$= -x + o(x)$$

quindi $e^x - 1 - 2x \sim -x$

e $-x$ e' la parte principale per $x \to 0$ di $e^x - 1 - 2x$.

2) Scriviamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine di e^t:

$$e^t = 1 + t + o(t^2).$$

Grazie alla sostituzione $t = 2x$ otteniamo

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x^2)$$

$$\hookrightarrow o(2x^2) = o(x^2)$$

quindi

$$e^{2x} - 1 - 2x = 1 + 2x + o(x^2) - 1 - 2x$$
$$= o(x^2)$$

$o(x^2)$ è una classe di funzioni, non descrive una sola funzione. Non abbiamo trovato la parte principale. Per trovarla dobbiamo considerare lo sviluppo di Taylor di e^t ad un ordine successivo:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$

Sostituiamo nuovamente $t = 2x$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^3).$$

Quindi

$$e^{2x} - 1 - 2x = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^3) - 1 - 2x$$
$$= 2x^2 + o(x^3)$$

e la parte principale di $e^{2x} - 1 - 2x$ è $2x^2$.

3) $$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \Theta(x^2) \\ \cos(x) &= 1 + \Theta(x^2) \end{aligned}\right\} \text{Sviluppo di Taylor al primo ordine}$$

$$e^x - \cos(x) = 1 + x + \Theta(x^2) - 1 + \Theta(x^2)$$
$$= x + \Theta(x^2)$$

4) Proviamo a procedere come nel caso precedente:

$$e^t = 1 + t + \Theta(t^2)$$
$$\cos(y) = 1 + \Theta(y^2)$$

Sostituisco $t = x^2$ e $y = 2x$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \Theta(x^4)$$
$$\cos(2x) = 1 + \Theta(x^2)$$

$$e^{x^2} - \cos(2x) = 1 + x^2 + \Theta(x^4) - 1 + \Theta(x^2)$$
$$= \underbrace{x^2 + \Theta(x^2)}_{\text{ATTENZIONE:}} + \Theta(x^4)$$

Le funzioni f che sono $\Theta(x^2)$ sono "comparabili" con x^2, quindi potrebbero anche essere del tipo ax^2

In tal caso la parte principale di $e^{x^2} - \cos(2x)$ sarebbe $(1+a)x^2$ se a fosse diverso da -1.

Ci servono maggiori informazioni per concludere l'esercizio.

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \Theta(y^4)$$
$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \Theta(x^4)$$

Quindi $$e^{x^2} - \cos(2x) = 1 + x^2 + \theta(x^4)$$
$$-1 + 2x^2 + \theta(x^4)$$
$$= 3x^2 + \theta(x^4)$$

La parte principale di $e^{x^2} - \cos(2x)$ e' $3x^2$.

Es 2: Prima di tutto osservo che per $x \to 0^+$ $\quad x^2 + x^{-2} \sim x^{-2}$

Sappiamo che per $x \to 0^+$
$$x^a \ll x^b \quad \text{se} \quad a > b$$

quindi
$$x^2 \ll 3 \ll x^2 + x^{-2} \sim x^{-2}$$

Ci resta da capire cosa fare con $-\log(x)$. Usiamo la definizione di $\ll$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{-\log(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \ll -\log x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{-\log(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \ll -\log x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-2}}{-\log(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\log(x)}{x^{-2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\log x \ll x^{-2}$$

Quindi
$$x^2 \ll 3 \ll -\log x \ll x^2 + x^{-2}$$

Es 3 Noto che per $x \to +\infty$

$$\frac{x^4}{x^2+2} \sim \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

$$x+\sin(x) \sim x \quad e \quad \log(x+\sin(x)) \sim \log(x)$$

$$\frac{2^x}{3^x+1} \sim \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Quindi possiamo ridurci ad ordinare

$$x^2 \log x \,, \quad x^2 \,, \quad \log(x) \,, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Sappiamo che per $x \to +\infty$

$$\log(x) << x^a \quad \text{con} \quad a>0$$

Visto che $\frac{2}{3} < 1$ abbiamo $\left(\frac{2}{3}\right)^x << \log x << x^2$

Resta da capire dove collocare $x^2 \log x$

Visto che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 \log x} = 0$

abbiamo $x^2 << \log x \cdot x^2$.

Es 4 $\sin(t) = t + \Theta(t^3)$

$$\log(1+y) = y + \Theta(y^2)$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3)}{\log(1+x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + \Theta(x^9)}{x^3 + \Theta(x^6)} = 3$$

Lezione 28

Esercizio: Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$

Svolgimento: La p.p. di $\sin(x)$ è x. Sommando le parti principali abbiamo una cancellazione. Servono informazioni più precise

I° modo:
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = -\frac{x}{6}$$

la p.p. di $\sin(x) - x$ è $-\frac{x^3}{6}$

la p.p. di $x\sin(x)$ è x^2

II° modo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6!} + \Theta(x^5)$

$$(\sin(x))^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6!} + \Theta(x^5)\right)^{-1} = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right)\right]^{-1}$$

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + \Theta(y^2)$$

$$y = -\frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4) + \Theta\left(\left(-\frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)$$

$\Rightarrow$

$$(\sin(x))^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6!} + \Theta(x^5)\right)^{-1} = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right)\right]^{-1}$$

$$= x^{-1}\left[1 + \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right] = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \Theta(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} - (\sin(x))^{-1} = -\frac{x}{6} + \Theta(x^3) = -\frac{x}{6} + o(x)$$

$\Rightarrow$ la p.p. di $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ è $-\frac{x}{6}$

Esercizio: Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\sin(x^3) - (\sin(x))^3$.

Svolgimento:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^5)$$

Sostituzione $t = x^3$

$$\Rightarrow \sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{15})$$

$$(\sin(x))^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)^3 = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)\right]^3$$

$$= x^3\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^3$$

$$(1+y)^3 = 1 + 3y + o(y^2)$$

Sostituzione: $y = -\frac{x^2}{6} + o(x^4)$

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^3 = 1 + 3\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^4)\right) + o\left(\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4) + o(x^4) + o\left(-\frac{x^2}{6}o(x^4)\right)$$

$$+ o(o(x^8))$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$$

Quindi $(\sin(x))^3 = x^3\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\right)$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^7)$$

$\Rightarrow$

$$\sin(x^3) - (\sin(x))^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{15}) - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^7)$$

$$= \frac{1}{2}x^5 + o(x^7) = \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$$

$\Rightarrow$ La parte principale di $\sin(x^3) - (\sin(x))^3$ e' $\frac{1}{2}x^5$

Esercizio: Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{\exp(x^2)}.$$

a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.

b) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

Svolgimento: a)

I° modo

$$1 - \cos(2x) \sim 2x^2$$

$$(1 - \cos(2x))^{1/2} \sim \sqrt{2}x$$

$$\exp(x^2) \sim 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1 - \cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} \sim \frac{\sqrt{2}x}{1} = \sqrt{2}x$$

II° modo

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \theta(t^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \theta(x^4)$$

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 + \theta(x^4)$$

$$(1 - \cos(2x))^{1/2} = (2x^2 + \theta(x^4))^{1/2}$$

$$= [2x^2(1 + \theta(x^2)]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}x\ (1 + \theta(x^2))^{1/2}$$

$$(1 + y)^{1/2} = 1 + \theta(y)$$

$$y = \theta(x^2)$$

$$(1 + \theta(x^2))^{1/2} = 1 + \theta(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \cos(2x))^{1/2} = \sqrt{2}x\ (1 + \theta(x^2))$$

$$= \sqrt{2}x + \theta(x^3)$$

$\exp(t) = 1 + \theta(t)$

$\exp(x^2) = 1 + \theta(x^2)$

$(\exp(x^2))^{-1} = (1 + \theta(x^2))^{-1} = 1 + \theta(x^2)$

$(1+y)^{-1} = 1 + \theta(y) \qquad y = \theta(x^2)$

$$(1 - \cos(2x))^{1/2} (\exp(x^2))^{-1}$$
$$= (\sqrt{2}x + \theta(x^3))(1 + \theta(x^2))$$
$$= \sqrt{2}x + \theta(x^3) + \theta(x^3) + \theta(x^5)$$
$$= \sqrt{2}x + \theta(x^3) = \sqrt{2}x + o(x)$$

$\Rightarrow$ p.p è $\sqrt{2}x$

b) se $a \neq -\sqrt{2}$ allora p.p. è $(\sqrt{2} + a)x$

se $a = -\sqrt{2}$

I° modo $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \theta(t^6)$

$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^6)$

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^6)$$
$$(1 - \cos(2x))^{1/2} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 \quad \frac{1}{4!}(2x)^4 + \theta(x^6)\right)^{1/2}$$
$$= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^6)\right)^{1/2} = \left[2x^2\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \theta(x^6)\right)\right]^{1/2}$$
$$= \sqrt{2}x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \theta(x^4)\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{2}x \left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \theta(x^4)\right]$$
$$= \sqrt{2}x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \theta(x^5)$$

$(1+y)^{1/2}$

$= 1 + \frac{1}{2}y + \theta(y^2)$

$y = -\frac{1}{3}x^2 + \theta(x^4)$

$\exp(t) = 1 + t + \theta(t^2)$

$\exp(x^2) = 1 + x^2 + \theta(x^4)$

$(\exp(x^2))^{-1} = (1 + x^2 + \theta(x^4))^{-1}$

$(1+y)^{-1} = 1 - y + \theta(y)$

$$y = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$(1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4))^{-1} = 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^2 + \mathcal{O}(x^4))$$

$$= 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^4)$$

$$= 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$(1 - \cos(2x))^{1/2} (\exp(x^2))^{-1}$$

$$= \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{3\sqrt{2}} x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)\left(1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)$$

$$= \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^3 + \mathcal{O}(x^5) - \frac{1}{3\sqrt{2}} x^3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

$$+ \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) + \mathcal{O}(x^9)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1 - \cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}x = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$

$$= -\frac{7\sqrt{2}}{6} x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$

La parte principale è $-\frac{7\sqrt{2}}{6} x^3$

II° modo

$$\frac{(1 - \cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}x = \frac{(1 - \cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}x\exp(x^2)}{\exp(x^2)}$$

p.p. di $\exp(x^2)$ è 1

Andiamo ora a calcolare la parte principale di $(1 - \cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}x\exp(x^2)$

Abbiamo

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \mathcal{O}(t^6)$$

$$(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y + \mathcal{O}(y^2)$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 \quad \frac{1}{4!}(2x)^4 + \Theta(x^6)\right)^{1/2}$$

$$= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \Theta(x^6)\right)^{1/2} = \left[2x^2\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \Theta(x^6)\right)\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \Theta(x^4)\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,x \left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \Theta(x^4)\right]$$

$$= \sqrt{2}\,x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \Theta(x^5)$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}\,x\exp(x^2)$$

$$= \sqrt{2}\,x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \Theta(x^5) - \sqrt{2}\,x\left(1 + x^2 + \Theta(x^4)\right)$$

$$= \sqrt{2}\,x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \Theta(x^5) - \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,x^3 + \Theta(x^5)$$

$$= \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)x^3 + \Theta(x^5) \quad \sim -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3$$

Quindi

$$\frac{(1-\cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}\,x$$

$$= \frac{(1-\cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}\,x\exp(x^2)}{\exp(x^2)} \sim \frac{-\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3}{1} = -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3$$

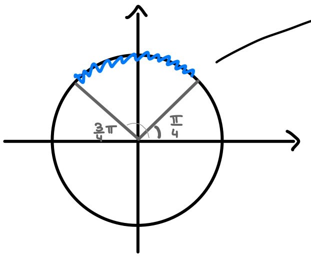
Lezione 30 - seconda parte

Alcuni esercizi in preparazione del compitino

Es 1) Trovare le soluzioni di $\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{1}{2}, 2]$.

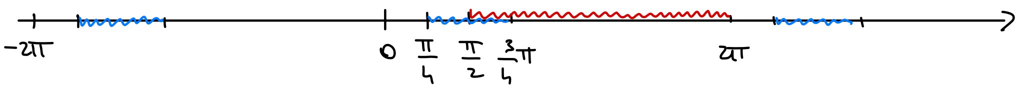
Svolgimento: **I° metodo**: Cambio di variabile $y = \pi x$. Modifico anche l'intervallo in cui cerco le soluzioni. Una volta trovate le soluzioni nel nuovo intervallo scrivo le soluzioni cercate usando il cambio di variabile $x = \frac{y}{\pi}$.

. $y = \pi x$. Se $x = \frac{1}{2}$, allora $y = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$ allora $y = 2\pi$. Quindi cerco le soluzioni di di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.



$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

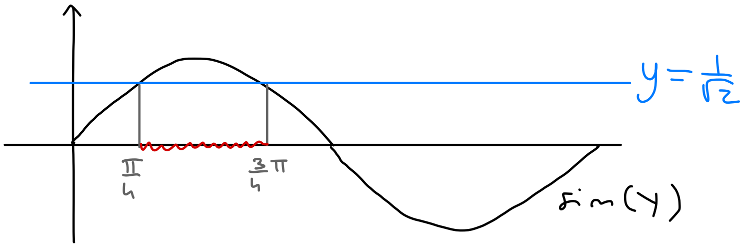
da intersecare con $\frac{\pi}{2} \leq y \leq 2\pi$.



$\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3}{4}\pi$

Soluzione: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

II° metodo: Cambio di variabile $y = \pi x$. Trovo le soluzioni di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cambio variabile, trovo le soluzioni di $\sin(\pi x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e interseco con $[\frac{1}{2}, 2]$.



$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Cambio di variabile $y = \frac{x}{\pi}$

$\frac{1}{4} + 2k \leq x \leq \frac{3}{4} + 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

Le soluzioni sono $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

Es 2) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f(x) = \arctan(x^3 - x)$ relativamente alla semiretta $(-\infty, 1]$.

Svolgimento:

PASSO I)

$$f(1) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x^3 - x) = -\frac{\pi}{2}$$

PASSO II)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^3 - x)^2} \cdot (3x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

PASSO III) Confronto $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f(0)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\underset{\underset{\lim_{x\to-\infty} f(x)}{\parallel}}{\overset{\text{inf}}{-\frac{\pi}{2}}} < \underset{\underset{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\parallel}}{\arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)} < \underset{\underset{f(0)}{\parallel}}{0} < \underset{\underset{f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\parallel}}{\overset{\text{max}}{\arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}}$$

Il punto di massimo è $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il punto di minimo non esiste.

Lezione 31

Esercizio: a) Disegnare il grafico di $f(x) = \log(\log(x))$.

b) Per quali $a > 0$ è verificata $\forall x > 1$ la dis.

$$\log(\log(x)) \leq a\sqrt{\log(x)} \qquad (*)$$

Svolgimento: a) Cerco l'insieme di definizione di

$$f(x) = \log(\log(x))$$

- $x > 0$
- $\log(x) > 0 \implies x > 1$

$\mathrm{Dom}(f) = (1, +\infty)$.

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \log(\log(x)) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log(\log(x)) = +\infty$
- studio del segno di $f(x)$:

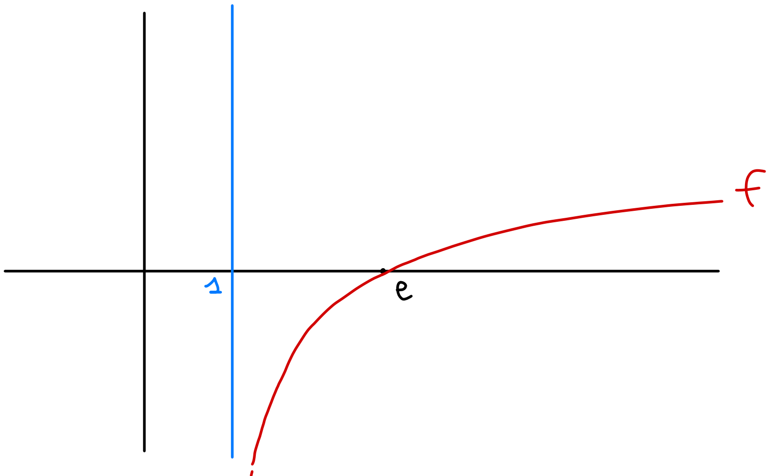
$\log(\log(x)) \geqslant 0 \implies x \geqslant e$.

- $f'(x) = \dfrac{1}{\log(x)} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\log(x)}$
- Studio della monotonia di f

$f'(x) \geqslant 0$ nel dominio di f

$\dfrac{1}{x\log(x)} \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ è sempre vero

$\implies f$ è crescente nel suo dominio.



b) I° modo:

Osservo che se $x>1$, allora $\log(x)>0$, quindi $\sqrt{\log(x)}$ è ben definito ed è strettamente positivo. Posso dividere (*) per $\sqrt{\log(x)}$ ed ottenere la disuguaglianza equivalente

$$(**) \qquad \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} \leq a \qquad \forall x>1.$$

Dunque cerco il massimo di $g(x) = \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}}$ in $(1,+\infty)$, lo chiamo Max.

Se $a \geqslant$ Max allora (**) è verificata, e quindi (*) è verificata.

$$\mathrm{Dom}(g) = (1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{2x\,(\log(x))^{3/2}}\left[2 - \log(\log(x))\right]$$

$$g'(x) = 0 \qquad x = \exp(e^2)$$

$$g(\exp(e^2)) = \frac{2}{e}$$

$$-\infty < 0 < \frac{2}{e}$$

$\Rightarrow$ $\text{Max} = \frac{2}{e}$

$\Rightarrow$ Se $a \geqslant \frac{2}{e}$ allora (**) è verificata, e quindi (*) è verificata.

La disuguaglianza è vera se $a \geqslant \frac{2}{e}$.

II° modo:

Scrivo (*) come

(***) $\qquad \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} \leq 0$

Chiamo $h_a(x) = \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)}$.

Cerco il massimo di $h_a(x)$ e lo chiamo $Max(a)$.

Impongo $Max(a) \leq 0$.

$$Dom(h_a) = (1, +\infty) \qquad \forall a > 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} h_a(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} = -\infty .$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} = -\infty$$

$$h_a'(x) = \frac{1}{x\log(x)} - \frac{a}{2x\sqrt{\log(x)}} = \frac{2 - a\sqrt{\log(x)}}{2x\log(x)}$$

$$h_a'(x) = 0 \qquad x = e^{4/a^2}$$

$$h_a(e^{4/a^2}) = \log 4 - 2 - 2\log a = Max(a)$$

$$Max(a) \leq 0 \qquad \log 4 - 2 - 2\log a \leq 0$$

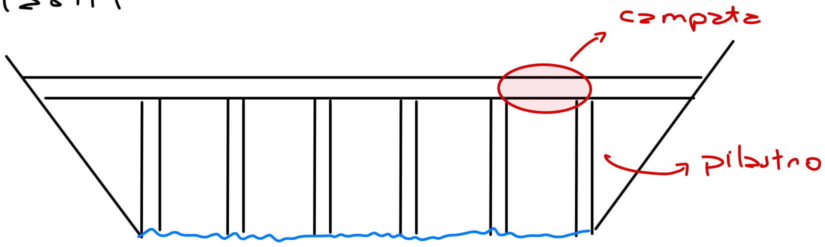
$$\log a \geq \log 2 - 1$$

$$a \geq e^{\log 2} \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$\Rightarrow$ Se $a \geq \frac{2}{e}$ allora (***) è verificata, e quindi (*) è verificata.

La disuguaglianza è vera se $a \geq \frac{2}{e}$.

Esercizio: Si decide di costruire un ponte attraverso un fiume di lunghezza 15 formato da m campate di lunghezza uguale e da $(m-1)$ pilastri



Sapendo che il costo di un pilastro è 3 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è (ℓ^2+1), come conviene prendere m?

Attenzione: m deve essere un numero intero positivo!

Svolgimento: Scriviamo la funzione che descrive il costo del ponte al variare di m.

$f(m) =$ (numero di pilastri) $\cdot$ (costo unitario pilastro)

$+$ (numero di campate) $\cdot$ (costo unitario campata)

numero di pilastri $= m-1$

costo unitario pilastro $= 3$

numero di campate $= m$

costo unitario campata $= ?$

Il costo di una campata di lunghezza ℓ è (ℓ^2+1)

Visto che le campate sono m e sono tutte lunghe uguali e che la lunghezza del ponte è 15, la lunghezza di una campata è $\frac{15}{m}$

e il suo costo $\frac{225}{m^2}+1$

$$f(m) = 3(m-1) + m\left(\frac{225}{m^2} + 1\right) = 4m + \frac{225}{m} - 3$$

$f(m)$ è definita per tutti gli $m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ la estendo a tutti gli $x > 0$

$$f(x) = 4x + \frac{225}{x} - 3 \quad , \quad dom(f) = (0, +\infty).$$

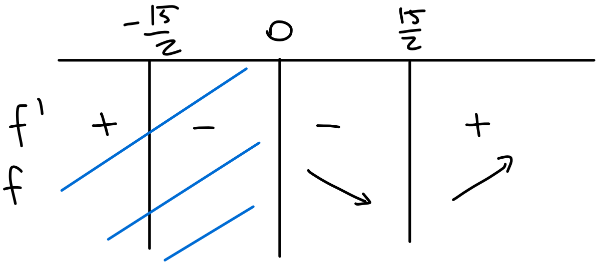
$$\lim_{x \to +\infty} 4x + \frac{225}{x} - 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} 4x + \frac{225}{x} - 3 = +\infty$$

$$f'(x) = 4 - \frac{225}{x^2}$$

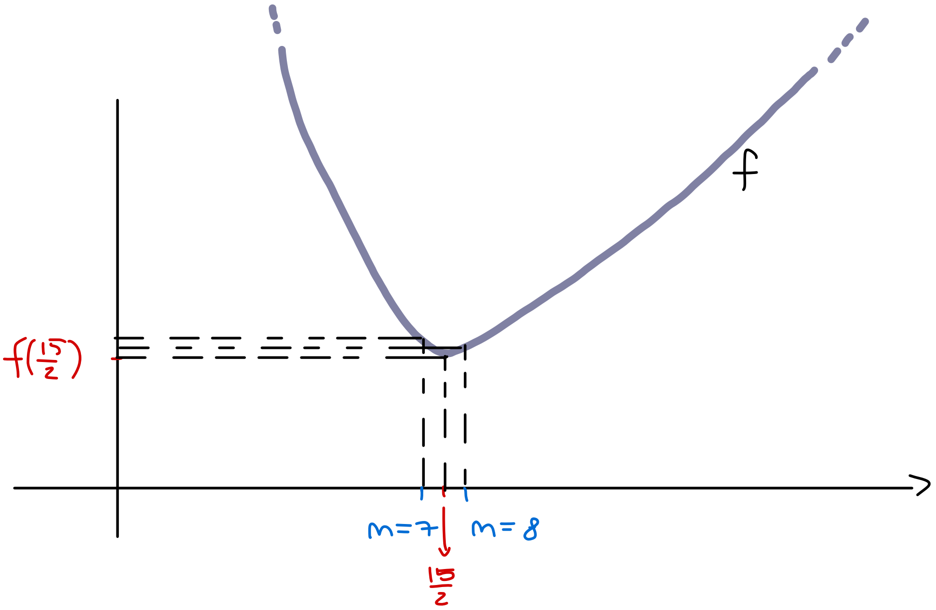
$$f'(x) \geq 0 \qquad 4 - \frac{225}{x^2} \geq 0 \qquad \frac{4x^2 - 225}{x^2} \geq 0$$

$$x \leq -\frac{15}{2} \cup x \geq \frac{15}{2}$$



$x = \frac{15}{2}$ punto di minimo

$f\left(\frac{15}{2}\right) = 57$ minimo assoluto



Ricordiamo però che cerchiamo la soluzione tra gli $m \in \mathbb{N}$, dunque $x = \frac{15}{2}$ non può essere la soluzione cercata.

Visto che la funzione f è decrescente in $(0, \frac{15}{2})$ abbiamo $f(n) > f(7)$ per $n \in \mathbb{N}, n < 7$.

Inoltre la funzione è crescente in $(\frac{15}{2}, +\infty)$, quindi $f(8) < f(n)$ per $n \in \mathbb{N}, n > 8$.

I candidati punti di minimo tra gli interi sono dunque 7 e 8. Andiamo a calcolare $f(7)$ e $f(8)$.

$f(7) \simeq 57{,}14$

$f(8) \simeq 57{,}12$

dunque $f(8) < f(7)$, $f(8)$ è il minimo e $n = 8$ è il punto di minimo

$\Rightarrow$ per costruire il ponte con il minor costo possibile bisogna fare 8 campate.

AM1 gest 20/21

Lezione 15
seconda parte

17/10/2020

Calcolo dei limiti usando le derivate

(in particolare limiti di forme indeterminate)

Strumenti a disposizione:

- Teorema di de L'Hôpital
- Sviluppi di Taylor e parti principali ← questo è lo strumento più importante!

Teorema di de L'Hôpital

Versione "imprecisa": date f, g funzioni tali che:

$$f(x), g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

oppure

$$f(x), g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$$

allora

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\text{forma indeterminata} \\ \frac{0}{0} \text{ oppure } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

← potrebbe non essere una forma indet.

La versione precedente è imprecisa nel senso che il teorema contiene delle altre ipotesi.

Ecco la versione "precisa":
consideriamo $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ tali che

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ t.c. $I := \{x \in X : x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| \leq \delta\}$ è della forma $[x_0 - \delta, x_0)$ opp. $(x_0, x_0 + \delta]$ opp. l'unione;

  se $x_0 = +\infty$ esiste m t.c. $I := [m, +\infty) \subset X$;

  se $x_0 = -\infty$ esiste m t.c. $I := (-\infty, m] \subset X$;

  inoltre $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$;
- $g(x), f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ oppure $g(x), f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$;
- esiste il limite $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

La prima ipotesi dice che X deve avere una forma particolare, ed è soddisfatta nei casi concreti che considereremo.
La seconda ipotesi è quella fondamentale, ed è presente anche nella versione precedente.

La terza ipotesi richiede a priori che esista L: può infatti succedere che $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste mentre $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste.

Esempi

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ forma indet. del tipo $\frac{0}{0}$, applico de L' Hôp. e ottengo:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

Nella lezione precedente abbiamo dato una dimostrazione lunga e complicata di questo limite. Perché? La ragione è che questo limite serve a dimostrare che $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ e questa dimostrazione usa che $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \left[= \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \right] \overset{\text{de L'H.}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \left[= \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \right] \overset{\text{de L'H.}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \operatorname{sen}(0) = 0.$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \left[= \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \right] \overset{\text{de L'H.}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\left[=\frac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{de L.H.}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\left[=\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

Esempi in cui qualcosa va storto

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(x^2)}}{e^{(x^3)}}\left[=\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\substack{\text{de L'H.}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x^2}\right)'}{\left(e^{x^3}\right)'}$$

$$\left(e^{\overbrace{x^a}^{y}}\right)' = (e^y)'(x^a)' = e^y \cdot a x^{a-1} = a x^{a-1} e^{x^a}$$

$$\longrightarrow = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}e^{x^2}}{3x^{\cancel{2}}e^{x^3}}\left[=\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$$\overset{\substack{\text{de L'H.}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{4xe^{x^2}}{3e^{x^3}+3x\cdot 3x^2e^{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4xe^{x^2}}{(3+9x^3)e^{x^3}}\left[=\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$$= \cdots$$

Andando avanti ad applicare de L'Hôpital non viene mai una forma non indeterminata!

D'altra parte possiamo calcolare il limite diversamente:

$$\frac{e^{x^2}}{e^{x^3}} = e^{x^2} \cdot e^{-x^3} = e^{x^2 - x^3} = e^{x^3\left(-1+\frac{1}{x}\right)}$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{x^3}^{\overset{+\infty}{\uparrow}}\overbrace{\left(-1+\frac{1}{x}\right)}^{\overset{-1}{\uparrow}}} = e^{-\infty} = 0.$$

- Applicazione errata del teor. di de L'Hôp.:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x} \overset{\substack{\text{de L'H.}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Questo risultato è sicuramente sbagliato perché $\frac{\log x}{x} < 0$ per $x<1$, e quindi il limite non è $+\infty$.

L'errore sta nel fatto che questo limite non è una forma indeterminata tipo $\frac{0}{0}$ né tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, e quindi NON si può applicare de L'Hôp.

In effetti $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x} = \text{“}\frac{-\infty}{0^+}\text{”} = -\infty.$

non è una forma indet.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{\log x}$ forma indet. $\frac{+\infty}{+\infty}$

infatti $\operatorname{sen} x \geqslant -1$, quindi

$x+\operatorname{sen} x \geqslant x-1$ e siccome

$x-1 \to +\infty$ allora $x+\operatorname{sen} x \to +\infty$.

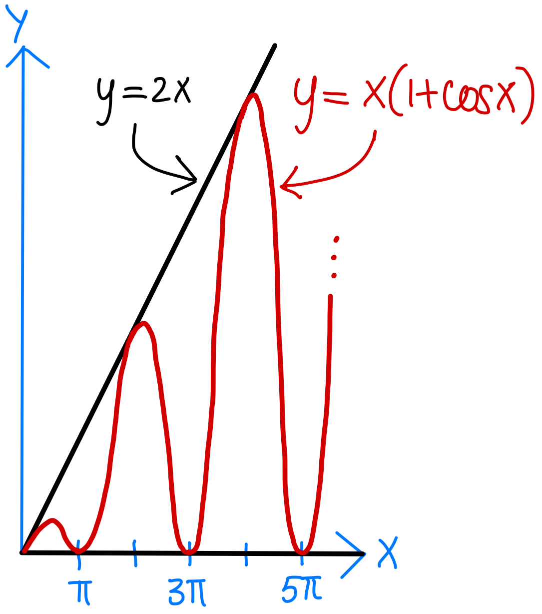
se applico de L'Hôp. ottengo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(1+\cos x)$$

e questo limite non esiste!

Infatti, per $x\to+\infty$, $\cos x$ oscilla infinite volte tra -1 e 1, quindi $1+\cos x$ oscilla tra 0 e 2, e $x(1+\cos x)$ oscilla tra 0 e $2x$.



Come si vede dal disegno il limite per $x\to+\infty$ non esiste.

Ma ragionando diversamente ottengo un risultato diverso!

Infatti $\operatorname{sen} x \geq -1 \Rightarrow \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{\log x} \geq \dfrac{x-1}{\log x}$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\operatorname{sen} x} \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty .$$

Quindi anche $\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{\log x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty .$

Il secondo risultato è quello giusto.

Il primo è sbagliato perché il teorema di de L'Hôp. non si può applicare perché non è verificata l'ipotesi che esiste il limite di $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Morale: se applicando de l'Hôp. a $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si ottiene che $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, non vuol dire che $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, ma solo che non si può applicare il teorema.

Confronti di infiniti e infinitesimi

Terminologia (non molto usata):
dato $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ per "infinito (in x_0)" intendo una funzione che tende a $\pm\infty$ (per $x \to x_0$); per "infinitesimo (in x_0)" intendo invece una funzione che tende a 0.

Dati due infiniti (o due infinitesimi), cioè due funzioni che tendono a $\pm\infty$ (oppure a 0) per $x \to x_0$, ad esempio x^2 e x^3 (per $x \to +\infty$), voglio dare voglio dare un significato preciso all' intuizione che x^2 è molto più piccolo di x^3 (per $x \to +\infty$).

Questo è lo scopo della prossima definizione.

Definizione

Date $f, g : X \to \mathbb{R}$ dico che $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

In tal caso scrivo

ometto di scriverlo se è chiaro dal contesto

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{per } x \to x_0)$$

(il simbolo "$\ll$" si legge "minore minore")

oppure

$$f(x) = o(g(x)) \quad (\text{per } x \to x_0)$$

(il simbolo "$o(g(x))$" si legge "o piccolo di $g(x)$")

Osserv.

- Nella definizione non ho richiesto che f e g siano entrambi infiniti o infinitesimi. Tuttavia la nozione "$f(x) \ll g(x)$" è particolarm. significativa quando $f(x), g(x) \to 0$ oppure $f(x), g(x) \to \pm\infty$ (cioè quando $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ è la forma indet. $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$).

- L'espressione "$f(x) \ll g(x)$" contiene un confronto tra i valori assoluti di $f(x)$ e $g(x)$, e non dipende dal segno di $f(x)$ e $g(x)$. Per esempio $x^2 \ll -x^3$ per $x \to +\infty$.

- Se $g(x) \to \pm\infty$ e $f(x) \to L$ finito, allore è immediato verificare che $f(x) \ll g(x)$.
  Lo stesso vale se $g(x) \to L$ con $L \neq 0$ (incluso $\pm\infty$) e $f(x) \to 0$.

Esempi fondamentali per $x \to +\infty$

(confronto di infinitesimi e infiniti elementari a $+\infty$)

a) $x^a \ll x^b$ se $a<b$

esempi: $x^2 \ll x^3$, $\frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x}$

b) $a^x \ll b^x$ se $0<a<b$

a,b devono essere posit. affinché a^x e b^x siano definite

esempio: $2^x \ll e^x$

c) $(\log x)^a \ll x^b$ se $b>0$, a qualunque

se $b \leq 0$ e $a>0$, $x^b \to 0$ opp. 1 e $(\log x)^a \to +\infty$, quindi $x^b \ll (\log x)^a$

d) $x^a \ll b^x$ se $b>1$ e a qualunque

se $0<b\leq 1$ e $a>0$, $b^x \to 0$ opp. 1 e $x^a \to +\infty$, quindi $b^x \ll x^a$

Osserv.

Caso particolare di quanto detto: $\log x \ll x^{0{,}00001}$

Ma se fate disegnare i grafici al computer sembra vero esattamente il contrario: il punto è che $x^{0{,}00001}$ diventa più grande di $\log x$ solo per valori di x così grandi che il computer non li può gestire.

Stesso discorso per $x^{10000} \ll (1{,}00001)^x$.

Dimostrazioni

a) Devo far vedere che $\frac{x^a}{x^b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $a<b$:

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{perché } a-b<0.$$

b) Devo far vedere che $\frac{a^x}{b^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $a<b$:

$$\frac{a^x}{b^x} = (a/b)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{perché } a/b<1.$$

c) Devo far vedere che $\frac{(\log x)^a}{x^b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $b>0$.

Caso $a=1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} \left[= \frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{bx^{b-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{bx^b} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Caso $a>0$: scrivo

$$\frac{(\log x)^a}{x^b} = \left(\frac{\log x}{x^{b/a}}\right)^a$$

e per il caso precedente $\frac{\log x}{x^{b/a}} \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = \lim_{x\to+\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{\log x}{x^{b/a}}}_{y}\Bigg)^a = \lim_{y\to+\infty} y^a = +\infty .$$

Caso $a<0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = \frac{0}{+\infty} = 0$.

d) Devo far vedere che $\frac{x^a}{b^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ se $b>0$: scrivo

$$\frac{x^a}{b^x} = \exp\left(\log\left(\frac{x^a}{b^x}\right)\right) = \exp\left(a\log x - x\log b\right)$$

$$= \exp\Bigg(\underbrace{x\left(-\log b + a\frac{\log x}{x}\right)}_{y}\Bigg)$$

e osservo che:

- $\frac{\log x}{x} \to 0$ (per c));
- $-\log b + a\frac{\log x}{x} \to -\log b$;
- $y = x\left(-\log b + a\frac{\log x}{x}\right) \to -\infty$;
- $\frac{x^a}{b^x} = e^y \to 0$.

☐

AM1 gest 20/21 Lezione 16

20/10/2020

Dalla lezione precedente: f è trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$ se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \,;$$

Scriviamo: $f \ll g$.

Confronto di infiniti/infinitesimi elementari per $x \to +\infty$

(a) $x^a \ll x^b$ se $a < b$;

(b) $a^x \ll b^x$ se $0 < a < b$;

(c) $(\log x)^a \ll x^b$ se $b > 0$;

(d) $x^a \ll b^x$ se $b > 1$.

Confronto di infiniti/infinitesimi elementari per $x \to 0$

(e) $x^a \ll x^b$ se $a > b$;

(f) $(\log x)^a \ll \frac{1}{x^b} = x^{-b}$ se $b > 0$.

Dim.

Gli enunciati (a)−(d) sono stati dimostrati nella lezione precedente.

(e) $$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^{a-b} = 0 \,.$$

perché $a-b>0$ per ipotesi

(f) caso $a=1$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-b}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-bx^{-b-1}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{b}}{-b} = 0$

caso $a>0$: $\frac{(\log x)^a}{x^{-b}} = \frac{(\log x)^a}{(x^{-b/a})^a} = \left(\frac{\log x}{x^{-b/a}}\right)^a$

quindi: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\log x)^a}{x^{-b}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \Bigg(\underbrace{\frac{\log x}{x^{-b/a}}}_{y}\Bigg)^a \underset{\substack{\uparrow\\(*)}}{=} \lim\limits_{y\to 0^+} y^a = 0.$

(*) uso il cambio di variabile

$y = \left(\frac{\log x}{x^{-b/a}}\right)$; so che $y \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ perché $\log \ll x^{-b/a}$.

caso $a \leq 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\log x)^a}{x^{-b}} = \text{“}\frac{0}{+\infty}\text{”} = 0$ $\square$

Esercizi

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x^2}_{\substack{\downarrow\\0}} \underbrace{\log x}_{\substack{\downarrow\\-\infty}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-2}} \underset{\substack{\uparrow\\ \log x \ll x^{-2} \text{ per } x\to 0^+}}{=} 0$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{(\log x)^2}^{\substack{+\infty\\ \uparrow}}}{\underbrace{e^x}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}} = 0$

Uso il seguente fatto generale:

$(\log x)^a \ll b^x$ se $b>1$, in part. $(\log x)^2 \ll e^x$.

Infatti $(\log x)^a \ll x$ e $x \ll b^x$ per $b>1$.

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{2^x}^{\to+\infty}}{\underbrace{x^4}_{\to+\infty}} = \lim_{x\to+\infty}\Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{x^4}{2^x}}}_{y}\Bigg)^{-1} = \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y} = +\infty\,.$$

  Cambio var. $y=\frac{x^4}{2^x}$

  $x^4 \ll 2^x \Rightarrow y \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$

- $$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x \underset{\substack{y=-x\\ \text{cioè } x=-y}}{=} \lim_{y\to+\infty}(-y)^2e^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y} = 0\,.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log(\log x)} \underset{y=\log x}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\log y} = +\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{2^x - x^{10}}_{+\infty-\infty} = \lim_{x\to+\infty}\overbrace{2^x}^{+\infty}\overbrace{\Bigg(1-\frac{x^{10}}{\underbrace{2^x}_{0}}\Bigg)}^{1} = +\infty.$$

Definizione (di equivalenza asintotica)

Date $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ si dice che f e g sono asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \leftarrow$$

suppongo che sia sensato parlare di questo limite cioè che x_0 sia appross. con punti di X.

Scriviamo $f \sim g$ per $x \to x_0$.

Nozione di "somiglianza" di due funzioni per $x \to x_0$.

Definizione (di parte principale per $x \to 0$ o $x \to +\infty$)

Se $f(x) \sim ax^b$ per $x \to 0$ (risp., per $x \to +\infty$) chiamo ax^b parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ (risp., per $x \to +\infty$).

Esempi

- $\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$ $\Leftarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;
  in particolare la p.p. di sen x per $x \to 0$ è x.

- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ $\Leftarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}$

  applico 2 volte de L'Hôp.

  in particolare la p.p. di $1 - \cos x$ per $x \to 0$ è $\frac{x^2}{2}$.

- $x^2 - 3x^3 \sim -3x^3$ per $x \to +\infty$ $\Leftarrow \frac{x^2 - 3x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3x} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$
  e la p.p. di $x^2 - 3x^3$ per $x \to +\infty$ è $-3x^3$.

- $x^2 - 3x^3 \sim x^2$ per $x \to 0$ $\Leftarrow \frac{x^2 - 3x^3}{x^2} = 1 - 3x \xrightarrow[x \to 0]{} 1$
  e la p.p. di $x^2 - 3x^3$ per $x \to 0$ è x^2.

Proposizione (negli enunciati sotto $x \to x_0$)

(1) $f \sim g$ equivale a dire che f si può scrivere come $f = g + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{“resto”}}}{r}$ con $r \ll g$.

Versione compatta: $f \sim g \iff f = g + o(g)$

(ricordo che $o(g)$ indica qualunque funzione trascurabile rispetto a g).

(2) Se $f \sim g$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

(e se uno dei limiti non esiste, non esiste neanche l'altro).

(3) Se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ allora $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ e $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$.

Attenzione: in generale non vale $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

(4) Principio di sostituzione nei limiti: se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f_1 \cdot f_2 = \lim_{x \to x_0} g_1 \cdot g_2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{f_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1}{g_2}.$$

Se ho un prodotto (o un rapporto) di funzioni, sostituire ad un fattore una funzione asintotic. equivalente (per $x \to x_0$) non cambia il limite (per $x \to x_0$).

Caso particolarmente utile: $x_0 = 0$ opp. $x_0 = +\infty$ e g_1 e g_2 sono potenze (cioè g_1 e g_2 sono le p.p. di f_1 e f_2).

Dim.

(1) suppongo $f \sim g$ e scrivo $f = g + r$ con $r = f - g$;

allora $$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}} - 1 \longrightarrow 0$$ cioè $r \ll g$;

suppongo $f = g + r$ con $r \ll g$: allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)+r(x)}{g(x)} = 1 + \underbrace{\frac{r(x)}{g(x)}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 0}} \longrightarrow 1$$ cioè $f \sim g$.

(2) Scrivo $f(x) = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}} \cdot g(x)$ quindi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

(3) $$\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \underbrace{\frac{f_1}{g_1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{f_2}{g_2}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$$ quindi $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

$$\frac{f_1/f_2}{g_1/g_2} = \Big(\underbrace{\frac{f_1}{g_1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}\Big) \Big/ \Big(\underbrace{\frac{f_2}{g_2}}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 1}}\Big) \longrightarrow 1/1 = 1$$ quindi $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$

(4) $$f_1 \sim g_1 \text{ e } f_2 \sim g_2 \underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{\Longrightarrow} f_1 f_2 \sim g_1 g_2 \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} f_1 f_2 = \lim_{x \to x_0} g_1 g_2 .$$

L'altra parte dell'enunciato si dimostra allo stesso modo.

□

Lezione 17

21/10/2020

Esempi (di uso del principio di sostituzione)

(1), …, (4) si riferiscono agli enunciati della propos. nella lezione precedente.

- $2^x - x^4 \sim 2^x$ per $x \to +\infty$ $\Leftarrow$ $x^4 \ll 2^x$ (uso (1))

In particolare $\underbrace{\lim_{x\to+\infty} 2^x - x^4}_{\text{forma indet. } +\infty-\infty} \overset{\text{per }(2)}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{x}{\overset{\wr}{\overbrace{x+\sin x}}}}{\underset{x^2}{\underset{\wr}{\underbrace{x^2+x+\log x}}}} \underset{\text{per}(4)}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sin x \ll x \overset{(1)}{\overset{\downarrow}{\Rightarrow}} x+\sin x \sim x$

(altern. $\sin x = o(x) \Rightarrow x+\sin x = x+o(x) \sim x$)

$x \ll x^2$ e $\log x \ll x^2$ per $x \to +\infty$ $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $x+\log x \ll x^2$

$\Rightarrow x^2+x+\log x \sim x^2$

In (*) ho usato il seguente fatto generale: (per $x \to x_0$)

se $f_1 \ll g$ e $f_2 \ll g$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora $c_1f_1+c_2f_2 \ll g$.

Infatti $\frac{c_1f_1+c_2f_2}{g} = c_1 \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f_1}{g}} + c_2 \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f_2}{g}} \longrightarrow 0.$

Scrittura compatta: "$c_1 \cdot o(g) + c_2 \cdot o(g) = o(g)$"

Attenzione che $o(g)$ rappresenta funzioni diverse

In particolare $o(g) - o(g) = o(g)$ e non $o(g) - o(g) = 0$.

$$\bullet \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{3x^2+x^4/4}^{\substack{x^4/4 \ (\text{p.p. del num. per } x\to+\infty) \\ \wr}}}{\underbrace{\sqrt{x}-x^3/2}_{\substack{\wr \\ -x^3/2 \ (\text{p.p. del denom. per } x\to+\infty)}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4/4}{-x^3/2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\cdot x = -\infty$$

$$x^2 \ll x^4 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 3x^2 \ll \frac{x^4}{4} \Rightarrow 3x^2+\frac{x^4}{4} \sim \frac{x^4}{4}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \ll x^3 \underset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{x} \ll -x^3/2 \Rightarrow \sqrt{x} - x^3/2 \sim -x^3/2$$

In (*) ho usato questo fatto generale:

se $f \ll g$ allora $c_1 f \ll c_2 g \quad \forall c_1, c_2 \neq 0$

Infatti $\dfrac{c_1 f}{c_2 g} = \dfrac{c_1}{c_2} \cdot \underbrace{\dfrac{f}{g}}_{\substack{\wr \\ \downarrow \\ 0}} \longrightarrow 0$.

$$\bullet \quad \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{3x^2+x^4/4}^{\substack{3x^2 \ (\text{p.p. del numer. per } x\to0) \\ \wr}}}{\underbrace{\sqrt{x}-x^3/2}_{\substack{\wr \\ \sqrt{x}=x^{1/2} \ (\text{p.p. del denom. per } x\to0)}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{3x^2}{x^{1/2}} = \lim_{x\to0^+} 3x^{3/2} = 0$$

Faremo altri esercizi di questo tipo in seguito

Nota su come si scrive:

$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L$ OK $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = L$ OK $\qquad \xcancel{\lim_{x\to x_0} f(x) \to L}$ NO!

$f_1 \sim f_2$ per $x \to x_0$ $\quad \not\Longrightarrow \quad$ $f_1 = f_2$

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

OK

$$\xcancel{\lim_{x \to x_0} f_1(x) \sim \lim_{x \to x_0} f_2(x)}$$

NO!

Comincia ora un pezzo di teoria

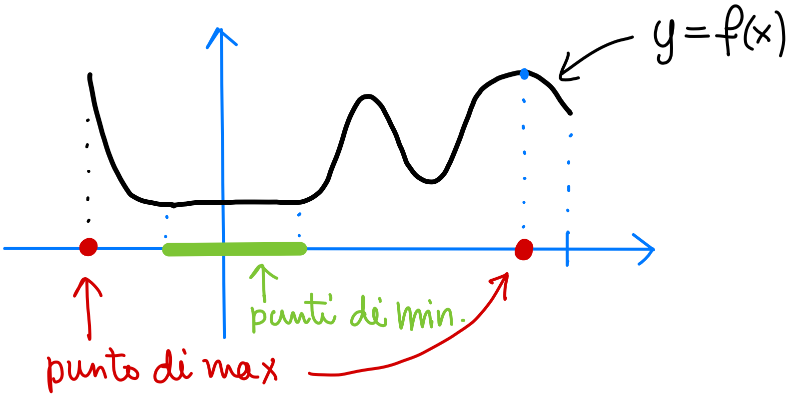
(per arrivare tra le altre cose alla dim. di de L'Hôp.)

Definizione

Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, si dice che x_0 è un punto di massimo di f (risp. di minimo) se

$$\underset{\text{non } ">"}{f(x_0) \geqslant f(x)} \quad \forall x \in X \quad (\text{risp.}, \ f(x_0) \leqslant f(x))$$

In tal caso $f(x_0)$ si chiama valore massimo (risp. min.) di f



Definizione

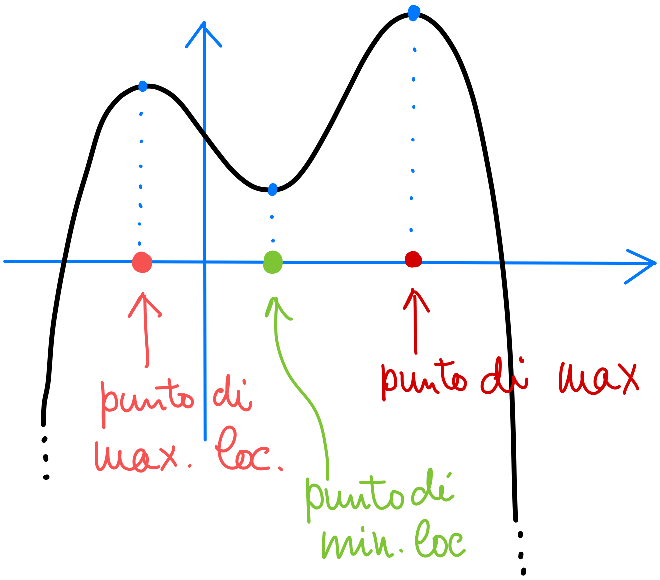
Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X' \subset X$, $x_0 \in X'$, si dice che x_0 è punto di massimo (risp. di minimo) di f relativo a X' se

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \forall x \in X' \quad (\text{risp. } f(x_0) \leqslant f(x))$$

$f(x_0)$ si chiama valore massimo (risp. min.) di f relativo a X'.

Definizione

Data $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, si dice che x_0 è un punto di massimo locale (risp., minimo locale) di f se posso trovare I intervallo aperto t.c. $x_0 \in I$ e x_0 è punto di massimo (risp., minimo) di f relativamente a $X' := X \cap I$



si dice anche massimo relativo al posto mass. loc. e minimo relativo invece di min. loc.

AM1 gest 20/21

lezione 18

22/10/2020

Riprendo (e rifaccio) l'ultimo argomento di ieri.

Definizione

Dato $Y \subset \mathbb{R}$ il massimo di Y, che indico con $\max(Y)$, è l'elemento $\bar{y}$ di Y che è più grande di tutti gli altri, cioè $\bar{y} \geq y \quad \forall y \in Y$.

Il minimo di Y, $\min(Y)$, è l'elemento più piccolo di Y.

Esempi: se $Y = [1, 3]$, $\max(Y) = 3$ e $\min(Y) = 1$.

se $Y = (0, 1]$, $\max(Y) = 1$, $\min(Y)$ non esiste.

se $Y = \mathbb{R}$, max e min non esistono.

Definizione

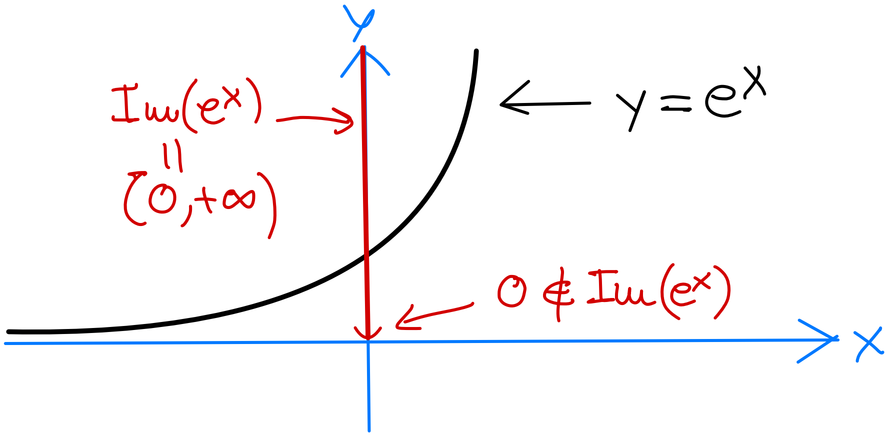
Data $f : X \to \mathbb{R}$, il valore $\overset{\max(f)}{\text{massimo}}$ (risp., $\overset{\min(f)}{\text{minimo}}$) di f è il massimo (risp. minimo) dell'insieme dei valori, cioè dell'immagine:

$$\text{Im}(f) := \{ f(x) : x \in X \} = f(X)$$

cioè il val. max. (risp., min.) è $\max(f(X))$ (risp. $\min(f(X))$).

Un punto di max. (risp., minimo) di f e un qualunque punto $\bar{x}$ dove il valore di f coincide con il valore massimo (risp., minimo) cioè $f(\bar{x}) = \max(f(X))$ (risp., $f(\bar{x}) = \min f(X)$) vale a dire $f(\bar{x}) \geq f(x)\ \forall x \in X$ (risp., $f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in X$).

Attenzione il valore massimo/minimo e quindi i punti di max/min, possono non esistere.

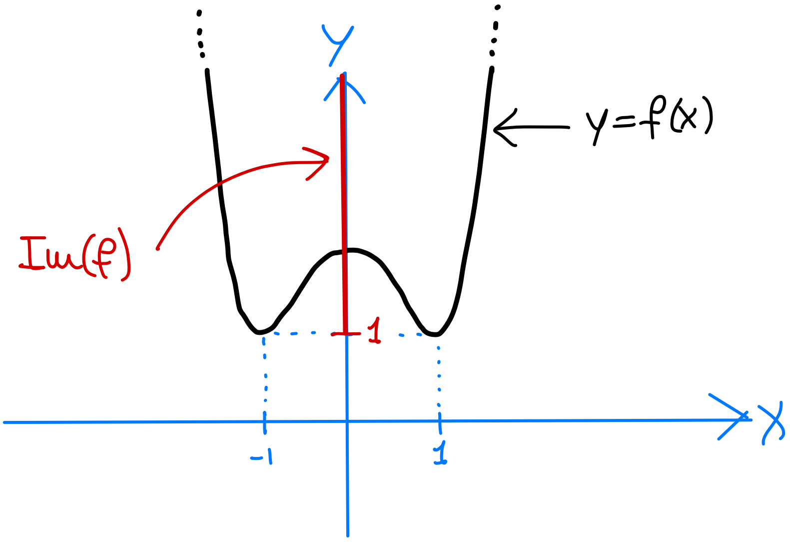


$f(x) = e^x$

$X = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = (0,+\infty)$

$X = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im} = (0,+\infty)$ non ha né min. né max. e quindi e^x non ha punti di max. né di min.



$X = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = [1,+\infty)$

$\min(f) = 1$

punti di min: 1 e -1

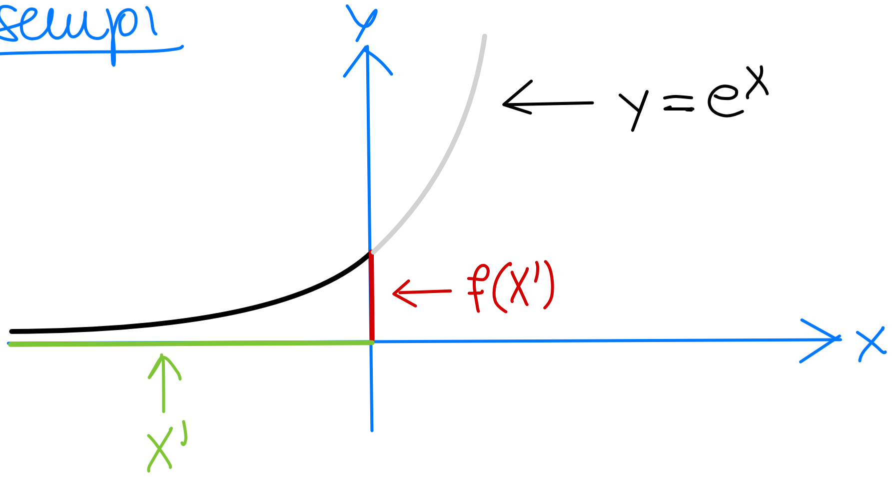
$\max(f)$ non esiste.

Se prendo $X' \subset X$, il valore massimo (risp., minimo) di $f(x)$ per $x \in X'$ è il massimo (risp., minimo) dell'insieme

$$\{f(x) : x \in X'\} = f(X').$$

I punti di massimo (risp., minimo) di f in X' sono i punti $\bar{x}$ di X' dove f assume il valore massimo (risp. minimo)

Esempi



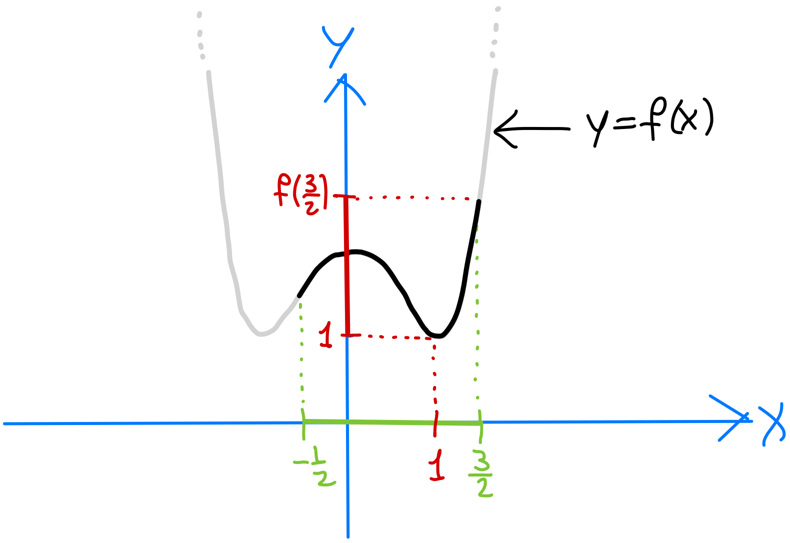
$f(x) = e^x$

$X = \mathbb{R}$

$X' = (-\infty, 0]$

$f(X') = (0, 1]$

val. max. di $f(x)$ per $x \in X'$ è 1, il val. min. non esiste. Il punto di max. di $f(x)$ per $x \in X'$ è 0.



$X = \mathbb{R}$

$X' = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$f(X') = [1, f(\frac{3}{2})]$

punto di max

val. max. di f su X' $= f(\frac{3}{2})$

val. min. di f su X' $= 1 = f(1)$

punto di mi

Definizione

Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, dico che $x_0 \in X$ è un punto di massimo (risp. minimo) locale se posso trovare I intervallo tale che:

- x_0 è interno a I (non è un estremo di I)
- x_0 è un punto di massimo (risp. minimo) di $f(x)$ per $x \in X' := X \cap I$

Definizione

Dato $Y \subset \mathbb{R}$ che si scrive come unione di intervalli, $Y = I_1 \cup \cdots \cup I_N$, chiamo a_i, b_i gli estremi di ogni I_i.
Allora l' estremo superiore di Y, $\sup(Y)$, è il più grande tra $b_1, \dots, b_N$.
E l' estremo inferiore di Y, $\inf(Y)$, è il più piccolo tra $a_1, \dots, a_N$.

Se $\sup(Y)$ appartiene a Y allora è uguale a $\max(Y)$, se invece $\sup(Y) \notin Y$, allora $\max(Y)$ non esiste.

Se $\inf(Y) \in Y$, allora $\min(Y) = \inf(Y)$, se $\inf(Y) \notin Y$, allora $\min(Y)$ non esiste.

Esempi

$Y = (0, 1]$ $\max(Y) = \sup(Y) = 1$

$\inf(Y) = 0$, $\min(Y)$ non esiste

$Y = (0, 1] \cup [2, +\infty)$ $\inf(Y) = 0$, $\sup(Y) = +\infty$

min e max non esistono

Osserv.

Il sup può essere $+\infty$, l'inf può essere $-\infty$.

Si possono definire $\sup(Y)$ e $\inf(Y)$ per insiemi Y qualunque (lo farò dopo)

Definizione

Data $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, l'estremo superiore di f, $\sup(f)$, è l'estremo superiore dell'insieme dei valori, cioè $\operatorname{Im}(f) = f(X)$, e $\inf(f)$ è l'estremo inferiore dei valori.

Se $\sup(f)$ è un valore di f allora è il valore massimo, se $\sup(f)$ non è un valore, allora il valore massimo non esiste. E lo stesso vale per $\inf(f)$.

Problema: come trovare i punti di max e min (se esistono).

Comincio con un risultato teorico:

Teorema (di Weierstrass)
Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora il valore max. e min. di f esistono e quindi esistono i punti di max. e min.

Non lo dimostro.

Osserv.

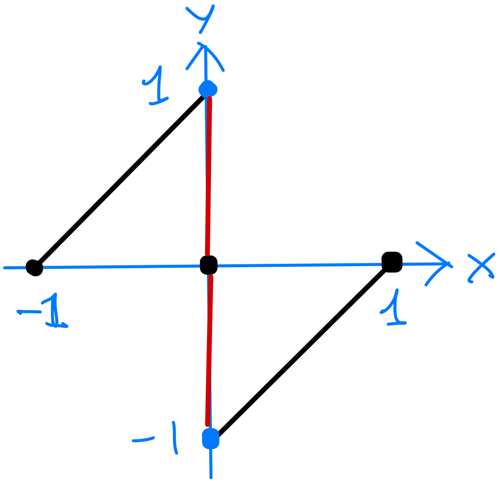
- è importante che il dominio di f sia un intervallo chiuso e limitato

  Infatti $f(x) = e^x$, $X = \mathbb{R}$, allora non esistono né max né min.;
  se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $X := (0,2]$ allora esiste il valore minimo $= \frac{1}{2}$ (raggiunto per $x=2 \leftarrow$ punto di min.) ma non esiste il valore massimo (il sup dei valori è $+\infty$).

- è importante che f sia continua.

Sia $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x-1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



$\mathrm{Im}(f) = (-1,1)$
non esiste né max né min.

Il teor. di Weierstrass non si applica perché f è discontinua in 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +1, \quad f(0) = 0$$

- Il teorema di W. vale anche se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e X è unione di un numero finito di intervalli chiusi, $X = [a_1,b_1] \cup \ldots \cup [a_N,b_N]$.

lezione 19
23/10/2020

Riprendo il problema della ricerca dei massimi e minimi (sia valori che punti di max/min).

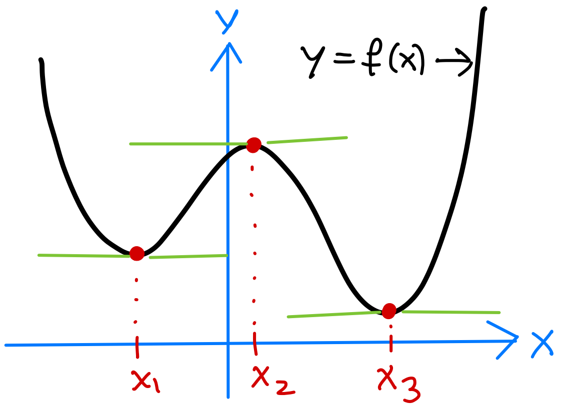
Proposizione

Dati X intervallo (aperto/chiuso/limitato/illimitato...) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, e $x_0 \in X$ t.c.

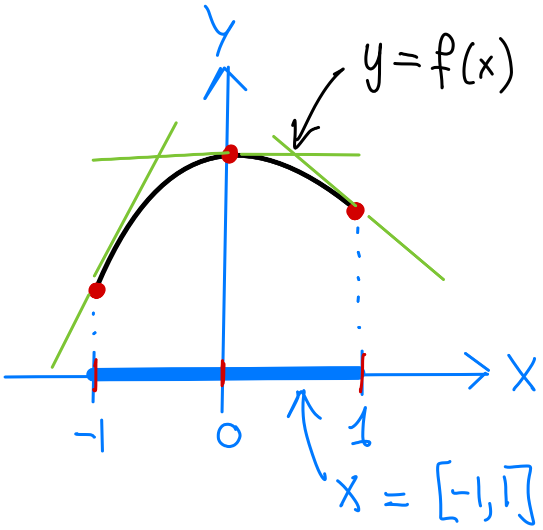
- x_0 è un punto di max. o min. locale di f;
- x_0 è interno X (non è uno degli estremi);
- $f'(x_0)$ esiste.

Allora $f'(x_0) = 0$.

L'enunciato vale anche se X si scrive come unione di intervalli.



x_1 punto di min. loc.
x_2 punto di max. loc.
x_3 punto di min. (assoluto)



0 punto di max.
-1 punto di min.
1 punto di min. loc.

Dim. (che non dipende da disegni)

Suppongo x_0 punto di minimo assoluto.

Il caso in cui x_0 è di min. loc. si fa allo stesso modo, e lo stesso per x_0 punto di max. loc.

Preso h qualunque, ho $f(x_0+h) \geqslant f(x_0)$ per h t.c. $x_0+h \in X$

Se $h>0$ allora $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$ e quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

Invece se $h<0$ allora $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$ e quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0.$$

Quindi $f'(x_0) \geqslant 0$ e $f'(x_0) \leqslant 0 \implies f'(x_0)=0$.

Ho usato l'ipotesi che x_0 sia interno a X per trovare h arbitrariamente piccoli sia positivi che negativi tali che $x_0+h \in X$.

☐

Corollario

Dati X intervallo (o unione di intervalli), $f: X \to \mathbb{R}$, x_0 punto di max. oppure min. dif allora vale almeno una di queste opzioni:

(a) x_0 è un estremo (di uno degli intervalli...);

(b) $f'(x_0)$ non esiste;

(c) $f'(x_0) = 0$.

Procedura per trovare i punti di max. e min.

Prima versione

Dati X intervallo chiuso e limitato (oppure unione di un numero finito di intervalli chiusi e lim. $I_1, \dots, I_N$) e $f: X \to \mathbb{R}$ continua, trovo i punti di max. e min. di f come segue:

Passo 1 : trovo tutti i punti $x \in X$ che soddisfano una delle opzioni del Corollario precedente, cioè:

(a) gli estremi (degli intervalli $I_1, \dots, I_N$);

(b) i punti dove f' non esiste;

(c) i punti dove $f' = 0$.

Passo 2 : calcolate i valori di f nei punti trovati al passo 1 e vedete qual è il più grande (quello è il valore max, e il punto è quello di max.) e qual è il più piccolo (quello è il valore minimo).

Idea: per le ipotesi su X ed f, posso applicare il teorema di Weierstrass e quindi esistono sia i punti di max. che quelli di min. Ma allora sono tra quelli raccolti al passo 1 (per via del Corollario) e quindi li individuo confrontando i valori di f.

Esempi

Trovare max. e min. (punti e valori) di $f(x)$ con $x \in X$ nei casi seguenti

$f(x) = x^3 - 3x$

1. $f(x) = x^3 - 3x$, $X = [-2, 3]$.

Passo 1: (a) estremi di X: -2 e 3

(b) punti dove la derivata non esiste: nessuno

(c) punti dove $f' = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0, \text{ cioè } x = \pm 1$$

I "candidati" sono: $-2, -1, 1, 3$.

Passo 2: $f(\underline{-2}) = \underline{-2}$, $f(-1) = 2$, $f(\underline{1}) = \underline{-2}$, $f(\underline{3}) = \underline{18}$.

valore minimo: -2; punti di minimo: $-2, 1$;

valore max: 18; punti di max: 3.

2. $f(x) = x^3 - 3x$, $X = [0, 3]$

Passo 1: i candidati sono: $0, 1, 3$.

Passo 2: $f(0) = 0$, $f(\underline{1}) = \underline{-2}$, $f(\underline{3}) = \underline{18}$

valore minimo: -2; punti di minimo: 1;

valore max: 18; punti di max: 3.

3. $f(x) = x^3 - 3x$, $X = \mathbb{R}$

passo1 : i candidati sono : ± 1

passo2 : $f(\underline{-1}) = \underline{2}$, $f(\underline{1}) = \underline{-2}$

Conclusione (sbagliata!) :

valore minimo : -2 ; punti di minimo : 1;

valore max : 2 ; punti di max : -1

Errore : non si può applicare la procedura perché X non è limitato.

In questo caso i punti di max. e min. non esistono (infatti $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, quindi sup valori $+\infty$, e inf valori $= -\infty$).

Per inciso vedremo in seguito che ± 1 sono punti di max/min locale.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = [-1, 1]$.

Passo1 : estremi : $-1, 1$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$

i candidati sono : $-1, 1$

Passo2 : $f(\underline{-1}) = \underline{-1}$; $f(\underline{1}) = \underline{1}$

Conclusione (sbagliata!) :

valore minimo : -1 ; punti di minimo : -1;

valore max : 1 ; punti di max : 1

Errore: f non è definita su tutto $X = [-1,1]$, perché non è definita in 0, quindi X avrebbe dovuto essere $[-1,1] \setminus \{0\} = [-1,0) \cup (0,1]$.

$\uparrow \qquad \uparrow$

non sono intervalli chiusi.

Per inciso $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$, sup valori $= +\infty$ (non esiste max) e inf valori $= -\infty$ (non esiste min.)
Disegnando il grafico di $\frac{1}{x}$ vedete che -1 è punto di max. loc., 1 è punto di min. loc (in $X = [-1,0) \cup (0,1]$).

Procedura per trovare i punti di max. e min.

Seconda versione

Dati $X = I_1 \cup \ldots \cup I_N$ con I_i intervalli (chiusi/aperti/limitati e non) con estremi a_i, b_i, e $f: X \to \mathbb{R}$ continua, procedo come segue:

Passo 1 : come prima, raccogliete i seguenti punti:

(a) gli estremi a_i, b_i (anche se non sono in X)

(b) i punti dove f' non esiste;

(c) i punti dove $f' = 0$.

Passo 2 : calcolate $f(x)$ per ogni x al punto 1 se $x \in X$, per gli estremi $a_i \notin X$ calcolate il $\lim_{x \to a_i^+} f(x) = f(a_i^+)$, e per i $b_i \notin X$ calcolate $\lim_{x \to b_i^-} f(x) = f(b_i^-)$.

Prendo il valore più grande: se è raggiunto in un punto $x \in X$ allora è il valore massimo (e x è un punto di max); se invece non è raggiunto in un punto di X, allora è il sup dei valori (e non esiste il max).

Prendo poi il valore più piccolo: se è raggiunto in $x \in X$ allora è il val. min. (e x punto di min) e se no allora è inf. valori (min. non esiste).

estremi di $\mathbb{R}$

3. $f(x) = x^3 - 3x$, $X = \mathbb{R}$

passo1 : i candidati sono : ± 1, $\pm\infty$

passo2 : $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(+\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = -\infty$

sup. val.

max. non esiste!

inf. valori

il min. non esiste!

non esistono punti di max. e min.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = [-1,1] \setminus \{0\} = [-1,0) \cup (0,1]$

Passo1 : i candidati sono : $-1, 1, 0$.

Passo2 : $f(-1) = -1$; $f(1) = 1$, "$f(0^+)$" $= +\infty$

"$f(0^-)$" $= -\infty$

inf. val.

(min. non esiste).

sup. val.

(max non esiste)

AM1 gest 20/21 lezione 21

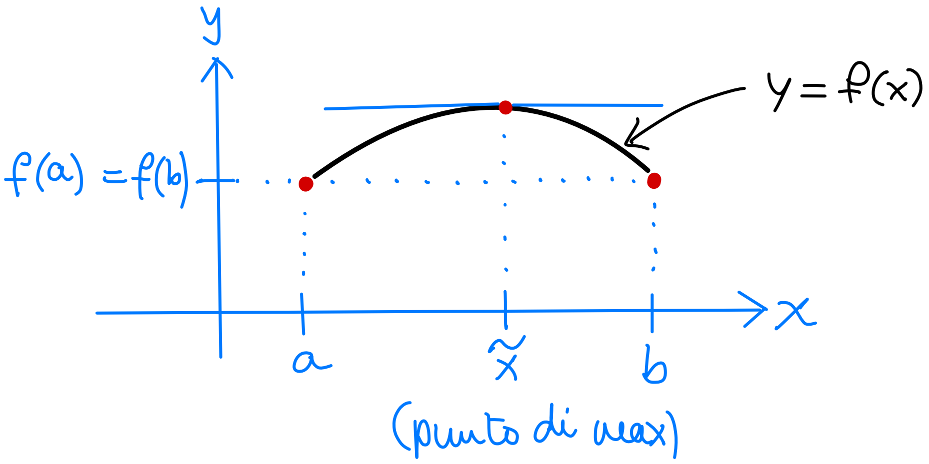
27/10/2020

Teoria necessaria a:

- dimostrazione del teorema di de L'Hôpital;
- teorema dello sviluppo di Taylor;
- strumenti per lo studio dei grafici di funzioni.

Teorema di Rolle

Data $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile t.c. $f(a)=f(b)$ allora esiste $\tilde{x}$ con $a<\tilde{x}<b$ t.c. $f'(\tilde{x})=0$.



Dim.

Per il teorema di Weierstrass esistono x_0 e x_1 punti di max. e min. risp.

Se x_0 (oppure x_1) è interno all'intervallo $[a,b]$, allora $f'(x_0)=0$ (oppure $f'(x_1)=0$) e prendo $\tilde{x}=x_0$ (oppure $\tilde{x}=x_1$).

Se x_0 e x_1 sono estremi di $[a,b]$, allora $f(x_0)=f(x_1)=f(a)=f(b) \Rightarrow \max f = \min f \Rightarrow$ f costante $\Rightarrow f'=0$ ovunque $\Rightarrow$ va bene qualunque $\tilde{x}$. □

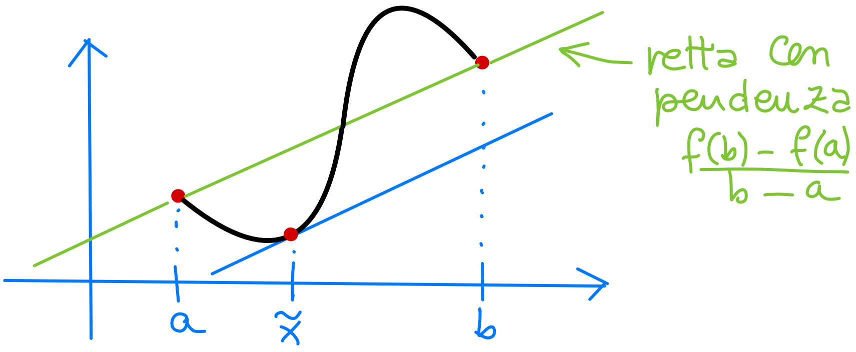
Teorema di Cauchy

Date $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili con $g'(x) \neq 0 \ \forall x$.
Allora $g(a) \neq g(b)$ e esiste $\tilde{x}$ con $a < \tilde{x} < b$ t.c.

$$\frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

Caso particolare (Teorema di Lagrange):
data $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile esiste $\tilde{x}$, $a<\tilde{x}<b$, t.c.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\tilde{x}).$$



Dim. del teorema di Cauchy

Se per assurdo $g(a)=g(b)$, allora per il teor. di Rolle la derivata g' si annulla in qualche punto tra a e b, contrariamente all' ipotesi $g' \neq 0$.

Pongo

$$m := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad ; \quad F(x) := f(x) - m\, g(x) .$$

Allora $F(b) = F(a)$, infatti

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \big(f(b) - m\, g(b)\big) - \big(f(a) - m\, g(a)\big) \\ &= \big(f(b) - f(a)\big) - m\,\big(g(b)-g(a)\big) \\ &= \big(f(b) - f(a)\big) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}}\,\cancel{\big(g(b)-g(a)\big)} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Allora, per il teorema di Rolle, esiste $\tilde{x}$ t.c. $F'(\tilde{x})=0$.
Ma $F'(x) = f'(x) - m\, g'(x)$, e quindi

$$F'(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) - m\, g'(\tilde{x}) = 0$$

cioè $f'(\tilde{x}) = m\, g'(\tilde{x})$, cioè $\dfrac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = m$, che è la tesi.

$\square$

Teor. di de L' Hôpital

Date $f, g : [a, x_0) \to \mathbb{R}$ derivabili e t.c.

- $f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ o $f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$;
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$;
- esiste $L := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Dim.

Caso 1: f, g sono definite anche in x_0, e derivabili e $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{teor. di Cauchy}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})}$$

dove $x < \tilde{x} < x_0$. Attenzione: $\tilde{x}$ dipende da x e tende a x_0 quando $x \to x_0$ e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\tilde{x}\to x_0} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = L.$$

Caso 2: $f, g \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. la dimostrazione è delicata e non la faccio.

Caso 3: $f, g \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$, $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \tilde{L} \neq 0, \pm\infty$.

In questo caso devo dimostrare che $\tilde{L} = L$.

$$\tilde{L} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\{1/g(x)\} \to 0}{\{1/f(x)\} \to 0}$$

del L'Hôp. caso 2 $\longmapsto$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{g'(x)}{f'(x)}}_{\downarrow\, 1/L} \cdot \Big(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\downarrow\, \tilde{L}}\Big)^2 = \frac{\tilde{L}^2}{L}$$

Cioè $\tilde{L} = \frac{\tilde{L}^2}{L}$ cioè $L = \tilde{L}$.

Caso 4: $f, g \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$: non lo faccio. $\square$

Preparazione per il teorema di Taylor.

Notazione compatta per le somme.

Dati degli addendi $x_0, x_1, \dots, x_N$, scrivo la somma come

$$x_0 + x_1 + \dots + x_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$$

Esempi di uso:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \sum_{n=0}^{10} 2^n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$$

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Fattoriale

Dato $n = 1, 2, 3, \dots$ pongo $\underbrace{n!}_{} := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Si pone anche $0! := 1$. "n fattoriale"

Esempi: $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$ ....

Dati $f, g : X \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ che si approssima con punti di X, voglio formalizzare il concetto che f è dello stesso ordine di infinito/infinitesimo di g o di ordine inferiore per $x \to x_0$

Definizione

Dati $f, g : X \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ che si approssima con punti di X, si dice che " $f(x)$ è o grande di $g(x)$ per $x \to x_0$ " e si scrive

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0,$$

se esiste M e un intervallo I con x_0 interno a I t.c.

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in X \cap I,\ x \neq x_0$$

cioè $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato "vicino a x_0".

(se $x_0 = +\infty$, I deve essere della forma $[a, +\infty)$
se $x_0 = -\infty$, I deve essere della forma $(-\infty, b]$)

Importante Se esiste $L := \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, allora $f(x) = O(g(x))$ equivale a $L \neq +\infty$.

In pratica si usa questo come definizione.

Osserv. Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

Esempi

- $x^a = O(x^b)$ per $x \to +\infty$ se $a \leq b$.
- $a^x = O(b^x)$ per $x \to +\infty$ se $a \leq b$.
- $x^a = O(x^b)$ per $x \to 0$ se $a \geq b$.

Fate voi le verifiche.

28/10/2020

L'ultima lezione ho dato la definizione di "$f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$" vale a dire che $|f(x)| \leq M|g(x)|$ "vicino a x_0"

In tal caso diciamo che f ha ordine di infinito / infinitesimo minore o uguale a g.

Se $L = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ esiste ed è finito allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

Anche se non è corretto, useremo spesso questa come definizione

Attenzione: se $f(x) = o(g(x))$ cioè $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ allora $f(x) = O(g(x))$

Esempi per $x \to +\infty$

- $x^a = o(x^b)$ se $a<b$ (già visto)
- $x^a = O(x^b)$ se $a \leq b$

Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to +\infty} x^{a-b} = \begin{cases} 1 & \text{se } a=b \\ 0 & \text{se } a<b \end{cases}$$

Osservazioni

- se $f(x) = O(x^a)$ e $a \leq b$ allora $f(x) = O(x^b)$

caso particolare della regola (intuitiva):
se $f(x) = O(g(x))$ e $g(x) = O(h(x))$ allora $f(x) = O(h(x))$.

Infatti $$\frac{|f(x)|}{|h(x)|} = \underbrace{\frac{|f(x)|}{|g(x)|}}_{\substack{\downarrow \\ L \text{ finito}}} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)|}{|h(x)|}}_{\substack{\downarrow \\ L' \text{ finito}}} \xrightarrow[x \to x_0]{} L \cdot L' \text{ finito}$$

- se $f(x) = O(x^a)$ e $a < b$ allora $f(x) = o(x^b)$

caso particolare della regola (intuitiva):
se $f(x) = O(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$ allora $f(x)$ è $o(h(x))$.

Infatti $$\frac{|f(x)|}{|h(x)|} = \underbrace{\frac{|f(x)|}{|g(x)|}}_{\substack{\downarrow \\ L \text{ finito}}} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)|}{|h(x)|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \xrightarrow[x \to x_0]{} L \cdot 0 = 0.$$

Ex. Trovare le implicazioni tra queste affermaz.

per $x \to +\infty$: a) $f(x) = O(x^4)$; b) $f(x) = o(x^4)$; c) $f(x) = O(x^3)$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{x^4} < +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^4} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{x^3} < +\infty$$

$a) \not\Rightarrow b)$; $b \Rightarrow a)$; $b) \not\Rightarrow c)$; $c) \Rightarrow b)$

se prendo
$f(x) = x^{3,5}$
ottengo $f(x) = o(x^4)$
ma $f(x) \not= O(x^3)$

Quindi $c) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} a)$.

Esempi per $x \to 0$

- $x^a = o(x^b)$ se $a > b$;
- $x^a = O(x^b)$ se $a \geq b$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to 0} x^{a-b} = \begin{cases} 1 & \text{se } a=b \\ 0 & \text{se } a>b \end{cases}$$

Osservazioni

- se $f(x) = O(x^a)$ e $b \leq a$ allora $f(x) = O(x^b)$;
- se $f(x) = O(x^a)$ e $b<a$ allora $f(x) = o(x^b)$.

$\uparrow$ cioè $x^a = o(x^b)$

Esercizio Trovare le implicazioni tra queste affermazioni (per $x \to 0$) :

a) $f(x) = O(x^3)$; b) $f(x) = o(x^3)$; c) $f(x) = O(x^4)$

Risposta : $c) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} a)$.

Derivate di ordine superiore

Derivata seconda di f := derivata della $\underbrace{\text{derivata di } f}_{\text{derivata prima}}$

$$f'' = f^{(2)} := (f')'$$

Derivata terza di f := derivata della derivata seconda di f

$$f''' = f^{(3)} = (f'')'$$

e così via ....

La derivata d-esima si indica con $f^{(d)}$

Dico che f è derivabile d volte (con d intero) se $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(d)}$ esistono tutte.

Polinomio e resto di Taylor (in 0)

Sia f una funzione definita (almeno) su un intervallo I che contiene 0 all'interno, derivabile d-volte (con $d = 0, 1, 2, \dots$).

Il polinomio di Taylor di grado d di f (in 0) è

$$P_d(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(d)}(0)}{d!}x^d$$

Ponendo $f^{(0)} := f$ e $0! := 1$ ho la forma compatta

$$P_d(x) = \sum_{n=0}^{d} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Il resto di Taylor di grado d di f (in 0) è

$$R_d(x) := f(x) - P_d(x)$$

In altre parole

$$f(x) = \underbrace{P_d(x) + R_d(x)}_{\text{sviluppo di Taylor di grado } d \text{ di } f \text{ in } 0}$$

Il punto fondamentale è che il resto R_d è "piccolo" per x vicino a x_0.
Il significato di "piccolo" è spiegato nel teorema seguente:

Teorema (dello sviluppo di Taylor)

Prendo f e d come sopra. Allora per $x \to 0$:

(a) $\boxed{R_d(x) = o(x^d)}$; ← formula del resto di Peano.

(b) se f è derivabile d+1 volte, $R_d(x) = O(x^{d+1})$ e anzi

$$R_d(x) \sim \frac{f^{(d+1)}(0)}{(d+1)!} \cdot x^{d+1} ;$$

(c) se f è derivabile d+1 volte, per ogni x esiste $\tilde{x}$ compreso tra 0 e x tale che

$$\boxed{R_d(x) = \frac{f^{(d+1)}(\tilde{x})}{(d+1)!} x^{d+1} .} \leftarrow$$

formula del resto di Lagrange

Osservazioni

- Più grande è d, più piccolo è (l'ordine di infinitesimo del) resto.
- Valgono queste implicazioni tra le formule in (a), (b), (c):

form. in (c) $\Rightarrow$ formula in (b) $\Rightarrow$ form. in (a)
(formula di Lagrange) (form. di Peano)

Provate a dimostrarlo voi!

Dimostrazione del Teorema

Mi limito al caso $d=2$ (da cui si capisce il caso d qualunque).

a) Devo far vedere che $R_2(x) = o(x^2)$ cioè che $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$. Uso che

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$R_2'(x) = f'(x) - f'(0) - f''(0).x \Longrightarrow R_2'(0) = 0$$

$$R''_2(x) = f''(x) - f''(0) \Longrightarrow R''_2(0) = 0$$

$$R'''_2(x) = f'''(x) \Longrightarrow R'''_2(0) = f'''(0)$$

perché $R_2(0)=0 \Leftarrow (*)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0}\frac{R_2'(x)}{2x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$\leftarrow$ perché $R_2'(0)=0$

de L'H.

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{x\to 0}\frac{R_2''(x)}{2} = R_2''(0) = 0$$

b) Devo dimostrare che $\frac{R_2(x)}{x^3} \longrightarrow \frac{f'''(0)}{6}$

Procedo come prima

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^3} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0}\frac{R_2'(x)}{3x^2} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0}\frac{R_2''(x)}{6x}$$

de L'H. de L'H.

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{x\to 0}\frac{R_2'''(x)}{6} = \frac{R_2'''(0)}{6} = \frac{f'''(0)}{6}.$$

c) Dato x devo trovare $\tilde{x}$ t.c. $\frac{R_2(x)}{x^3} = \frac{f'''(\tilde{x})}{6}$

$$\frac{R_2(x)}{x^3} = \frac{R_2(x)-R_2(0)}{x^3-0^3} \underset{\uparrow}{=} \frac{R_2'(x_1)}{3x_1^2}$$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad b=x,\ a=0 \quad f=R_2,\ g=x^3}$$

teor. di Cauchy: esiste x_1 con $0<x_1<x$

$$= \frac{R_2'(x_1)-R_2'(0)}{3x_1^2-3\cdot 0^2} \overset{\downarrow}{=} \frac{R_2''(x_2)}{6x_2}$$

$$= \frac{R_2''(x_2) - R_2''(0)}{6x_2 - 6.0} \overset{\overset{\text{Cauchy}}{\downarrow}}{=} \frac{R_2'''(x_3)}{6} = \frac{f'''(x_3)}{6}$$

prendo $\tilde{x} = x_3$.

$\square$

AM1 gest 20/21

lezione 24
30/10/2020

Ricordo che:

Teorema 1 (dello sviluppo di T.)

Data f e dato $d = 0, 1, \dots,$ considero lo sviluppo di Taylor di f di ordine d (in 0):

$$f(x) = P_d(x) + R_d(x)$$

$\uparrow$ pol. di T di f di ordine d

resto di T ...

Allora per $x \to 0$:

a) $R_d(x) = o(x^d)$

b) $R_d(x) = O(x^{d+1})$ e precisam. $\dfrac{R_d(x)}{x^{d+1}} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{f^{(d+1)}(0)}{(d+1)!}$

c) $\forall x\ \exists \tilde{x} \in (0, x)$ t.c. $R_d(x) = \dfrac{f^{(d+1)}(\tilde{x})}{(d+1)!} x^{d+1}$.

(per b) e c) serve che f sia derivabile $d+1$ volte.)

Proposizione 2 (Unicità dello sviluppo di T.)

Data f come nel teorema 1, se posso scomporla come

$$f(x) = P(x) + o(x^d)$$

con P polinomio di grado $\leq d$, allora P è per forza il polinomio di Taylor P_d.

Dim

Scrivo

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_d x^d \quad \Rightarrow \quad P(0) = a_0$$

allora:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 X + 3a_2 X^2 + \dots + d\, a_d X^{d-1} \quad \Rightarrow \quad P'(0) = a_1$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3 X + \dots + d(d-1)\, a_d\, x^{d-2} \quad \Rightarrow \quad P''(0) = 2a_2$$

Devo dimostrare che

$$a_0 \overset{\checkmark}{=} f(0), \quad a_1 \overset{\checkmark}{=} f'(0), \quad a_2 \overset{\checkmark}{=} \frac{f''(0)}{2}, \dots, \quad a_d = \frac{f^{(d)}(0)}{d!}$$

L' ipotesi è che $f(x) - P(x) = o(x^d)$ cioè

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{f(x) - P(x)}^{\uparrow\; f(0) - P(0)}}{\underbrace{x^d}_{\downarrow\; 0}}$$

necess. una forma indet. "$\frac{0}{0}$" cioè $f(0) = P(0) = a_0$

$$\overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{f'(x) - P'(x)}^{\uparrow\; f'(0) - P'(0)}}{\underbrace{d\,x^{d-1}}_{\downarrow\; 0}}$$

necess. forma indet. "$\frac{0}{0}$" cioè $f'(0) = P'(0) = a_1$

$$\overset{\text{de L'H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{f''(x) - P''(x)}^{\uparrow\; f''(0) - P''(0)}}{\underbrace{d(d-1)\,x^{d-2}}_{\downarrow\; 0}}$$

necessar. $f''(0) = P''(0) = 2a_2$

etc. etc. $\square$

Sviluppo di Taylor in x_0

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$, f funzione definita almeno in un intervallo I che contiene x_0 all'interno, f derivabile d volte, allora il polinomio di Taylor di grado d di f in x_0 è

$$P_{x_0,d}(h) := f(x_0) + f'(x_0)\cdot x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(d)}(x_0)}{d!}x^d$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}x^n$$

Il resto di Taylor è $R_{x_0,d}(h) = f(x_0+h) - P(h)$, e lo sviluppo di T. è:

$$f(x_0+h) = P_{x_0,d}(h) + R_{x_0,d}(h)$$

e ponendo $x = x_0+h$, cioè $h = x - x_0$,

$$f(x) = P_{x_0,d}(x-x_0) + R_{x_0,d}(x-x_0)$$

Il teorema dello sviluppo di Taylor è esattamente lo stesso: per $h \to 0$ vale che

a) $R_{x_0,d}(h) = o(h^d)$,

b) $R_{x_0,d}(h) = O(h^{d+1})$,

c) $R_{x_0,d}(h) = \dfrac{f^{(d+1)}(\tilde{h})}{(d+1)!}h^{d+1}$ con $\tilde{h} \in (0,h)$

Esempio di uso dello sviluppo di T

Calcolare il valore di "e" con errore inferiore a 10^{-3}.

Ricordo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^d}{d!} + R_d(x)$

Quindi $e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{d!} + R_d(1)$

$$= \sum_{n=0}^{d} \frac{1}{n!} + R_d(1)$$

Quindi se riesco a trovare d tale che $|R_d(1)| \leq 10^{-3}$ allora $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{d!}$ approssima e con errore $\leq 10^{-3}$.

Come trovo d? Uso la formula di Lagrange per il resto: $R_d(x) = \frac{f^{(d+1)}(\tilde{x})}{(d+1)!} x^{d+1} = \frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!} x^{d+1}$

con $\tilde{x} \in (0,x)$.

Quindi $R_d(1) = \frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!}$ con $0 < \tilde{x} < 1$,

uso che $e \leq 3$

$$|R_d(1)| = \frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!} \leq \frac{e}{(d+1)!} \leq \frac{3}{(d+1)!}$$

Cerco d t.c. $\frac{3}{(d+1)!} \leq 10^{-3}$ $\left(\Rightarrow |R_d(1)| \leq 10^{-3}\right)$

Procedo a tentativi:

$d=4$: $\frac{3}{5!} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40} > \frac{1}{1000}$ NO

$d=5$: $\frac{3}{6!} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240} > \frac{1}{1000}$ NO

$d=6$: $\frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} < \frac{5}{5000} = \frac{1}{1000}$ OK!

Conclusione:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2,71805\ldots$$

approssima e con errore inferiore a 10^{-3}

(In effetti $e = 2,71828\ldots$)

Esercizi sul calcolo degli sviluppi di T.

Punto chiave: usare dove possibile gli sviluppi noti: e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$.

1. Trovare lo sviluppo (o il polinomio) di T. di ordine 6 di $\operatorname{sen}(x^2)$ in 0.

Uso lo sviluppo noto: $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + O(y^7)$

e sostituisco $y = x^2$:

$$(*) \qquad \operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14}).$$

in particolare

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{13})$$

Per la proposizione 2, $x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}$ è il polinomio di Taylor di $\operatorname{sen}(x^2)$ di ordine 13,

(perché il resto $o(x^{13})$) e coincide con il pol. di T. di ordine d per d = 10, 11, 12.

Usando (*) e il fatto che $\frac{x^{10}}{5!} = o(x^{10})$ ottengo

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^{10}) + o(x^{14})$$

usando la regola "$o(x^a) + o(x^b) = o(x^a)$, se $a \leq b$" ottengo

dimostrazione domani

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^{10})$$

Questo è lo sviluppo di T. di ordine 9 ed anche lo sviluppo di ordine d con d = 6, 7, 8.

A posteriori, per risolvere l'esercizio bastava partire dallo sviluppo $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^5)$ infatti

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^{10}).$$

Ma attenzione: non basta partire da $\operatorname{sen} y = y + o(y^3)$ perchè si ottiene solo

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^6)$$

questo è solo lo sviluppo di ordine 5.

AM1 gest 20/21

Lezione 25

31/10/2020

Calcolo di sviluppi di Taylor (in 0)

1. Trovare lo sviluppo di T. di $\operatorname{sen}(x^2)$ all'ordine 6.

Uso lo sviluppo $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + O(y^5)$ e sostituisco $y = x^2$:

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10})$$
$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

quindi $x^2 - \frac{x^6}{6}$ è il pol. di T. di ordine 6.

Osservazioni

- In realtà ho anche $\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^9)$ quindi $x^2 - \frac{x^6}{6}$ è anche il pol. di T. di ordine 9.

- Cosa succede se uso lo sviluppo $\operatorname{sen} y = y + O(y^3)$?

  $$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 + O(x^6)$$

  ma $O(x^6)$ non è $o(x^6)$, questa formula NON basta a trovare lo sviluppo di ordine 6 (ma basta a trovare quello di ordine 5).

- Cosa succede se uso $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + O(y^7)$?

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + O(x^{14})$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Va bene, ma ho fatto dei calcoli in più del necessario.

2. Trovare lo sviluppo all'ordine 4 di e^{1+x^2}.

Soluzione 1 (errata)

Uso $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + O(y^3)$ e sostituisco $y = 1+x^2$:

$$e^{1+x^2} = 1 + (1+x^2) + \frac{(1+x^2)^2}{2} + O((1+x^2)^3)$$

NON VA BENE! perché $y = 1+x^2 \not\to 0$ per $x \to 0$.

E infatti, esaminando il resto:

$$O((1+x^2)^3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso lo svil.} \\ \text{di } (a+b)^3}}{=} O(1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non è } o(x^4) \\ \text{(non è infinitesimo!)}}}{O(1)}$$

Soluzione 2 (corretta)

$$e^{1+x^2} = e \cdot e^{x^2}$$

uso $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+O(y^3)$ e sostituisco $y=x^2$

$$= e\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6)\right)$$

$$= e + ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + O(x^6)$$

questo è lo sviluppo all'ordine 4 perché $O(x^6)$ è anche $o(x^4)$.

(In effetti è anche lo sviluppo all'ordine 5.)

Mettiamo in chiaro alcune "regole" per l'uso degli "o grandi" (e degli "o piccoli")

- Sostituzione

Se $g(y) = O(f(y))$ per $y \to y_0$, e $h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$

allora $g(h(x)) = O(f(h(x)))$.

Dim.

Devo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \frac{|g(h(x))|}{|f(h(x))|}$ non è $+\infty$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|g(h(x))|}{|f(h(x))|} \underset{\substack{\uparrow \\ y=h(x)}}{=} \lim_{y\to y_0} \frac{|g(y)|}{|f(y)|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi}}}{=} L \text{ finito.}$$

- "$c\, O(f) = O(f)$", cioè: se $g(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$ allora $c \cdot g(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$

Cioè le costanti davanti agli O-grandi si possono eliminare.

Dim. Per ipotesi $\frac{|g(x)|}{|f(x)|} \longrightarrow L$ finito, e quindi

$$\frac{|c \cdot g(x)|}{|f(x)|} = |c| \cdot \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \longrightarrow |c| \cdot L \text{ finito.}$$

- "$O(f) + O(f) = O(f)$"

cioè: se $g_1(x) = O(f(x))$ e $g_2(x) = O(f(x))$ allora $g_1(x) + g_2(x) = O(f(x))$.

Dim. Per ipotesi $\frac{|g_1(x)|}{|f(x)|} \longrightarrow L_1$, $\frac{|g_2(x)|}{|f(x)|} \longrightarrow L_2$ con L_1, L_2 finiti. Quindi

$$\frac{|g_1(x) + g_2(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{|g_1(x)|}{|f(x)|} + \frac{|g_2(x)|}{|f(x)|} \longrightarrow L_1 + L_2$$

- Casi particolari:

se $x \to 0$ e $a \leq b$: "$O(x^a) + O(x^b) = O(x^a) + O(x^a) = O(x^a)$"

La somma di O-grandi di diverse potenze è O-grande della potenza di grado più basso.

se $x \to +\infty$ e $a \leq b$: "$O(x^a) + O(x^b) = O(x^b) + O(x^b) = O(x^b)$"

La somma di O-grandi di diverse potenze è O-grande della potenza di grado più alto.

- "$O(f_1) \cdot O(f_2) = O(f_1 \cdot f_2)$"

cioè : se $g_1(x) = O(f_1(x))$ e $g_2(x) = O(f_2(x))$

allora $g_1(x) \cdot g_2(x) = O(f_1(x) \cdot f_2(x))$.

Dim.

Per ipotesi $\frac{|g_1(x)|}{|f_1(x)|} \to L_1$, $\frac{|g_2(x)|}{|f_2(x)|} \to L_2$ con L_1, L_2 finiti.

Allora

$$\frac{|g_1(x) \cdot g_2(x)|}{|f_1(x) \cdot f_2(x)|} = \frac{|g_1(x)|}{|f_1(x)|} \cdot \frac{|g_2(x)|}{|f_2(x)|} \longrightarrow L_1 \cdot L_2 \text{ finito.}$$

- "$(O(f))^a = O(f^a)$"

cioè : se $g(x) = O(f(x))$ allora $(g(x))^a = O((f(x))^a)$.

Dim. per esercizio.

- "$O(O(f)) = O(f)$"

cioè : se $g(x) = O(h(x))$ e $h(x) = O(f(x))$ allora $g(x) = O(f(x))$.

Dim.

$$\frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \overbrace{\frac{|g(x)|}{|h(x)|}}^{L_1 \text{ finito}} \cdot \overbrace{\frac{|h(x)|}{|f(x)|}}^{L_2 \text{ finito}} \longrightarrow L_1 \cdot L_2 \text{ finito.}$$

Esempio $\quad O(ax^b) = O(x^b)$.

le costanti moltiplicative dentro gli O-grandi non contano.

- Se $g(x) \sim c\, f(x)$ allora $g(x) = O(f(x))$

infatti $\frac{g(x)}{cf(x)} \to 1$ cioè $\frac{g(x)}{f(x)} \to c$.

3. Completate le seguenti "regole":

$c\, o(f) =$

$o(f) + o(f) =$

$o(f) + O(f) =$

$o(f_1) \cdot o(f_2) =$

$\to$ $o(f_1) \cdot O(f_2) =$

$(o(f))^a =$

$o(o(f)) =$

$\to$ $o(O(f)) =$

$\to$ $O(o(f)) =$

4. Trovare lo sviluppo all' ordine 9 di e^{-2x^3}

Uso $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + O(y^4)$ e sostituisco $y = -2x^3$ (posso farlo? Sì!):

$$e^{-2x^3} = 1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2} + \frac{(-2x^3)^3}{6} + O((-2x^3)^4)$$

$$= 1 - 2x^3 + 2x^6 - \frac{4}{3}x^9 + O(\cancel{16}x^{12})$$

questo è lo sviluppo cercato perché $O(x^{12})$ e anche $o(x^9)$.

5. Sviluppo all'ordine 8 di $(1+x^4)\log(1+x^4)$.

Uso $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$ e sost. $y = x^4$:

$$(1+x^4)\log(1+x^4) = (1+x^4)\left(x^4 - \frac{x^8}{2} + O(x^{12})\right)$$

$$= x^4 - \frac{x^8}{2} + O(x^{12}) + x^8 - \frac{x^{12}}{2} + x^4\, O(x^{12})$$

$$= x^4 + \frac{x^8}{2} + O(x^{12}) + O(x^{12}) + O(x^{16})$$

$$= x^4 + \frac{x^8}{2} + O(x^{12})$$

questo è lo sviluppo cercato perché $O(x^{12})$ è anche $o(x^8)$.

Cosa succede usando $\log(1+y) = y + O(y^2)$?

$$(1+x^4)\log(1+x^4) = (1+x^4)\left(x^4 + O(x^8)\right) =$$

$$= x^4 + O(x^8) + x^8 + x^4\, O(x^8)$$

$$= x^4 + x^8 + O(x^8) + O(x^{12})$$

$$= x^4 + x^8 + O(x^8)$$

non va bene perché $O(x^8)$ non è $o(x^8)$.

Attenzione: è corretto scrivere $f(x) = x^4 + x^8 + O(x^8)$ ma non ha senso tenere sia $x^8 + O(x^8)$, meglio scrivere $x^8 + O(x^8) = O(x^8)$.

6. Trovare lo sviluppo all'ordine 2 di $\log(3+x)$.

$$\log(3+x) = \log\left(3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right) = \log 3 + \log\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

adesso uso $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$ e sostituisco $y = \frac{x}{3}$:

$$\log(3+x) = \log 3 + \left(\frac{x}{3} - \frac{(x/3)^2}{2} + O\left(\left(\frac{x}{3}\right)^3\right)\right)$$

$$= \log 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + O(x^3)$$

è la risposta corretta perchè $O(x^3)$ è anche $o(x^2)$.

NON va bene usare $\log(1+y) = \ldots\ldots$ e poi sostituire $y = 2+x$ perché $2+x \underset{x\to 0}{\cancel{\to}} 0$

Calcolo delle parti principali (per $x \to 0$)

La p.p. di $f(x)$ per $x \to 0$ è il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor.

Infatti se il primo termine non nullo è di grado d ho che lo sviluppo di ordine d è

$$f(x) = ax^d + o(x^d) \implies f(x) \sim ax^d.$$

1. Trovare p.p. per $x \to 0$ di $\operatorname{sen}(x^4)$

So che $\operatorname{sen} y = y + O(y^3) \Rightarrow \operatorname{sen} y \sim y$

per sostituzione $y = x^4$ ottengo $\operatorname{sen}(x^4) \sim x^4$.

2. Trovare p.p. per $x \to 0$ di $e^{\operatorname{sen} x} - 1$

$e^y = 1 + y + O(y^2) \Rightarrow e^y - 1 = y + O(y^2) \Rightarrow$

$e^y - 1 \sim y$, sostituisco $y = \operatorname{sen} x$:

$e^{\operatorname{sen} x} - 1 \sim \operatorname{sen} x \sim x$

posso farlo perchè $\operatorname{sen} x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Esercizi su parti principali e sviluppi di Taylor

Trovare la p.p. per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \log(1+x^2) \cdot \operatorname{sen} x$

So che: $\boxed{\operatorname{sen} x \sim x}$ $\left(\Leftarrow \operatorname{sen} x = x + O(x^3)\right)$

$\log(1+y) \sim y$ $\left(\Leftarrow \log(1+y) = y + O(y^2)\right)$

Sostituisco $y = x^2$

$$\boxed{\log(1+x^2) \sim x^2}$$

(posso farlo perché $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$).

Quindi

$$f(x) = \log(1+x^2) \cdot \operatorname{sen} x \sim x^2 \cdot x = x^3$$

Riassumendo

$$\text{p.p.}\left(f(x)\right) = x^3$$

Soluzione alternativa:

So che $\boxed{\operatorname{sen} x = x + O(x^3)}$

e $\log(1+y) = y + O(y^2) \Rightarrow \boxed{\log(1+x^2) = x^2 + O(x^4)}$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x^2)\cdot \operatorname{sen} x \\ &= \left(x^2+O(x^4)\right)\cdot\left(x+O(x^3)\right) \\ &= x^3 + x^2\cdot O(x^3) + O(x^4)\cdot x + O(x^4)\cdot O(x^3) \\ &= x^3 + O(x^5) + O(x^5) + O(x^7) \\ &= x^3 + O(x^5) \longleftarrow \text{ sviluppo di T di } f(x) \text{ di ordine 3 o 4} \\ &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Quindi $p.p.(f(x)) = x^3$.

2. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) + \log(1+x^3)$

$\operatorname{sen} y \sim y \implies \boxed{\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2}$

$\log(1+y) \sim y \implies \boxed{\log(1+x^3) \sim x^3}$

Per l'enunciato sotto

$$f(x) \sim x^2+x^3 \sim x^2$$

Quindi $p.p.(f(x)) = x^2$

Proposizione

Se $f(x) \sim ax^b$ e $g(x) \sim cx^d$ (per $x \to 0$ opp. $x \to +\infty$)

allora $f(x) + g(x) \sim ax^b + cx^d$

TRANNE se $ax^b + cx^d = 0$, cioè $b=d$ e $c=-a$.

Dim.

So che $f(x) = ax^b + o(x^b)$, $g(x) = cx^d + o(x^d)$

quindi

$$f(x) + g(x) = ax^b + cx^d + o(x^b) + o(x^d)$$

Caso 1: $x \to 0$ e $b<d$: $o(x^b) + o(x^d) = o(x^b) = o(ax^b)$

$= o(ax^b + cx^d)$ quindi $f(x)+g(x) \sim ax^b + cx^d$.

Gli altri casi si fanno in modo simile.... □

3. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - \log(1+x^2)$

Siccome $\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2$ e $\log(1+x^2) \sim x^2$

NON posso concludere che $f(x) \sim x^2 - x^2 = 0$.

Devo usare gli sviluppi con i resti!!

Provo con

$$\log(1+y) = y + O(y^2) \Rightarrow \log(1+x^2) = x^2 + O(x^4)$$

$$\operatorname{sen} y = y + O(y^3) \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + O(x^6)$$

e ottengo

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - \log(1+x^2)$$

$$= \cancel{x^2} + O(x^6) - \cancel{x^2} - O(x^4) = O(x^4)$$

Corretto, ma non ci permette di concludere.

Uso sviluppi più precisi:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3) \Rightarrow \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)$$

e

$$\operatorname{sen} y = y + O(y^3) \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + O(x^6)$$

come prima. Quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x^2) - \log(1+x^2) \\ &= \left(x^2 + O(x^6)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right) \\ &= \cancel{x^2} + O(x^6) - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} - O(x^6) \\ &= \frac{x^4}{2} + O(x^6) \\ &\sim \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

Riassumendo: $\quad \text{p.p.}(f(x)) = \frac{x^4}{2}$.

Attenzione: usare lo sviluppo $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + O(y^5)$ cioè $\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10})$ porta allo stesso risultato.

Invece usare gli sviluppi $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + O(y^5)$ e $\log(1+y) = y + O(y^2)$ non funziona.

Provateci e vedete dov'è il problema.

4. $f(x) = \log(\cos x)$

$$f(x) = \log\Big(1+\underbrace{(\cos x - 1)}_{y}\Big)$$

$y = \cos x - 1$
noto che
$y \to 0$ per $x \to 0$

$$\longrightarrow \; = \log(1+y)$$

sviluppo
di $\log(1+y)$

$$\longrightarrow \; \sim y$$

$$= \cos x - 1$$

sviluppo di T.
di $\cos x$

$$\longrightarrow \; = \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) - \cancel{1} = -\frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

Quindi p.p. $(f(x)) = -\dfrac{x^2}{2}$.

5. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}-1}{\operatorname{sen}(x^4)}$

Cerco separatamente le p.p. di numer. e denom.

$$e^y = 1 + y + O(y^2) \Longrightarrow e^{-2x} = 1 + (-2x) + O((-2x)^2)$$

$$= 1 - 2x + O(x^2)$$

↑
sost. $y = -2x$
(legittima!)

Quindi $e^{-2x} - 1 = \cancel{1} - 2x + O(x^2) - \cancel{1} = -2x + O(x^2)$

e $e^{-2x} - 1 \sim -2x$.

$$\operatorname{sen} y \sim y \overset{\uparrow}{\Longrightarrow} \operatorname{sen}(x^4) \sim x^4$$

Sost. $y=x^4$
(Legittima!)

Quindi

$$f(x) = \frac{e^{-2x}-1}{\operatorname{sen}(x^4)} \sim \frac{-2x}{x^4} = -2x^{-3}$$

Quindi $\quad p.p.(f(x)) = -2x^{-3}$.

Provate a farlo con i resti.

Trovare la p.p. per $x \to +\infty$ delle seguenti funz.

6. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

per $x \to +\infty$ $\quad 1+x \sim x \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{3}} \sim x^{\frac{1}{3}}$

$f(x) \sim x^{\frac{1}{3}}$ e $\quad p.p.(f(x)) = x^{\frac{1}{3}}$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}$

$x+1 \sim x \Longrightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} \sim x^{\frac{1}{3}}$

$x-1 \sim x \Longrightarrow (x-1)^{\frac{1}{3}} \sim x^{\frac{1}{3}}$

Quindi $\quad f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} \sim x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}}$

e $\quad p.p.(f(x)) = 2x^{\frac{1}{3}}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

In questo caso $\sqrt[3]{x+1} \sim x^{1/3}$, $\sqrt[3]{x-1} \sim x^{1/3}$ ma NON posso concludere $f(x) \sim x^{1/3} - x^{1/3} = 0$.

L'esercizio è complicato!

Raccolgo x dagli argomenti delle radici:

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - \left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= x^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Siccome $\pm\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$, posso usare lo sviluppo di T (in 0) di $(1+y)^{\frac{1}{3}}$:

$$(1+y)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}y + O(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

sostituendo $y = \frac{1}{x}$ (posso farlo perché $y = \frac{1}{x}$ tende a 0 quando $x \to +\infty$!) ottengo

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

e sostituendo $y = -\frac{1}{x}$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) + O\left(\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Quindi

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\left[\left(\cancel{1}+\frac{1}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-\left(\cancel{1}-\frac{1}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + O\left(x^{-\frac{5}{3}}\right)$$

Siccome $O\left(x^{-\frac{5}{3}}\right)$ è trascurabile rispetto a $x^{-\frac{2}{3}}$ per $x \to +\infty$ (perché $-\frac{2}{3} > -\frac{5}{3}$)

$$\text{p.p.}\left(f(x)\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

Funzioni crescenti e decrescenti

Considero $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}$.

Dico che f è crescente (su X) se aumentando il valore di x aumenta quello di f(x), cioè se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \leqslant f(x_1).$$

Dico che f è strettamente crescente se per ogni x_0 e $x_1 \in X$

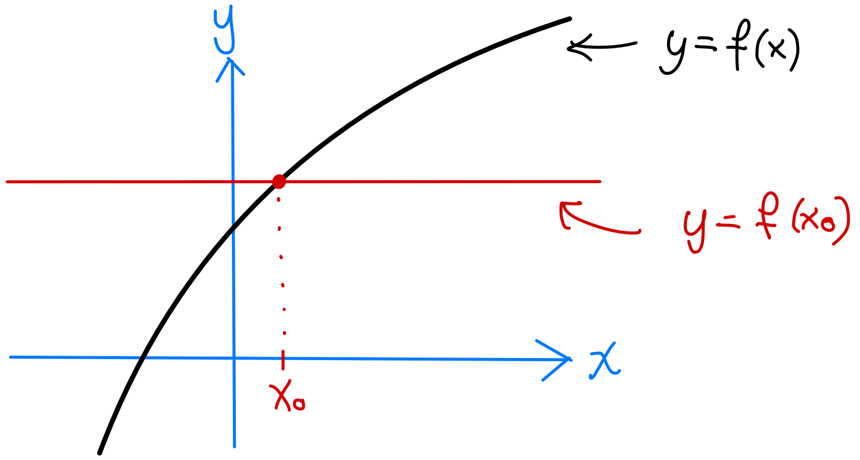
$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1).$$

Esempi: e^x è strett. crescente ($x_0 < x_1 \Rightarrow e^{x_0} < e^{x_1}$) e lo stesso vale per x^3, $\log x$.

Ma x^2 non è crescente (se $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$ allora $x_0 < x_1$ ma $f(x_0) = 1 > f(x_1) = 0$)

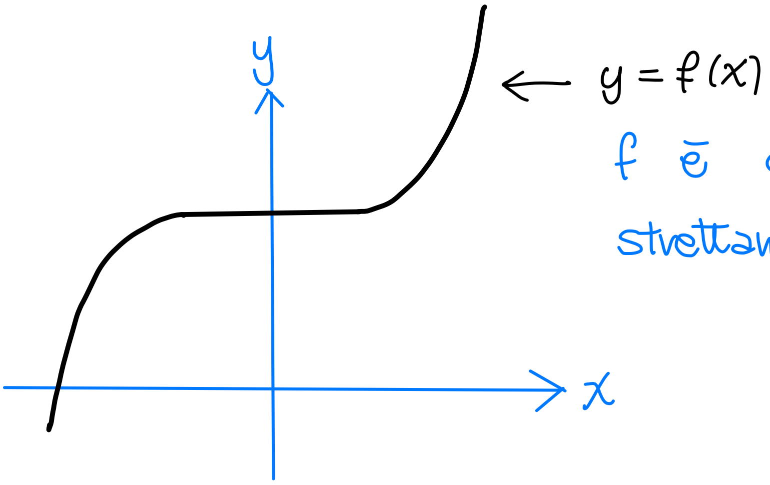
Tuttavia x^2 è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ ($0 \leqslant x_0 < x_1 \Rightarrow x_0^2 < x_1^2$).

Interpretazione grafica:



(1) Un punto che si muove lungo il grafico spostandosi da sin. verso dx. sale (l'ordinata cresce)

(2) per ogni $x_0 \in X$, la parte del grafico a destra di x_0 sta sopra la retta $y=f(x_0)$ mentre la parte a sinistra di x_0 sta sto.

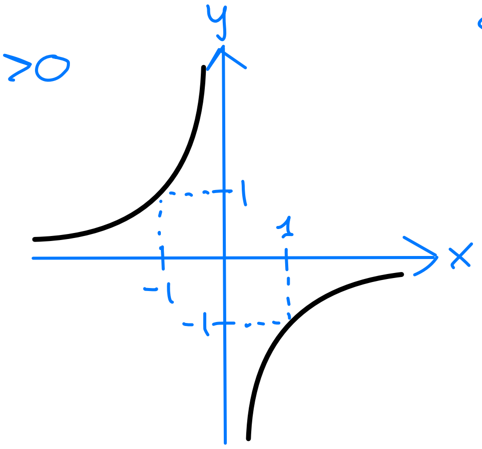


f è crescente ma NON strettamente crescente.

Esempio importante

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$f' = \frac{1}{x^2} > 0$



f è strett. crescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0,+\infty)$ ma NON è crescente sul dominio $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

Per verificare che f non è crescente sul dominio basta osservare che $-1 < 1$ ma $f(-1) = 1 > f(1) = -1$

Def.

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, è decrescente se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \geq f(x_1);$$

f è strettamente decrescente se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1).$$

Esempi

$-x$ è strett. decrescente; x^2 è strett. crescente su $[0,+\infty)$ e strett. decrescente su $(-\infty, 0]$.

Teorema 1

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo, f derivabile.

Allora

(a) $f' \geq 0$ su I $\Leftrightarrow$ f è crescente su I;

(b) $f' > 0$ su I $\Rightarrow$ f è strett. crescente su I;

(c) $f' \leq 0$ su I $\Leftrightarrow$ f è decrescente su I;

(d) $f' < 0$ su I $\Rightarrow$ f è strett. decresc. su I.

In (b) e (d) non vale $\Leftarrow$. Per esempio $f(x) = x^3$ è strettamente crescente ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla in 0.

Dim. di (a)

$\Rightarrow$ Suppongo $f' \geq 0$, e dati $x_0 < x_1$ dimostro che $f(x_0) \leq f(x_1)$.

Per il teorema di Lagrange esiste $\tilde{x}$ con $x_0 < \tilde{x} < x_1$ tale che

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\tilde{x}) ;$$

per ipotesi $f'(\tilde{x}) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \geq 0$ cioè $f(x_1) \geq f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Suppongo f crescente e dimostro che $f' \geq 0$. Prendo $x \in X$ e $h > 0$. Allora $x+h > x$ e per ipotesi $f(x+h) \geq f(x)$. Quindi

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

e passando al limite per $h \to 0$

$$f'(x) \geq 0 .$$

Dim. (b)

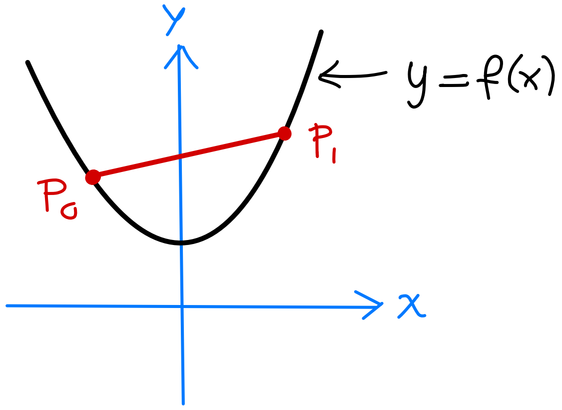
Basta modificare la dimostrazione di $\Rightarrow$ in (a).

Le dimostrazioni di (c) e (d) le lascio per esercizio. Usate che f è decrescente se e solo se $-f$ è crescente.

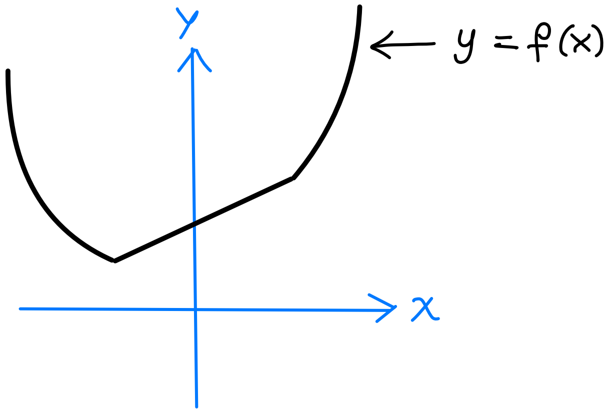
□

Funzioni convesse e concave

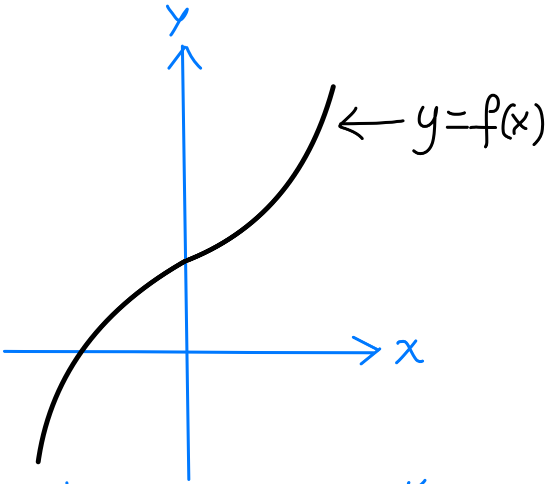
Data $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, dico che f è convessa se per ogni P_0, P_1 punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico.



Esempi



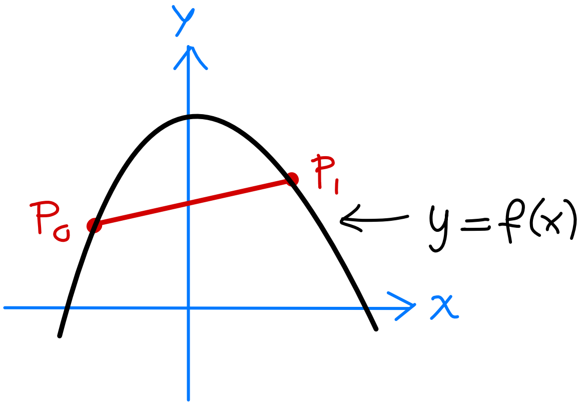
questa funzione è convessa



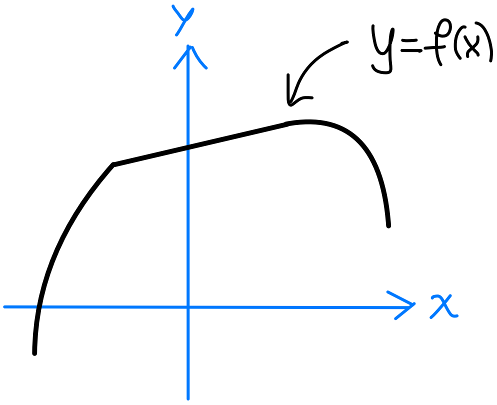
Questa funzione non è convessa

Def.

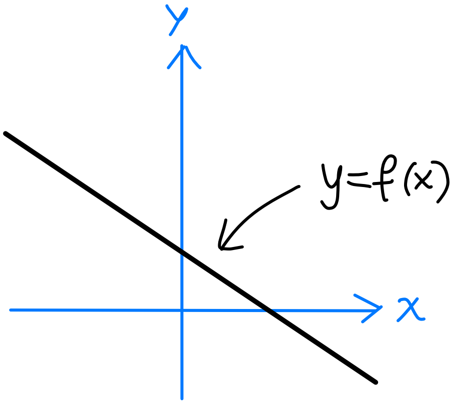
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo si dice concava se per ogni P_0 e P_1 sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta sotto il grafico.



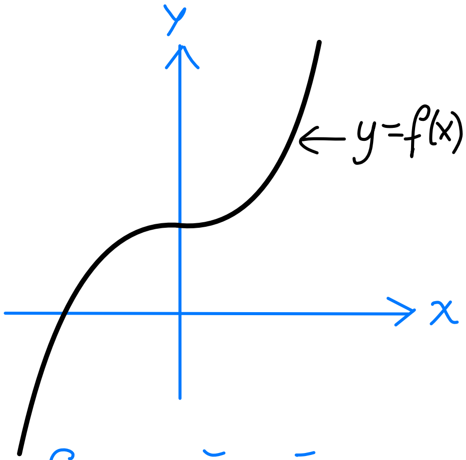
Esempi



f è concava



f è concava e convessa



f non è né concava né convessa però è concava su $(-\infty,0]$ e convessa su $[0,+\infty)$

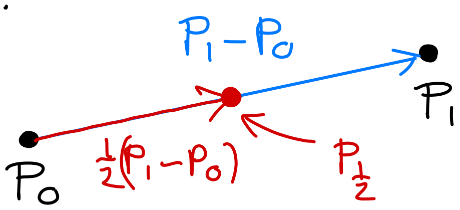
Osservazione

Dati $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1,y_1)$ il segmento che li congiunge è formato dai punti

$$P_t = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

← notazione del corso di algebra lineare

con $0 \leqslant t \leqslant 1$.



Inoltre
$$P_t = (x_0 + t(x_1 - x_0) ; y_0 + t(y_1 - y_0))$$
$$= (\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t} ; \underbrace{(1-t)y_0 + t y_1}_{y_t})$$

Se P_0 e P_1 sono punti del grafico di f, cioè $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$, allora

$$P_t = (\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t} ; \underbrace{(1-t)f(x_0) + t f(x_1)}_{y_t})$$

Ma allora f è convessa se per ogni $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e per ogni $0 \leq t \leq 1$ vale $y_t \geq f(x_t)$ cioè

$$(1-t)f(x_0) + t f(x_1) \geq f((1-t)x_0 + t x_1) .$$

f è concava se per ogni $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e per ogni $0 \leq t \leq 1$ vale $y_t \leq f(x_t)$ cioè

$$(1-t)f(x_0) + t f(x_1) \leq f((1-t)x_0 + t x_1) .$$

AM1 gest 20/21 — lezione 29

6/11/2020

Concludiamo la teoria delle funzioni convesse e concave.

Teorema 2

Data $f : \overset{\text{intervallo}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Allora

(a) f convessa $\Longleftrightarrow$ f' è crescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$;

(b) f concava $\Longleftrightarrow$ f' è decrescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \leqslant 0$.

Dim

So dal teorema 1 (della lezione prec.) che

f' crescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$, $\quad f'$ decrescente $\Longleftrightarrow$ $f'' \leqslant 0$.

Passo 1: f' è crescente $\Rightarrow$ f è convessa.

Deve far vedere che $\forall\, x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$, $\forall t \in [0,1]$ vale

$$\underbrace{(1-t)\,f(x_0) + t\,f(x_1)}_{\substack{\shortparallel \\ y_t}} \geqslant f(\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{\substack{\shortparallel \\ x_t}}) .$$

Considero la differenza:

$$(1-t)\,f(x_0) + t\,f(x_1) - f(x_t)$$

$$= (1-t)\big(f(x_0) - f(x_t)\big) + t\big(f(x_1) - f(x_t)\big)$$

$$= (1-t)\underbrace{(x_0 - x_t)}_{\substack{\shortparallel \\ -t(x_1 - x_0)}} \frac{f(x_0) - f(x_t)}{x_0 - x_t} + t\underbrace{(x_1 - x_t)}_{\substack{\shortparallel \\ (1-t)(x_1 - x_0)}} \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}$$

Per il teorema di Lagrange esistono $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$ con $x_0 < \tilde{x}_0 < x_t < \tilde{x}_1 < x_1$ tali che

$$\frac{f(x_0)-f(x_t)}{x_0-x_t} = f'(\tilde{x}_0) \quad , \qquad \frac{f(x_1)-f(x_t)}{x_1-x_t} = f'(\tilde{x}_1) .$$

Quindi

$$(1-t)f(x_0)+tf(x_1)-f(x_t) =$$

$$= -(1-t)t(x_1-x_0)f'(\tilde{x}_0)+t(1-t)(x_1-x_0)f'(\tilde{x}_1)$$

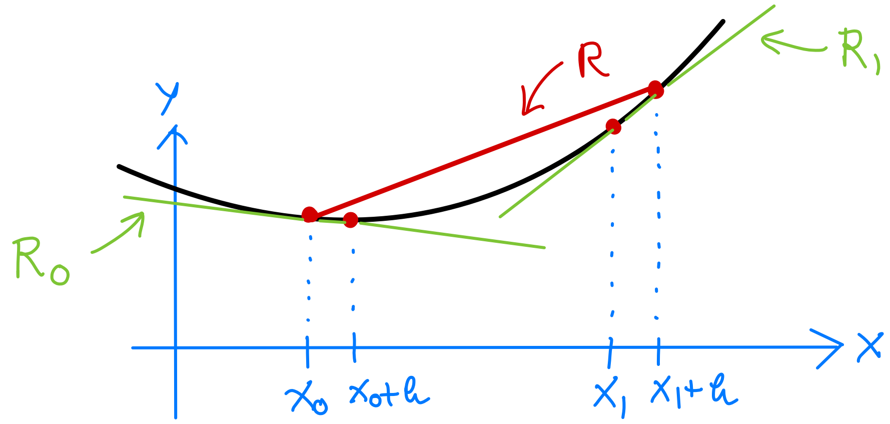
$$= t(1-t)(x_1-x_0)\left(f'(\tilde{x}_1)-f'(\tilde{x}_0)\right) .$$

Se f' è crescente allora $f'(\tilde{x}_1)-f'(\tilde{x}_0) \geqslant 0$ e quindi $\underbrace{(1-t)f(x_0)+tf(x_1)}_{y_t}-f(x_t) \geqslant 0$ cioè $y_t \geqslant f(x_t)$ che è la tesi del passo 1.

Se invece f' è decrescente allora $f'(\tilde{x}_1)-f'(\tilde{x}_0) \leqslant 0$ e quindi $y_t - f(x_t) \leqslant 0$, cioè $y_t \leqslant f(x_t)$, e quindi f è concava.

Passo 2 : f convessa $\Rightarrow$ f' crescente.

Devo far vedere che presi $x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$ allora $f'(x_0) \leqslant f'(x_1)$.



R_0 := retta passante per i punti del grafico di asc. x_0, x_0+h
R_1 := " " " " " " x_1, x_1+h
R := " " " " " " x_0, x_1+h

Siccome i punti del grafico di ascissa x_0+h e x_1 stanno sotto R,

$$\underset{\displaystyle \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}{\underset{\shortparallel}{\text{pendenza}(R_0)}} \leq \text{pendenza}(R) \leq \underset{\displaystyle \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}}{\underset{\shortparallel}{\text{pendenza}(R_1)}}$$

Quindi

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

e prendendo il limite per $h \to 0$ ottengo

$$f'(x_0) \leq f'(x_1)$$

che era la tesi del passo 2.

Allo stesso modo, se f è concava ottengo che f' è decrescente.

$\square$

Esercizi

1. Disegnare il grafico di $f(x) := \frac{1}{x^5-5x}$.

Insieme di definizione di f

sono gli x t.c. $x^5-5x \neq 0$ cioè $x(x^4-5) \neq 0$

cioè $x \neq 0$ e $x^4-5 \neq 0$ cioè $x \neq 0, \pm\sqrt[4]{5}$.

Segno di f

$sgn(f(x)) = sgn(x^5-5x) = sgn(x(x^4-5))$

$sgn(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$sgn(x^4-5)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$sgn(f(x))$	$-$	$+$	$-$	$+$

$-\sqrt[4]{5}$ $\quad 0 \quad$ $\sqrt[4]{5}$

limiti significativi

$f(\pm\infty) = 0$; $f(0^+) = -\infty$, $f(0^-) = +\infty$

$f((\sqrt[4]{5})^+) = +\infty$ $f((\sqrt[4]{5})^-) = -\infty$

$f((-\sqrt[4]{5})^+) = +\infty$ $f((-\sqrt[4]{5})^-) = -\infty$

segno di f' e intervalli di monotonia

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^5-5x}\right)' = \frac{-(5x^4-5)}{(x^5-5x)^2} = \frac{5(1-x^4)}{(x^5-5x)^2}$$

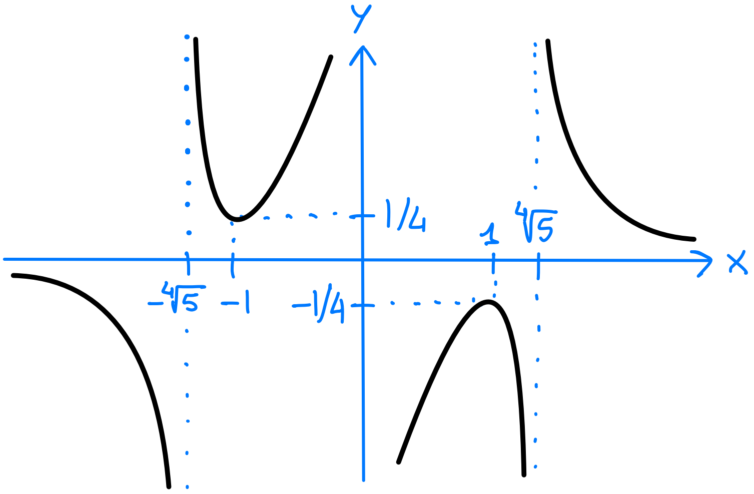
$sgn(f'(x)) = sgn(1-x^4)$

$$\begin{array}{ccccc} \searrow & & \nearrow & & \searrow \\ - & -1 & + & 1 & - \end{array}$$

f è strett. crescente in $[-1,0)$ e $(0,1]$ ed è strett. decresc. in $(-\infty,-\sqrt[4]{5})$, $(-\sqrt[4]{5},-1]$, $[1,\sqrt[4]{5})$, $(\sqrt[4]{5},+\infty)$

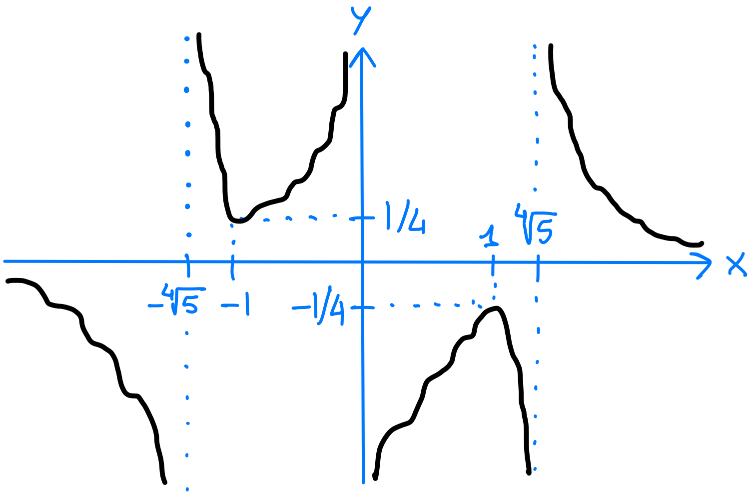
Inoltre -1 è un punto di minimo locale e $+1$ è un punto di massimo locale.

Primo disegno del grafico



Ho disegnato f concava o convessa in ciascun intervallo che compone il dominio, ma non so (ancora) se f è effettivamente così.

In effetti potrebbe essere fatta così:



Segno di f'' e intervalli di concavità e convessità

$$f''(x) = \left(\frac{5(1-x^4)}{(x^5-5x)^2}\right)' = 5\,\frac{(-4x^3)(x^5-5x)^{\cancel{2}\,1} - (1-x^4)\,2\cancel{(x^5-5x)}(5x^4-5)}{(x^5-5x)^{\cancel{4}\,3}}$$

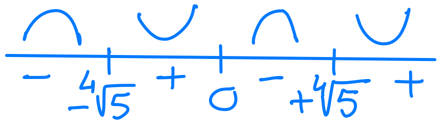
$$= 5\,\frac{-4x^8+\cancel{20x^4}+10-\cancel{20x^4}+10x^8}{(x^5-5x)^3}$$

$$= 5\,\frac{6x^8+10}{(x^5-5x)^3}$$

Siccome $6x^8+10>0\ \forall x$, $\text{sgn}(f''(x)) = \text{sgn}(x^5-5x)$

quindi

$$\text{sgn}(f''(x)) =$$



Questo conferma il primo disegno.

Osservazione importante

$f(x) = \dfrac{1}{x^5-5x}$ è dispari e quindi il grafico

è simmetrico rispetto all'origine.

Basta allora disegnarlo per $x \geq 0$ ....

AM1 gest 20/21

lezione 30
7/11/2020

Esercizi

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $x^5 - 5x + 1 = a$

Pongo $f(x) := x^5 - 5x + 1$ e ne disegno il grafico.

dominio di f : tutto $\mathbb{R}$

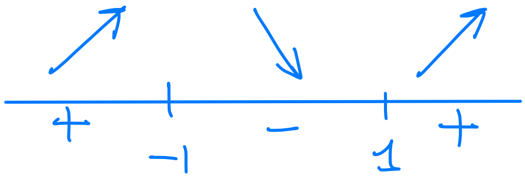
segno di f : non determinabile

limiti significativi : $f(+\infty) = +\infty$; $f(-\infty) = -\infty$ (in particolare non c'è né massimo né minimo).

derivata : $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1)$

segno di f' : $f'(x) \geqslant 0 \iff x^4 \geqslant 1 \iff x^2 \geqslant 1$ $\iff x \geqslant 1$ opp. $x \leqslant -1$

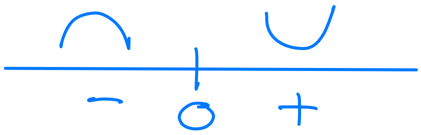
$\mathrm{sgn}(f'(x))$:



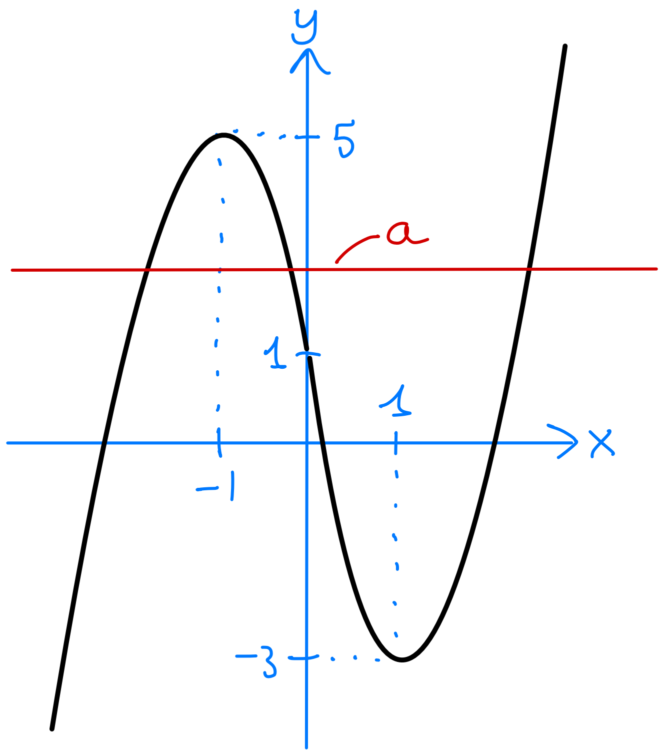
-1 punto di max.loc., $+1$ punto di min.loc.

derivata seconda : $f''(x) = 5(x^4 - 1)' = 20x^3$

$\mathrm{sgn}(f''(x))$



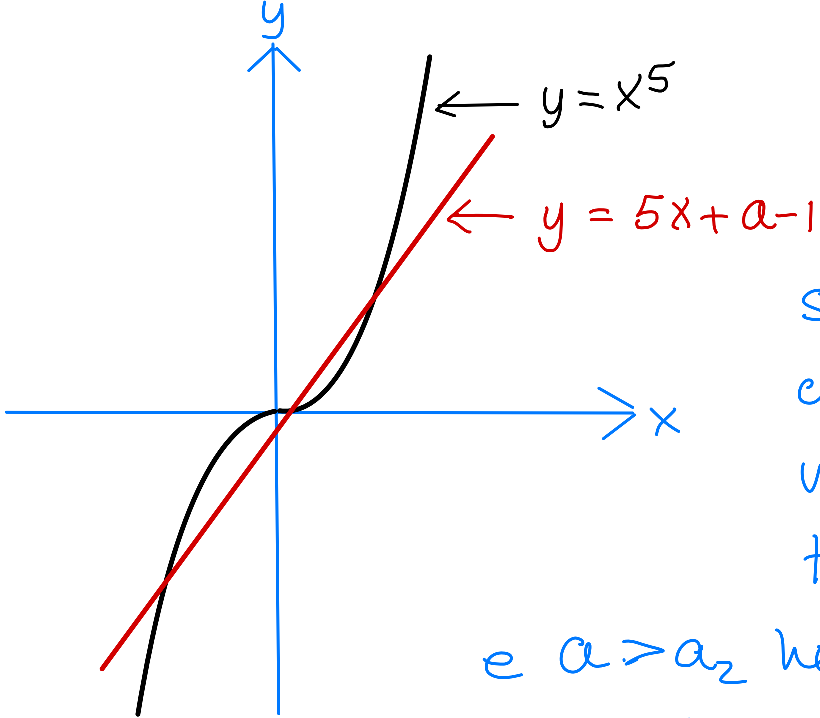
Disegno il grafico di $f(x)$:



Val. di a	# sol. di $f(x)=a$
$a>5$	1
$a=5$	2
$-3<a<5$	3
$a=-3$	2
$a<-3$	1

Sol. alternativa (funziona ma non è più semplice)

scrivo l'equaz. $x^5-5x+1 = a$ come $x^5 = 5x+a-1$ e cerco le intersezioni tra il grafico $y=x^5$ e il grafico $y=5x+a-1$



Scopro che ci sono due valori $a_1 < a_2$ t.c. per $a<a_1$ e $a>a_2$ ho 1 soluzione, per $a_1<a<a_2$ ho 3 soluzioni

Osservazione importante sulla prima soluzione

Gli elementi dello studio del grafico di f che ho veramente usato sono:

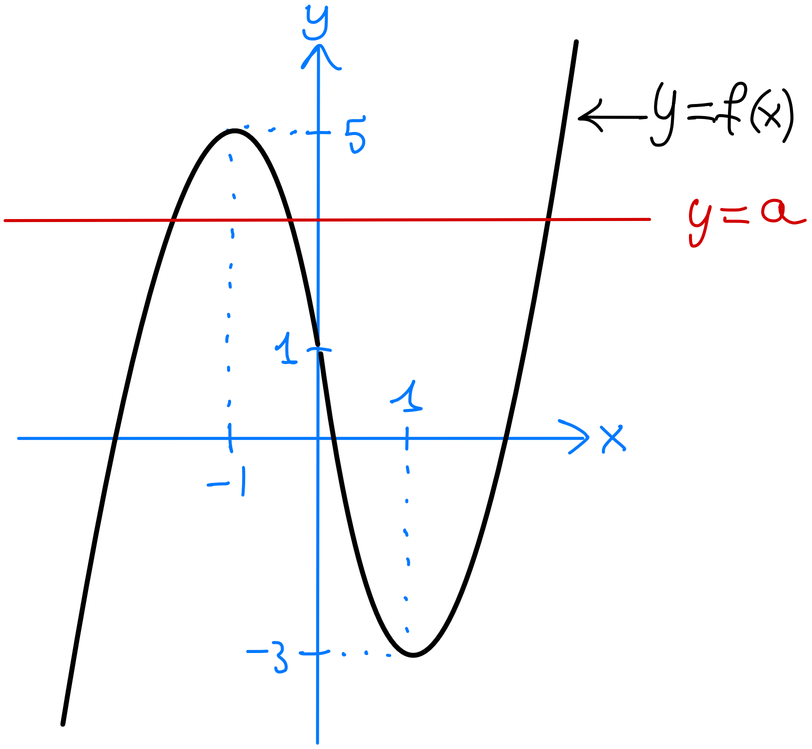
- $f(x)$ è strett. crescente in $[1,+\infty)$ e $f(1)=-3$, $f(+\infty)=+\infty$ $\Longrightarrow$ per $a\geq -3$ l'eq. $f(x)=a$ ha sempre un'unica soluzione in $[1,+\infty)$;
- $f(x)$ è strett. decresc. in $[-1,1]$ e $f(-1)=5$, $f(1)=-3$ $\Longrightarrow$ per $-3\leq a\leq 5$, l'equaz. $f(x)=a$ ha un'unica soluz. in $[-1,1]$;
- $f(x)$ è strett. cresc. in $(-\infty,-1]$ e $f(-\infty)=-\infty$, $f(-1)=5$ $\Longrightarrow$ ....

Il punto chiave è aver trovato gli "intervalli di monotonia" di f (e i valori agli estremi). La convessità di f è irrilevante.

2. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia x_a la soluzione più grande dell'equazione

$$\underbrace{x^5 - 5x + 1}_{f(x)} = a. \quad \text{(vedere ex. 1)}$$

Trovare il limite di x_a per $a \to +\infty$ e la parte principale.



Dal grafico ottengo che $x_a \xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty$.

Allora $f(x_a) = x_a^5 - x_a + 1 \sim x_a^5$

Quindi l'eq. $f(x_a) = a$ diventa

$$x_a^5 \sim a$$

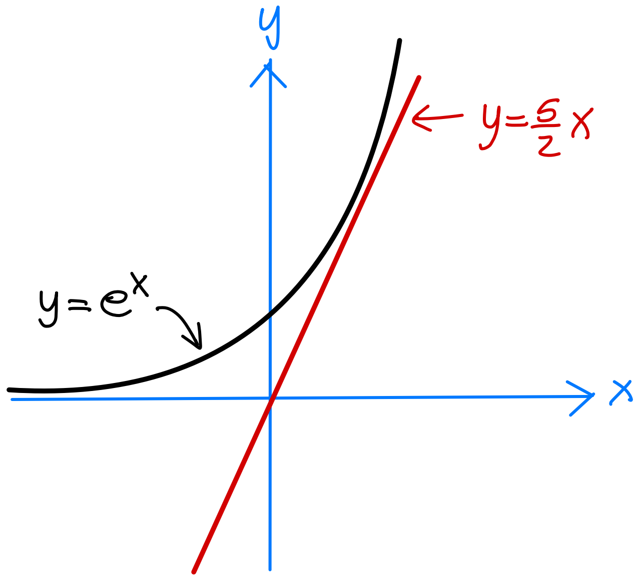
e allora

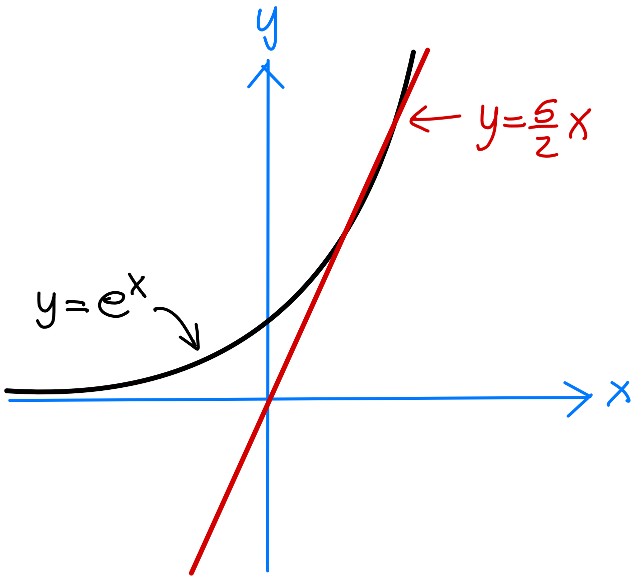
$$x_a \sim \sqrt[5]{a}.$$

3. Dire se è vero che

$$e^x \geqslant \frac{5}{2}x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Attenzione: disegnando i grafici (noti) $y = e^x$ e $y = \frac{5}{2}x$ non si ottiene una risposta chiara:





che le due curve si intersechino oppure no dipende dall'accuratezza del disegno!

Soluzione (che funziona)

$$e^x \geqslant \frac{5}{2}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{e^x - \frac{5}{2}x}_{f(x)} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} \geqslant 0$$

Calcolo il valore minimo di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$,
- $f'(x) = e^x - \frac{5}{2} = 0 \iff e^x = \frac{5}{2} \iff x = \log\left(\frac{5}{2}\right)$.
- Confronto i valori di f in $\log\left(\frac{5}{2}\right)$; $+\infty$; $-\infty$:

$$f\left(\log\left(\tfrac{5}{2}\right)\right) = \frac{5}{2}\left(1 - \log\left(\tfrac{5}{2}\right)\right) \leftarrow \text{valore minimo!}$$

$$f(+\infty) = +\infty$$

$$f(-\infty) = +\infty$$

Verifico se $\min f = \frac{5}{2}\left(1 - \log\left(\frac{5}{2}\right)\right) \geq 0$ oppure no.

Osservo che $\frac{5}{2} = 2{,}5 < 2{,}71\ldots = e \Rightarrow \log\left(\frac{5}{2}\right) < \log e = 1$

$\Rightarrow \quad 1 - \log\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \Rightarrow \min f > 0$.

Concludo che $e^x \geq \frac{5}{2}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che

(*) $\qquad e^x \geq ax$ per ogni $x \geq 0$.

Procedo come nell'ex. 3:

$$e^x \geq ax \quad \forall x \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{e^x - ax}_{f(x)} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\min\{f(x) : x \geq 0\} \geq 0.$$

Calcolo il minimo di $f(x)$ per $x \in [0, +\infty)$.

- $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$,
- $f'(x) = e^x - a = 0 \iff e^x = a \iff x = \log a$ <u>se $a > 0$</u>
- confronto i valori di f in $0, +\infty, \log a$

$\uparrow$ va considerato solo se $\log a > 0$ cioè $a > 1$

$\boxed{\text{Caso } a \leq 1}$

$f(0) = 1 \leftarrow$ val. min.

$f(+\infty) = +\infty$

Siccome $\min\{f(x) : x \geq 0\} = 1 > 0$ la disug. $(*)$ è verificata.

$\boxed{\text{Caso } a > 1}$

$$\left.\begin{aligned} & f(0) = 1 > 0 \\ & f(\log a) = a(1 - \log a) \end{aligned}\right\} \text{il val. min. è il più piccolo dei due}$$

$f(+\infty) = +\infty$

Se $a(1 - \log a) < 0$ allora $\min\{f \ldots\} < 0$ e $(*)$ non vale.

Se $a(1 - \log a) \geq 0$ allora $\min\{f \ldots\} \geq 0$ e $(*)$ vale.

Quindi $(*)$ vale se e solo se $a(1 - \log a) \geq 0$, cioè $1-\log a \geq 0 \iff 1 \geq \log a \iff e \geq a$.

Conclusione: (*) vale se e solo se $a \leq e$.

Soluzione alternativa

$$e^x \geq ax \quad \forall x \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{g(x)} \geq a \quad \forall x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\min\{g(x) : x > 0\} \geq a.$$

Basta calcolare il minimo di $g(x)$ per $x > 0$.

Vantaggio (?) : g non contiene a.

AM1 gest 20/21

Lezione 32
11/11/2020

Parentesi teorica

Insiemi di numeri

$$\mathbb{N} := \{\text{numeri naturali}\} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} := \{\text{numeri interi}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \{\text{numeri razionali}\} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

$$\mathbb{R} := \{\text{numeri reali}\}.$$

I numeri reali sono quelli con un segno, un numero finito di cifre davanti alla virgola, un numero finito o infinito di cifre dopo la virgola:

$$\pi = 3,141592 \dots\dots$$

$$-\frac{4}{3} = -1,3333 \dots$$

Osservazioni

- I numeri naturali sono stati introdotti per contare (tranne lo zero).

- I numeri reali e razionali positivi sono stati introdotti per misurare (per esempio una lunghezza rispetto a una data unità di misura data).

- I numeri razionali non bastano per le misure: la diagonale del quadrato di lato 1 è $\sqrt{2}$ che non è razionale.

  Infatti se per assurdo $\sqrt{2}$ fosse razionale, lo scrivo come $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p, q interi non entrambi pari. Allora

  $$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ è pari}$$
  $$\Rightarrow p \text{ è pari}, \ p = 2m \Rightarrow 2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2$$
  $$\Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ è pari} \Rightarrow q \text{ pari}$$

  Assurdo perché p e q non sono entrambi pari.

- I numeri con segno sono stati originariamente introdotti (almeno in Europa) per ragioni di contabilità ([entrate]−[uscite] può essere sia positivo che negativo).

- Attenzione: 1 e 0,9999.... sono due modi di scrivere lo stesso numero.

  Infatti: $0,9999.... = 3 \cdot 0,3333.... = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$

  E anche: $-27,152 = -27,1519999....$

- Gli algoritmi per le operazioni elementari $(+,-,\times,:)$ visti a scuola funzionano solo per numeri con un numero finito di cifre decimali. La definizione di queste operazioni per i numeri reali si fa per approssimazione.

- I numeri con un espansione decimale finita (un numero finito di cifre dopo la virgola) sono quelli della forma $x = \frac{p}{10^k}$.

- I numeri con espansione decimale periodica, per esempio

$$-37{,}14\underbrace{63}_{}6363\ldots$$

Sono esattamente i numeri razionali.

Razionale $\Rightarrow$ periodico

Esempio: ottengo le cifre di $x = \frac{140}{11}$ facendo la divisione

$$\begin{array}{l|l}
140 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{11} & 12{,}72 \leftarrow \text{da qui in poi} \\
30 & \phantom{12{,}72 \leftarrow} \text{i numeri si ripetono.} \\
\underline{22} & \\
80 & \\
\underline{77} & \\
30 & \\
\ldots &
\end{array}$$

Periodico $\Longrightarrow$ razionale

Per esempio :

$$x = 31,247474 7\ldots$$

$$= 31,2 + 0,047 47 47\ldots$$

$$= \frac{312}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0,474747\ldots$$

$$= \frac{312}{10} + \frac{1}{10} \cdot 47 \cdot 0,010101\ldots$$

$$= \frac{312}{10} + \frac{47}{10} \cdot \frac{1}{99} \leftarrow \text{razionale}$$

ho usato che $0,[01][01][01]\ldots = \frac{1}{99}$

Più in generale $0,[001][001]\ldots = \frac{1}{999}$ e

$$0,[\underbrace{00\cdots01}_{n \text{ cifre}}][\quad][\quad]\ldots = \frac{1}{\underbrace{99\cdots9}_{k \text{ cifre}}} .$$

Definizione di estremo superiore e inferiore

di un insieme che non si scrive come unione finita di intervalli.

Dato $X \subset \mathbb{R}$, $y \in [-\infty, +\infty]$ si dice maggiorante di X se

$$y \geq x \;\; \forall\, x \in X;$$

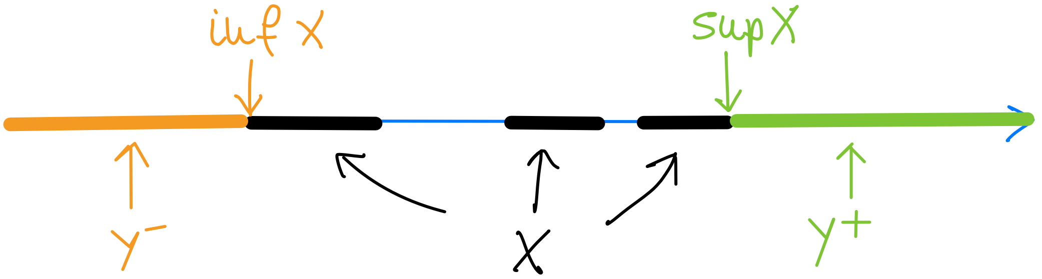
e si dice minorante se invece

$$y \leq x \;\; \forall x \in X.$$

Pongo

$Y^+ := \{$ maggioranti di $X\}$

$Y^- := \{$ minoranti di $X\}$

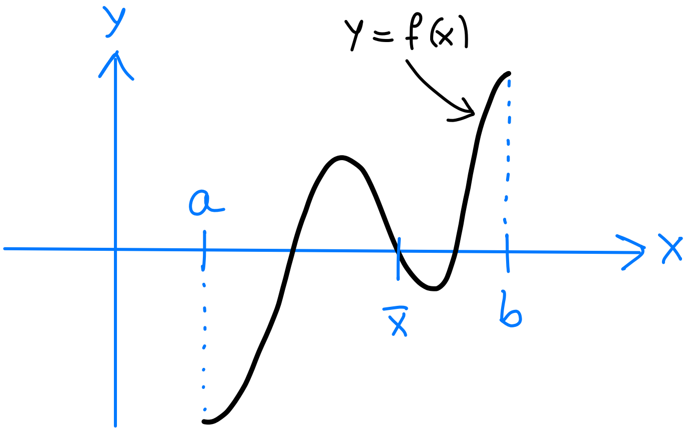


Definisco estremo superiore di X è il più piccolo dei maggioranti di X cioè il minimo di Y^+ e e' estremo inferiore di X è il più grande dei minoranti di X cioè il massimo di Y^-.

Fatto fondamentale (completezza dei numeri reali)
sup X e inf X esistono per ogni insieme $X \subset \mathbb{R}$.

Conseguenza della completezza dei numeri reali:

Teorema (di esistenza degli zeri)
Sia $I = [a,b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ continua e tale che i valori di f agli estremi di I sono discordi (cioè $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(b) < 0 < f(a)$). Allora esiste $\bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$.



Osservazioni

- Se usassi solo i numeri razionali l'enunciato non sarebbe vero: sia $f(x) := x^2 - 2$, allora $f(0) = -2$, $f(2) = 2$ ma non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $f(x) = 0$ (perché $\pm\sqrt{2}$ non sono razionali).

- L'ipotesi f continua non può essere tolta se $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x) := \begin{cases} +1 & \text{per } x \in [0,1] \\ 0 & \\ -1 & \text{per } x \in [-1,0) \end{cases}$$

  allora $f(-1) < 0 < f(1)$ ma non esiste x t.c. $f(x) = 0$.

- L'ipotesi che il dominio I sia un intervallo non può essere tolta: se $f(x) := \frac{1}{x}$, allora $f(-1) < 0 < f(1)$ ma non esiste x t.c. $f(x) = 0$. (f è definita e continua su $[-1,0) \cup (0,1]$ ma non $[-1,1]$).

AM1 gest 20/21 Lezione 33

12/11/2020

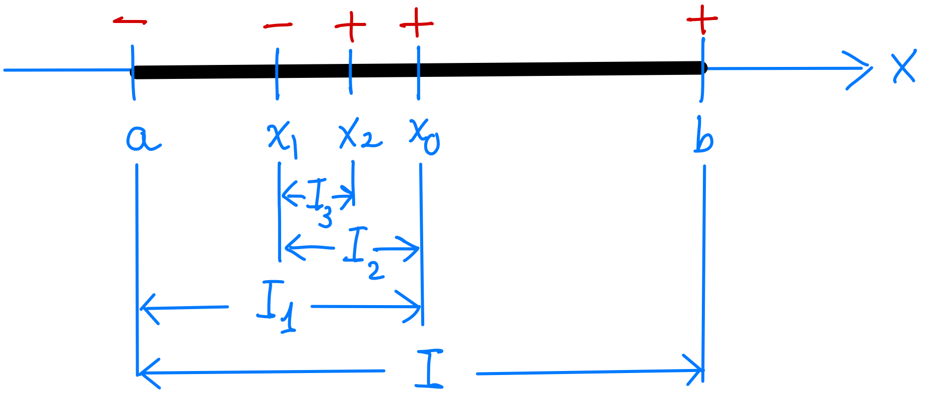
Riprendo dalla lezione precedente.

Teorema (di esistenza degli zeri)
Sia $I = [a,b]$ e $f: I \to \mathbb{R}$ continua e tale che i valori di f agli estremi di I sono discordi (cioè $f(a)<0<f(b)$ oppure $f(b)<0<f(a)$).
Allora esiste almeno un $\bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f(\bar{x})=0$.

Prima di dimostrare il teorema descrivo un algoritmo per calcolare uno degli $\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x})=0$.

Algoritmo di bisezione

Suppongo $f(a)<0<f(b)$



Costruisco una successione di intervalli $I \supset I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_n$ tali che f ha valori discordi agli estremi.

Indico con x_n il punto medio di I_n e $\ell_n := \text{lungh.}(I_n)$.
Per il teorema esiste $\bar{x}$ dentro I_n t.c. $f(\bar{x})=0$.
Osservo che x_n approssima $\bar{x}$ con errore inferiore a $\frac{\ell_n}{2}$ cioè

$$|x_n - \bar{x}| \leqslant \frac{\ell_n}{2}$$

So che $\ell_n = \frac{\text{lungh}(I)}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$.

Quindi

$$|x_n - \bar{x}| \leqslant \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

in particolare l'errore $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ tende a 0 esponenzialm.

In particolare se $\text{lungh}(I) = b-a = 1$ allora
x_9 approssima $\bar{x}$ con errore $\leqslant \frac{1}{2^{10}} \leqslant 10^{-3}$.
x_{19} " " " $\leqslant \frac{1}{2^{20}} \leqslant 10^{-6}$
etc.

Dimostrazione del teorema (traccia)

Costruisco I_n con l'algoritmo di bisezione per ogni $n = 1, 2, \ldots\ldots$
Indico con a_n e b_n gli estremi dell'intervallo, cioè $I_n = [a_n, b_n]$.
Siccome $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ ho che $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \ldots$ e $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \ldots$

Inoltre $b_n - a_n = \text{lungh}(I_n) = \frac{b-a}{2^n}$.

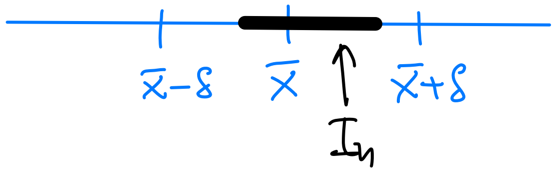
Quindi $\sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.

Chiamo questo punto $\bar{x}$.

Usando la continuita di f in $\bar{x}$ ottengo che $f(\bar{x})=0$.

Infatti se per assurdo $f(\bar{x})>0$ (oppure $f(\bar{x})<0$) allora trovo $\delta>0$ t.c. $f(x)>0$ su $[\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

Ma per n abbastanza grande, $I_n \subset [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

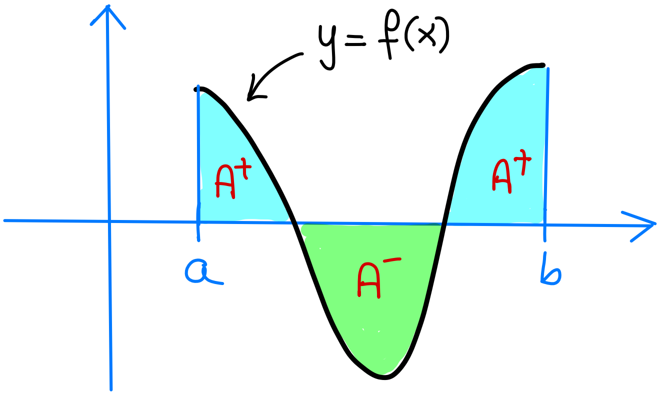


Ma allora f non ha valori discordi agli estremi di I_n, e questo è assurdo. $\square$

Integrali

Definizione di integrale (definito)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua



Pongo

$$A^+ := \{ (x,y) : \quad x \in [a,b], \ 0 \leq y \leq f(x) \}$$

$$A^- := \{ (x,y) : \quad x \in [a,b], \ f(x) \leq y \leq 0 \}$$

L' integrale di f da a a b è il numero dato da

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx} := \text{area}(A^+) - \text{area}(A^-)$$

$\int_a^b f(x)\, dx$ si legge "integrale da a a b di f(x) in dx"

terminologia: f è la funzione integranda; a e b sono gli estremi di integrazione.

Osservazioni

- Se $f \geq 0$, area$(A^-)=0$ e quindi $\int_a^b f(x)\,dx =$ $=$ area(A^+) ≥ 0;

  se $f \leq 0$ allora area$(A^+)=0$ e $\int_a^b f(x)\,dx =$ $=$ $-$area(A^-) ≤ 0.

- Torna comodo definire

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(A^-) - \text{area}(A^+)$$

- Il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ dipende a f e da a e b, ma non dipende dalla variabile x.

  In altre parole

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \quad .$$

- "dx" serve a indicare la "fine" dell'integrale e a ricordare qual'è la variabile di integrazione. Per esempio: $\int_0^1 x^2y\,dx$ dipende da y e non da x, e x è la variabile di integrazione, mentre $\int_0^1 x^2y\,dy$ dipende da x e non da y; y è la variabile di integraz.

- La definizione sopra usa la nozione intuitiva di area di un insieme nel piano.
  Ma tale nozione non è ben definita (e non è definibile).
  Per questa ragione i testi di Analisi contengono una definizione diversa di integrale, che non usa la nozione di area.

Questioni da affrontare

- Calcolo esatto degli integrali;
- calcolo approssimato degli integrali (che non si calcolano esattamente);
- altri significati dell' integrale.

Calcolo esatto degli integrali

Definizione

Date $f, F : \overset{\text{intervallo}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dico che F è una primitiva di f se $F' = f$.

Es. $\frac{x^3}{3}$ è una primitiva di x^2, ma anche $\frac{x^3}{3} + c$ con c costante è una primitiva di x^2.

In generale, se F è una primitiva di f allora $F + c$ con c costante è pure una primitiva.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Siano $F, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue con F primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Osservazioni

- Questo teorema riduce il calcolo degli integrali (aree) al trovare la primitiva dell'integranda.
- Nei calcoli conviene scrivere $F(b) - F(a)$ come $\Big| F(x) \Big|_a^b$ (oppure $F(x)\Big|_a^b$).

Esempi

- $\displaystyle\int_0^1 x^2\, dx = \Big| \text{primitiva di } x^2 \Big|_0^1 = \Big| \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$

- $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \left|\text{primitiva di } \frac{1}{x}\right|_1^3 = \left|\log x\right|_1^3 = \log 3 - \log 1 = \log 3.$
- $\int_0^2 e^x\,dx = \left|\text{primitiva di } e^x\right|_0^2 = \left|e^x\right|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$

Le tecniche per trovare la primitiva le vediamo nelle prossime lezioni.

Attenzione: le primitive di alcune funzioni (per es. e^{x^2}, e^{-x^2}) non hanno una formula.

Per la dimostrazione del teorema servono tre lemmi.

Lemma 1

Data $h : \overset{\text{intervallo}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile con $h' = 0$, allora h è costante.

Lemma 2

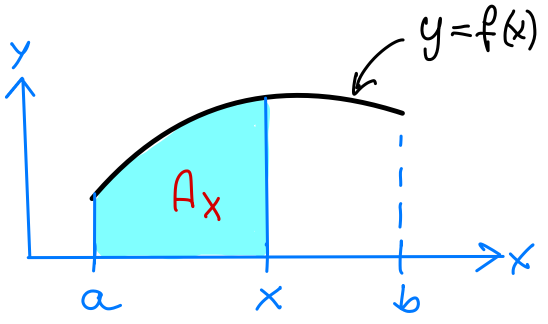
Date $f, F, G : \overset{\text{intervallo}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ con F e G primitive di f, allora esiste c costante t.c. $G = F + c$.

Lemma 3

Data $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, definisco $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt = \text{area}(A_x)$$

Allora G è una primitiva di f.



Dim. del teorema

Prendo G come nel lemma 3.

Per il lemma 2, esiste c costante t.c. $G = F + c$.

Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definizione} \\ \text{di } G(b)}}{=} G(b) \underset{\substack{\nwarrow \\ G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \\ \text{(area di un segmento)}}}{=} G(b) - G(a)$$

$$= (F(b)+c) - (F(a)+c)$$

$$= F(b) - F(a) .$$

$\square$

Dim. lemma 1

Dati $x_0, x_1 \in I$ devo dimostrare che $h(x_1) = h(x_0)$.

Per il teorema di Lagrange esiste $\tilde{x} \in (x_0, x_1)$ t.c.

$$\frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0} = h'(\tilde{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi}}}{=} 0$$

Quindi $h(x_1) - h(x_0) = 0$.

$\square$

Dim. lemma 2

Pongo $h = G - F$. Allora $h' = G' - F' = f - f = 0$.

Per il lemma 1, $h = c$ costante. Quindi

$G = F + h = F + c$.

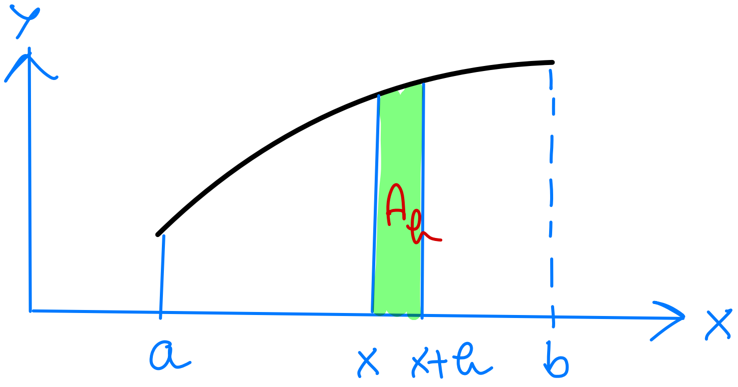
$\square$

Dim. Lemma 3

Suppongo f positiva e crescente.

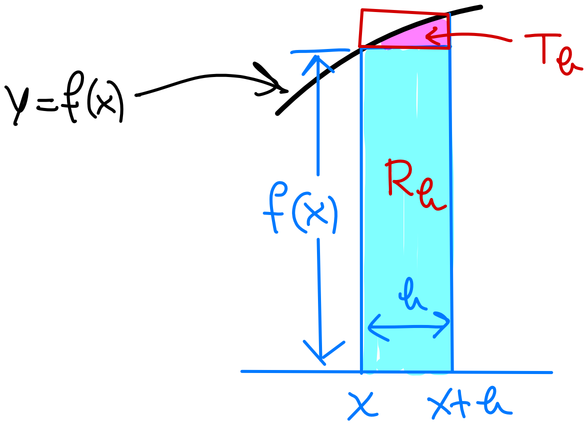
Devo dimostrare che $G' = f$, cioè che

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x).$$



$$h \cdot f(x)$$
$$\parallel$$

Osservo che $G(x+h) - G(x) = \text{area}(A_h) = \text{area}(R_h) + \text{area}(T_h)$



Quindi $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} = \dfrac{\text{area}(R_h)}{h} + \dfrac{\text{area}(T_h)}{h}$

$$= f(x) + \frac{\text{area}(T_h)}{h} \xrightarrow[h\to 0.]{} f(x)$$

Inoltre $0 \leq \text{area}(T_h) \leq h \cdot (f(x+h) - f(x))$

Quindi

$$0 \leq \frac{\text{area}(T_h)}{h} \leq f(x+h) - f(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

□

AM1 gest 20/21

lezione 35

14/11/2020

Riprendo il discorso sul calcolo (esatto) degli integrali.

Formula di cambio di variabile

$$\text{a)}\ \int \boxed{f(g(x))}\cdot\boxed{g'(x)\,dx} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sost. } y=g(x)\\ dy=g'(x)\,dx}}{=} \int \boxed{f(y)}\,\boxed{dy} \underset{\substack{\uparrow\\ F \text{ primitiva}\\ \text{di } f}}{=} F(y)+c \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sostituisco}\\ y \text{ con } g(x)}}{=} F(g(x))+c$$

$$\text{b)}\ \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \overset{\downarrow}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,.$$

Dim.

a) La tesi è che $F(g(x))$ è una primitiva di $f(g(x))\cdot g'(x)$. Lo verifico derivando $F(g(x))$:

$$\Big(F(\underbrace{g(x)}_{y})\Big)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{derivata della}\\ \text{funz. composta}}}{=} F'(y)\cdot g'(x) \underset{\substack{\uparrow\\ F'=f\\ \text{perché } F \text{ è}\\ \text{una prim. di } f}}{=} f(y)\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)\,.$$

b) Uso a) e il teorema fondam. del calcolo integr.:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \underset{\substack{\shortparallel\\ F(g(b))-F(g(a))}}{\Big|F(g(x))\Big|_a^b} = \Big|F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)}\,.$$

□

Caso particolare

a) $$\int f(mx+p)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int f(y)\frac{1}{m}\,dy = \frac{1}{m}F(y)+c = \frac{1}{m}F(mx+p)+c$$

$y = mx+p$

$dy = (mx+p)'\,dx = m\cdot dx$

$dx = \frac{1}{m}\,dy$

b) $$\int_a^b f(mx+p)\,dx \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{m}\int_{ma+p}^{mb+p} f(y)\,dy\,.$$

Esempi

- $$\int e^{2x+1}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int e^y\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y+c$$

  $y = 2x+1$

  $dy = 2\,dx;\ dx = \frac{1}{2}\,dy$

  $$= \frac{1}{2}e^{2x+1}+c\,.$$

- $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(\pi-\frac{x}{2}\right)dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\pi}^{\pi/2} \operatorname{sen} y\,(-2)\,dy = 2\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} y\,dy$$

  $y = \pi-\frac{x}{2}$

  $dy = -\frac{1}{2}\,dx;\quad dx = -2\,dy$

  $$= 2\Big|-\cos y\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

  $$= 2(1-0) = 2$$

- $$\int e^{x^2}x\,dx \underset{\uparrow}{=} \int e^y\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y+c$$

  $y = x^2$

  $dy = 2x\,dx$

  $\frac{1}{2}\,dy = x\,dx$

  $$= \frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

- $$\int \cos(x^2)\cdot x^3\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \cos y \cdot \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{2\cancel{x}}\,dy = \int \cos y \cdot \frac{y}{2}\,dy$$

$y = x^2$

$dy = 2x\,dx;\ \frac{1}{2x}\,dy = dx$

da qui procedete integrando per parti...

- $$\int_{-2}^{2} \cos(x^2)\cdot x^3\,dx \overset{\downarrow}{=} \int_{4}^{4} \cos y \cdot \frac{y}{2}\,dy \underset{\uparrow}{=} 0$$

perché gli estremi di integraz. sono uguali!

- $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\boxed{\text{sen}\,x\ \ dx}}{\boxed{\cos x}} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{\boxed{y}}\,\boxed{(-1)\cdot dy}$$

$y = \cos x$

$dy = -\text{sen}\,x\cdot dx \qquad -dy = \text{sen}\,x\cdot dx$

$$= -\int \frac{1}{y}\,dy$$

$$= -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c$$

Cosa succede con il cambio di var. $y = \text{sen}\,x$?

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{y}{\cos x}\ \frac{1}{\cos x}\cdot dy$$

$y = \text{sen}\,x$

$dy = \cos x\,dx;\ dx = \frac{1}{\cos x}\,dy$

$$= \int \frac{y}{\cos^2 x}\,dy \underset{\uparrow}{=} \int \frac{y}{1-y^2}\,dy \ \ldots\ldots$$

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - y^2$

- $$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^2 \underbrace{e^y}_{f}\,\underbrace{2y}_{g}\,dy \underset{\uparrow}{=} \Big|\underbrace{e^y}_{F}\,\underbrace{2y}_{g}\Big|_0^2 - \int_0^2 \underbrace{e^y}_{F}\,\underbrace{2}_{g'}\,dy$$

$y=\sqrt{x}$

$dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

$dx = 2\sqrt{x}\,dy = 2y\,dy$

per parti

$$= 4e^2 - 2\Big|e^y\Big|_0^2$$

$$= 4e^2 - 2(e^2-1)$$

$$= 2e^2+2.$$

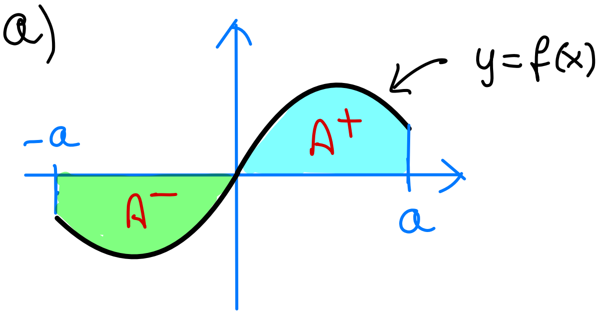
Fatto utile

a) Se f è dispari $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

b) se f è pari $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

Dim. a disegni

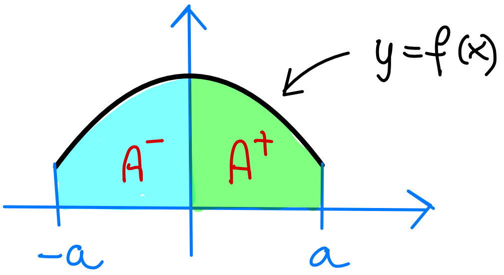
a)



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \text{area}(A^+) - \text{area}(A^-) = 0$$

sono uguali per simmetria

b)



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \text{area}(A^+) + \text{area}(A^-)$$

$$= 2\,\text{area}(A^+) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Dim. "vera"

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$x = -y$

$dx = -dy$ $\longrightarrow$ $\|$

$$\int_{a}^{0} f(-y)(-1)\,dy$$

$$\|$$

$$\int_{0}^{a} f(-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

Quindi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)+f(-x)\,dx$$

Se f è dispari, $f(-x) = -f(x)$ e $f(x)+f(-x) = 0$ e ottengo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} 0 \cdot dx = 0 .$$

Se f è pari $f(-x) = f(x)$, $f(x)+f(-x) = 2f(x)$ e

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

□

Esempi problematici

- $$\int_0^3 e^{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^9 e^y \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

  $y = x^2$

  $dy = 2x\,dx$

  $dx = \frac{dy}{2x} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

  E ora?
  La situazione non è migliorata!
  La primitiva di e^{x^2} non si esprime in termini di funz. elem.

- $$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big|\arctan x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

  Rifaccio lo stesso calcolo con un cambio di var.:

  $$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(1/y)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot dy = -\int_{-1}^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

  $$= -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

  $x = \frac{1}{y}$; $y = \frac{1}{x}$

  $dx = -\frac{1}{y^2}dy$

  Quindi $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ cioè $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

  Dov'è l'errore?

- $$\int_{-2}^2 e^{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_4^4 e^y \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = 0.$$

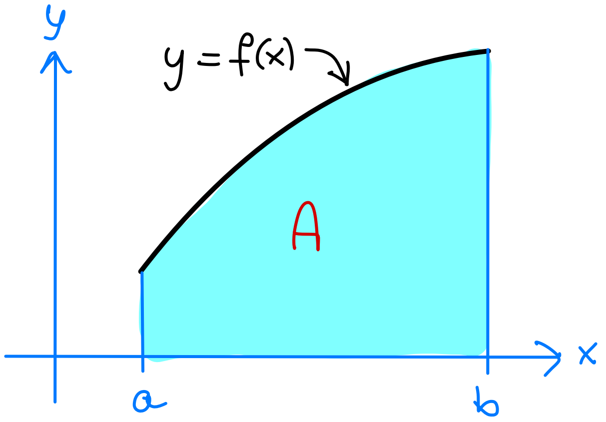
  $y = x^2$,

  $dy = 2x\,dx$; $dx = \frac{dy}{2x} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

  Assurdo perché $e^{x^2} > 0$ e quindi $\int_{-2}^2 e^{x^2}\,dx > 0$.

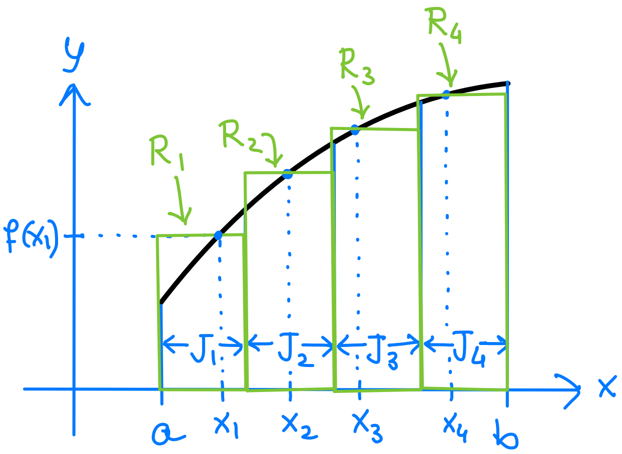
  Dov'è l'errore?

Approssimazione dell'integrale



Se $f \geq 0$, $\quad I := \int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(A)$

Per calcolare in modo approssimato I, approssimo A con dei rettangoli.



Fisso N grande e divido $[a,b]$ in intervalli $J_1, \dots, J_N$ lunghezza $\delta = \frac{b-a}{N}$

Scelgo $x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$, ..., $x_N \in J_N$.

Prendo R_1 rettangolo con base J_1 e altezza $f(x_1)$; R_2 rett. con base J_2 e altezza $f(x_2)$; etc.

La somma I_δ delle aree dei rettangoli R_n dovrebbe approssimare l'area di A.

$$I_\delta := \sum_{n=1}^{N} \text{area}(R_n) = \boxed{\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \cdot \delta}$$

"somma di Riemann"

altezza

lunghezza di J_n

Teorema 1

Se f è continua, $\lim_{\delta \to 0} I_\delta = I = \int_a^b f(x)dx$.

(Vale anche se f non è positiva.)

Questo risultato non lo dimostro.

Dimostro invece delle stime dell' errore

$$err_\delta := | I - I_\delta |$$

Proposizione 2

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile e $m > 0$ è t.c. $|f'(x)| \leq m \ \forall x \in [a,b]$.

Allora

$$err_\delta \leqslant m(b-a)\,\delta$$

Se $m=1$, $b-a=1$, $\delta = 10^{-3} \Longrightarrow err_\delta \leqslant 10^{-3}$.

Proposizione 3

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte, e sia $M > 0$ t.c. $|f''(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

Prendo x_n punto medio di J_n per ogni n.

Allora

$$err_\delta \leq \frac{M}{24}(b-a)\,\delta^2$$

In particolare se $M=1$, $b-a=1$ e $\delta = 10^{-3}$ allora $err_\delta \leq \frac{\delta^2}{24} \leq 10^{-7}$.

(Questa stima è migliore della precedente)

Dim

$$I - I_\delta = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\delta$$

scrivo $[a,b]$ come unione degli intervalli $J_1, \dots, J_N$ $\longrightarrow$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} f(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\delta$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{J_n} f(x)\,dx - f(x_n)\cdot\delta \right)$$

Allora

$$(1) \quad err_\delta := |I - I_\delta| \leq \sum_{n=1}^{N} \left| \int_{J_n} f(x)\,dx - f(x_n)\cdot\delta \right|$$

Esamino ora $\int_{J_u} f(x)\,dx$.

Siccome x_u è il punto medio di J_u, e J_u è lungo δ, allora $J_u = \left[x_u - \frac{\delta}{2}, x_u + \frac{\delta}{2}\right]$ e quindi

$$\int_{J_u} f(x)\,dx = \int_{x_u-\frac{\delta}{2}}^{x_u+\frac{\delta}{2}} f(x)\,dx$$

$x = x_u + t$
$dx = dt$

$$\longrightarrow = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(x_u+t)\,dt$$

Sviluppo di T. di ord. 1 di f in x_u:
$f(x_u+t) = f(x_u) + f'(x_u)t + R_u(t)$

$$= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(x_u) + f'(x_u)t + R_u(t)\,dt$$

$$= \left| f(x_u)\cdot t \right|_{-\delta/2}^{\delta/2} + \left| f'(x_u)\frac{t^2}{2} \right|_{-\delta/2}^{\delta/2} + \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_u(t)\,dt$$

$$= f(x_u)\cdot\delta + \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_u(t)\,dt$$

Ma allora

$$(2) \qquad \left| \int_{J_u} f(x)\,dx - f(x_u)\,\delta \right| = \left| \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_u(t)\,dt \right|$$

Uso ora la formula del resto di Lagrange:

$$R_u(t) = \frac{f''(\tilde{t})}{2} t^2 \qquad \text{con } \tilde{t} \in [0,t]$$

Quindi

$$-\frac{M}{2}t^2 \leq R_u(t) \leq \frac{M}{2}t^2$$

Quindi

$$\underset{\underset{-\frac{M}{24}\delta^3}{\parallel}}{-\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\frac{M}{2}t^2\,dt} \leq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_n(t)\,dt \leq \underset{\underset{\frac{M}{24}\delta^3}{\parallel}}{\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\frac{M}{2}t^2\,dt}$$

Quindi

$$\left|\int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_n(t)\,dt\right| \leq \frac{M}{24}\delta^3$$

Quindi (2) diventa

$$\left|\int_{J_u} f(x)\,dx - f(x_u)\delta\right| = \left|\int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_u(t)\,dt\right| \leq \frac{M}{24}\delta^3$$

e usando la (1)

$$err_\delta := |I - I_\delta| \leq \sum_{n=1}^{N}\left|\int_{J_n} f(x)\,dx - f(x_u)\cdot\delta\right|$$

$$\leq N\cdot\frac{M}{24}\delta^3 \underset{\underset{\delta=\frac{b-a}{N}}{\uparrow}}{=} \frac{M}{24}(b-a)\,\delta^2.$$

□

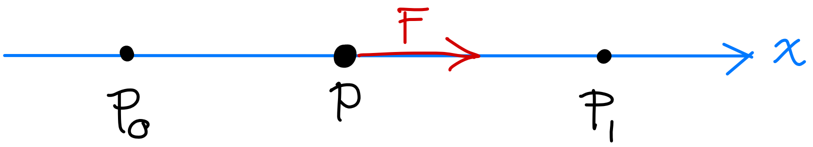
AM1 gest 20/21 lezione 36

17/11/2020

Altri significati dell'integrale

Lavoro di una forza

P punto che si muove sull'asse delle x dalla posizione P_0 a P_1, soggetto ad una forza F diretta come l'asse x



Se F è costante, il lavoro di F su P è definito come

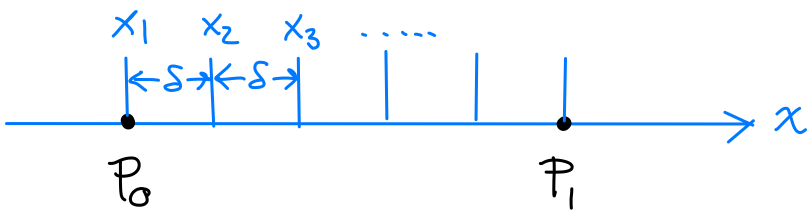
(1) $$L := F \cdot \Delta x = F \cdot (P_1 - P_0)$$

Se F non è costante e dipende dalla posizione di P allora

(2) $$L := \int_{P_0}^{P_1} F(x)\, dx$$

Come si ottiene (2) da (1) ?

Per F non costante calcolo il lavoro L a partire da (1) suddividendo l'intervallo $[P_0, P_1]$ in intervallini di lunghezza δ piccolo, dove in prima approx. F è costante



Quindi $L = \sum_{n=1}^{N} \underset{\uparrow}{L_n} \simeq \sum_{k=1}^{N} F(x_k)\cdot\delta$.

lavoro di F
sull'intervallo
$[x_k, x_{k+1}]$

$$\text{Quindi} \quad L = \lim_{\delta\to 0} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{N} F(x_k)\cdot\delta\right]}_{\text{somma di Riemann che approssima l'integrale}} = \underbrace{\int_{P_0}^{P_1} F(x)\,dx}_{\uparrow}$$

Spazio percorso da un punto in movimento

P punto in movimento nel piano (o nello spazio)

Quindi $P = (x(t), y(t))$ $\left(P = (x(t), y(t), z(t)) \right)$

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{\text{velocità (vettore)}} & \vec{v} & = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \\ \underline{\text{velocità (scalare)}} & |\vec{v}| & = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \\ \underline{\text{accelerazione}} & \vec{a} & = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \end{array}\right\} \text{già viste}$$

La distanza percorsa da P tra l'istante t_0 e t_1 è

$$d = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\,dt$$

Giustificazione

Indica con d(t) la distanza percorsa dall'istante t_0 a t. Abbiamo visto (nelle lezioni sulla derivata) che $|\vec{v}(t)| = d'(t)$.

Quindi d(t) è una primitive di $|\vec{v}(t)|$.

Ma allora

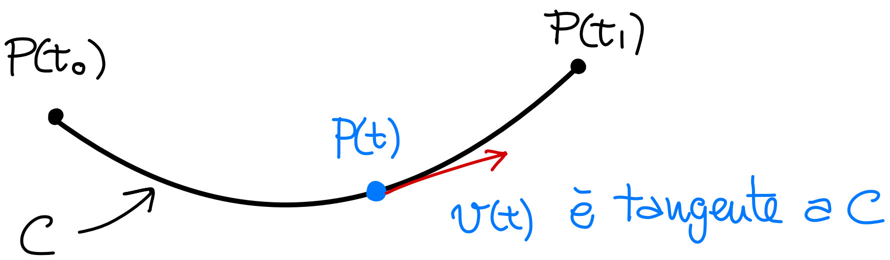
$$\int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teor. fond.} \\ \text{del calcolo int.}}}{=} \Big| d(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \underset{\substack{\| \\ d}}{d(t_1)} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{d(t_0)} = d$$

Lunghezza delle curve (nel piano o nello spazio)

Dato P come sopra, chiamo "traiettoria di P" l'insieme delle posizioni di P (con t in un dato intervallo di tempo) cioè

$$\mathcal{C} = \{ P(t) : t_0 \leq t \leq t_1 \}$$

In generale C è una curva.



v(t) è tangente a C

Se P passa per ogni punto di C solo una volta allora

$$(*) \qquad \text{lunghezza}(C) = d = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\, dt$$

(In effetti basta che i punti di C per cui P passa più di una volta siano in numero finito)

Data una curva C, trovare una parametrizzazione vuol dire scrivere C come traiettoria di un punto in movimento, cioè

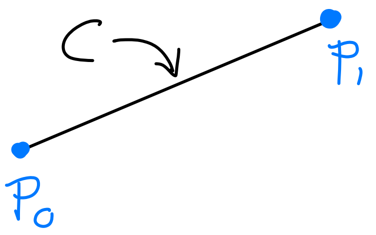
$$C = \{ P(t) : t \in \overset{\text{intervallo}}{I} \}$$

Data una parametrizzazione P(t), posso calcolare la lunghezza di C usando (*).

Esempi di parametrizzazione

1. Sia C il segmento che congiunge due punti P_0 e P_1

$$\begin{matrix} P_0 & & P_1 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (x_0, y_0) & & (x_1, y_1) \end{matrix}$$



$$\text{Allora} \quad C = \{ \underbrace{(1-t)P_0 + t P_1}_{P(t)} : 0 \leq t \leq 1 \}$$

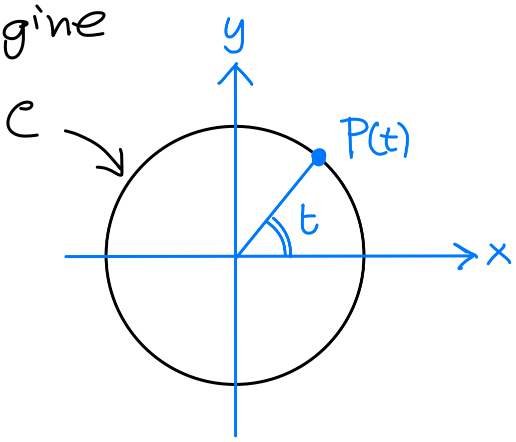
Cioè $P(t) = \big(\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x(t)} ; \underbrace{(1-t)y_0 + t y_1}_{y(t)} \big)$.

Allora $\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = P_1 - P_0$

Parametrizzazione a velocità costante : $\vec{v}$ non dipende da t

Esistono anche parametrizzazioni a velocità NON costante , per esempio $P(t) = (1-t^2)P_0 + t^2 P_1$ con $0 \leq t \leq 1$.

2. Sia C la circonferenza di raggio r centrata nell' origine



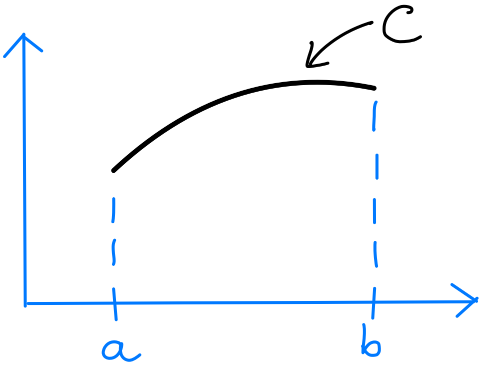
$P(t)$ punto di coordinate polari r (costante) e $t \in [0, 2\pi]$, cioè

$$P(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$$

In questo caso $\vec{v}(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t)$

$|\vec{v}(t)| = r$, $\vec{a}(t) = (-r\cos t, -r\operatorname{sen} t)$

3. Se C è il grafico di $f(x)$ con $a \leq x \leq b$



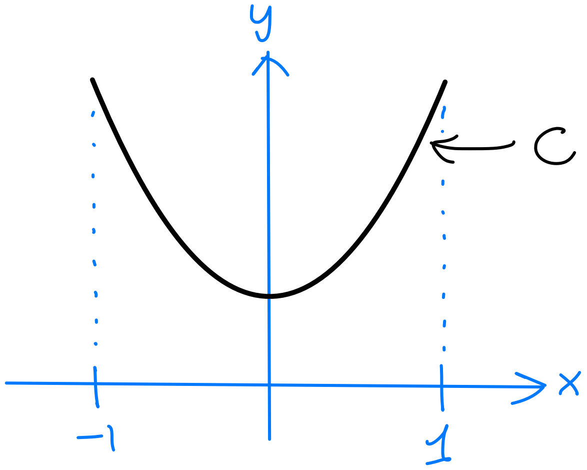
Allora $C = \{ (x, f(x)) : a \leq x \leq b \}$

$$= \{ \underbrace{(t, f(t))}_{P(t)} : a \leq t \leq b \}$$

$\vec{v}(t) = (1, f'(t))$; $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1+(f'(t))^2}$ e

$$\text{lungh}(C) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$$

Esercizio $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ con $-1 \leq x \leq 1$



$$\text{lungh}(C) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}}\, dx$$

$$\uparrow$$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x}{2} - \dfrac{e^{-x}}{2}$

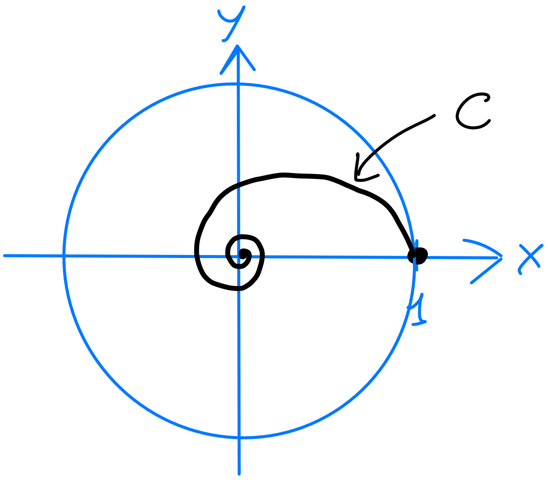
$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{e^{x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2}\ dx = \left| \frac{e^{x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \right|_{-1}^{1} = e + \frac{1}{e}.$$

Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva C parametriz. da $P(t) = (e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t)$ con $t \geq 0$.

Cioè $P(t)$ ha coordinate polari $r = e^{-t}$, $\alpha = t$



$$\mathrm{lungh}(C) = \int_{0}^{+\infty} |\vec{v}(t)|\ dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \sqrt{(-\cos t - \mathrm{sen}\, t)^2 + (\cos t - \mathrm{sen}\, t)^2}$$

$$\uparrow$$

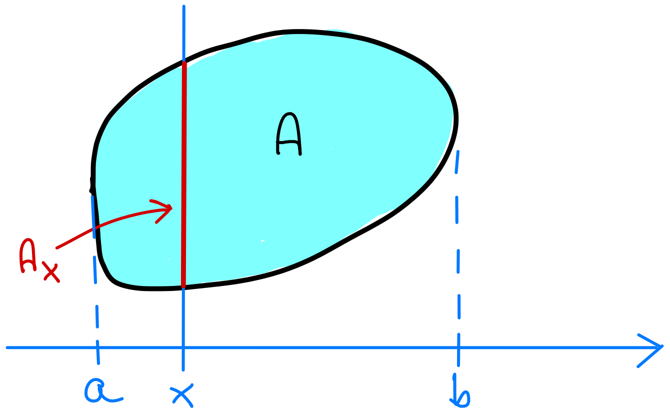
$$\vec{v}(t) = e^{-t}(-\cos t - \mathrm{sen}\, t;\ \cos t - \mathrm{sen}\, t)$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \sqrt{2}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2} \left| -e^{-t} \right|_{0}^{+\infty}$$

$$= \sqrt{2} \left(-\text{``}e^{-\infty}\text{''} + e^{-0} \right) = \sqrt{2}$$

Calcolo delle aree

Considero una figura piana A



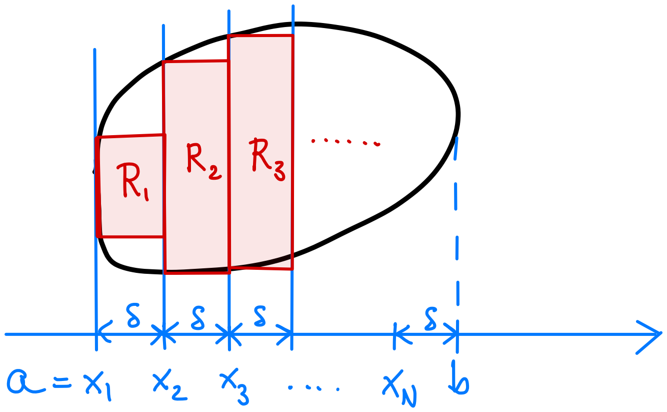
Per calcolare l'area di A scelgo un'asse e per ogni x sull'asse indico con A_x la sezione di A ad altezza x (A intersecato con la retta ortogonale all'asse e passante per x).

Pongo $\ell(x) :=$ lunghezza di A_x. Allora

$$\boxed{\text{area}(A) = \int_a^b \ell(x)\,dx}$$

Giustificazione della formula

Per calcolare l'area di A, approssimo A con dei rettangoli :



divido $[a,b]$ in N intervallini di lunghezza δ
$[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ..., $[x_N,b]$ e costruisco i rettangoli
$x_1=a$ R_1, ..., R_N come in figura.

Ogni R_n ha altezza $\ell(x_n)$ e base δ.

Mi aspetto che area(A) sia approssimata da $\sum\limits_{n=1}^{N}$ area(R_n) tanto meglio quanto più δ è piccolo, cioè

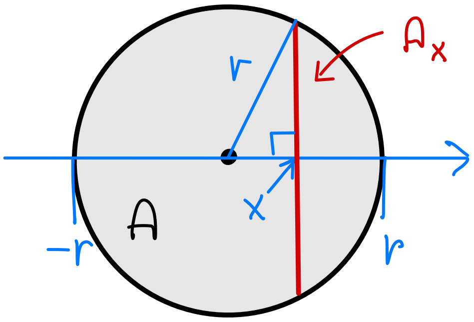
$$\text{area}(A) = \lim_{\delta\to 0} \sum_{n=1}^{N} \text{area}(R_n)$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \ell(x_n)\cdot\delta}_{\text{somma di Riemann}} = \int_a^b \ell(x)\,dx.$$

□

Esempio 1

A cerchio di raggio r (so già qual è l'area, questa è solo una verifica).



$$\ell(x) = \text{lungh}(A_x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Quindi

$$\text{area}(A) = \int_{-r}^{r} \ell(x)\,dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$x = r\,\text{sen}\,t$
$dx = r\cos t \cdot dt$

$$\longrightarrow = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - r^2\,\text{sen}^2 t} \cdot r\cos t\,dt$$

$$= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\underbrace{1 - \text{sen}^2 t}_{\cos^2 t}}\,\cos t\,dt$$

$\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$
perché $\cos t \geq 0$

$$\longrightarrow = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

$\cos^2 t = \dfrac{\cos(2t) + 1}{2}$

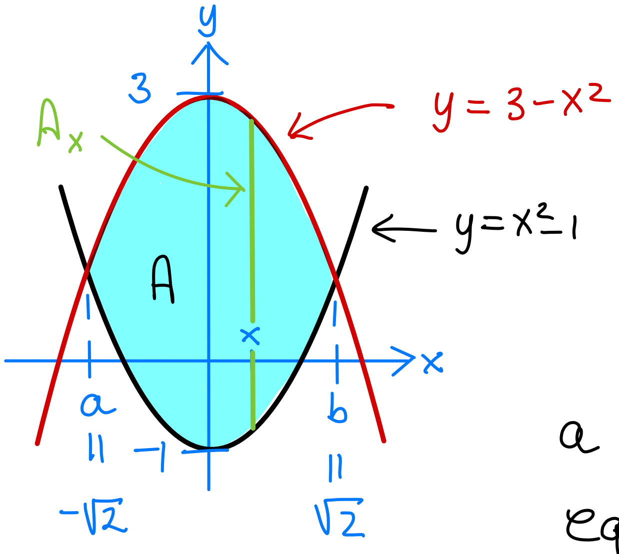
$$\longrightarrow = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) + 1\,dt$$

$$= r^2 \left| \frac{\text{sen}(2t)}{2} + t \right|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \pi r^2$$

Esempio 2

Calcolare l'area dell'insieme A dei punti (x,y) tali che $x^2-1 \leqslant y \leqslant 3-x^2$.



A_x = segmento di estremi (x, x^2-1) e $(x, 3-x^2)$

$$\ell(x) = (3-x^2)-(x^2-1)$$
$$= 4-2x^2$$

a e b sono le soluzioni dell'equazione $x^2-1 = 3-x^2$ cioè

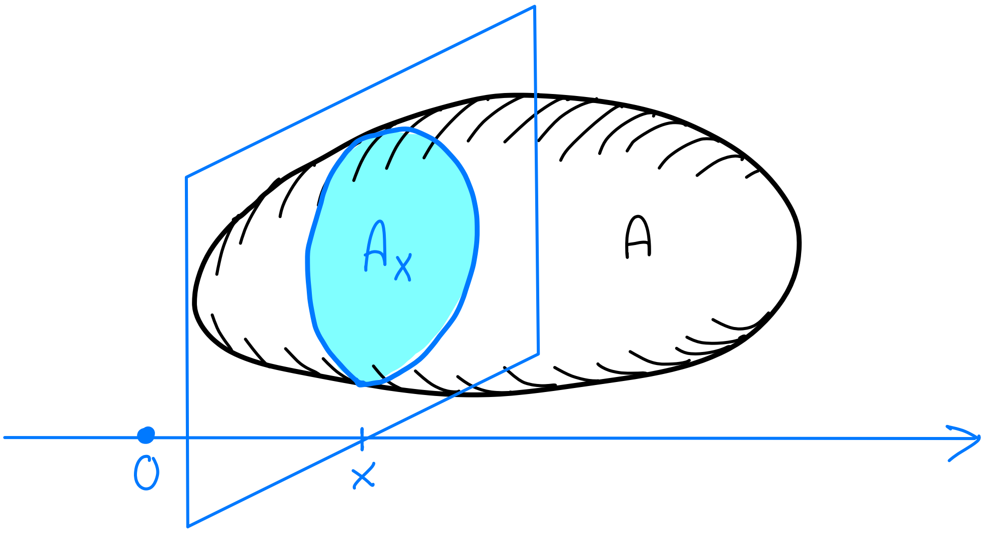
$2x^2=4$; $x^2=2$; $x=\pm\sqrt{2}$

Quindi

$$\text{area}(A) = \int_a^b \ell(x)\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4-2x^2\,dx$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} 4-2x^2\,dx$$
$$= 2\left| 4x-\frac{2}{3}x^3 \right|_0^{\sqrt{2}}$$
$$= 2\left(4\sqrt{2}-\frac{2}{3}2\sqrt{2}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

Calcolo dei volumi

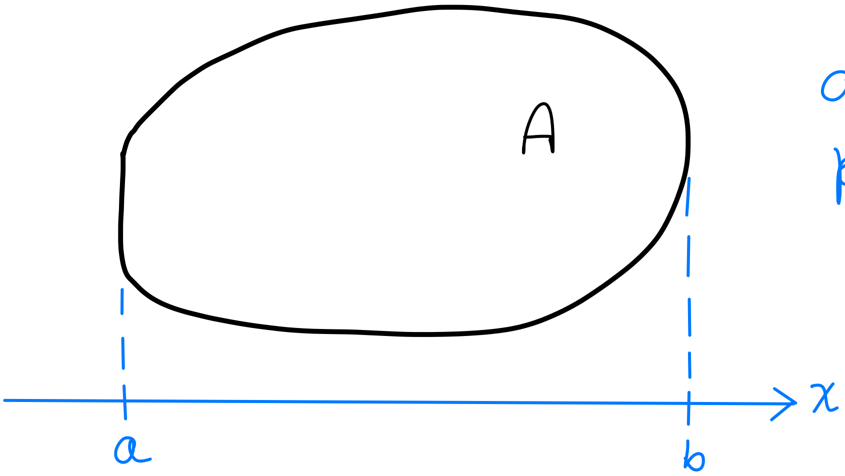
Considero un solido A nello spazio.



Per calcolare il volume di A scelgo un asse e per ogni x sull'asse indico con A_x la sezione del solido ad altezza x cioè l'intersezione di A con il piano ortogonale all'asse e passante per x.

Pongo $a(x) := \text{area}(A_x)$. Allora

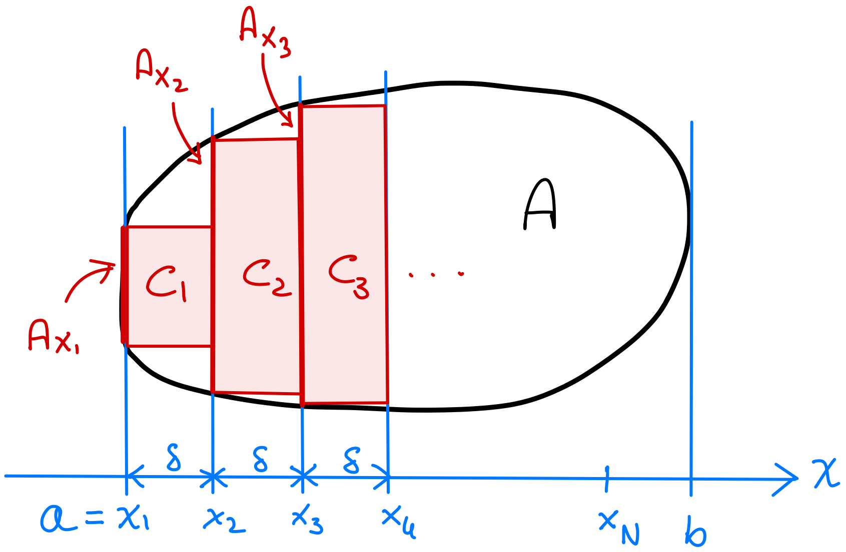
$$\boxed{\text{vol}(A) = \int_a^b a(x)\,dx}$$

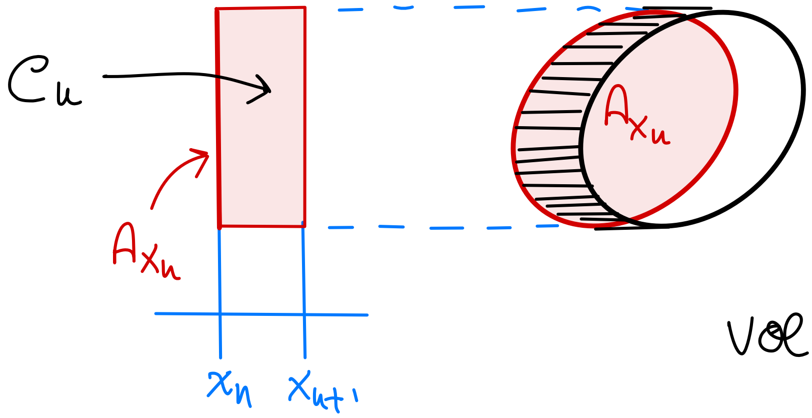


disegno in proiezione

Giustificazione della formula

Procedo come prima, approssimando A con dei cilindri $C_1, C_2, \ldots, C_N$ di spessore δ.





C_n cilindro (retto) di base A_{x_n} e altezza δ

$$\mathrm{vol}(C_n) = \mathrm{area}(A_{x_n}) \cdot \delta$$
$$= a(x_n) \cdot \delta$$

Allora

$$\mathrm{vol}(A) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{vol}(C_n)$$

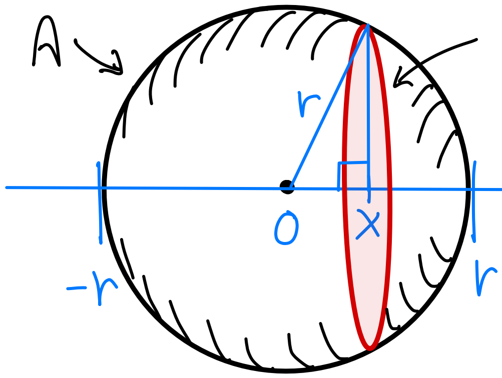
$$= \underbrace{\lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N} a(x_n) \cdot \delta}_{\text{somma di Riemann}} = \int_a^b a(x)\,dx .$$

□

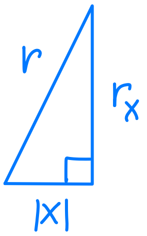
Come esempi ricaviamo le formule (note!) per il volume della sfera e del cono.

Esempio 1

A sfera di raggio r.



A_x = cerchio di raggio $r_x = \sqrt{r^2 - x^2}$



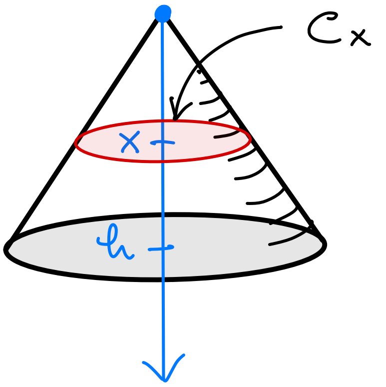
$$a(x) = \text{area}(A_x) = \pi r_x^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

$$\text{vol}(A) = \int_{-r}^{r} a(x)\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-r}^{r} = \dots = \frac{4\pi}{3} r^3 .$$

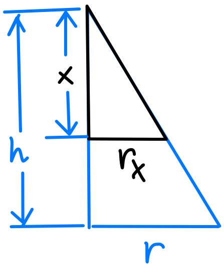
Esempio 2

A cono (retto a base circolare) con altezza h e raggio di base r



cerchio di raggio

$$r_x = \frac{r}{h} x \; ; \quad a(x) = \pi r_x^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2$$



$$\frac{r_x}{x} = \frac{r}{h}$$

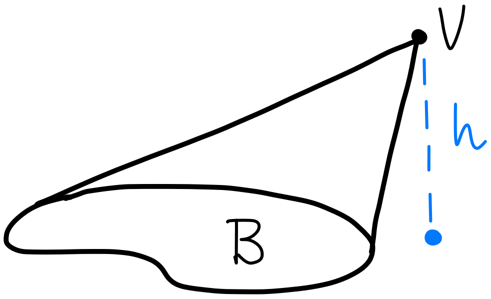
per similitudine del triangolo nero e blu.

$$\mathrm{vol}(A) = \int_0^h a(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx$$

$$= \left| \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \right|_0^h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\,\mathrm{area}(B)\cdot h$$

La formula $\mathrm{vol}(A) = \frac{1}{3}\,\mathrm{area}(B)\cdot h$ vale anche per coni con base b non circolare

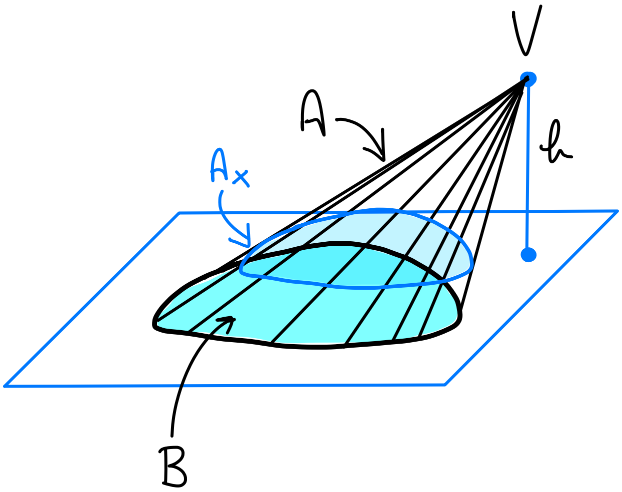


La si dimostra allo stesso modo (provateci!)

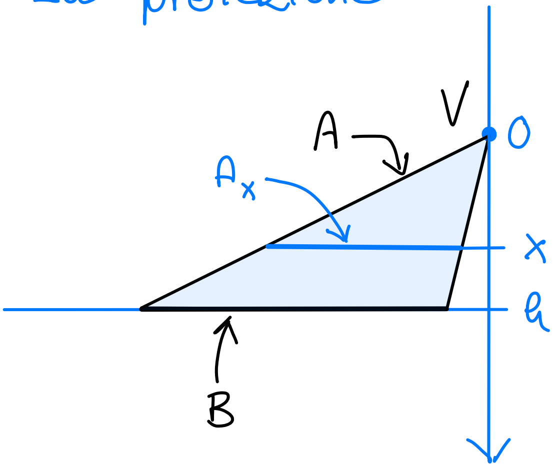
Riprendo il calcolo dei volumi

Esempio 3

Volume di un cono qualunque A con base B e altezza h : $\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{3}\,\mathrm{area}(B)\cdot h$



In proiezione



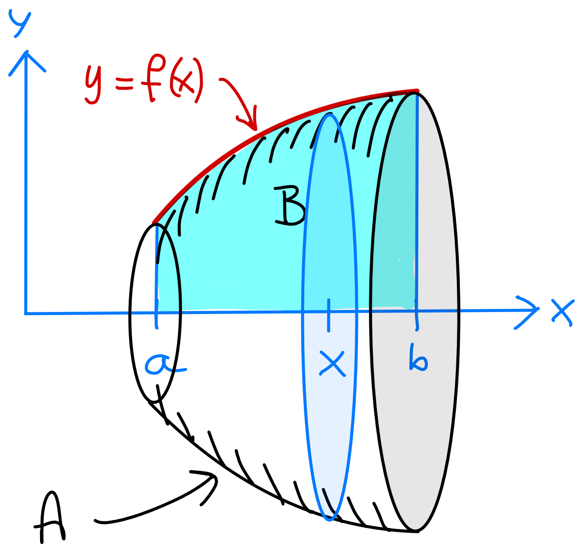
A_x è una copia di B rimpicciolita di un fattore $\frac{x}{h}$. Quindi $\mathrm{area}(A_x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \mathrm{area}(B)$.

$$\mathrm{vol}(A) = \int_0^h \mathrm{area}(A_x)\,dx = \int_0^h \mathrm{area}(B)\cdot\frac{x^2}{h^2}\,dx$$

$$= \mathrm{area}(B)\,\frac{1}{h^2}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^h$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{area}(B)\cdot h$$

Solidi di rotazione, I



A è il solido ottenuto ruotando B attorno all' asse delle x.

$$\mathrm{Vol}(A) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

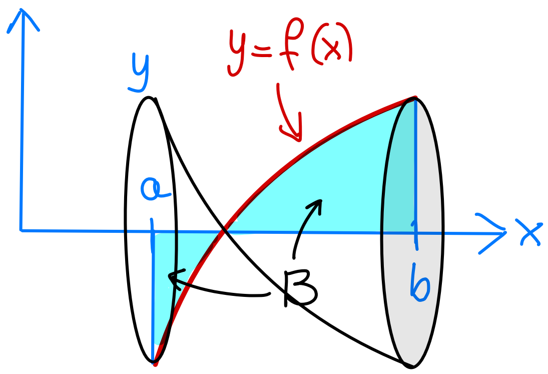
la sezione di A ad altezza x è un cerchio di raggio f(x), quindi $\mathrm{area}(A_x) = \pi(f(x))^2$ e

$$\mathrm{vol}(A) = \int_a^b \mathrm{area}(A_x)\, dx = \int_a^b \pi\,(f(x))^2 dx$$

Osservazione

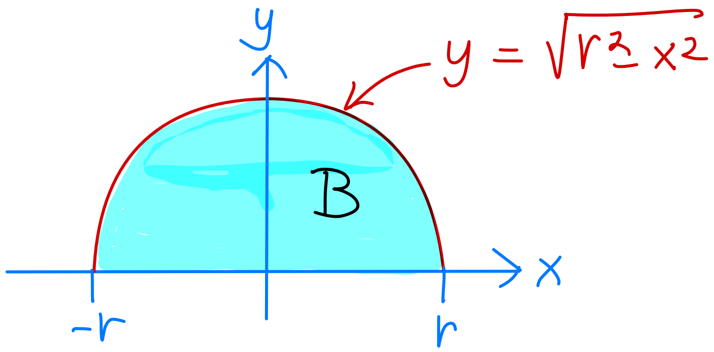
La formula vale per a, b qualunqui con a<b e f anche non positiva.

In tal caso B è come segue:



Esempio 1

A = sfera di raggio r : $\mathrm{vol}(A) = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

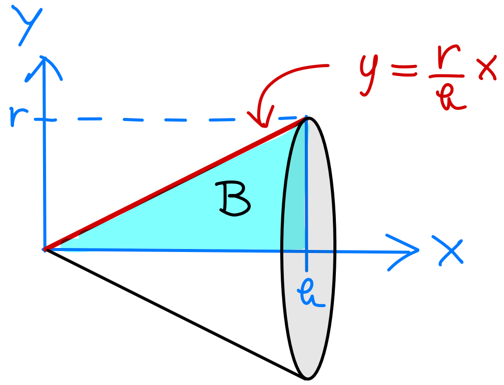


$$= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx$$

$$= \pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-r}^{r} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Esempio 2

A = cono (circolare, retto) di altezza h e raggio di base r ; $\mathrm{vol}(A) = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx$

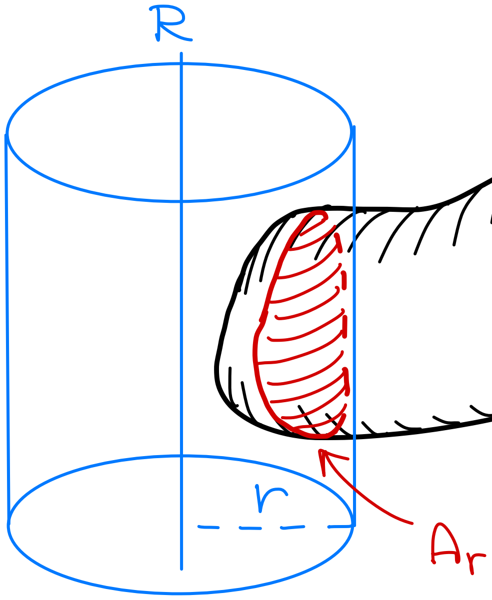


$$= \pi \left| \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right|_0^h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Calcolo del volume, seconda formula

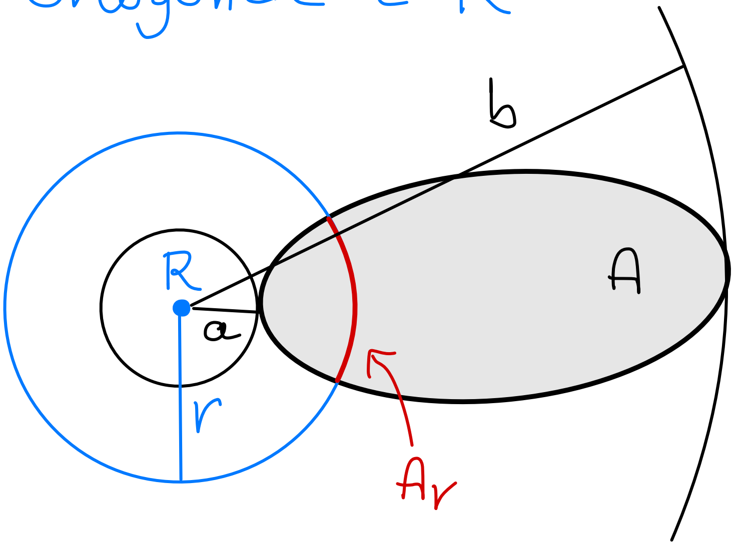
A solido nello spazio. Scelgo un asse R e per ogni $r > 0$ indico con A_r la sezione radiale di A di raggio r cioè l'intersezione di A con la superficie del cilindro (illimitato) di asse R e raggio r



Allore

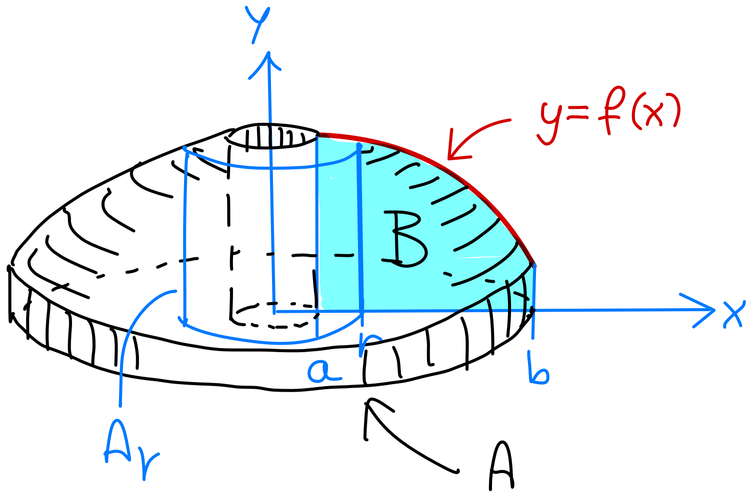
$$\boxed{\text{vol}(A) = \int_a^b \text{area}(A_r)\, dr}$$

proiezione sul piano ortogonale a R



Non dimostro questa formula.

Solidi di rotazione. II



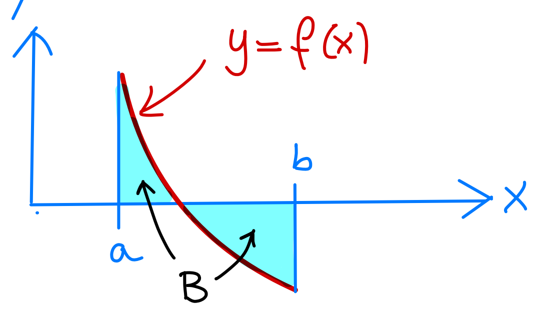
A solido ottenuto ruotando B attorno all' asse delle y.
Allora

$$\mathrm{vol}(A) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

La sezione radiale A_r è la sup. laterale di un cilindro di altezza $f(r)$ e raggio di base r.
Quindi $\mathrm{area}(A_r) = 2\pi r f(r)$.
Quindi $\mathrm{vol}(A) = \int_a^b \mathrm{area}(A_r)\, dr = \int_a^b 2\pi r f(r)\, dr$.

Osservazione

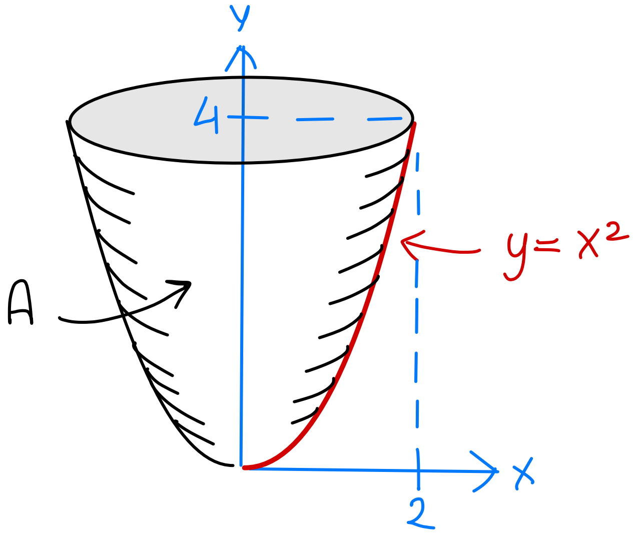
In questa formula deve essere $0 \leq a < b$ e $f \geq 0$.
Se f non è positiva, allora prendo B come segue



e $\mathrm{vol}(A) = 2\pi \int_a^b x\, |f(x)|\, dx.$

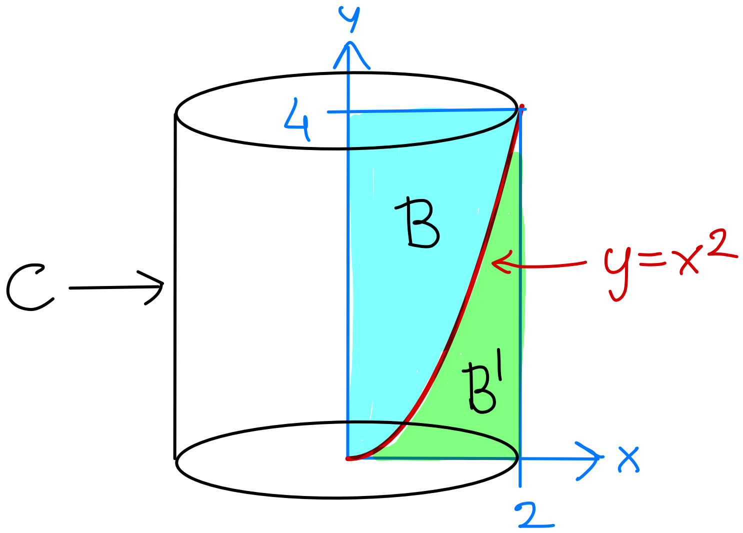
Esempio

Calcolare il volume di A come in figura:



Devo ottenere A come rotazione di una figura piana B attorno ad un asse.

L'asse è quello delle y; mentre B è come in figura:



Sia A' dato dalla rotazione di B' attorno all'asse y, allora A = cilindro C meno A'.

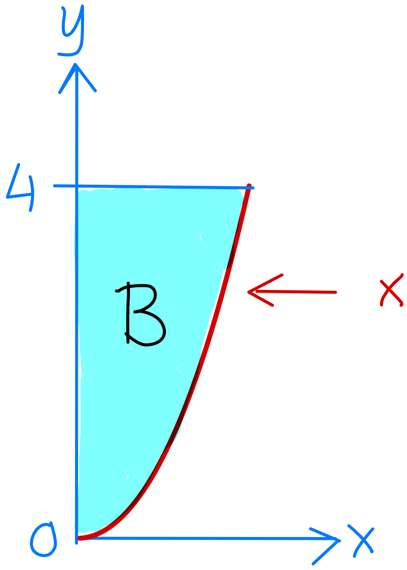
Quindi

$$\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(C) - \mathrm{vol}(A')$$

$$= (\pi 2^2) \cdot 4 - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx$$

$$= 16\pi - 2\pi \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi$$

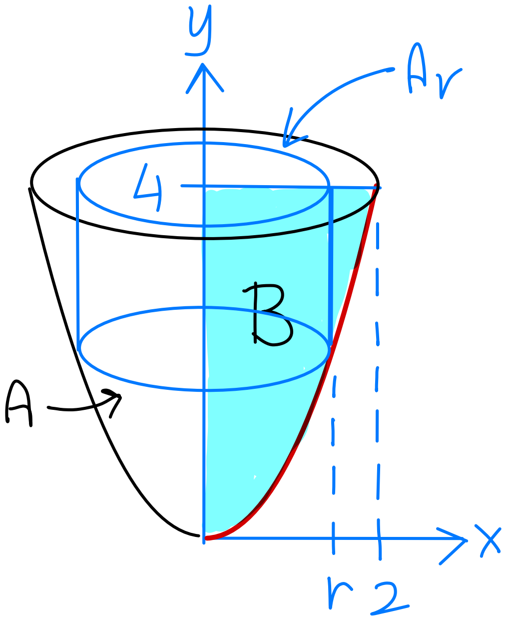
Soluzione 2 : applico la prima formula per i solidi di rotazione:



$$\text{vol}(A) = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^4 = 8\pi$$

Soluzione 3 : calcolo vol(A) integrando l'area delle sezioni radiali A_r :



A_r è la sup. laterale di un cilindro di raggio r e altezza $4-r^2$.

Quindi $\text{area}(A_r) = 2\pi r(4-r^2)$ e

$$\text{vol}(A) = \int_0^2 2\pi r(4-r^2)\,dr$$

$$= \dots = 8\pi$$

AM1 gest 20/21 lezione 40

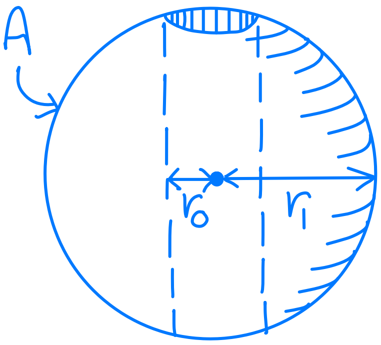
24/11/2020

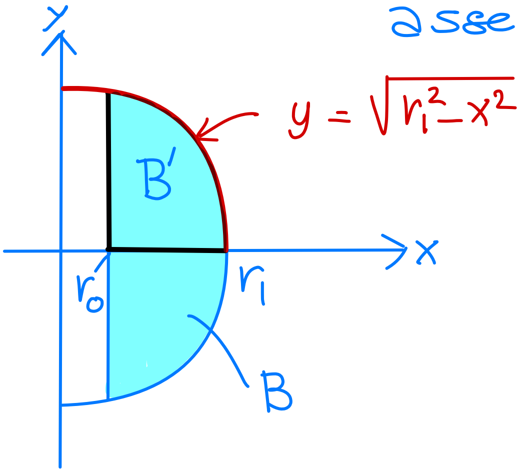
Esempi di calcolo dei volumi

1| A è il solido ottenuto prendendo una sfera di raggio r_1 e bucandola con il trapano con una punta di diametro $d = 2r_0$, passando per il centro.
Calcolare il volume di A.

Punto 1: disegnare A

A si ottiene ruotando B attorno all'asse delle y





Indicando con B' la metà superiore di B e con A' il solido di rotazione generato da B' ho che

$$\text{vol}(A) = 2\,\text{vol}(A') = 2\left(2\pi \int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2 - x^2}\,dx\right)$$

$$= 4\pi \int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2 - x^2}\,dx$$

cambio di var.
$t = r_1^2 - x^2,$
$dt = -2x\, dx$
$\left(-\frac{1}{2}\right) dt = x\, dx$

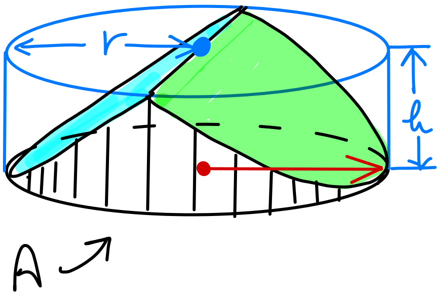
$$\rightarrow = 4\pi \int_{r_1^2-r_0^2}^{0} \sqrt{t} \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r_1^2-r_0^2} \sqrt{t}\, dt$$

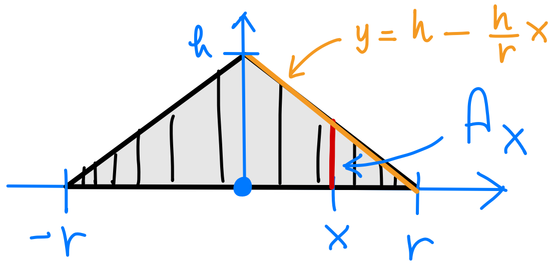
$$= 2\pi \left| \frac{2}{3} t^{3/2} \right|_{0}^{r_1^2-r_0^2}$$

$$= \frac{4\pi}{3} (r_1^2 - r_0^2)^{3/2}$$

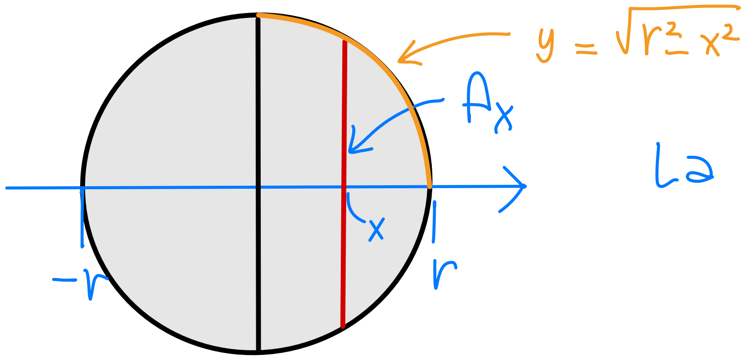
2| Calcolare il volume di A dato sotto:



Scelgo un asse e considero le sezioni A_x rispetto a questo asse.
L'asse per cui è facile l'area di A_x è quello dato dalla freccia rossa in fig.



A_x è un rettangolo.
L'altezza è $h - \frac{h}{r}x$ (per $x > 0$).



La base è $2\sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi $\quad \text{area}(A_x) = 2h\left(1-\frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2-x^2}.$

Quindi

$$\text{vol}(A) = \int_{-r}^{r} \text{area}(A_x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{r} \text{area}(A_x)\,dx$$

$$= 4h\int_{0}^{r} \left(1-\frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{r} t = \frac{x}{r} \\ dt = \frac{1}{r}dx \\ r\,dt = dx \end{array}\right| \rightarrow = 4hr^2\int_{0}^{1} (1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\left.\begin{array}{r} t = \text{sen}\,u \\ dt = \cos u\,du \end{array}\right| \rightarrow = \;\ldots\ldots$$

Calcolo degli integrali / delle primitive.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo.

Ricordiamo che $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$ se $\forall x \in I$ F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Inoltre se $F, G: I \to \mathbb{R}$ sono primitive di f, allora $F - G = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Per comodità introduciamo la seguente notazione:
indichiamo con $\int f(x)dx$ una generica primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$.
Notiamo che $\int f(x)dx$ è una funzione, non è un integrale (che invece è un numero).

Elenco di primitive elementari

Sia $a, c \in \mathbb{R}$:

$$\int a \, dx = ax + c \qquad (\text{infatti } (ax+c)' = a)$$

$a \neq -1$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad \left(\text{infatti } \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a\right)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

con questa scrittura si intende che sulla semiretta $x > 0$ si ha $\int \frac{1}{x} dx = \log(x) + c$ e sulla semiretta $x < 0$ si ha $\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + c$

Infatti se considero $f: \begin{cases} (0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ e $F: \begin{cases} (0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(x) \end{cases}$ ho che

$\forall x \in (0,+\infty)$ $\quad F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$.

Inoltre se considero $f: \begin{cases} (-\infty,0) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ e $F: \begin{cases} (-\infty,0) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(-x) \end{cases}$ ho che

$\hookrightarrow -x > 0 \Rightarrow \log(-x)$ ben definito

$\forall x \in (-\infty, 0)$ $\quad F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x} = f(x)$.

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$a > 0$, $a \neq 1$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\int \log(x) dx = x \log(x) - x + c$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$\int \tan(x) dx = -\log(|\cos(x)|) + c$$

(si intende che se $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\int \tan(x) = -\log(\cos(x)) + c$
e se $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\int \tan(x) = -\log(-\cos(x)) + c$)

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$

Regole per il calcolo degli integrali / delle primitive.

I) Somma di due funzioni

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue e I un intervallo, allora

$$\int (f+g)(x) \; dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx .$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, allora

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx .$$

Dimostrazione: Con la notazione $\int f(x)\, dx$ e $\int g(x)\, dx$ intendiamo due primitive di f e g, che possiamo chiamare F, G (con la proprietà che $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$). Il teorema dice che una primitiva di $(f+g)$ è data da $F+G$.

Verifichiamolo:

$$(F+G)'(x) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivata della} \\ \text{somma è la} \\ \text{somma delle derivate}}}{=} F'(x) + G'(x) \overset{\substack{\text{definizione di} \\ \uparrow \text{ primitive}}}{=} f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad \forall x \in I.$$

Prendendo $I = [a,b]$ abbiamo

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx \overset{\substack{\text{TFCI} \\ \downarrow}}{=} (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(A) + G(A)$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{TFCI}}}{=} \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx .$$

Esempio:

$$\int x + e^x \, dx = \int x \, dx + \int e^x \, dx = \frac{x^2}{2} + e^x + c$$

$$\int_0^\pi 2 + \sin(x)\, dx = \int_0^\pi 2\, dx + \int_0^\pi \sin(x)\, dx = 2x\Big|_0^\pi + (-\cos(x))\Big|_0^\pi = 2\pi + 1 + 1 = 2\pi + 2$$

$$= 2\pi$$

II) Prodotto di una funzione per una costante

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx .$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx .$$

Dimostrazione:

Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Allora $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$

Mostriamo che λF è una primitiva di λf:

$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda \cdot f$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda (F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

Esempio:

$$\int 2 \cos(x)\, dx = 2 \int \cos(x)\, dx = 2 \sin(x) + c$$

$$\int_1^2 \frac{3}{x}\, dx = 3 \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = 3 \log(x)\Big|_1^2 = 3 \log(2)$$

Possiamo riassumere le regole I) e II) in un'unica regola:

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b nf(x) + mg(x)\, dx = n\int_a^b f(x)\, dx + m\int_a^b g(x)\, dx .$$

Esempio: $\int_0^1 2x^2 - 3x\, dx = 2\int_0^1 x^2\, dx - 3\int_0^1 x\, dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-5}{6}$

III) Regola di integrazione per parti

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua, g derivabile, e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.
Allora

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

e

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(b) g(b) - F(a) g(a) - \int F(x)\, g'(x)\, dx$$

Dimostrazione: Possiamo riscrivere la prima formula come

$$\int f(x)g(x) + F(x)g'(x)\, dx = F(x)g(x).$$

Questa scrittura dice che Fg è una primitiva di $fg + Fg'$.
Verifichiamolo:

$$(Fg)'(x) = F'(x)\, g(x) + F(x)\, g'(x) = f(x)\, g(x) + F(x)\, g'(x).$$

Abbiamo $\int_a^b f(x)\, g(x) + F(x)\, g'(x) = F(x)\, g(x) \Big|_a^b$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, g(x) = F(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\, g'(x) .$$

Esempio: $\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + c$

$\int x e^x\, dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x\, dx = \dots ?$ non utile

$\int \log x\, dx = \int \log x \cdot 1\, dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = x \log x - x + c$

$\int_0^\pi x \sin(x)\, dx = -x\cos(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\, dx = \pi + \sin(x)\Big|_0^\pi = \pi$

PROPRIETÀ:

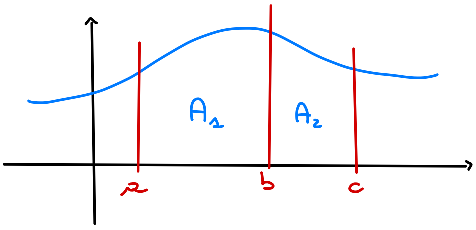
Ricordiamo che $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

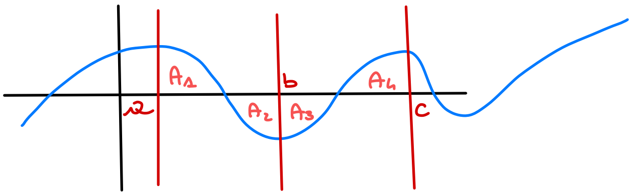
Supponiamo $a<b<c$, $f \geq 0$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$= Area(A_1) + Area(A_2) = Area(A_1 \cup A_2) = \int_a^c f(x)\,dx$$



Se $a<b<c$ e f ha segno qualsiasi



$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx$$
$$= Area(A_1) - Area(A_2) - Area(A_3) + Area(A_4) = Area(A_1 \cup A_4) - Area(A_2 \cup A_3)$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx.$$

Se $c<b<a$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx - \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Se $b<a<c$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx + \int_b^c f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

e così via ....

Es. $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(x)\sin(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\cos^2(x)\,dx$

$= \int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2(x)dx = x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$

$\Rightarrow 2\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \pi \quad \Rightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2(x)\,dx\,dx = x\Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Es: $\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \left[-e^x\cos(x) - \int -e^x \cos(x)\,dx \right]$

$= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$

$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$

$\int e^x \cos(x) = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)$

$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$

Lezione 38

Esercizio: Trovare la primitiva di $\int (1-4x)^a \, dx$ con $a \neq -1$.

Svolgimento: Sostituisco $t = 1-4x \Rightarrow dt = -4dx$

$$\Rightarrow \int (1-4x)^a \, dx = -\frac{1}{4}\int t^a \, dt = -\frac{1}{4(a+1)} t^{a+1} + c \underset{\downarrow}{=} -\frac{(1-4x)^{a+1}}{4(a+1)} + c$$

risostituisco $t = 1-4x$

Esercizio: Calcolare $\int_0^1 \sqrt{1+2t^2} \, dt$

Svolgimento:

$$\int_0^1 \sqrt{1+2t^2} \, dt \underset{\downarrow}{=} \int_1^3 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}\int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left(3^{3/2} - 1\right).$$

sostituisco $x = 1+2t^2$ se $t=0$, allora $x=1$

$dx = 4t \, dt$ se $t=1$, allora $x=3$

Esercizio: Trovare la primitiva di $\int x^a \cdot \log(x) \, dx$ con $a \neq -1$.

Svolgimento:

$$\int x^a \log x \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \frac{1}{a+1}\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + c$$

Esercizio : Trovare la primitiva di $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ al variare di a, b, c.

Svolgimento : Dividiamo l'esercizio in 3 casi:

consideriamo ax^2+bx+c e $\Delta = b^2-4ac$.

CASO 1 : $\Delta > 0$

CASO 2 : $\Delta = 0$

CASO 3 : $\Delta < 0$

CASO 1: Abbiamo due soluzioni $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Possiamo riscrivere ax^2+bx+c come $a(x-x_1)(x-x_2)$. Inoltre

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Cerco A,B affinchè $\frac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -Ax_2 - Bx_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -B \\ B(x_2-x_1) = 1 \end{cases} \qquad B = \frac{1}{x_2-x_1} = \frac{1}{\left(\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)-\left(\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)} = \frac{a}{\sqrt{\Delta}}$$

$$A = -\frac{a}{\sqrt{\Delta}}$$

Dunque $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} dx = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{(x-x_1)} dx + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{(x-x_2)} dx$

Chiamo $x - x_1 = t$

$\Rightarrow dx = dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-x_1)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + c = \log|x-x_1| + c$

quindi $-\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{(x-x_1)} dx + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{(x-x_2)} dx = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log|x-x_1| + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log|x-x_2| + c$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{|x-x_2|}{|x-x_1|} + c$$

CASO 2: $\Delta = 0$, dunque la soluzione di $ax^2+bx+c = 0$ è $x_0 = -\frac{b}{2a}$

quindi $(ax^2+bx+c) = a(x-x_0)^2 = \frac{(2ax+b)^2}{4a}$.

Abbiamo $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = 4a \int \frac{1}{(2ax+b)^2} dx = 2 \int \frac{1}{t^2} dt = 2\left(-\frac{1}{t} + c\right)$

chiamo $2ax - b = t$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{2a}$

$$= -\frac{2}{t} + c$$

$$= -\frac{1}{ax+\frac{b}{2}} + c$$

3) $ax^2+bx+c = ax^2+bx \pm \frac{b^2}{4a} + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\left[\frac{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} + 1\right]$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} \int \frac{1}{\frac{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} + 1}\,dx = \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} \int \left(\frac{1}{t^2+1}\right)\left(\frac{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}}\right)dt$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}} \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}} \arctan(t) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right) + c$$

Esercizio Trovare la primitiva di $\dfrac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ con a,b,c,d,e dati, $a\neq 0$, $d\neq 0$.

Svolgimento: $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

$$dx+e = \frac{d}{2a}\left(\frac{2a}{d}(dx+e)\right) = \frac{d}{2a}\left[2ax + \frac{2ae}{d}\right] = \frac{d}{2a}\left[2ax+b-b+\frac{2ae}{d}\right]$$

$$= \frac{d}{2a}\left[2ax+b\right] - \frac{bd}{2a} + e$$

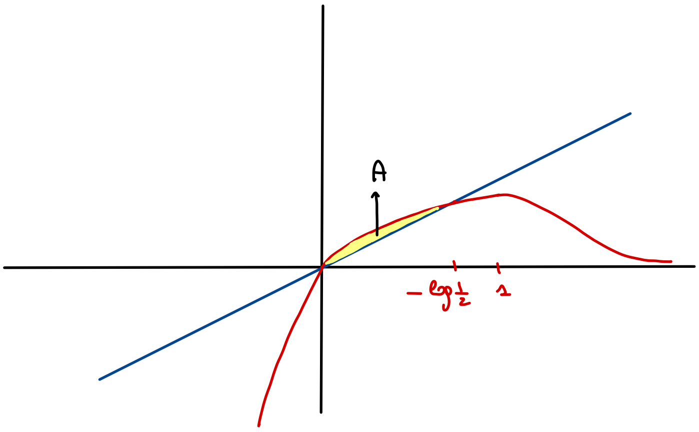
Quindi

$$\int \frac{dx+e}{ax^2+bx+c} = \frac{d}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \underbrace{\left(e-\frac{bd}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx}_{\text{questa parte si tratta come nell'esercizio precedente}}$$

. Se chiamiamo $f(x) = ax^2+bx+c$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int f'(x)\cdot(f(x))^{-1}\,dx = \log|f(x)| + c = \log|ax^2+bx+c| + c$$

Esercizio: Calcolare l'area dell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{2} \leq y \leq xe^{-x}\} = A$ dopo averlo disegnato.



$f(x) = xe^{-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} = 0$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) \geq 0 \qquad 1-x \geq 0 \qquad x \leq 1$

$f(1) = \frac{1}{e}$

$\frac{x}{2} = xe^{-x} \qquad x=0$

$\frac{1}{2} = e^{-x} \Rightarrow \log\frac{1}{2} = -x \Rightarrow x = -\log\frac{1}{2} = \log 2$

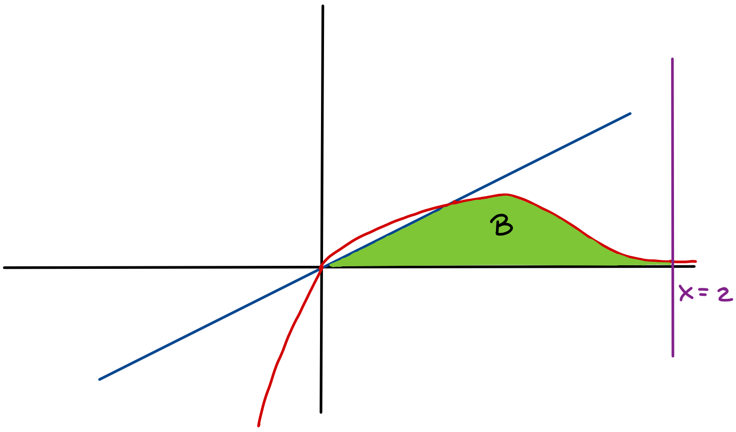
$$\text{Area}(A) = \int_0^{\log 2} xe^{-x} - \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \Big[-xe^{-x}\Big]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} -e^{-x}\, dx - \Big[\frac{x^2}{4}\Big]_0^{\log 2}$$

$$= -\log 2\, e^{-\log 2} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^{\log 2} - \frac{(\log 2)^2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}(\log 2)^2$$

Esercizio: Calcolare l'area dell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y \geq 0 \text{ e } y \leq \frac{x}{2} \text{ e } y \leq xe^{-x} \text{ e } x \leq 2\} = B$



$$\text{Area}(B) = \int_0^{\log 2} \frac{x}{2}\, dx + \int_{\log 2}^{2} xe^{-x}\, dx$$

$$= \Big[\frac{x^2}{4}\Big]_0^{\log 2} + \Big[-xe^{-x}\Big]_{\log 2}^{2} + \Big[-e^{-x}\Big]_{\log 2}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\log 2)^2 - 2e^{-2} + \frac{1}{2}\log 2 - e^{-2} + \frac{1}{2}$$

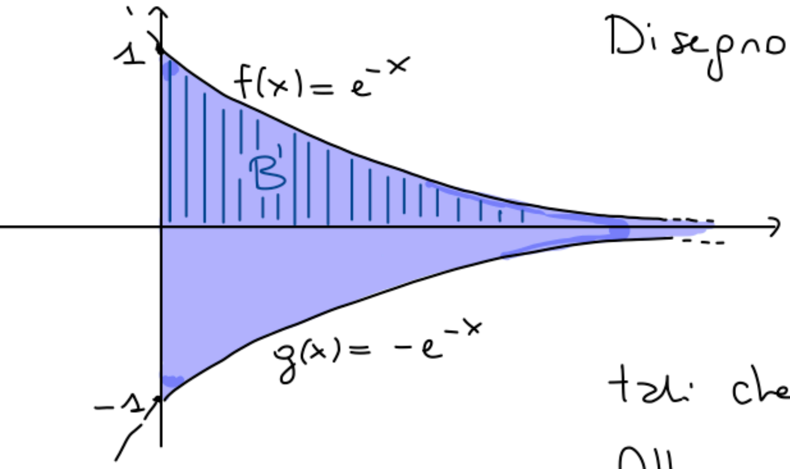
$$= \frac{1}{4}(\log 2)^2 + \log\sqrt{2} - 3e^{-2} + \frac{1}{2}$$

Lezione 42

Esercizio: Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, \; |y| \leq e^{-x}\}$

Calcolare l'area di B.

Svolgimento: $|y| \leq e^{-x} \iff -e^{-x} \leq y \leq e^{-x}$



Disegno $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = -e^{-x}$

L'insieme B è colorato in figura.

Chiamo $B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \geqslant 0, \; 0 \leq y \leq e^{-x}\}$

Allora $\text{Area}(B) = 2\,\text{Area}(B')$

$$\text{Area}(B') = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left(\left[-e^{-x} \right]_0^c \right)$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left(-e^{-c} + 1 \right) = 1$$

$$\text{Area}(B) = 2 \cdot \text{Area}(B') = 2 \cdot 1 = 2$$

Esercizio: Disegnare la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ e l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \; \frac{1}{x^2} \leq y \leq f(x)\}$

Calcolare Area(A).

Svolgimento. Consideriamo $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

$\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^2} = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \log x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \log x}{x^4}$$

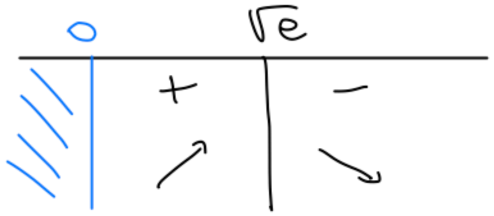
$f'(x) \geqslant 0 \qquad \dfrac{x - 2x\log(x)}{x^4} \geqslant 0$

$x(1 - 2\log(x)) \geqslant 0$

$x > 0$ nel Dom(f)

$1 - 2\log(x) \geqslant 0$

$x \leq e^{1/2} = \sqrt{e}$



$f(\sqrt{e}) = \dfrac{\log\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \dfrac{1}{2e} \simeq 0{,}18$

Intersezione tra $\frac{1}{x^2}$ e $f(x)$

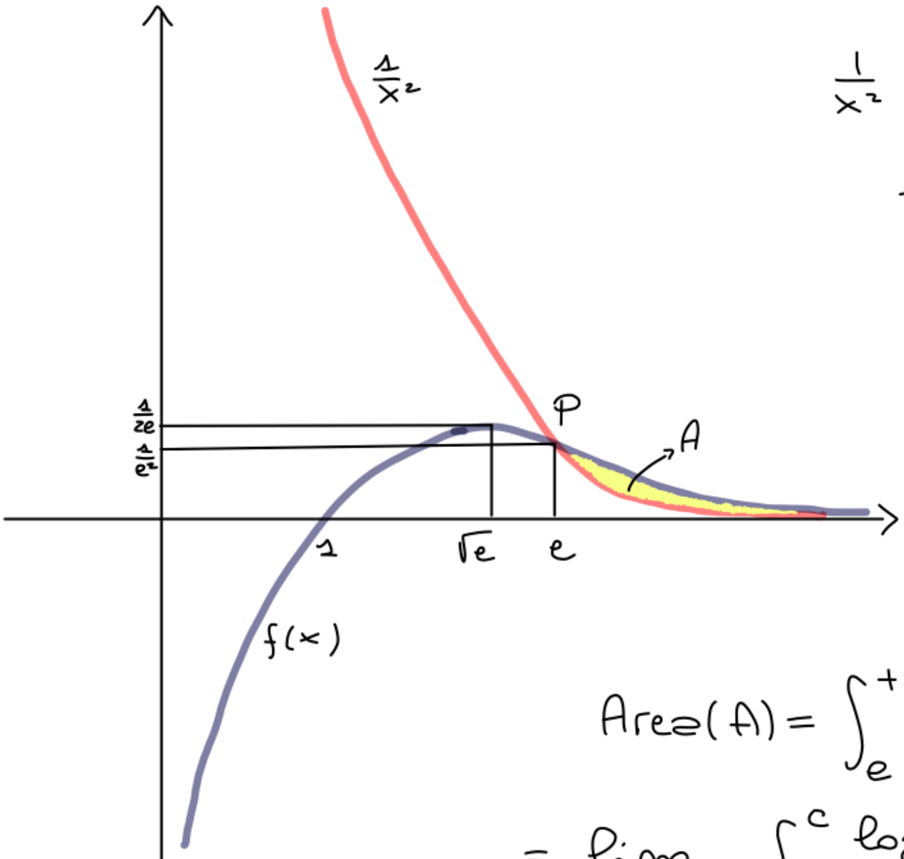
$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\log(x)}{x^2}$

$\Rightarrow x = e$

$P(e\,;\,\frac{1}{e^2})$

$\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{\log(x)}{x^2}$

$\Rightarrow \quad x \geqslant e$



$$\text{Area}(A) = \int_e^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_e^c \frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_e^c \underbrace{\log(x)}_{g} \cdot \underbrace{x^{-2}}_{f}\,dx - \frac{1}{x^2}\,dx$$

integro per parti
↓

$$= \lim_{c\to+\infty} \left(\left[\log(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_e^c \cancel{- \int \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx} \quad \cancel{-\int \frac{1}{x^2}\,dx} \right)$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{\log(x)}{x}\right]_e^c = \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{-\log(c)}{c} + \frac{1}{e} \right)$$

$$= \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \text{Area}(A) = \frac{1}{e}$$

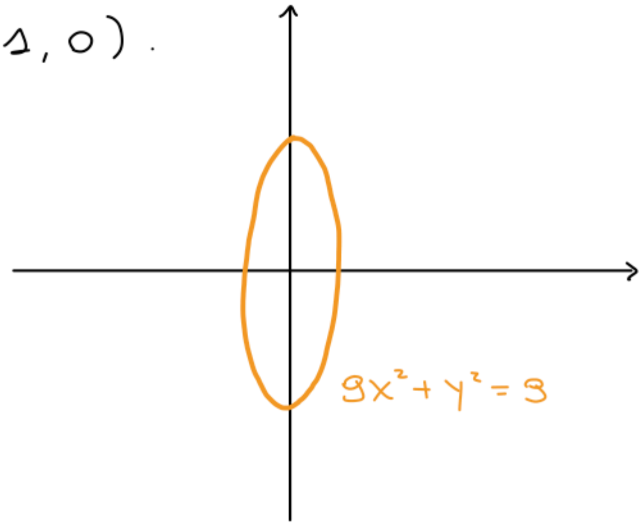
Esercizio: Disegnare l'insieme E dei punti (x,y) tali che $9x^2+y^2 \leq 9$.

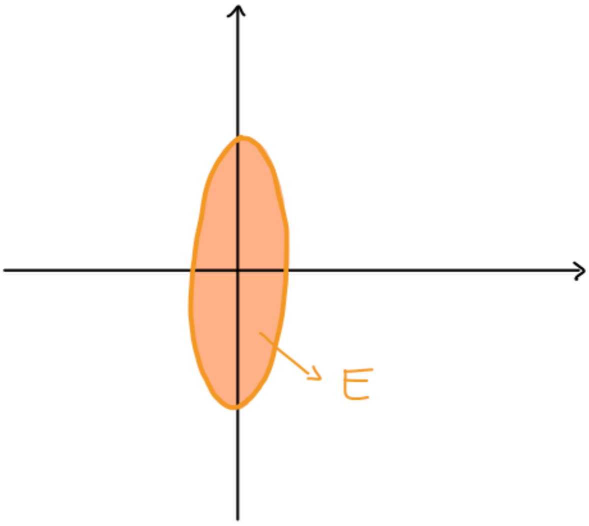
- Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare E (1) attorno all'asse x
(2) attorno all'asse y.

Svolgimento: Come prima cosa disegnamo E.

Parto dal disegnare la curva $9x^2+y^2=9$

I° modo: La curva $9x^2+y^2=9$ è una ellisse di centro $(0,0)$, con assi paralleli agli assi cartesiani e vertici $V_{1,2}=(0,\pm 3)$ $V_{3,4}(\pm 1, 0)$.





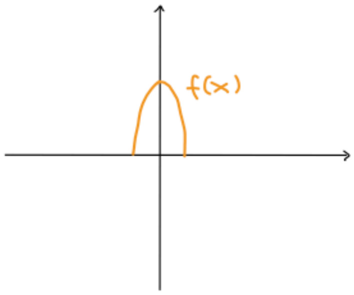
II° modo:

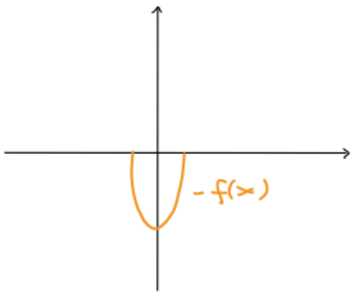
$$9x^2+y^2=9 \iff y^2=9-9x^2$$

$$\iff y = \pm 3\sqrt{1-x^2}$$

Chiamo $f(x)=3\sqrt{1-x^2}$, allora possiamo descrivere equivalentemente E come

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -f(x)\leq y \leq f(x)\}$$





(1) Chiamo A il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse x.

$$\text{Volume}(A) = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(3\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} 9 - 9x^2 \, dx = 2\pi \int_{0}^{1} 9 - 9x^2 \, dx$$

$$= 2\pi \left[9x - 3x^3 \right]_0^1 = 12\pi.$$

(2) Chiamo B il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse y.

$$9x^2 + y^2 = 9 \iff x^2 = 1 - \frac{1}{9} y^2$$

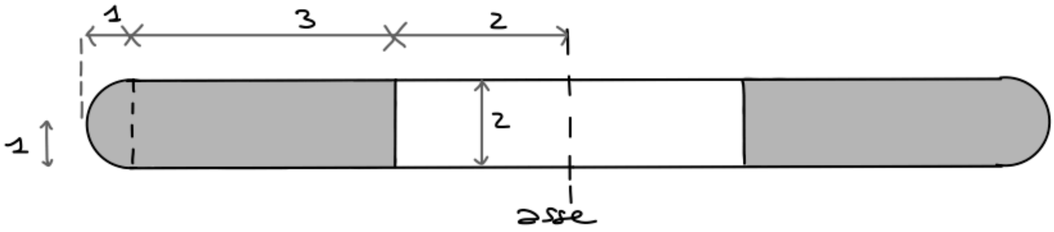
$$\iff x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9} y^2}$$

Chiamo $g(y) = \sqrt{1 - \frac{1}{9} y^2}$

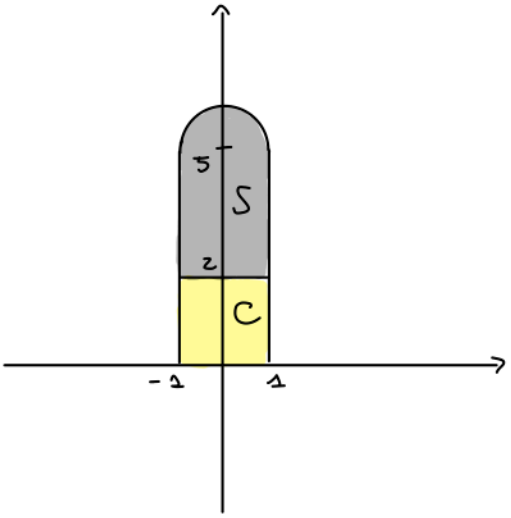
$$\text{Volume}(B) = \pi \int_{-3}^{3} (g(y))^2 \, dy = \pi \int_{-3}^{3} 1 - \frac{1}{9} y^2 \, dy$$

$$= 2\pi \int_{0}^{3} 1 - \frac{1}{9} y^2 \, dy = 2\pi \left[y - \frac{1}{27} y^3 \right]_0^3 = 4\pi$$

Esercizio: Consideriamo una ruota, bucata in corrispondenza dell'asse, la cui sessione S è rappresentata in grigio nella figura:



Calcolare il volume della ruota.



Facciamo coincidere l'asse della ruota con l'asse delle x come nella figura. Chiamiamo C il quadrato giallo e S la parte in grigio.

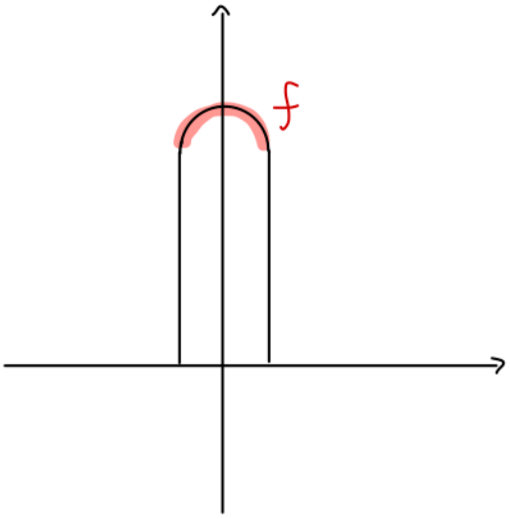
Il volume della ruota è dato da

$$\text{Volume (ruota)} = v_p - v_c$$

dove v_p è il volume della ruota piena ottenuta facendo ruotare attorno all'asse x la figura piena $S \cup C$ e v_c è il volume del cilindro ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x il quadrato giallo.

Il cilindro ha raggio di base $r=2$ e altezza $h=2$

$$v_c = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$$



Abbiamo

$$v_p = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx$$

dove il grafico di f è colorato di rosso nella figura.

Il grafico di f è un pezzo di una curva: la metà superiore della circonferenza di centro (0,5) e raggio 1.

Questo pezzo di curva può essere parametrizzato da $f(x) = 5 + \sqrt{1 - x^2}$.

Infatti la circonferenza di centro (0,5) e raggio 1 ha equazione $x^2+(y-5)^2=1$.

Esprimiamo y in funzione di x:

$$(y-5)^2 = 1-x^2$$

$$y-5 = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{1-x^2}$$

Abbiamo $f(x) = 5+\sqrt{1-x^2}$ (e $y=5-\sqrt{1-x^2}$ è l'altra metà della circonferenza).

Quindi

$$V_p = \pi\int_{-1}^{1}\left(5+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} 25+1-x^2+10\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 26 - 2\pi\int_0^1 x^2 + 20\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi\left[26x\right]_0^1 - 2\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt$$

$\downarrow$ cambio di variabile $x=\sin(t)$
$dx=\cos(t)\,dt$

$$= 52\pi - \frac{2}{3}\pi + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$

$$= \frac{154}{3}\pi + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$

Svolgiamo separatamente

$$\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos(t)}_{f}\,\underbrace{\cos(t)}_{g}\,dt \underset{\text{per parti}}{\overset{\downarrow}{=}} \left[\sin(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^2\,dt$$

$$= \left[\sin(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^2\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\sin(t)\cos(t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

Dunque

$$v_p = \frac{154}{3}\pi + 20\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{154}{3}\pi + 5\pi^2$$

Concludendo

$$\text{Volume (ruota)} = v_p - v_c = \frac{154}{3}\pi + 5\pi^2 - 8\pi$$

$$= \frac{130}{3}\pi + 5\pi^2$$

Lezione 44 - seconda parte.

Esercizio: Un punto P si muove nel piano con legge oraria $P(t) = (\sin(e^{3t}), -\cos(e^{3t}))$.
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e $t=1$.

Svolgimento. In generale, se un punto si muove con legge oraria $P(t) = (x(t), y(t))$, allora $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

Visto che

$$(\sin(e^{3t}))' = 3e^{3t}\cos(e^{3t}), \quad (-\cos(e^{3t}))' = 3e^{3t}\sin(e^{3t})$$

abbiamo $\vec{v}(t) = (3e^{3t}\cos(e^{3t}), 3e^{3t}\sin(e^{3t}))$.

Per calcolare la distanza percorsa dobbiamo calcolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

si ha

$$\begin{aligned} |\vec{v}(t)| &= \sqrt{(3e^{3t}\cos(e^{3t}))^2 + (3e^{3t}\sin(e^{3t}))^2} \\ &= \sqrt{9e^{6t}\cos^2(e^{3t}) + 9e^{6t}\sin^2(e^{3t})} \\ &= \sqrt{9e^{6t}(\underbrace{\cos^2(e^{3t}) + \sin^2(e^{3t})}_{=1})} \\ &= 3e^{3t} \end{aligned}$$

La distanza percorsa tra $t=0$ e $t=1$ è data da

$$\int_0^1 |\vec{v}(t)|\,dt = \int_0^1 3e^{3t}\,dt = \left[e^{3t}\right]_0^1 = e^3 - 1$$

Esercizio: Un punto P si muove nel piano con legge oraria $P(t) = (\cos(t)\,;\ 2t^3 - 3\pi t^2)$.
Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla

Svolgimento. In generale, se un punto si muove con legge oraria $P(t) = (x(t), y(t))$, allora $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t))$

Per trovare i tempi in cui l'accelerazione è nulla devo imporre $\vec{a}(t) = (0, 0)$. Dunque devo risolvere $\boxed{\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 0 \end{cases}}$

$x(t) = \cos(t)$, $x'(t) = -\sin(t)$, $x''(t) = -\cos(t)$;

$y(t) = 2t^3 - 3\pi t^2$, $y'(t) = 6t^2 - 6\pi t$, $y''(t) = 12t - 6\pi$

$$\begin{cases} -\cos(t) = 0 \\ 12t - 6\pi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'unico istante in cui l'accelerazione è nulla è $t = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio: Un punto P si muove nel piano con legge oraria $P(t) = (2t^2 - \frac{5}{4}, t^3 - t)$.

a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.

b) Disegnare la traiettoria di P.

Svolgimento:

a) Scrivo la funzione che descrive come varia la distanza di $P(t)$ dall'origine al variare di t:

$$f(t) = d(P(t); 0) = |P(t)|$$

$$= \sqrt{(2t^2 - \frac{5}{4})^2 + (t^3 - t)^2}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Cerco $\min(f)$.

$$\lim_{t \to \mp\infty} \sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 - t)^2} = +\infty$$

$$f'(t) = \frac{2\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)(4t) + 2(t^3 - t)\cdot(3t^2 - 1)}{2\sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 + t)^2}}$$

$$= \frac{8t^3 - 5t + 3t^5 - 3t^3 - t^3 + t}{\sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 + t)^2}}$$

$$= \frac{3t^5 + 4t^3 - 4t}{\sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 + t)^2}}$$

$$f'(t) = 0 \iff t(3t^4 + 4t^2 - 4) = 0$$

$$x = t^2 \qquad 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{3} \begin{cases} = \frac{2}{3} \\ = -2 \end{cases}$$

$$t = 0, \quad t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f(0) = \frac{25}{16} \qquad f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{2}{27}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{35}}{\cancel{3}\cdot 12 \cdot \sqrt{3}} \simeq 0{,}28$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{minimo.}}}{\frac{\sqrt{35}}{12\sqrt{3}}} < \frac{25}{16} < +\infty$$

La distanza minima è $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{35}}{12\sqrt{3}}$

b) $P(t) = (x(t), y(t)) = \left(2t^2 - \frac{5}{4},\ t^3 - t\right)$.

Dunque $x = 2t^2 - \frac{5}{4}$

$2t^2 = x + \frac{5}{4}$

$$t^2 = \frac{x}{2} + \frac{5}{8} = \frac{4x+5}{8}$$

$$\Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{4x+5}{8}} \qquad \text{con} \quad x \geqslant -\frac{5}{4}$$

$$y = t^3 - t = t(t^2-1) = \pm\sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right)$$

Per disegnare la traiettoria dobbiamo disegnare

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right)$$

e $\quad g(x) = -f(x)$.

Inizio disegnando $f(x)$.

* $\mathrm{Dom}(f) = \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$

* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right) = +\infty$

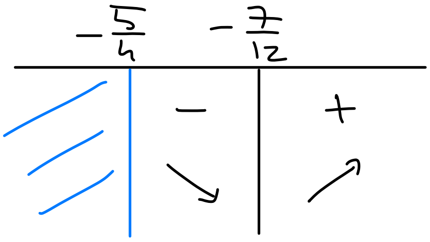
$f\left(-\frac{5}{4}\right) = 0$

* segno: $f(x) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqslant \frac{3}{4}$

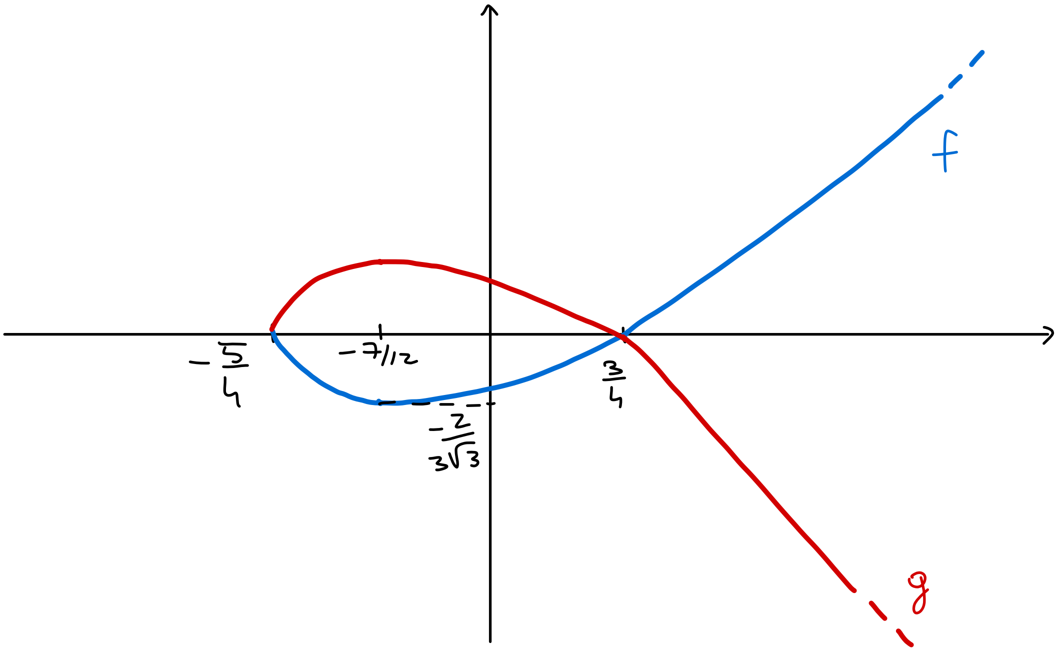
* $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{16\sqrt{2}}\left[\frac{2(4x-3)}{\sqrt{4x+5}} + 4\sqrt{4x+5}\right]$

$$= \frac{8x - 6 + 16x + 20}{16\sqrt{2}\ \sqrt{4x+5}} = \frac{24x+14}{16\sqrt{2}\ \sqrt{4x+5}} = \frac{12x+7}{8\sqrt{2}\sqrt{4x+5}}$$

$f'(x) \geqslant 0 \qquad x \geqslant -\frac{7}{12}$



$$f\left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{-\frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\cancel{16}}{3}}{\cancel{16}\cancel{\sqrt{2}}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$



f
g
$-\frac{5}{4}$
$-7/12$
$\frac{3}{4}$
$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$

AM1 gest 20/21 lezione 40

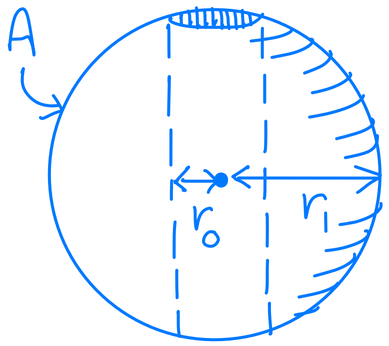
24/11/2020

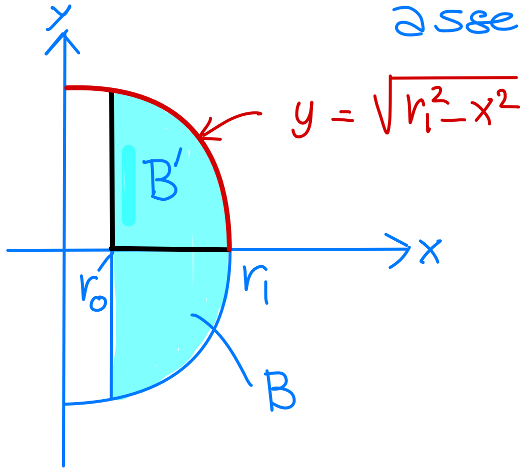
Esempi di calcolo dei volumi

1| A è il solido ottenuto prendendo una sfera di raggio r_1 e bucandola con il trapano con una punta di diametro $d = 2r_0$, passando per il centro.
Calcolare il volume di A.

Punto 1: disegnare A

A si ottiene ruotando B attorno all'asse delle y





Indicando con B' la metà superiore di B e con A' il solidi di ratazione generato da B' ho che

$$\mathrm{vol}(A) = 2\,\mathrm{vol}(A') = 2\left(2\pi\int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2-x^2}\,dx\right)$$

$$= 4\pi\int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2-x^2}\,dx$$

cambio di var.

$t = r_1^2 - x^2,$

$dt = -2x\,dx$

$\left(-\frac{1}{2}\right) dt = x\,dx$

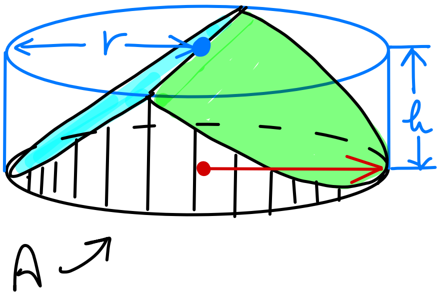
$$\xrightarrow{} = 4\pi \int_{r_1^2 - r_0^2}^{0} \sqrt{t} \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r_1^2 - r_0^2} \sqrt{t}\, dt$$

$$= 2\pi \left| \frac{2}{3} t^{3/2} \right|_{0}^{r_1^2 - r_0^2}$$

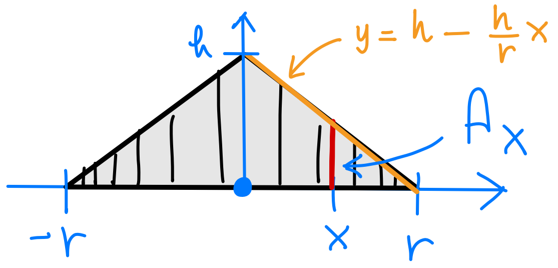
$$= \frac{4\pi}{3} (r_1^2 - r_0^2)^{3/2}$$

2| Calcolare il volume di A dato sotto:



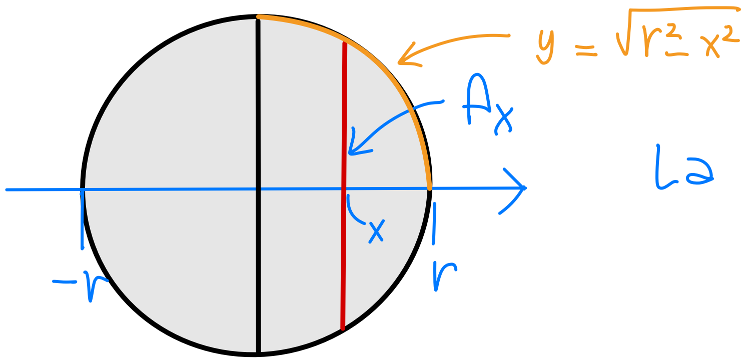
Scelgo un asse e considero le sezioni A_x rispetto a questo asse.

L'asse per cui è facile l'area di A_x è quello dato dalla freccia rossa in fig.



A_x è un rettangolo.

L'altezza è $h - \frac{h}{r} x$ (per $x > 0$).



La base è $2\sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi $\quad \text{area}(A_x) = 2h\left(1 - \frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2 - x^2}.$

Quindi

$$\text{Vol}(A) = \int_{-r}^{r} \text{area}(A_x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{r} \text{area}(A_x)\,dx$$

$$= 4h\int_{0}^{r} \left(1 - \frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x}{r} \\ dt &= \frac{1}{r}\,dx \\ r\,dt &= dx \end{aligned}\right| \longrightarrow = 4hr^2 \int_{0}^{1} (1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \text{sen}\, u \\ dt &= \cos u\, du \end{aligned}\right| \longrightarrow = \;\cdots\cdots$$

Integrali impropri

$\int_a^b f(x)\, dx$ è un integrale proprio se a e b sono numeri finiti e f è ben definita e continua su $[a,b]$.

$\int_a^b f(x)\, dx$ è un int. improprio semplice in b se a è finito (ma b può essere $+\infty$), f è definita è continua su $[a,b)$ ma f non è definita in b o non è continua.

$\int_a^b f(x)\, dx$ è un int. improprio semplice in a se b è finito (ma a può essere $-\infty$), f è definita è continua su $(a,b]$ ma f non è definita in a, o non è continua.

$\int_a^b f(x)\, dx$ è un integrale improprio se f è definita e continua su $[a,b]$ meno un numero finito di punti (all' interno o agli estremi dell' intervallo).

Esempi

$\int_0^1 e^x dx$ integr. proprio

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ improprio semplice in 0

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ improprio semplice in $+\infty$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ improprio non semplice in 0 e $+\infty$

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ improprio non semplice in 0.

Per adesso consideriamo solo integrali impropri semplici

Definizione

Se $\int_a^b f(x)dx$ è improprio semplice in b, il valore è dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b^-} \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\text{integrale proprio per ogni } c<b}$$

Se $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c\to b^-} \Big| F(x) \Big|_a^c$$

$$= \left(\lim_{c\to b^-} F(c) \right) - F(a)$$

In breve vale la solita formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big| F(x) \Big|_a^b = F(b^-) - F(a)$$

a patto di intendere $F(b^-)$ come limite

$$= \lim_{x\to b^-} F(x)$$

Esempi

1]
$$\int_0^{\boxed{+\infty}} e^{-x}\,dx = \Big| -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = \Big| e^{-x} \Big|_{+\infty}^{0}$$

$$= e^{-0} - \underset{\underset{\lim_{x\to+\infty} e^{-x}}{\parallel}}{e^{-\infty}} = 1 - 0 = 1$$

2]
$$\int_{-1}^{\boxed{0}} \frac{1}{x}\,dx = \Big| \log(-x) \Big|_{-1}^{0} = \underset{\underset{\lim_{x\to0^+} \log x}{\parallel}}{\log(0^+)} - \log(1) = -\infty$$

3) $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \Big| \operatorname{sen} x \Big|_0^{+\infty} = \underset{\substack{\| \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \\ \text{non esiste!}}}{\operatorname{sen}(+\infty)} - \operatorname{sen}(0)$

Questo integrale improprio non esiste (o non converge)!

Definizione

Se $\int_a^b f(x)dx$ è improprio semplice in a, il valore è dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx = \Big|F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - \underset{\substack{\| \\ \lim\limits_{x\to a^+} F(x)}}{F(a^+)}$$

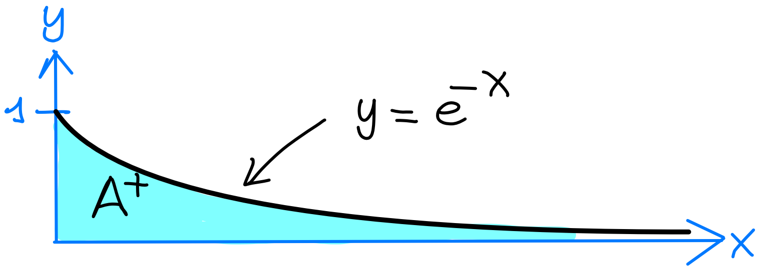
Possibili comportamenti di un int. improprio semplice.

Dato $I := \int_a^b f(x)dx$ improprio in a o b allora ci sono quattro possibili casi:

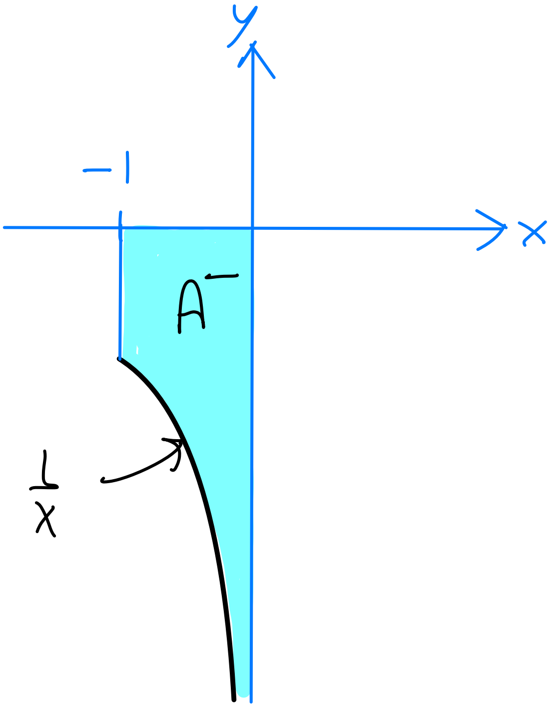
- I esiste ed è finito (si dice che l'int. converge);
- I esiste $= +\infty$ (si dice che l'int. diverge a $+\infty$);
- I esiste $= -\infty$ (si dice che l'int. diverge a $-\infty$);
- I non esiste.

Significato geometrico degli esempi precedenti

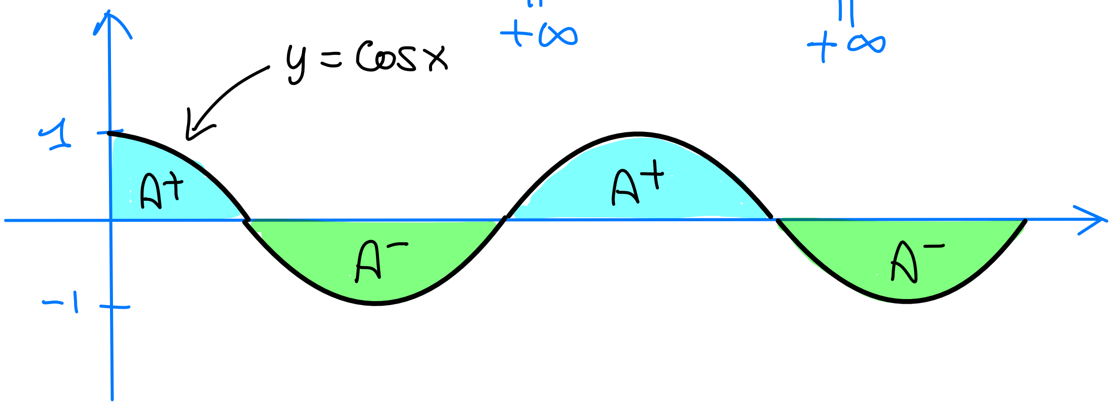
1] $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \text{area}(A^+)$



2] $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\text{area}(A^-)$



3] $$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \underbrace{\text{area}(A^+)}_{\substack{\shortparallel\\ +\infty}} - \underbrace{\text{area}(A^-)}_{\substack{\shortparallel\\ +\infty}}$$



AM1 gest 20/21

lezione 41
25/11/2020

Riprendiamo con gli integrali impropri.

Se conoscete la primitiva F di f, allora potete calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ anche se è improprio in a o b.

Se non conoscete F, il valore dell'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ non si può determinare, ma il comportamento spesso sì.

Questo è l'oggetto di questa lezione.

Notazione

Dati $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_c^d g(x)\,dx$ (impropri) scrivo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_c^d g(x)\,dx$$

per dire che hanno lo stesso comportamento.

Cioe : sono entrambi finiti, oppure entrambi $+\infty$, oppure entrambi $-\infty$, oppure entrambi non esistono.
(Se sono entrambi finiti non sono necess. uguali)

Da qui in poi $\int_a^b f(x)dx$ è improprio in b.
Tutti i risultati hanno una versione per gli integr. impropri in a (che non scrivo).

Prop. 1

Il comportamento di $\int_a^b f(x)dx$ (impr. in b) non dipende da a.

In altre parole, se prendo a' con $a<a'<b$,

$$\int_{a'}^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f(x)\,dx .$$

Dim

Presa $F:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ primitiva di f, il comportam. di

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$$

dipende solo da $\lim_{x\to b^-} F(x)$ e non da $F(a)$. □

Prop. 2

Se f è "positiva vicino a b", cioè esiste a' con $a<a'<b$ tale che $f \geq 0$ su $[a',b)$, allora $\int_a^b f(x)dx$ ha solo due possibili comport.:

- è finito (cioè converge);
- è $+\infty$ (cioè diverge a $+\infty$).

In particolare $\int_a^b f(x)dx$ esiste sempre!

Se invece f è "negativa vicino a b", cioè esiste a' con $a<a'<b$ t.c. $f \leq 0$ su $[a',b)$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ ha solo due possibili comport.:

- è finito (cioè converge);
- è $-\infty$ (cioè diverge a $-\infty$).

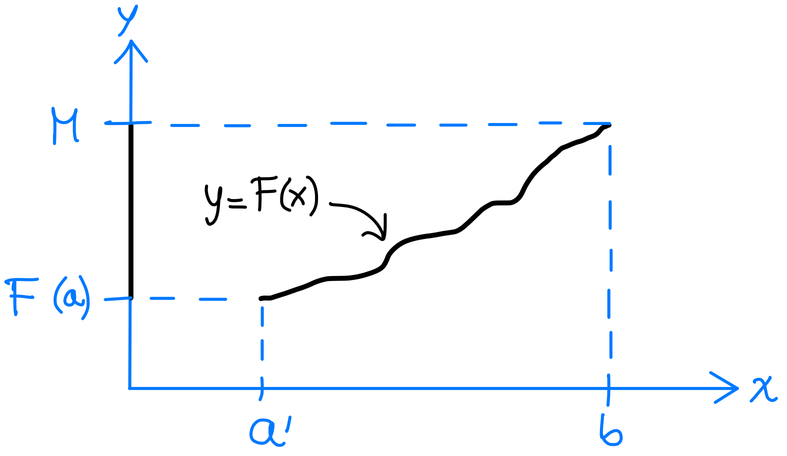
Lemma 3

Se $F : [a',b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è crescente allora $\lim_{x\to b^-} F(x)$ esiste ed è uguale a $\sup\{F(x) : a' \leq x < b\}$.

Analogamente se F è decrescente $\lim_{x\to b^-} F(x)$ esiste ed è $\inf\{F(x) : a' \leq x < b\}$.

"Dim. grafica"

Nel caso $b<+\infty$, F crescente, $M := \sup\{F(x) : \dots\} < +\infty$.



Dim. prop. 2 (primo enunciato)

Prendo a' t.c. $f \geq 0$ su $[a', b)$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. 1}}}{\approx} \int_{a'}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva di } f}}{F(x)} - F(a')$$

ed F è crescente su $[a,b)$ perché $F' = f \geq 0$, quindi per il lemma 3

$$\lim_{x\to b^-} F(x) \text{ esiste } = \sup\{F(x) : a' \leq x < b\}$$

e questo sup è $+\infty$ oppure un numero finito. □

Prop. 4

Suppongo che $b = +\infty$ ed esiste $L := \lim_{x\to+\infty} f(x)$ (finito o infinito). Allora:

- se $L > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$;
- se $L = 0$ non ho informazioni su $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;
- se $L < 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.

Dim. (per $L > 0$)

Prendo m t.c. $0 < m < L$. Siccome $f(x) \longrightarrow L$ per $x \to +\infty$ esiste $\bar{x}$ t.c. $f(x) \geq m$ per $x \geq \bar{x}$.

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Prop. 1}}}{\approx} \int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{perché}\\ f(x)\geq \frac{L}{2}}}{\geq} \int_{\bar{x}}^{+\infty} m\,dx = \Big|m\,x\Big|_{\bar{x}}^{+\infty} = +\infty.$$

$\square$

Esempi nel caso $L=0$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left|-\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{1} = 1$ finito!

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \Big|\log x\Big|_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log 1 = +\infty$ infinito!

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx = \Big|\operatorname{sen}(\log x)\Big|_1^{+\infty} = \operatorname{sen}(\log(+\infty))$

  $= \operatorname{sen}(+\infty)$

  NON ESISTE!

  tende a 0 per $x \to +\infty$

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ y=\log x\\ dy=\frac{dx}{x}}}{=} \int \cos y\,dy = \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(\log x) + c$$

Prop. 5 (criterio del confronto)

Date $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Allora

$$0 \leqslant \underset{\uparrow}{\int_a^b f(x)\,dx} \leqslant \underset{\uparrow}{\int_a^b g(x)\,dx} .$$

esistono per la prop. 2
e appartengono a $(-\infty,+\infty]$

In particolare

- se $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$
- se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$
- se $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$.
- se $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$.

Dim. Facile a partire dalle disug. per gli integrali propri. □

Osserv.

Se $g(x) \leq f(x) \leq 0$ allora

$$\underset{\uparrow}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant \underset{\uparrow}{\int_a^b f(x)\,dx} \leqslant 0 .$$

esistono e sono
in $[-\infty,+\infty)$ per
la Prop. 2

Esempio

$\frac{1}{x^4+2x+1} \leqslant \frac{1}{x^4}$ + principio del confronto

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\underbrace{x^4+2x+1}_{\substack{\downarrow \\ \text{definita e pos. per } x>1 \\ \text{non ho una primitiva}}}}\, dx \;\leqslant\; \int_1^{+\infty} \frac{1}{\underbrace{x^4}_{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva} \\ = -\frac{1}{3x^3}}}}\, dx = \left| \frac{1}{-3x^3} \right|_1^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{3(+\infty)^3} + \frac{1}{3\cdot 1^3} = \frac{1}{3}.$$

Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1}\, dx$ è finito.

AM1gest 20/21 lezione 43

27/11/2020

Continuazione della lezione precedente.

In particolare $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)dx$ sono integrali impropri in b.

(Il caso degli integrali impropri in a è analogo.)

Prop. 6 (Primo criterio del confronto asintotico)

(anche: crit. confr. asint. debole)

Date $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ tali che:

- f, g sono positive vicino a b (cioè esiste a' con $a \leq a' < b$ t.c. $f, g \geq 0$ su $[a', b)$);
- $f(x) = O(g(x))$ per $x \to b^-$;

allora gli integrali $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b g(x)dx$ sono finiti o $+\infty$ e valgono le stesse implicazioni della prop. 5:

- se $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$
- se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

Osserv.

- se $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$, e se $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b g(x)dx$ può essere finito o $+\infty$.

- se $f, g \leqslant 0$ vicino a b e $f(x) = O(g(x))$ allora valgono le seguenti implicazioni:
  - se $\int_a^b g(x)dx > -\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx > -\infty$;
  - se $\int_a^b f(x)dx = -\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = -\infty$.

Dim.

Vicino a b vale che $f(x), g(x) \geqslant 0$ ed esiste $M > 0$ t.c. $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ (per la definizione di $f = O(g)$)

Quindi esiste a' con $a \leqslant a' < b$ tale che

$$0 \leqslant f(x) \leqslant M g(x) \qquad \text{per} \quad x \in [a', b)$$

Ma allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a'}^b f(x)\,dx \leqslant M \int_{a'}^b g(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx.$$

prop. 1 della lezione scorsa

Quindi se $\int_a^b g(x)dx$ è finito, sono finiti tutti gli integrali sopra, e se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, sono infiniti tutti gli integrali sopra.

□

Prop. 7 (Secondo criterio del confronto asintotico)
(anche: crit. confr. asint. forte)

Date $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ t.c.

- g è positiva vicino a b (oppure g è negativa vicino a b);
- $f(x) \sim L \cdot g(x)$ per $x \to b^-$ con $L > 0$;

allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b g(x)\, dx .$$

In particolare i due integrali sono entrambi finiti, oppure entrambi $+\infty$ (se $g \geq 0$ vicino a b) oppure entrambi $-\infty$ (se $g \leq 0$ vicino a b).

Osserv.

Se $g(x)$ (oppure $f(x)$) cambia segno infinite volte per $x \to b^-$ allora non vale nessun criterio di confronto asintotico.

Dim.

Suppongo $g \geq 0$ vicino a b (l'altro caso è simile).
L'ipotesi $f \sim Lg$ per $x \to b^-$ significa che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to b^-$$

$$\lim_{x\to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{L} \Rightarrow g(x) = O(f(x)) \text{ per } x \to b^- .$$

Dimostro prima che $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty \Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx < +\infty$:

$\Leftarrow$ segue dalla prop. 6 + $f = O(g)$;

$\Rightarrow$ segue dalla prop. 6 + $g = O(f)$.

Allo stesso modo si dimostra che $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$
$\Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.

$\square$

Integrali impropri fondamentali

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

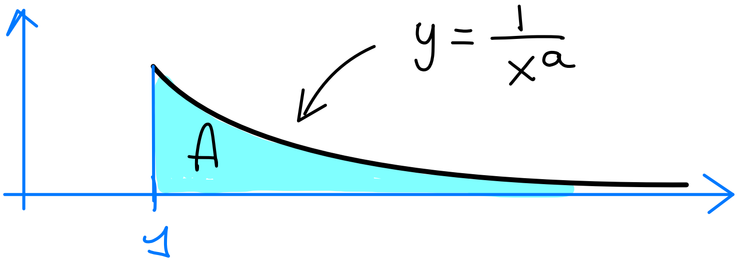
Infatti per $a \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \left| \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{+\infty - 1}{1-a} = +\infty & \text{se } a < 1 \\ \frac{0-1}{1-a} = \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

mentre per $a = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left| \log x \right|_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log(1) = +\infty .$$

In particolare A ha area finita sse $a > 1$



- $$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

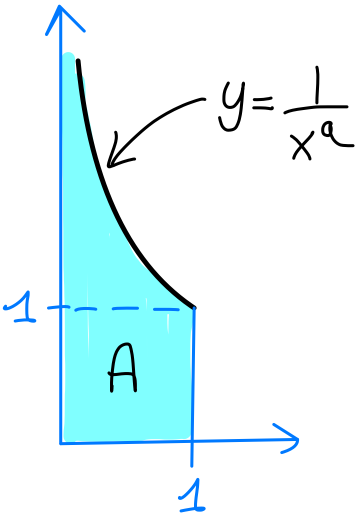
Infatti, per $a \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \left| \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_{0^+}^1 = \begin{cases} \frac{1-(+\infty)}{1-a} = +\infty & \text{se } a > 1 \\ \frac{1-0}{1-a} = \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

e per $a = 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \left| \log x \right|_{0^+}^1 = \log(1) - \log(0^+) = +\infty$$

In particolare l'area di A è finita se e solo se $a < 1$.



Esercizi

Determinare il comportamento (non il valore!) dei seguenti integrali impropri.

- $$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx$$

verifica: $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}$ è definita e continua su $(0,2]$;
l'integrale è improprio in 0.

Per $x \to 0^+$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Quindi per

$$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. 1} \\ \text{(lez. prec.)}}}{\approx} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2^\circ \text{ crit.} \\ \text{confr. asint.}}}{\approx} \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NOTO!}}}{=} +\infty$$

Risposta: $\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx = +\infty$.

- $$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx$$

Verifica: $\frac{x^2+\log x}{2x^5+6}$ è def. e continuo per $x>0$,
l'integrale è improprio (semplice) in $+\infty$

Per $x \to +\infty$, $\frac{x^2+\log x}{2x^5+6} \sim \frac{x^2}{2x^5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}$.

Quindi

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ 2^\circ\ \text{crit. Confr.}\\ \text{asint.}}}{\approx} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Prop. 1}}}{\approx} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{NOTO}}}{<} +\infty$$

Risposta: $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx$ è finito.

Con questo metodo non posso scoprire quanto vale esattamente.

AM1 gest 20/21 lezione 44

28/11/2020

Continuo con lo studio degli integrali impropri semplici

Esercizi

Determinare il comportamento dei seguenti integrali impropri

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx$

analisi preliminare:

$\tan x$ è definita, continua e strett. positiva su $(0,1]$

$\sqrt{\tan x}$ è def., cont., strett. pos. su $(0,1]$ e quindi anche $\frac{1}{\sqrt{\tan x}}$ lo è. L'integrale è improprio in 0, e ci sono solo due possibili comp.: $+\infty$ o finito.

Per $x \to 0^+$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim \frac{x}{1} = x$,

quindi $\frac{1}{\sqrt{\tan x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$,

2° crit. conf. asint.

quindi $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}$ è finito.

Conclusione: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx$ è finito.

- $$\int_2^{\boxed{+\infty}} \frac{1}{x^2 \log x}\, dx$$

Analisi preliminare: $\frac{1}{x^2 \log x}$ è definito, continuo e positivo su $[2,+\infty)$, quindi l'int. è improprio solo in $+\infty$ ed è finito o $+\infty$.

Attenzione: $\frac{1}{x^2 \log x}$ non ha parte princ. per $x \to +\infty$.

Non posso usare il 2° crit. di confr. asint.

Però osservo che per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^2 \log x} \ll \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2 \log x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

e

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \text{ converge.}$$

Per il 1° criterio di confronto asintotico

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x}\, dx \text{ converge.}$$

- $$\int_1^{\boxed{+\infty}} \frac{\log x}{x}\, dx$$

Analisi prelim.: $\frac{\log x}{x}$ è definita, continua, e positiva su $[1,+\infty)$; l'integrale è improprio solo in $+\infty$ e vale $+\infty$ o è finito.

Non c'è una parte principale per $x \to +\infty$.

Osservo che per $x \to +\infty$

$$\frac{\log x}{x} \gg \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. Quindi per il 1° crit. del confr. asintotico

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx = +\infty$$

Nota questo integrale si può calcolare direttamente con un cambio di variabile:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ y = \log x \\ dy = \frac{1}{x}dx}}{=} \int_0^{+\infty} y\,dy = \left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{+\infty} = +\infty$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$

Analisi prelim.: $\frac{\log x}{x^2}$ è def., cont., posit. su $[1, +\infty)$; l'integrale è improprio solo in $+\infty$ ed è finito oppure $+\infty$.

Per $x \to +\infty$ vale che:

$$\frac{\log x}{x^2} \gg \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = O\left(\frac{\log x}{x^2}\right)$$

Fatto inutile, perché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ è finito.

Però vale anche che

$$\frac{\log x}{x^2} \ll \frac{x^{1/2}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \frac{\log x}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \text{ è finito}$$

Per 1° crit. di confr. asint.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx \text{ è finito.}$$

Attenzione: come ho scelto l'esp. 1/2 in rosso?

Potrei procedere in maniera più generale:

$\forall\ \boxed{a>0}$ $\qquad \frac{\log x}{x^2} \ll \frac{x^a}{x^2} = \frac{1}{x^{2-a}}$

questa informazione è utile se $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-a}}\,dx$ è finito, cioè se $2-a>1$, $\boxed{a<1}$.

Quindi posso conclude scegliendo $0<a<1$, per esempio $a=\frac{1}{2}$ (ma anche $a=\frac{1}{3}$, ma non $a=1$).

- $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x\log x}}\,dx$

  analisi prelim.: $\frac{1}{\sqrt{x\log x}}$ è def., cont., positiva su $[3,+\infty)$;

  l'integrale è improprio solo in $+\infty$ ed è finito o $+\infty$.

Per $x \longrightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x\log x}} = \frac{1}{x^{1/2}\cdot(\log x)^{1/2}} \ll \frac{1}{x^{1/2}}$$

inutile perché $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = +\infty$.

Ma anche:

$$\frac{1}{\sqrt{x\log x}} = \frac{1}{x^{1/2}\cdot(\log x)^{1/2}} \gg \frac{1}{x^{1/2}\cdot(x^{1/2})^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/4}}$$

è

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3/4}}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/4}}\,dx = +\infty$$

quindi, per il 1° crit. di confr. asint.,

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x\log x}}\,dx = +\infty.$$

Come prima, l'esponente 1/2 in rosso poteva essere sostituito da un qualunque esponente a con $0<a<1$.

- $\displaystyle\int_2^{\boxed{+\infty}} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$

Analisi prelim.: $\frac{1}{x(\log x)^2}$ è def., cont., pos. su $[2,+\infty)$; l'integrale è improprio solo a $+\infty$ ed è finito o $+\infty$.

Attenz.: $a=1$ è il valore dell'esponente per cui cambia il comportamento di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$.

Provo a cercare una stima dall' alto (per dimostrare che l' integrale e finito): per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x(\log x)^2} \ll \frac{1}{x \cdot 1^2} = \frac{1}{x}$$

inutile perchè $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$.

Provo a cercare una stima dal basso (per dimostrare che l' integrale è infinito): per $x \to +\infty$

$\forall a > 0$ $$\frac{1}{x(\log x)^2} \gg \frac{1}{x(x^a)^2} = \frac{1}{x^{1+2a}}$$

inutile perchè $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+2a}} dx < +\infty$ per ogni $a > 0$.

Il comportamento di questo integrale non si determina usando il confronto con le potenze!

L' unico modo (che io sappia) è calcolare l' integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx \underset{\substack{\uparrow \\ y = \log x \\ dy = \frac{dx}{x}}}{=} \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy < +\infty$$

Quindi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ è finito!

- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a} dx$ con $a > 0$. Fatelo voi!

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{e^x+x^2}\,dx$

Analisi preliminare: $\dfrac{x^5}{e^x+x^2}$ è definita, cont. positiva su $[0,+\infty)$.

L'integrale è improprio solo in $+\infty$

Per $x \longrightarrow +\infty$

$$\frac{x^5}{e^x+x^2} \sim \frac{x^5}{e^x} \ll \frac{x^5}{x^7} = \frac{1}{x^2}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ è finito}$$

Quindi per il 1° criterio del confr. asint.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{e^x+x^2}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{x^5}{e^x+x^2}\,dx \quad \text{è finito}$$

L'esponente 7 in rosso può essere sostituito con un qualunque $a>6$.

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{a^x}\,dx$ con $a>1$. Fatelo voi!
- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^a}\,dx$ con $a>0$. Fatelo voi!
- $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\log x)^a\,dx$ con $a>0$. Fatelo voi!

AM1 gest 20/21 lezione 45

1/12/2020

Continuo con gli integrali impropri.

Classi di integrali impropri significative

$$\int_{\boxed{-\infty}}^{-1} \frac{1}{|x|^a}\,dx \overset{\uparrow}{=} -\int_{+\infty}^{1} \frac{1}{t^a}\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

↑ improprio in $-\infty$

↑ $x=-t$, $dx=-dt$

Nota: ho messo $\frac{1}{|x|^a}$ invece di $\frac{1}{x^a}$ perché così posso considerare anche a non intero, e non mi devo preoccupare del segno.

$$\int_{-1}^{\boxed{0}} \frac{1}{|x|^a}\,dx \overset{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{1}{t^a}\,dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

↑ improprio in 0

↑ $x=-t$, $dx=-dt$

Esempi

Studiare il comportamento dei seguenti int. impropri.

- $$\int_{-2}^{\boxed{0}} \frac{1}{x^2+x^4}\,dx \overset{\uparrow}{\approx} \int_{-2}^{\boxed{0}} \frac{1}{x^2}\,dx \approx \int_{-1}^{\boxed{0}} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty.$$

↑ improprio in 0

↑ 2° crit. confr. asint.: $x^2+x^4 \sim x^2$ per $x \to 0$

- $$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx \approx \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{x}\,dx \approx \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\int_{-1}^{0} \frac{1}{|x|}\,dx = -\infty .$$

$x = -|x|$ per $x<0$

improprio in 0

2° crit. di confr. asint.
$\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

- $$\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}\,dt = \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} t}}\,dt$$

improprio in $\frac{\pi}{2}$
perchè $\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$
def. e pos su $[0, \frac{\pi}{2})$

$t = \frac{\pi}{2} - x$
$dt = -dx$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \operatorname{sen} t$

$$\approx \int_{0}^{1} \frac{1}{t^{1/2}}\,dt = \text{finito}$$

2° crit. confr. asint.
$\operatorname{sen} t \sim t$ per $t \to 0$

Esempio importante

il cambio di variabile
serve a ricondursi a
un integrale improprio in 0

- $$\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \int_{0}^{3} \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx \approx \cancel{\frac{1}{5}} \int_{0}^{3} \frac{1}{x-3}\,dx$$

improprio in 3
$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$
$\frac{1}{x^2-x-6}$ é definita
su $[0,3)$

per $x \to 3$
$x+2 \sim 5$

$$= \int_{-3}^{0} \frac{1}{t}\,dt$$

$t = x-3$
$dt = dx$

$$\approx \int_{-1}^{0} \frac{1}{t}\,dt = -\infty .$$

Versione alternativa: cambio di variabile subito

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = \int_{-3}^{0} \frac{1}{t(t+5)}\,dt \approx \int_{-3}^{0}\frac{1}{5t}\,dt \approx \int_{-1}^{0}\frac{1}{t}\,dt$$

$$= -\infty$$

improprio in 3

$t = x-3$, $dt = dx$
per passare ad un integrale impr. in 0
$x = t+3 \Rightarrow$

$t+5 \sim 5$
per $t \to 0$

$$x^2-x-6 = (t+3)^2-(t+3)-6$$

$$= t^2+6t+\cancel{9}-t-\cancel{3}-\cancel{6}$$

$$= t^2+5t = t(t+5)$$

- $$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \approx \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \approx \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4} = \text{finito.}$$

improprio in $-\infty$

$x^4+x^2+1 \sim x^4$
per $x \to -\infty$

Versione errata: $$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \approx \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^4}$$

$x^4+x^2+1 \sim x^4$
per $x \to -\infty$

Siccome $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^4}$ è improprio anche in 0 non si può applicare il criterio del confronto asintotico!

Conclusione della teoria degli integrali impropri

Finora abbiamo considerato solo $\int_a^b f(x)\,dx$ impropri solo in b (risp., a) e tutti i criteri di confronto richiedono che f abbia segno costante vicino a b (risp., a).

Il prossimo criterio non richiede segno costante.

Proposizione (Criterio della convergenza assoluta)

Sia $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$.

$\uparrow$ esiste sempre, ed è finito o $+\infty$

Allora $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

Osservazione

Se $\int_a^b |f(x)|\,dx = +\infty$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ può avere qualunque comportamento!

Esempio

$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ esiste ed è finito perché

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty.$$

Ometto la dimostrazione di questa proposizione.

Integrali impropri non semplici

Considero $\int_a^b f(x)\,dx$ con f definita e continua su $[a,b]$ escluso un numero finito di punti (in cui f non è definita o non è continua — l'integrale è improprio in questi punti).

Si scompone $\int_a^b f(x)\,dx$ come somma finita di integrali impropri semplici, cioè

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx}_{\text{improprio in } a_n \text{ o } b_n} .$$

Si dice che $\int_a^b f(x)dx$ esiste se esistono tutti gli integr. $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$ e tra i valori non appaiono sia $+\infty$ che $-\infty$.
In tal caso il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ è la somma dei valori di $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$.

In tutti gli altri casi (cioè se uno degli addendi non esiste oppure uno è $+\infty$ e un altro è $-\infty$) si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ non esiste.

Esempi

- $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{improprio in } 0}}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx} \overset{\substack{\text{scomposiz.} \\ \downarrow}}{=} \int_{-1}^{\boxed{0}}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\boxed{0}}^{1}\frac{1}{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che } \int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx = -\infty \\ \text{e } \int_{1}^{0}\frac{1}{x}\,dx = +\infty}}{=} \text{NON ESISTE}$$

- $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{improprio} \\ \text{in } 0 \text{ e} +\infty}}{\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}} \overset{\substack{\text{scompos.} \\ \downarrow}}{=} \int_{\boxed{0}}^{1}\frac{dx}{x^2} + \int_{1}^{\boxed{+\infty}}\frac{dx}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che } \int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx \text{ è finito} \\ \text{e } \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx = +\infty}}{=} +\infty$$

- $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{improprio in} \\ 0,\ 1,\ +\infty}}{\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\log x}\,dx} \overset{\substack{\text{scompos.} \\ \downarrow}}{=} \underbrace{\int_{\boxed{0}}^{1/2}\cdots\cdots}_{A} + \underbrace{\int_{1/2}^{\boxed{1}}\cdots\cdots}_{B} + \underbrace{\int_{\boxed{1}}^{2}\cdots\cdots}_{C} + \underbrace{\int_{2}^{\boxed{+\infty}}\cdots\cdots}_{D}$$

Provate a calcolarli tutti, cominciando da B e C.

AM1 gest 20/21 lezione 46

2/12/2020

Limiti di successioni di numeri reali

Una successione di numeri è una sequenza infinita.

Esempi a) 1, 2, 3, 4, ...
b) 1, 4, 9, 16, ...
c) 1/2, 1/4, 1/8, ...

Indico una successione generica come $x_1, x_2, x_3, \dots$
(i numeri 1, 2, 3 sono indici; x_n = termine n-esimo).
In particolare gli esempi precedenti si scrivono come

a) $x_n := n$.

b) $x_n := n^2$.

c) $x_n := \frac{1}{2^n}$.

Definizione

Data una successione $x_1, x_2, \dots$ (con termine n-esimo x_n) e $L \in \mathbb{R}$, dico che x_n tende a L per $n \to +\infty$, e scrivo

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L \quad \text{oppure} \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L,$$

se

"per ogni margine di errore $\varepsilon > 0$, x_n approssima L con errore inferiore a ε per n abbastanza grande",

e più precisamente

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \text{t.c.} \ |x_n - L| \leq \varepsilon \ \text{per} \ n \geq n_\varepsilon.}$$

Inoltre dico che $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ se

"per ogni soglia M, x_n è maggiore di M per n abbastanza grande",

ovvero

$$\boxed{\forall M \ \exists n_M \ \text{t.c.} \ x_n \geq M \ \text{se} \ n \geq n_M.}$$

Scrivete voi la definizione di $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Esempi

- $$\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty \quad \Leftarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

  (Attenzione: uso la lettera n per indicare numeri interi, x per indicare numeri reali.)

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n+1} = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

- $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

  non segue da un limite di funzioni ma dalla disuguaglianza $n! \geq n$.

- $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(\pi n) = 0$

  perché $\operatorname{sen}(\pi n) = 0$ $\forall n$ intero; notare che $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$ non esiste ....

- $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} n$ non esiste.

  La dimostrazione non è semplice.

Serie (o somme infinite)

Data una successione (cioè una famiglia infinita) di addendi

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$$

voglio definirne la somma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, .$$

Per farlo definisco le somme parziali

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$$

cioè $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ per $N = 1, 2, \dots,$ e prendo il limite di S_N per $N \to +\infty$.

Riassumendo definisco

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{"serie (o somma infinita) degli addendi } a_n\text{"}} = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{S_N}_{} = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)}_{\text{"somma parziale della serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{"}} .$$

"serie (o somma infinita) degli addendi a_n"

"somma parziale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$"

Possibili comportamenti di una serie

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$ esiste ed è finito

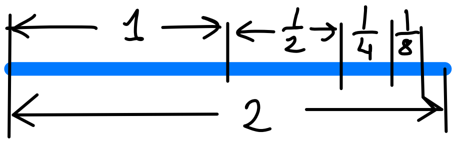
  (diciamo che la serie converge);
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (la serie diverge a $+\infty$);
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ (la serie diverge a $-\infty$);
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non esiste.

Esempi

- $1+2+3+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$

  segue dal fatto che $S_N = 1+\cdots\cdots+N \geqslant N$ e quindi $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$.

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$



Esempio fondamentale (serie geometrica)

Preso $a \in \mathbb{R}$,

$$(1) \qquad \underset{\overset{\|}{a^0}}{1}+\underset{\overset{\|}{a^1}}{a}+a^2+a^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{se } -1<a<1, \\ +\infty & \text{se } a \geq 1, \\ \text{N.E.} & \text{se } a \leq -1. \end{cases}$$

per esempio

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Per dimostrare la (1) mi serve la seguente formula: per $a \neq 1$ vale che

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{N} a^n = 1+a+a^2+\cdots+a^N = \frac{a^{N+1}-1}{a-1}$$

verifico che $(a-1)(1+a+\cdots+a^N) = a^{N+1}-1$.

In effetti

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^N) =$$

$$= a(1+a+\cdots+a^N) - (1+a+\cdots+a^N)$$

$$= \cancel{a}+\cancel{a^2}+\cdots+\cancel{a^N}+\underbrace{a^{N+1}-1}-\cancel{a}-\cancel{a^2}-\cdots-\cancel{a^N}$$

$$= a^{N+1}-1.$$

Osservo che

$$(3) \qquad \lim_{N\to+\infty} a^{N+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Usando (2) e (3) ottengo che per $a \neq 1$

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} a^n\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{a^{N+1}-1}{a-1} = \begin{cases} \dfrac{+\infty-1}{a-1} = +\infty & \text{se } a>1 \\ \dfrac{0-1}{a-1} = \dfrac{1}{1-a} & \text{se } -1<a<1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

Per $a=1$

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\underset{\substack{\| \\ \text{somma di } N+1 \\ \text{addendi } = 1}}{\sum_{n=0}^{N} a^n}\Big) = \lim_{N\to+\infty}(N+1) = +\infty.$$

□

Esempio

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Infatti $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{N(N+1)} =$

$$= \left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\tfrac{1}{N}}-\tfrac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{N+1}$$

e $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1$ perche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = 1+\frac{1}{\infty} = 1.$

In generale non si sa calcolare il valore di una serie in modo esatto neanche se gli addendi sono dati da formule molto semplici!!

Per esempio, il valore esatto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$ non è noto.

Quello che si può fare è studiare il comportamento delle serie, come abbiamo fatto per gli integrali impropri (in effetti le due teorie sono molto simili e collegate).

Notazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Significa che le due serie hanno lo stesso comportamento (ma possono avere valori diversi).

Criteri per studiare il comportamento delle serie

(Notare la somiglianza con i criteri per lo studio del comportamento degli integrali impropri a $+\infty$.)

Nel seguito $a_1, a_2, \ldots$ indica una generica successione di addendi.

Prop. 1

Per ogni n_0 intero, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Idea della dim.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n}_{\substack{\text{numero} \\ \text{finito}}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ differiscono per un numero finito, devono avere lo stesso comportam.

$\square$

Prop. 2

(1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste ed è finito (la serie converge) allora $a_n \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$.

(2) Se esiste $L := \lim_{n\to+\infty} a_n \in [-\infty,+\infty$ allora

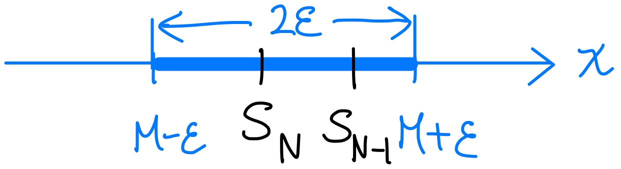
- per $L > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
- per $L < 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$;
- per $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ può avere qualunque comportamento.

Dim.

(1) Sia $M := \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$.

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ t.c. $N \geq N_\varepsilon \Rightarrow |S_N - M| \leq \varepsilon$

Per $N > N_\varepsilon$



cioè $\underbrace{|S_N - S_{N-1}|}_{\substack{\| \\ a_N}} \leq 2\varepsilon$

Riassumendo: $|a_n| \leq 2\varepsilon$ per $N > N_\varepsilon$.

Questo significa proprio che $a_n \to 0$.

(2) Suppongo $L>0$ (il caso $L<0$ è simile).
Prendo ε con $0<\varepsilon<L$.
Siccome $a_n \to L$, deve valere $a_n \geqslant \varepsilon$ da un certo n_0 in poi (cioè per $n \geqslant n_0$)
Ma allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon = +\infty .$$

↑
somma di infiniti addendi uguali a ε: vale $+\infty \cdot \varepsilon = +\infty$.

□

Prop. 3

Se $a_n \geqslant 0$ da un certo n_0 in poi allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste ed è finita o $+\infty$.

Sono esclusi i comportamenti "diverge a $-\infty$" e "non esiste".

Analogamente, se $a_n \leqslant 0$ da un certo n_0 in poi allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste ed è finita o $-\infty$; sono esclusi i compart. "$+\infty$" e "non esiste".

Dim.

Per $N \geqslant n_0$, allora $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geqslant S_N$.
Quindi la successione S_N è crescente

per $N \geq n_0$, e quindi converge a

$$L := \sup\{S_N : N \geq n_0\}$$

che è un numero finito o $+\infty$. Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L. \qquad \square$$

Teorema 4 (Criterio del confronto con l'integrale)

Sia n_0 intero e $f : [n_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione decrescente e positiva. Allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \quad e \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

esistono e appartengono a $[0, +\infty]$ (già visto)

e inoltre

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

In particolare $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \approx \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$

Corollario 5

Se $f : [n_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è decrescente e positiva vicino a $+\infty$ (cioè su $[a, +\infty)$ per qualche $a \geq n_0$)

allora

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \approx \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

e convergono oppure divergono a $+\infty$.

Esempio fondamentale (serie armonica generalizzata)

Dato $a>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leqslant 1 \\ \text{finita} & \text{se } a>1 \end{cases}$$

perchè questa serie si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx$.
(applico il teorema 4 con $f(x)=\frac{1}{x^a}$ e $n_0=1$).

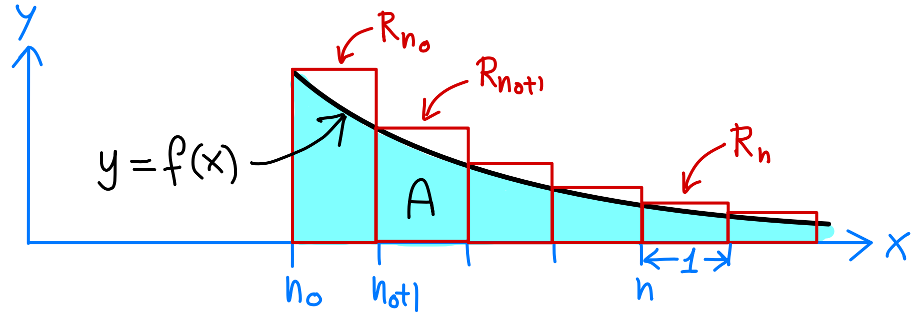
Notare che gli addendi $\frac{1}{n^a}$ tendono a 0, ma il comportamento dipende dal valore di a!

In particolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$\uparrow$ serie armonica

Dimostrazione del teorema 4

Dimostro che $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$.



Allora:

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{area}(A)$$

$$\leq \text{area}(R_{n_0}) + \text{area}(R_{n_0+1}) + \cdots$$

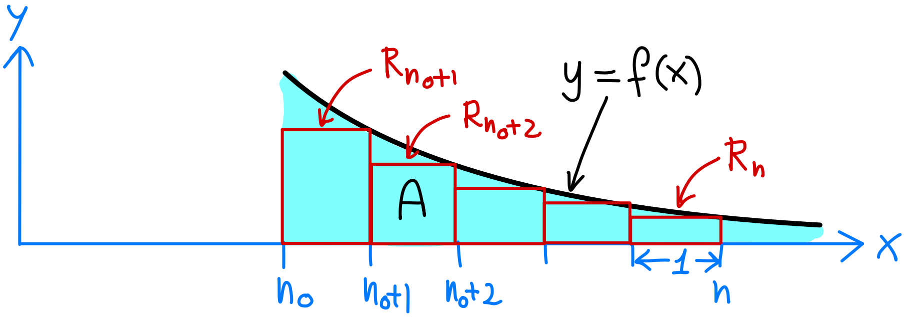
$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \text{area}(R_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

A è contenuto nell' unione dei rettangoli R_n con $n = n_0, n_0+1, \ldots$

qui è essenziale che f sia decrescente

R_n ha base 1 e altezza $f(n)$ $\Rightarrow$ $\text{area}(R_n) = f(n)$

Dimostro ora che $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$



Allora

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{area}(A)$$

$$\geq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \text{area}(R_n) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n)$$

A contiene l' unione dei rettangoli R_n con $n = n_0+1, n_0+2, \ldots$

come prima, R_n ha base 1 e altezza $f(n)$

Quindi $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n)$ e sommando $f(n_0)$ a entrambi i termini ottengo

$$f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

che è la tesi. □

AM1 gest 20-21 Lezione 48

4/12/2020

Calcolo approssimato delle serie

Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (che esiste ed è finita) ed un margine di errore $\varepsilon > 0$, quanto devo prendere grande N affinché la somma parziale

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$$

approssimi $S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con errore inferiore a ε, cioè

$$|S - S_N| \leq \varepsilon \ ?$$

Una risposta viene dal seguente risultato:

Prop. 6

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie che converge a S finito.

Supponiamo di avere $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva e decrescente t.c. $|a_n| \leq f(n)$.

Allora per ogni $N \geq a$ vale che

$$|S - S_N| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Dato $\varepsilon > 0$, se trovo N t.c. $F(N) := \int_N^{+\infty} f(x)\,dx \leq \varepsilon$ allora

$$|S - S_N| \leq \varepsilon .$$

Dim.

$$S - S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

Quindi

fatto noto per le somme finite

$$|S - S_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

$$\text{per ipotesi} \mapsto \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$$

$$\begin{array}{c}\text{Teorema 4}\\ \text{(lezione prec.)}\end{array} \mapsto \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx . \qquad \square$$

Esempio

Sia $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Quanto deve essere grande N affinché $|S - S_N| \leq 10^{-3}$?

Applico la prop. 6 con $f(x) = \frac{1}{x^4}$:

$$|S - S_N| \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \left| -\frac{1}{3x^3} \right|_N^{+\infty} = \frac{1}{3N^3} .$$

Cerco N t.c. $\frac{1}{3N^3} \leq 10^{-3}$ cioè $3N^3 \geq 10^3$,

$$N^3 \geq \frac{10^3}{3} , \qquad N \geq \frac{10}{\sqrt[3]{3}} = 6,93\ldots$$

Prendo $N = 7$: $|S - S_7| \leq 10^{-3}$, cioè

$$S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{7^4} \pm 10^{-3} .$$

Passo adesso ai criteri di confronto per le serie. Notare la somiglianza con quelli per gli integrali impropri.

Ometto le dimostrazioni, che sono molto simili.

Prop. 7 (Criterio del confronto)

Date due successioni di addendi a_n e b_n t.c. $0 \leq a_n \leq b_n$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ esistono e sono finite o $+\infty$ (prop. 3 della lez. prec.) e

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

In particolare:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$;
- se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ può essere finita o $+\infty$, e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ può essere finita o $+\infty$.

Prop. 8 (1° criterio di confr. asintotico per le serie)

Date due successioni di addendi a_n e b_n t.c.

- $a_n, b_n \geq 0$ per n suff. grande (cioè esiste n_0 t.c. $a_n, b_n \geq 0$ per $n \geq n_0$);
- $a_n = O(b_n)$ (vale se $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ finito);

Allora

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$;
- se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ può essere finita o $+\infty$, e se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ può essere finita o $+\infty$.

Prop. 9 (2° criterio di confr. asintotico per le serie)

Date a_n e b_n successioni di addendi t.c.

- $b_n \geq 0$ da un certo punto in poi (oppure $b_n \leq 0$ da un certo punto in poi);
- $a_n \sim L b_n$ con $0 < L < +\infty$ (cioè $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$);

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Esempi

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2-1} \underset{\uparrow}{\approx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ finito (già visto, si tratta della serie armonica gener. di espon. 2)

  2° crit. di confr. asint.:

  $\displaystyle\frac{1}{2n^2-1} \sim \frac{1}{2n^2}$ per $n \to +\infty$

  $\left(\Leftarrow \quad \dfrac{1}{2x^2-1} \sim \dfrac{1}{2x^2} \text{ per } x \to +\infty \right)$

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} = +\infty$ per confronto con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

  Noto infatti che $\log n \ll n$ per $n \to +\infty$

  $\displaystyle\Rightarrow \quad \frac{1}{\log n} \gg \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\log n}\right)$ e quindi posso applicare il 1° criterio del confronto asint.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^4-n} \underset{\uparrow}{\approx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ (cioè è finita)

  2° crit. confr. asint.

  $\displaystyle\frac{2n^2+5}{n^4-n} \sim \frac{2}{n^2}$ per $n \to +\infty$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} < +\infty$ (cioè converge) per confronto con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

  Osservo infatti che

  $$\forall a \quad 2^n \gg n^a \Rightarrow \frac{n^3}{2^n} \ll \frac{n^3}{n^a} = \frac{1}{n^{a-3}}$$

  e per $a=5$ ottengo $\displaystyle\frac{n^3}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{n^3}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

  e applico il 1° crit. di confr. asint.

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1\right] \quad \text{con } a>0$$

Siccome

$$a_n := \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1 \longrightarrow \cos\left(\frac{1}{+\infty}\right)-1 = \cos(0)-1=0$$

serve un' analisi più precisa di a_n.

Uso lo sviluppo di Taylor $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$

cioè $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2}+O(x^4) \sim -\frac{1}{2}x^2$

Allora ponendo $x=\frac{1}{n^a}$

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1 \sim -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2a}}$$

Per il 2° criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1\right] \approx \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2a}} \approx -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2a}}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1\right] = \begin{cases} -\infty & \text{se } 2a\leq 1 \text{ cioè } a\leq\frac{1}{2}, \\ \text{finito} & \text{se } 2a>1 \text{ cioè } a>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^n}{1+e^n} = -\infty$$

$\uparrow$

perchè $\frac{1-e^n}{1+e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

e uso la Prop. 2, lez. prec.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^a}$ con $a > 0$.

Osservo che
$$a_n := \frac{\log n}{n^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
quindi serve un'analisi più precisa di a_n.

Uso che
$$1 \ll \log n \ll n^\delta \quad \forall \delta > 0,$$

quindi
$$\underset{(1)}{\frac{1}{n^a} \ll} \frac{\log n}{n^a} \underset{(2)}{\ll \frac{1}{n^{a-\delta}}}$$

(1) implica $\frac{1}{n^a} = O\left(\frac{\log n}{n^a}\right)$: se $a \leq 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = +\infty$ e il 1° crit. confr. asint. implica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} = +\infty$.

(2) implica che $\frac{\log n}{n^a} = O\left(\frac{1}{n^{a-\delta}}\right)$

se $a > 1$ posso trovare $\delta > 0$ t.c. $a - \delta > 1$ quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-\delta}} < +\infty$ e per il 1° crit. confr. asint. ho che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} < +\infty$.

Riassumendo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1, \\ \text{finito} & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

AM1 gest 20/21 lezione 50

9/12/2020

Serie di Taylor

(polinomio di Taylor di grado infinito)

Data f definita (almeno) su un intervallo che contiene 0 e derivabile infinite volte, la serie di Taylor di f in 0 è la serie di potenze

$$f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n$$

Domanda: è vero che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x$ se la serie converge in x?

Purtroppo la risposta è NO!

Esiste $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile infinite volte t.c. $D^n f(0) = 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots$, ma $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$.

Quindi la serie di Taylor di f (in 0) è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi f(x) coincide con la serie di T. solo per x=0.

Osservazione

Sia $R_N(x)$ il resto dello sviluppo di T. di f in 0 di ordine N. Se $R_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ allora

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n .$$

← serie di T. di f

Dim.

La somma parziale S_N della serie di T. è il polinomio di T. di grado N.

Quindi

$$S_N(x) = f(x) - R_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$$

Quindi vale (*).

Il problema è che spesso è difficile far vedere che $R_N(x) \to 0$.

Esempi significativi di serie di T.

- La serie di T. di e^x è

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Il raggio di convergenza R è $+\infty$ e la serie coincide con la funzione, cioè

$$(*) \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se dimostro (*) è automatico che $R=+\infty$
(se fosse finito, esisterebbero degli x per cui la serie NON converge — tutti gli x t.c. $|x|>R$).

Dimostro (*) per $x>0$.

La formula di Lagrange del resto è

$$R_N(x) = \frac{D^{N+1}f(\tilde{x})}{(N+1)!}\, x^{N+1} \qquad \text{con } 0 \leq \tilde{x} \leq x .$$

$\uparrow$ resto dello svil. di T. di ordine N di e^x

In questo caso

$$0 \leq R_N(x) = \frac{e^{\tilde{x}}}{(N+1)!}\, x^{N+1} \leq e^x \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

e $R_N(x) \longrightarrow 0$ perchè $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \longrightarrow 0$ (quando $N \to +\infty$).

Infatti $a_n := \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ per ogni x per il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{x^{n+1}}^{\,x}}{\underset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è finita $\Rightarrow a_n \longrightarrow 0$.

In modo simile si dimostra che $R_N(x) \longrightarrow 0$ per $x<0$. □

Si può anche dimostrare (ma non lo facciamo) che:

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  $\boxed{R = +\infty}$

- $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  $\boxed{R = +\infty}$

- $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1]$$

  $\boxed{R = 1}$ infatti $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e quindi

  $$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\Big(-\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\downarrow \, 0}\Big) \longrightarrow 1$$

- $$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$$

  $\boxed{R = 1}$

  $\uparrow$ coefficente binomiale

  $$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

In particolare per $a = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

e sostituendo x con $-x$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{(serie geom.)}$$

Definizione del numero e

Usando la serie di T di e^x per $x=1$ si ottiene

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Questa formula permette di calcolare e con grande precisione.

Formula alternativa per e:

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Infatti

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\Big(\overbrace{x\,\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\wr\\ \frac{1}{x}}}}^{\substack{1\\ \wr}}\Big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \exp(1) = e$$

Definizione di e^z con z numero complesso

Dato $z\in\mathbb{C}$ si definisce

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Ponendo $z=ix$ con x reale si ottiene

$$e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$$

Infatti

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= \cos x + i \operatorname{sen} x .$$

Esercizi

1 Trovare il raggio di convergenza R e il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n}$ per $|x| \leqslant R$.

Riscrivo la serie come

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2x^3)^n \underset{\substack{\uparrow \\ t=2x^3}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \leftarrow \Big| \text{quasi serie geom.}$$

per la serie geometrica il raggio di conv. è 1 $\left(a_n = 1 \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \right)$, quindi la serie converge per $|t| < 1$ e non converge per $|t| > 1$.

Sostituendo $t = 2x^3$ ottengo che la serie di partenza converge per $|2x^3| < 1$, cioè $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, e non converge per $|2x^3| > 1$, cioè $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Quindi il raggio di convergenza della serie di partenza è $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Inoltre abbiamo già visto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \qquad \text{se } |t|<1$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) - 1 = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}$$

e sostituendo $t = 2x^3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} = \frac{2x^3}{1-2x^3} \qquad \text{se } |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

2| Calcolare il raggio di convergenze e il valore di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{2n}$.

Riscrivo la serie come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{2n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!}}_{\substack{\uparrow \\ \text{serie di T. di} \\ e^t \text{ con } t=3x^2}} = e^{3x^2}$$

la serie di T di e^t converge per ogni t, quindi la nostra serie converge per ogni x, e $R=+\infty$.

3| Trovare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n^4}{1+2^n} x^n$$

I coefficienti della serie sono $a_n = \frac{1-n^4}{1+2^n}$ quindi

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^4-1}{2^n+1}} \sim \sqrt[n]{\frac{n^4}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^4}}{\sqrt[n]{2^n}}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{n}\log(n^4)\right)}{2} = \frac{\exp\left(4\frac{\log n}{n}\right)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Quindi $R=2$.

4| Discutere il comportamento al variare di x di

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n^4}{1+2^n} x^n$$

<u>La serie converge se $|x|<R=2$.</u>

<u>La serie non converge se $|x|>2$.</u>

Per la precisione se $x>2$ la serie diverge a $-\infty$ perchè è a termini negativi e quindi diverge a $-\infty$ oppure converge (cosa che è esclusa).

Per $x<-2$ la serie non esiste, ma non è facile da dimostrare.

Resta da studiare i casi $|X|=2$.

Per $x=2$, la serie è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n^4}{1+2^n} \cdot 2^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2° criterio di} \\ \text{confr. asint.}}}{\approx} -\sum_{n=2}^{\infty} n^4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perchè} \\ n^4 \to +\infty}}{=} -\infty$$

Per $x=-2$ la serie non esiste, ma non è facile da dimostrare.

Lezione 49

Definizione: Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice **ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE** se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

CRITERIO della CONVERGENZA ASSOLUTA

Se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora è convergente.

Dimostrazione:

Per ipotesi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $|a_n| + a_n \leq 2|a_n|$.

Dunque per il criterio del confronto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n| = 2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty .$$

Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$a_n = |a_n| + a_n - |a_n| .$$

Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n - |a_n|)$$

questo = è lecito perché entrambe le serie convergono ←

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Osservazione: Non è vero che se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ (o, equivalentemente, non è detto che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad un numero finito, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge ad un numero finito).

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Esempio: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ con $a > 1$ è assolutamente convergente, quindi convergente.

Esercizio: Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^2}.$$

Svolgimento: Vale $\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Dunque per il teorema del confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Quindi la serie converge assolutamente, e per il criterio della convergenza assoluta, converge.

CRITERIO della RADICE.

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} =: L.$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie diverge (positivamente).

Dimostrazione:

CASO $0 \leq L < 1$.

Per ipotesi esiste $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Allora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall \tilde{n} \geq n \quad \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$. (*)

Prendo $0 < \varepsilon < 1 - L$ e chiamo $\ell := L + \varepsilon$, così $\ell \in (0, 1)$.

Elevando (*) alla n e con la nostra scelta di ε abbiamo che

$\forall\, n \geq \tilde{n} \qquad a_n \leq \ell^n \quad$ con $\quad 0 < \ell < 1$.

Per il criterio del confronto

$$\sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} \ell^n < +\infty .$$

serie geometrica con $0 < \ell < 1$

Poiché il comportamento di una serie non dipende dai suoi primi addendi abbiamo che la serie converge ad un numero finito.

CASO $L > 1$

Il termine n-esimo della serie non può convergere a zero.

Infatti supponiamo per assurdo che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Allora esisterebbe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq \bar{n} \quad a_n < 1$. E dunque $\forall\, n \geq \bar{n}$ $\sqrt[n]{a_n} < 1$. Ma ciò non può essere perché $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$.

Visto che il termine n-esimo della serie non converge a zero, la serie non può convergere ad un numero finito. Essendo una serie a termini positivi, l'unico comportamento che può assumere è divergere a $+\infty$.

Osservazione: Se $L > 1$ allora è possibile dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Infatti visto che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$ allora possiamo prendere $\ell \in (1, L)$ tale che $\forall n \geq \tilde{n}$ $\sqrt[n]{a_n} \geq \ell$ e dunque $a_n \geq \ell^n$. Visto che $\ell > 1$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \ell^n = +\infty$ e dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Corollario:
Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: L.$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.
Se $L > 1$, allora la serie non converge ad un numero finito.

Dimostrazione.
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è una serie a termini positivi. Il criterio della radice ci dice che se $L < 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente e, per il criterio della convergenza assoluta, converge.

Se invece $L > 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Se $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$ allora il limite $\lim_{n \to +\infty} a_n$ non puo' convergere a zero, dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge.

Osservazione: Se $L = 1$ non possiamo dire nulla sul comportamento della serie.

Consideriamo ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Allora
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{2}{n}}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{2}{n} \log n\right) = 1$$
e
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{-2}} = \lim_{n \to +\infty} n^{-\frac{2}{n}}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \exp\left(-\frac{2}{n} \log n\right) = 1$$
ma la prima serie diverge e la seconda converge.

Esercizio: Si studi con il criterio della radice il comportamento della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$$

Calcolo $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{(\log n)^{n/2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/2}} = 0$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Esercizio: Si studi con il criterio della radice il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n n^a \quad \text{al variare di } c>0 \text{ e } a \in \mathbb{R}.$$

Calcolo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c^n n^a} = \lim\limits_{n\to+\infty} c\, n^{\frac{a}{n}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} c \exp\left(\frac{a}{n}\log n\right) = c$$

Se $c>1$, allora la serie diverge, se $c<1$ allora la serie converge.

+ Se $c=1$ abbiamo la serie armonica generalizzata che converge se $-a>1$ e diverge se $-a \leq 1$
$(a<-1)$
$(a \geq -1)$

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: L .$$

Se $L<1$, allora la serie converge.

Se $L>1$, allora la serie diverge (positivamente).

Dimostrazione:

CASO $0 \leq L < 1$:

Per ipotesi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

Allora $\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \tilde{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon .$$

Prendo $0 < \varepsilon < 1 - L$ e chiamo $\ell := L + \varepsilon$,
così $\ell \in (0, 1)$.

Dunque $\forall\, m \geq \tilde{m}$ $\quad a_{m+1} < \ell\, a_m$ con $\ell \in (0,1)$.

Quindi

$$a_{\tilde{m}+1} \leq \ell\, a_{\tilde{m}}$$

$$a_{\tilde{m}+2} \leq \ell\, a_{\tilde{m}+1} \leq \ell \cdot \ell \cdot a_{\tilde{m}} = \ell^2 a_{\tilde{m}}$$

$$a_{\tilde{m}+3} \leq \ell\, a_{\tilde{m}+2} \leq \ell^3 a_{\tilde{m}}$$

$$\vdots$$

$$a_m \leq \ell^{m-\tilde{m}}\, a_{\tilde{m}}$$

Si ha $\lim\limits_{m \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \ell \in (0,1)}}{\ell}^{m-\tilde{m}}\, a_{\tilde{m}} = 0$ e quindi

$\lim\limits_{m \to \infty} a_m = 0$.

Inoltre $\sum\limits_{m=\tilde{m}}^{\infty} a_m \leq \sum\limits_{m=\tilde{m}}^{\infty} \ell^{m-\tilde{m}}\, a_{\tilde{m}} < +\infty$. $*$

Poiché il comportamento di una serie non dipende dai suoi primi addendi abbiamo che la serie converge ad un numero finito.

CASO $L > 1$:

Per ipotesi $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{a_{m+1}}{a_m} = L$.

Allora $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \tilde{m} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, m \geq \tilde{m}$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \geq L - \varepsilon.$$

Prendo $\varepsilon < L - 1$ e chiamo $\ell = L - \varepsilon$.

$\forall\, m \geq \tilde{m}$ $\quad \dfrac{a_{m+1}}{a_m} \geq \ell$.

Come prima, possiamo ottenere che

$$a_m \geq \ell^{m-\tilde{m}}\, a_{\tilde{m}} \qquad \text{con } \ell > 1$$

Si ha $\lim_{n\to\infty} e^{n-\tilde{n}} a_{\tilde{n}} = +\infty$ quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e la serie diverge

Corollario:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: L .$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie non converge ad un numero finito.

Osservazione: Se $L = 1$ non possiamo dire nulla sul comportamento della serie. Consideriamo ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

e $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

ma la prima serie diverge e la seconda converge.

Esercizio: Si studi con il criterio del rapporto il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$

Calcolo $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^4}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n^4}{n^4} = \frac{1}{2}$.

La serie converge.

Esercizio: Si studi con il criterio del rapporto il comportamento della serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m!}{m^m}.$$

Calcolo $\lim_{m\to+\infty} \frac{(m+1)!}{(m+1)^{m-1}} \cdot \frac{m^m}{m!}$

$= \lim_{m\to+\infty} m+1 \cdot \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m+1 \cdot m^m}{(m+1)(m+1)^m}$

$= \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m = \lim_{m\to+\infty} \exp\left(m \log\left(\frac{m}{m+1}\right)\right)$

$= e^{-1}.$

SERIE DI POTENZE

Definizione: Chiamiamo serie di potenze una serie di funzioni della forma

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

dove $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali e $x \in \mathbb{R}$.

Ci chiediamo per quali $x \in \mathbb{R}$ f è ben definita, ossia per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

La risposta dipenderà dagli a_m.

Esempio: Abbiamo già visto un esempio di serie di potenze: la **serie geometrica**.

In questo caso $\forall m \in \mathbb{N}$ $a_m = 1$,

$f(x) = \sum x^m$. Sappiamo che è ben definita per $|x| < 1$ e vale $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Osservazione $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ è sempre definita almeno in un punto. Infatti

$f(0) = a_0$.

Teorema:

Sia $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ una serie di potenze.

a) Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ chiamato **raggio di convergenza** della serie tale che

1) se $|x| < R$ allora $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ converge

2) se $|x| > R$ allora $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ non converge.

b) Se esiste
$$\lim_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} =: L,$$
allora $R = \frac{1}{L}$.

c) Se esiste
$$\lim_{m \to +\infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} =: \tilde{L},$$
allora $R = \frac{1}{\tilde{L}}$.

Dimostrazione:

$*$ Dimostro che se esiste $\lim_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} =: L$ allora vale 1) e 2) con $R = \frac{1}{L}$

Considero $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Abbiamo

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$
$$= L|x| .$$

Per il criterio della radice se $L|x| < 1$ (ossia $|x| < \frac{1}{L}$) allora la serie converge assolutamente e per il criterio della convergenza assoluta la serie converge.

Invece per $L|x| > 1$ (ossia $|x| > \frac{1}{L}$) la serie non converge.

** Dimostro che se esiste $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: L$ allora vale 1) e 2) con $R = \frac{1}{L}$

Considero $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Abbiamo

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = L|x|$$

Per il criterio del rapporto se $L|x| < 1$ (ossia $|x| < \frac{1}{L}$) allora la serie converge assolutamente e per il criterio della convergenza assoluta la serie converge.

Invece per $L|x| > 1$ (ossia $|x| > \frac{1}{L}$) la serie non converge.

AM1 gest 20/21

Lezione 53
seconda parte
12/12/2020

Funzioni definite da integrali

Data $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in I$, pongo

↖ intervallo

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{per ogni } x \in I$$

So che F è una primitiva di f (lemma 3 nella dimostrazione del teor. fondam. del calcolo integr.).

Posso studiare il grafico di F anche se non ho una formula esplicita?

Risposta: in parte sì, perché conosco la derivata di F:

$$F'(x) = f(x)$$

Esempio

Definisco $F(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt$.

(F è circa la funzione di ripartizione della Gaussiana — ha un importante in probabilità e statistica)

Posso studiare il grafico di F:

Insieme di definizione: ogni $x \in \mathbb{R}$ (si tratta di un integrale proprio....).

Segno di F: $F(x) > 0$ per $x > 0$ (perché $F(x)$ è l'integrale di una funzione positiva con estremi di integrazione nell'ordine giusto!)

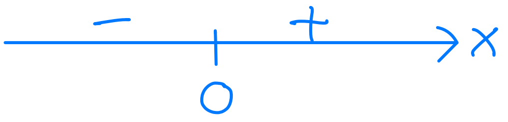
Per $x < 0$,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = -\underbrace{\int_x^0 e^{-t^2} dt}_{\text{positivo}}$$

e quindi $F(x) < 0$.

Infine $F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$.

$\operatorname{sgn} F(x)$



Limiti a $\pm\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt := L$$ è finito per confronto con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$. ($\forall a > 0$, $e^x \gg x^a \Rightarrow e^{t^2} \gg t^{2a} \Rightarrow$ $e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}} \ll \frac{1}{t^{2a}}$; scelgo $a = 1$).

Non posso calcolare L.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \int_0^{-\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ s=-t \\ dt=-ds}}{=} -\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = -L$$

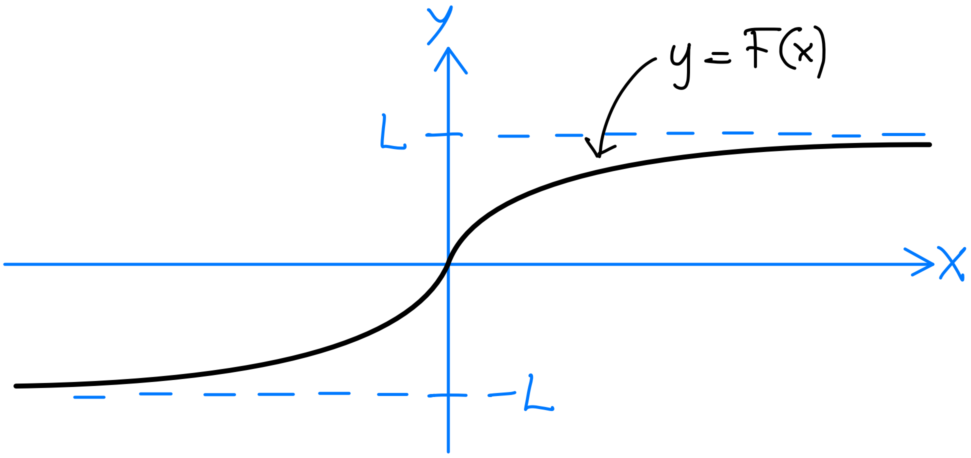
Osservazione: Vale anche che F è dispari

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ s=-t \\ dt=-ds}}{=} -\int_0^{x} e^{-s^2}\,ds = -F(x).$$

Segno della derivata di F

Siccome $F'(x) = e^{-x^2} > 0 \ \forall x$, F è strettamente crescente.

Disegno del grafico di F



Formule collegate

1] Sia

$$G(x) := \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

Allora

$$G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dim.

$G(x) = F(g(x))$ dove $F(x) := \int_a^{x} f(t)\,dt$

Quindi $G'(x) = (F(g(x)))' \underset{\uparrow}{=} F'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= f(g(x)) \cdot g'(x)$.

derivata della funz. composta

$\square$

2] Sia

$$H(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt ,$$

Allora

$$H'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x).$$

Dim.

Se F è una primitiva di f allora

$$H(x) = \Big| F(t) \Big|_{h(x)}^{g(x)} = F(g(x)) - F(h(x))$$

e quindi

$$H'(x) = \big(F(g(x))\big)' - \big(F(h(x))\big)' = \dots$$

$$= f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x). \qquad \square$$

Esempio

Calcolare la derivata di $H(x) = \displaystyle\int_{-x^4}^{x^4} \frac{1}{1+t^6}\, dt$.

Applico la formula precedente con :

$f(t) := \dfrac{1}{1+t^6}$, $g(x) := x^4$, $h(x) := -x^4$

$$H'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+(x^4)^6}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{(x^4)'}_{g'(x)} - \underbrace{\frac{1}{1+(-x^4)^6}}_{f(h(x))} \cdot \underbrace{(-x^4)'}_{h'(x)}$$

$$= \frac{8x^3}{1+x^{24}} .$$

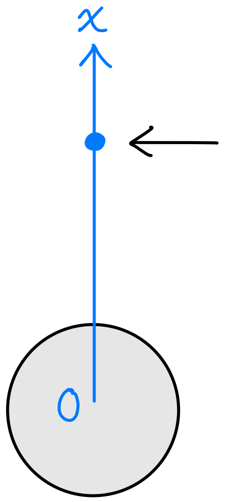
AM1 gest 20/21

lezione 56

18/12/2020

Esempi di problemi in cui appaiono equaz. differ.

1| solido in caduta libera



$x(t)$ = distanza del solido dal centro della terra al tempo t

Problema: trovare la legge oraria del solido, cioè la formula di $x(t)$.

Parto da $f = ma$ sapendo che

- $a = \ddot{x}$
- $f = \begin{cases} a)\ -mg & \text{(se posso supporre } g \text{ costante)} \\ b)\ -\dfrac{GMm}{x^2} & \end{cases}$

cost. di grav. univ.

massa della terra

$\boxed{\text{Caso a)}}$ $$m\ddot{x} = ma = f = -mg$$

$$\ddot{x} = -g \qquad \text{(equaz. diff. } 2^\circ \text{ ordine)}$$

prendendo la primitiva (cioè integrando entrambi i termini)

$$\dot{x} = -gt + c_0 \qquad \text{con } c_0 \in \mathbb{R}$$

prendendo di nuovo la primitiva

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + c_0 t + c_1 \qquad \text{con } c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare le costanti c_0 e c_1 ho bisogno di altri dati sul moto del solido, per esempio posizione e velocità in certo istante t_0

(cioè $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$).

Caso b

$$m\ddot{x} = ma = f = -\frac{GMm}{x^2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}$$

equaz. diff. 2° ordine non lineare, non rientra tra quelle che sappiamo risolvere.

Moltiplico l'equazione per $\dot{x}$

$$\dot{x}\ddot{x} = -GM\frac{\dot{x}}{x^2}$$

$(\dot{x}(t))^2 = 2\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) \longrightarrow$

$$\underset{\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)'}{\parallel} \qquad \underset{\left(\frac{GM}{x}\right)'}{\parallel}$$

$\longleftarrow \left(\frac{1}{x(t)}\right)' = -\frac{\dot{x}(t)}{(x(t))^2}$

e ottengo $\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)' = \left(\frac{GM}{x}\right)'$ quindi

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{GM}{x} + c_0 \quad \text{con } c_0 \in \mathbb{R}$$

Posso riscrivere questa equazione come ho riottenuto la conservazione dell'energia.

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{energia cinetica}} - \underbrace{\frac{GMm}{x}}_{\text{energia potenziale}} = c_0$$

Questa procedura funziona ogni volta che la forza f ammette un potenziale.

Ripartendo da (*) ottengo

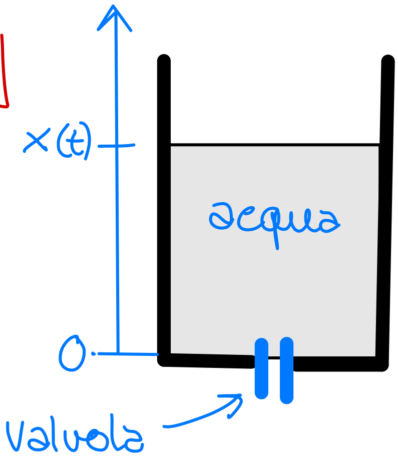
$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{x} + 2C_0}$$

Questa è un' equazione a variabili separabili.

Si può risolvere esplicitamente nel caso $C_0 = 0$.

Di più non si può fare (in questo corso).

2)



recipiente cilindrico pieno d'acqua con valvola di scarico con portata proporzionale alla pressione

Voglio trovare la formula di x(t) (altezza dell' acqua al tempo t)

volume di acqua uscita nell' intervallo di tempo Δt $= (x(t) - x(t+\Delta t)) \cdot A$

con A = area della base del cilindro.

portata $= \frac{\Delta V}{\Delta t}$

||

cost. × pressione e la pressione è proporzionale a $x(t)$

||

kx dove la costante k dipende dalla valvola

Quindi

$$\frac{x(t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t} = k\,x(t)$$

cioè

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -k\,x(t)$$

e passando al limite per $\Delta t \to 0$

$$\dot{x} = -kx$$

equazione lineare del primo ordine a coeff. costanti e omogenea $\dot{x} + kx = 0$.

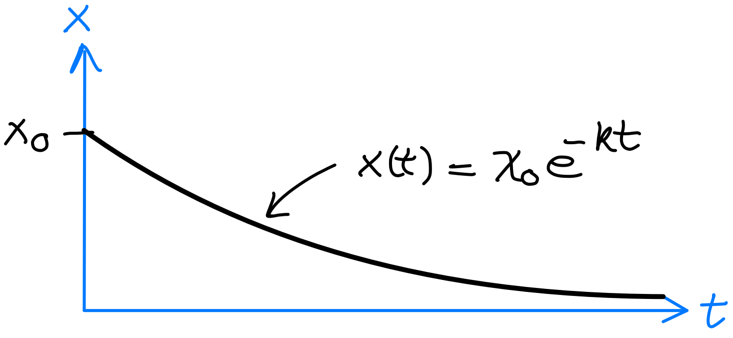
Eq. caratteristica $\lambda + k = 0$ cioè $\lambda = -k$.

La soluzione è

$$x(t) = c\,e^{-kt} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Se x_0 = altezza dell'acqua al tempo $t=0$ allora $x_0 = x(0) = c\,e^{-k \cdot 0} = c$ e quindi

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$



3| Equazione di decadimento

Avete una certa quantità di sostanza $x(t)$ che decresce nel tempo, per esempio

a) isotopo instabile (per esempio uranio)

b) molecola instabile per effetto della luce, o del calore, o di altre condiz. esterne,

c) materiale che si scioglie in un liquido (per esempio sale in acqua)

Supponete di sapere che la frazione k di materiale che si perde per unità di tempo è costante.

Questo è sicuramente il caso del materiale radioattivo, ma anche quello del sale nell'acqua almeno se il sale è trascurabile rispetto alla quantità di liquido.

Allora per Δt piccolo

$$\frac{\overbrace{X(t)-X(t+\Delta t)}^{\text{materiale che si perde}}}{\Delta t} = k \cdot X(t)$$

allora

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -k\,x(t)$$

e passando al limite per $t=0$

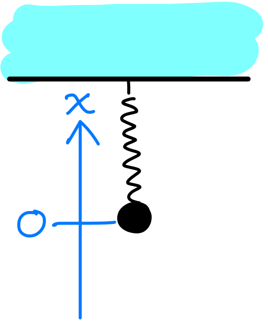
$$\dot{x} = -kx \quad \longleftarrow \text{equazione di decadim.}$$

Esattamente come prima la soluzione è

$$x(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quantità di materiale a } t=0}}{x_0}\, e^{-kt}$$

4| Oscillatore armonico

Versione base : peso attaccato ad una molla:



indico con $x(t)$ l'altezza del peso rispetto alla posizione di riposo ($x=0$ è la posiz. di riposo)

Voglio determinare $x(t)$.

Parto dall'equazione $f = ma$ e uso che $a=\ddot{x}$ e f è proporzionale allo spostamento dalla posizione di riposo (legge di Hooke):

$$f = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante elastica} \\ \text{della molla}}}{k}x \qquad \text{(attenzione al segno } -)$$

Allora $m\ddot{x} = ma = f = -kx$, cioè

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

equazione diff. del 2° ordine, lineare, a coeff. costanti e omogenea.

L'eq. caratteristica è $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ha soluzioni $\lambda = \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega}$. La soluzione è

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per farsi un' idea di come sono fatte queste soluzioni le riscrivo in maniera diversa:

prendo r e α coordinate polari di (c_1, c_2) cioè $c_1 = r\cos\alpha$, $c_2 = r \operatorname{sen}\alpha$, e allora

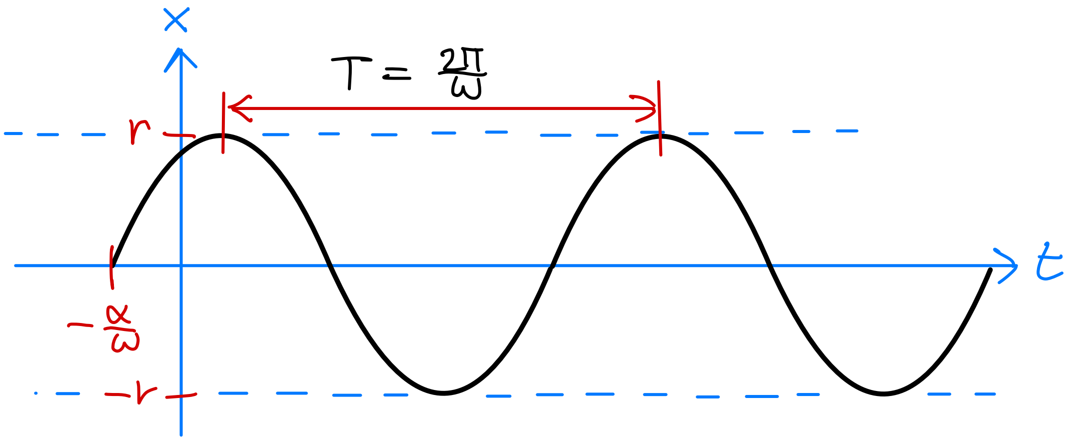
$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

$$= r\left(\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(\omega t) + \operatorname{sen}\alpha \cos(\omega t)\right)$$

$$= r \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Quindi le soluzioni si possono scrivere come

$$x(t) = r \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r \geq 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$$



5 | Oscillatore armonico smorzato

Suppongo ora che la massa del caso precedente sia anche sottoposta ad una forza di attrito proporzionale alla velocità cioè

$$f = -Kx - \delta \dot{x}$$

In questo caso l'equazione diventa

$$\ddot{x} + \frac{\delta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

equaz. diff. 2° ordine a coeff. costanti e omogenea. L'eq. caratt. è $\lambda^2 + \frac{\delta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$ e ha soluzioni

$$\lambda = \underbrace{-\frac{\delta}{2m}}_{p} \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\delta^2}{4m^2}}}_{\omega}$$

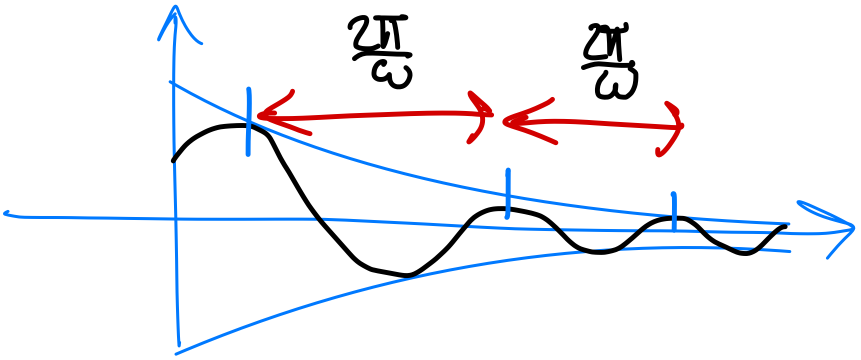
(se il coefficiente di attrito δ è suffic. piccolo, cioè $\delta \leq 2\sqrt{mk}$).

La soluzione è

$$x(t) = e^{pt}\left(c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\right) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

oppure

$$x(t) = r e^{pt} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$



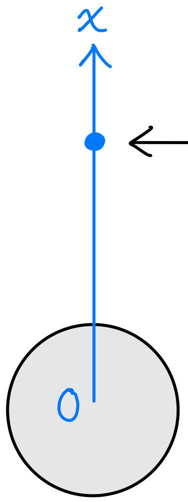
AM1 gest 20/21

lezione 56

18/12/2020

Esempi di problemi in cui appaiono equaz. differ.

1| solido in caduta libera



$\leftarrow x(t) =$ distanza del solido dal centro della terra al tempo t

Problema: trovare la legge oraria del solido, cioè la formula di $x(t)$.

Parto da $f = ma$ sapendo che

- $a = \ddot{x}$
- $f = \begin{cases} a) -mg & \text{(se posso supporre } g \text{ costante)} \\ b) -\dfrac{GMm}{x^2} & \end{cases}$

cost. di grav. univ.
massa della terra

Caso a)

$$m\ddot{x} = ma = f = -mg$$

$$\ddot{x} = -g \qquad \text{(equaz. diff. 2° ordine)}$$

prendendo la primitiva (cioè integrando entrambi i termini)

$$\dot{x} = -gt + c_0 \qquad \text{con } c_0 \in \mathbb{R}$$

prendendo di nuovo la primitiva

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + c_0 t + c_1 \qquad \text{con } c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare le costanti C_0 e C_1 ho bisogno di altri dati sul moto del solido, per esempio posizione e velocità in certo istante t_0 (cioè $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$).

Caso b

$$m\ddot{x} = ma = f = -\frac{GMm}{x^2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}$$

equaz. diff. 2° ordine non lineare, non rientra tra quelle che sappiamo risolvere.

Moltiplico l'equazione per $\dot{x}$

$$(\dot{x}(t))^2 = 2\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) \longrightarrow \underset{\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)'}{\underset{\parallel}{\dot{x}\ddot{x}}} = -\underset{\left(\frac{GM}{x}\right)'}{\underset{\parallel}{GM\frac{\dot{x}}{x^2}}} \longleftarrow \left(\frac{1}{x(t)}\right)' = -\frac{\dot{x}(t)}{(x(t))^2}$$

e ottengo $\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)' = \left(\frac{GM}{x}\right)'$ quindi

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{GM}{x} + C_0 \quad \text{con } C_0 \in \mathbb{R}$$

Posso riscrivere questa equazione come

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{energia cinetica}} - \underbrace{\frac{GMm}{x}}_{\text{energia potenziale}} = C_0$$

ho riottenuto la conservazione dell'energia. Questa procedura funziona ogni volta che la forza f ammette un potenziale.

Ripartendo da (*) ottengo

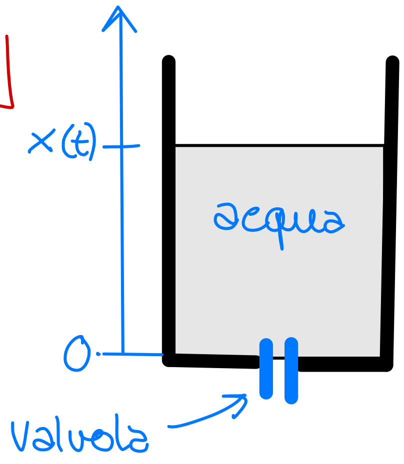
$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{x} + 2C_0}$$

Questa è un' equazione a variabili separabili.

Si può risolvere esplicitamente nel caso $C_0 = 0$.

Di più non si può fare (in questo corso).

2)



recipiente cilindrico pieno d'acqua con valvola di scarico con portata proporzionale alla pressione

Voglio trovare la formula di x(t) (altezza dell' acqua al tempo t)

volume di acqua uscita nell' intervallo di tempo Δt $= (x(t) - x(t+\Delta t)) \cdot A$

con A = area della base del cilindro.

$$\text{portata} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$\|$$

cost. x pressione e la pressione è proporzionale a $x(t)$

$$\|$$

$k\,x$ dove la costante k dipende dalla valvola

Quindi

$$\frac{x(t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t} = k\,x(t)$$

cioè

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -k\,x(t)$$

e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$

$$\dot{x} = -kx$$

equazione lineare del primo ordine a coeff. costanti e omogenea $\dot{x} + kx = 0$.

Eq. caratteristica $\lambda + k = 0$ cioè $\lambda = -k$.

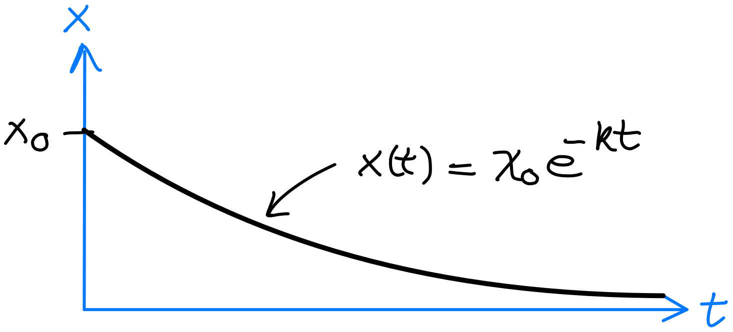
La soluzione è

$$x(t) = c\,e^{-kt} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Se x_0 = altezza dell'acqua al tempo $t=0$ allora

$x_0 = x(0) = c\,e^{-k\cdot 0} = c$ e quindi

$$x(t) = x_0\,e^{-kt}$$



3| Equazione di decadimento

Avete una certa quantità di sostanza $x(t)$ che decresce nel tempo, per esempio

a) isotopo instabile (per esempio uranio)

b) molecola instabile per effetto della luce, o del calore, o di altre condiz. esterne,

c) materiale che si scioglie in un liquido (per esempio sale in acqua)

Supponete di sapere che la frazione k di materiale che si perde per unità di tempo è costante.

Questo è sicuramente il caso del materiale radioattivo, ma anche quello del sale nell'acqua almeno se il sale è trascurabile rispetto alla quantità di liquido.

Allora per Δt piccolo

$$\frac{\overbrace{x(t)-x(t+\Delta t)}^{\text{materiale che si perde}}}{\Delta t} = k \cdot x(t)$$

allora

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -k\, x(t)$$

e passando al limite per $t=0$

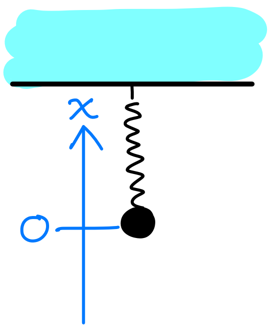
$$\dot{x} = -kx \quad \longleftarrow \text{equazione di decadim.}$$

Esattamente come prima la soluzione è

$$x(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quantità di materiale a } t=0}}{x_0}\, e^{-kt}$$

4| Oscillatore armonico

Versione base : peso attaccato ad una molla:



indico con x(t) l'altezza del peso rispetto alla posizione di riposo (x=0 è la posiz. di riposo)

Voglio determinare x(t).

Parto dall'equazione $f = ma$ e uso che $a = \ddot{x}$ e f è proporzionale allo spostamento dalla posizione di riposo (legge di Hooke):

$$f = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante elastica} \\ \text{della molla}}}{k}x \qquad \text{(attenzione al segno -)}$$

Allora $m\ddot{x} = ma = f = -kx$, cioè

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

equazione diff. del 2° ordine, lineare, a coeff. costanti e omogenea.

L' eq. caratteristica è $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ha soluzioni $\lambda = \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega}$. La soluzione è

$$x(t) = c_1 \,\text{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per farsi un' idea di come sono fatte queste soluzioni le riscrivo in maniera diversa:

prendo r e α coordinate polari di (c_1, c_2) cioè $c_1 = r\cos\alpha$, $c_2 = r \operatorname{sen}\alpha$, e allora

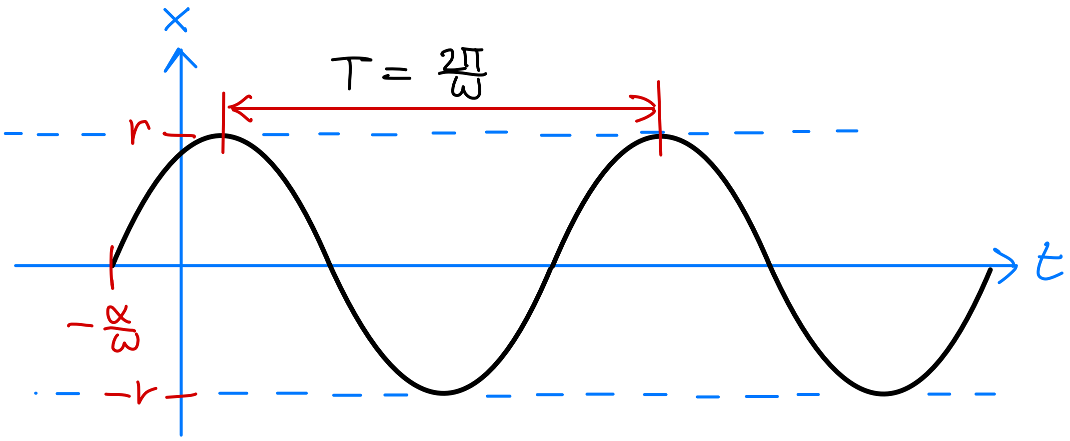
$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

$$= r\left(\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(\omega t) + \operatorname{sen}\alpha \cos(\omega t)\right)$$

$$= r \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Quindi le soluzioni si possono scrivere come

$$x(t) = r \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$



5 Oscillatore armonico smorzato

Suppongo ora che la massa del caso precedente sia anche sottoposta ad una forza di attrito proporzionale alla velocità cioè

$$f = -kx - \delta \dot{x}$$

In questo caso l'equazione diventa

$$\ddot{x} + \frac{\delta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

equaz. diff. 2° ordine a coeff. costanti e omogenea. L'eq. caratt. è $\lambda^2 + \frac{\delta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$ e ha soluzioni

$$\lambda = \underbrace{-\frac{\delta}{2m}}_{p} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\delta^2}{4m^2}}}_{\omega}$$

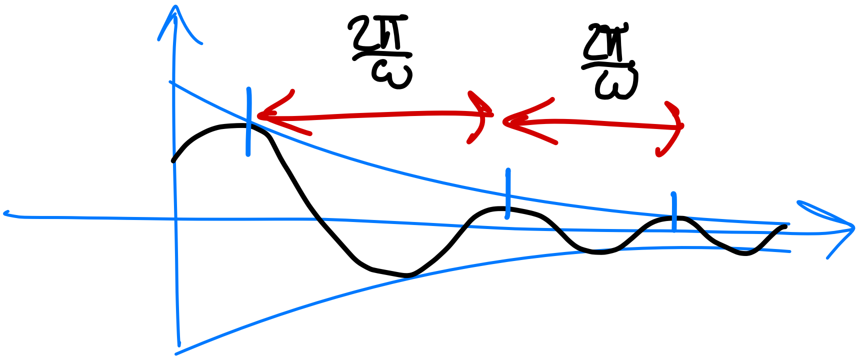
(se il coefficiente di attrito δ è suffic. piccolo, cioè $\delta \leq 2\sqrt{mk}$).

La soluzione è

$$x(t) = e^{pt}\left(c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\right) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

oppure

$$x(t) = r e^{pt} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$



Lezione 52

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI del I° ORDINE

Definizione: Una O.D.E. del primo ordine si dice lineare se è del tipo

$$x'(t) + a(t)\,x(t) = b(t)$$

con a, b funzioni date.

La funzione $a(t)$ viene detta coefficiente e la funzione $b(t)$ viene detta termine noto.

Se $b(t) \equiv 0$ allora diremo che l'equazione è omogenea.

In generale una O.D.E. del primo ordine è del tipo $x'(t) = f(t, x(t))$ nel caso delle eq. lineari

$f(t, x(t)) = -a(t)\,x(t) + b(t)$

In forma breve spesso scriveremo

$x' = -a(t)\,x + b(t)$

ESEMPI: $x' + 4t\,x = 0$ $\quad a(t) = 4t \quad b(t) = 0$

$x' - 2x = \sin(t)$ $\quad a(t) = -2 \quad b(t) = \sin(t)$

CONTROESEMPI: NON sono O.D.E. lineari del primo ordine

$x' + 2x^2 = 0$

$x' + t\cos(x) = t^2$

Teorema: Le soluzioni dell'eq. $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ sono tutte e sole le funzioni della forma

$$x(t) = e^{-A(t)}\left[\,B(t) + c\,\right]$$

con $c \in \mathbb{R}$, dove

$A(t)$ una primitiva di $a(t)$

$B(t)$ è una primitiva di $e^{A(t)} \cdot b(t)$

Dimostrazione :

Consideriamo $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$.

Moltiplico per $e^{A(t)}$ con $A(t)$ primitiva di $a(t)$

$$\underbrace{x'(t)\cdot e^{A(t)} + a(t)\, e^{A(t)}\, x(t)}_{\substack{\parallel \\ \left(x(t)\, e^{A(t)}\right)'}} = e^{A(t)}\, b(t)$$

Dunque $\left(x(t)\, e^{A(t)}\right)' = e^{A(t)}\, b(t)$

da cui $x(t)\, e^{A(t)} = B(t) + c$

con $B(t)$ primitiva $e^{A(t)}\, b(t)$.

Esplicitando $x(t)$ otteniamo

$$x(t) = e^{-A(t)}\left[\, B(t) + c \,\right].$$

ESEMPIO: Risolvere $x' + 2x = 3$

($x'(t) + 2x(t) = 3$ $\quad a(t) = 2 \quad b(t) = 3$)

$a(t) = 2 \quad \to \quad A(t) = 2t$

$e^{A(t)} = e^{2t}$

$$e^{2t}x' + e^{2t}\cdot 2x = 3e^{2t}$$

$$(x e^{2t}) = 3e^{2t}$$

cerco $B(t)$ primitiva di $e^{A(t)}\, b(t) = 3e^{2t}$

$$\int 3e^{2t}\, dt = \int \frac{3}{2}\cdot 2e^{2t}\, dt = \frac{3}{2}\int 2e^{2t}\, dt$$

$$= \frac{3}{2}e^{2t} + c$$

$$x\, e^{2t} = \frac{3}{2} e^{2t} + c$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2} + c\, e^{-2t}} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO: $x' - \frac{x}{t} = 2t^2$ $(*)$

$$\left(x'(t) - \frac{1}{t} x(t) = 2t^2 \qquad a(t) = -\frac{1}{t} \quad b(t) = 2t^2 \right)$$

$$a(t) = -\frac{1}{t}$$

<u>se $t > 0$</u> $A(t) = -\log(t)$, $e^{A(t)} = \frac{1}{t}$, $e^{-A(t)} = t$

$$e^{A(t)} \cdot b(t) = 2t \qquad B(t) = t^2$$

$$x(t) = t(t^2 + c) = t^3 + ct \qquad c \in \mathbb{R}$$

<u>se $t < 0$</u> $A(t) = -\log(-t)$, $e^{A(t)} = -\frac{1}{t}$, $e^{-A(t)} = -t$

$$e^{A(t)} \cdot b(t) = -2t \qquad B(t) = -t^2$$

$$x(t) = -t(-t^2 + c) = t^3 - ct = t^3 + \tilde{c}t$$

Dunque sia per $t<0$ che per $t>0$

$$x(t) = t^3 + Ct \qquad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO: Risolvere $\begin{cases} x' + 2tx = 4t^3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$

$$a(t) = 2t \quad , \quad b(t) = 4t^3$$

$$\Rightarrow A(t) = t^2 \quad , \quad e^{A(t)} = e^{t^2}$$

$$e^{A(t)} b(t) = 4t^3 e^{t^2}$$

$$B(t) = 2e^{t^2} [t^2 - 1]$$

Infatti $\int 4t^3 e^t \, dt = \int \underbrace{2t^2}_{g} \cdot \underbrace{2te^{t^2}}_{f} \, dt$

per parti → $= 2t^2 e^{t^2} - \int 4t e^{t^2} dt = 2te^{t^2} - 2 \int 2te^{t^2} dt$

$$= 2t^2 e^{t^2} - 2e^{t^2} + c$$

$$= 2e^{t^2} [t^2 - 1] + c$$

Dunque $x(t) = e^{-A(t)} [B(t) + c]$

$$= e^{-t^2} [2e^{t^2} (t^2 - 1) + c]$$

$$= 2 (t^2 - 1) + c e^{-t^2} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Vogliamo ora trovare $c \in \mathbb{R}$ tale per cui $x(0) = 2$.

$$2 = 2 (0 - 1) + c e^0$$

$$\Rightarrow \quad 2 = -2 + c$$

$$\Rightarrow \quad c = 4$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = 2(t^2 - 1) + 4e^{-t^2}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE del II° ORDINE

Sono quelle che si scrivono nella forma

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

con f funzione data.

Problema di Cauchy (o ai dati iniziali)

$$(PC) \quad \begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Teorema [Esistenza e unicità di soluzioni per (PC)]

L'equazione $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ (sotto opportune ipotesi su f) ammette una ed una sola soluzione che soddisfa anche le condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x_1$.

Osservazione: Le soluzioni di $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ formano una famiglia a due parametri

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI del II° ORDINE

Definizione: Un'eq. differenziale ordinaria si dice lineare del second'ordine se è del tipo

$$x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$$

con a, b, c funzioni date.

Le funzioni $a(t)$, $b(t)$ si chiamano coefficienti.

Se $a(t) \equiv a$ e $b(t) \equiv b$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) sono indipendenti da t, diciamo che l'eq. è a coefficienti costanti. La funzione $c(t)$ si chiama termine noto. Se $c(t) \equiv 0$, l'eq. è omogenea.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI del II° ORDINE OMOGENEE

Teorema: Chiamiamo X l'insieme delle soluzioni di

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \qquad (*)$$

Allora X è uno spazio vettoriale e $\dim(X) = 2$.

Osservazione: L'insieme V delle funzioni da $I \subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale: la somma è l'usuale somma tra funzioni ($(f+g)(x) := f(x) + g(x)$) e il prodotto per scalare è l'usuale prodotto per uno scalare ($c \in \mathbb{R}$, $(cf)(x) := c \cdot f(x)$).

Dimostrazione:

Dimostriamo che X è un sottospazio vettoriale di V.

(i) X è chiuso rispetto alla somma.

Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due soluzioni di $(*)$.

Allora $(x_1+x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$ è soluzione di $(*)$

Infatti

$$(x_1+x_2)''(t) + a(t)(x_1+x_2)'(t) + b(t)(x_1+x_2)(t)$$

$$= x_1''(t) + x_2''(t) + a(t)x_1'(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_1(t) + b(t)x_2(t)$$

$$= \underbrace{x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)}_{=0} + \underbrace{x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t)}_{=0}$$

$$= 0$$

(ii) X è chiuso rispetto al prodotto per scalare

Sia $x_1(t)$ soluzione di $(*)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Allora $(cx_1)(t) = c \cdot x_1(t)$ è soluzione di $(*)$.

Infatti

$$(cx_1)''(t) + a(t)(cx_1)'(t) + b(t)(cx_1)(t)$$

$$= c\,x_1''(t) + a(t)\cdot c\cdot x_1'(t) + b(t)\cdot c\cdot x_1(t)$$

$$= c\left(x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)\right) = c\cdot 0 = 0.$$

(iii) X non è vuoto

La funzione $x(t)\equiv 0$ è soluzione di (*):

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t) = 0 + a(t)\cdot 0 + b(t)\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t)\equiv 0 \in X \quad \Rightarrow \quad X \neq \emptyset.$$

Possiamo concludere che X è sottospazio vettoriale di V, quindi è uno spazio vettoriale.

Dobbiamo dimostrare che $\dim(X) = 2$

Dimostriamo che X è isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Definisco $T: \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \end{cases}$

che manda soluzioni di (*) nel vettore con prima entrata la funzione calcolata in zero e la sua derivata calcolata in zero.

(i) T è lineare

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due soluzioni di (*). Allora

$$T(x_1+x_2) = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)(0) \\ (x_1+x_2)'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)+x_2(0) \\ x_1'(0)+x_2'(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix} = T(x_1) + T(x_2).$$

Sia $x_1(t)$ soluzione di (*) e $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$T(cx_1) = \begin{pmatrix} (cx_1)(0) \\ (cx_1)'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,x_1(0) \\ c\,x_1'(0) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \end{pmatrix} = c\,T(x_1).$$

(ii) T è iniettiva

Dimostriamo che $\mathrm{Ker}(T) = \{ x(t) \equiv 0 \}$, ossia che l'unica soluzione di (*) che soddisfa $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la funzione costantemente nulla.

Si vede facilmente che $x(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema di Cauchy

$$(\#) \quad \begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Grazie al teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy possiamo concludere che $x(t) \equiv 0$ è l'unica soluzione di (#)

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(T)$ contiene solo il vettore nullo (che in questo caso è la funzione $x(t) \equiv 0$)

$\Rightarrow$ T è iniettiva.

(iii) T è suriettiva.

Dimostriamo che $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, ossia che preso un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ esiste una soluzione di (*) che soddisfa $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Questo coincide con dimostrare l'esistenza di soluzioni per il problema

$$(\#\#) \quad \begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \\ x(0) = v_1 \\ x'(0) = v_2 \end{cases}$$

con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.

Il teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy ci garantisce che (##) ammette soluzione.

$\Rightarrow$ T è suriettiva.

$\Rightarrow$ T è un isomorfismo

$\Rightarrow X \simeq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \dim(X) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$

Lezione 53

Equazzioni differenzriali ordinarie del second'ordine lineari a coefficienti costanti omogenee:

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

(in breve $x'' + a x' + bx = 0$)

Teorema: Data l'equazione

(*) $x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$

chiamiamo equazione caratteristica associata l'equazione di secondo grado $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e indichiamo con Δ il suo discriminante.

1) Se $\Delta > 0$ indichiamo con $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ le due soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica.

La soluzione generale di (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Se $\Delta = 0$ indichiamo con $\tilde{\lambda} = -\frac{a}{2}$ l'unica soluzione dell'equazione caratteristica.

La soluzione generale di (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\tilde{\lambda} t} + c_2 t e^{\tilde{\lambda} t}$$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3) Se $\Delta < 0$ indichiamo con $\rho \pm i\omega$ le due soluzioni complesse dell'equazione caratteristica ($\rho = -\frac{a}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$).

La soluzione generale di (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\rho t} \cos(\omega t) + c_2 e^{\rho t} \sin(\omega t)$$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

1) Sia $\Delta > 0$.

Mostriamo che $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ è soluzione di (*).

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$
$$x_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$
$$x_1''(t) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_1 t}$$
$$= e^{\lambda_1 t}\underbrace{(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)}_{\substack{=0 \text{ poiché } \lambda_1 \text{ è} \\ \text{soluzione di } \lambda^2 + a\lambda + b = 0 .}} = e^{\lambda_1 t}\cdot 0 = 0$$

Analogamente $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ è soluzione di (*).

Inoltre $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

e con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\Rightarrow x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono linearmente indipendenti.

2) Sia $\Delta = 0$.

Grazie allo stesso argomento del punto 1) verifico che $x_1(t) = e^{\tilde{\lambda} t}$ è soluzione di (*).

Considero ora $x_2(t) = te^{\tilde{\lambda} t}$

$$x_2(t) = te^{\tilde{\lambda} t}$$
$$x_2'(t) = e^{\tilde{\lambda} t} + \tilde{\lambda} te^{\tilde{\lambda} t}$$
$$x_2''(t) = 2\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + (\tilde{\lambda})^2 te^{\tilde{\lambda} t}$$

$$\Rightarrow 2\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + (\tilde{\lambda})^2 te^{\tilde{\lambda} t} + ae^{\tilde{\lambda} t} + a\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + bte^{\tilde{\lambda} t}$$
$$= e^{\tilde{\lambda} t}\underbrace{(2\tilde{\lambda} + a)}_{\substack{=0 \text{ poiché} \\ \tilde{\lambda} = -\frac{a}{2}}} + te^{\tilde{\lambda} t}\underbrace{(\tilde{\lambda}^2 + a\tilde{\lambda} + b)}_{\substack{=0 \text{ poiché} \\ \tilde{\lambda} \text{ soluzione}}}$$
$$= 0\cdot e^{\tilde{\lambda} t} + 0\cdot te^{\tilde{\lambda} t} = 0$$

$\Rightarrow x_2(t)$ è soluzione.

Inoltre $x_1(t)$ e $x_2(t)$ non sono proporzionali, dunque sono linearmente indipendenti.

3) Sia $\Delta < 0$.

Verifichiamo che $x_1(t) = e^{\rho t}\cos(\omega t)$ è soluzione di (*).

$$x_1(t) = e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$x_1'(t) = \rho e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$x_1''(t) = (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\cos(\omega t) - 2\omega\rho e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\cos(\omega t) - 2\omega\rho e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$a\rho e^{\rho t}\cos(\omega t) - a\omega e^{\rho t}\sin(\omega t) + b e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$= \underbrace{(\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)}_{= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - 4b}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0} e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega\underbrace{(2\rho + a)}_{= 0 \text{ poiché } \rho = -\frac{a}{2}} e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$= 0 \cdot e^{\rho}\cos(\omega t) - \omega \cdot 0 \cdot e^{\rho t}\sin(\omega t) = 0$$

$\Rightarrow x_1(t)$ è una soluzione.

Verifichiamo che $x_2(t) = e^{\rho t}\sin(\omega t)$ è soluzione di (*).

$$x_2(t) = e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$x_2'(t) = \rho e^{\rho t}\sin(\omega t) + \omega e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$x_2''(t) = (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\sin(\omega t) + 2\omega\rho e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\sin(\omega t) + 2\omega\rho e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$a\rho e^{\rho t}\sin(\omega t) + a\omega e^{\rho t}\cos(\omega t) + b e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$= \underbrace{(\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)}_{= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - 4b}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0} e^{\rho t}\sin(\omega t) - \omega\underbrace{(2\rho + a)}_{= 0 \text{ poiché } \rho = -\frac{a}{2}} e^{\rho t}\cos(\omega t) = 0$$

$\Rightarrow x_2(t)$ è soluzione.

Inoltre $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono linearmente indipendenti.

Esempi:

- Risolvere $x'' - 4x' + 4x = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

La soluzione generale di $x'' - 4x' + 4x = 0$

è $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

$= e^{2t}(c_1 + c_2 t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Risolvere $x'' - 3x' + 2x = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$.

La soluzione generale di $x'' - 3x' + 2x = 0$

è $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Risolvere $x'' - 2x' + 5x = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \rho \pm \omega i = 1 \pm 2i$

La soluzione generale di $x'' - 2x' + 5x = 0$

è $x(t) = e^{t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Giustificazione del perchè le soluzioni sono della forma vista nel teorema.

Cerchiamo le soluzioni a $x''+ax'+bx=0$ del tipo $\tilde{x}=e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{x}(t) = e^{\lambda t}$$

$$\tilde{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\tilde{x}''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\lambda t}}_{>0}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

i) Se il discriminante di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ è strett. maggiore di zero, allora λ_1 e λ_2 sono le due soluzioni reali e distinte di $\lambda^2+a\lambda+b=0$

$\Rightarrow$ $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t)=e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni di $x''+ax'+bx=0$.

ii) Se il discriminante di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ è strett. minore di zero, allora λ_1 e λ_2 sono le due soluzioni complesse di $\lambda^2+a\lambda+b=0$.

Dando per buono che anche per $\lambda \in \mathbb{C}$ $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ e $(e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, abbiamo ancora che $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sono soluzioni di (*).

Possiamo scrivere $\lambda_{1,2} = p \pm \omega i$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(p+\omega i)t} = e^{pt} \cdot e^{i\omega t}$$

$$= e^{pt}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{(\rho - \omega i)t} = e^{\rho t} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$= e^{\rho t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))$$

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni, anche $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ è soluzione

Prendo $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$$= \frac{1}{2} e^{\rho t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + \frac{1}{2} e^{\rho t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$= e^{\rho t} \cos(\omega t).$$

Prendo $c_1 = \frac{1}{2i}$ e $c_2 = -\frac{1}{2i}$ $\Rightarrow$

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$$= \frac{1}{2i} e^{\rho t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) - \frac{1}{2i} e^{\rho t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$= e^{\rho t} \sin(\omega t).$$

Quindi $e^{\rho} \cos(\omega t)$ e $e^{\rho} \sin(\omega t)$ sono soluzioni.

iii) Se $\Delta = 0$, allora l'unica soluzione dell'eq. caratteristica è $\tilde{\lambda}$. Ripetendo i conti del punto i) troviamo che $x_1(t) = e^{\tilde{\lambda} t}$ è sol. di (*).

Resta da spiegare perché cerchiamo una seconda soluzione linearmente indipendente a $x_1(t)$ tra le funzioni della forma $t e^{\lambda t}$.

Abbiamo che $\tilde{\lambda}$ è l'unica soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - 2\tilde{\lambda}\lambda + \tilde{\lambda}^2 = 0$ associata all'eq. diff. $x'' - 2\tilde{\lambda} x' + \tilde{\lambda}^2 x = 0$. (*)

Prendiamo $h > 0$ piccolo, allora $\tilde{\lambda} + h$ tende a $\tilde{\lambda}$ per h che tende a zero.

Abbiamo che $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$ e $\lambda_2 = \tilde{\lambda} + h$ sono le due soluzioni reali e distinte dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - (2\tilde{\lambda} + h)\lambda + \tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda} h = 0$ associata all'equazioni differenziale

$$x'' - (2\tilde{\lambda} + h)x' + (\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda} h)x = 0 \quad . \quad (**)$$

Visto che per $h \to 0$ abbiamo che $\tilde{\lambda} + h \to \tilde{\lambda}$ e l'equazione $(**)$ si riduce a $(*)$, ci aspettiamo un comportamento simile sulle soluzioni.

La soluzione generale di $(**)$ e'

$$x(t) = c_1 e^{\tilde{\lambda} t} + c_2 e^{(\tilde{\lambda} + h)t} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Prendo $c_1 = -\frac{1}{h}$ e $c_2 = \frac{1}{h}$

Con questa scelta ottengo $\tilde{x}(t) = -\frac{1}{h} e^{\tilde{\lambda} t} + \frac{1}{h} e^{(\tilde{\lambda}+h)t}$, che, ovviamente, e' una soluzione di $(**)$

Mi aspetto che, se faccio il limite per h che tende a zero di $\tilde{x}(t)$, ottengo una soluzione di $(*)$.

$$\lim_{h \to 0} \tilde{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(\tilde{\lambda}+h)t} - e^{\tilde{\lambda} t}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{\tilde{\lambda} t} \cdot e^{ht} - e^{\tilde{\lambda} t}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{\tilde{\lambda} t} \left(\frac{e^{ht} - 1}{h} \right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0} e^{\tilde{\lambda} t} \left(\frac{\cancel{1} + t\cancel{h} - \cancel{1}}{\cancel{h}} \right) = t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$e^x = 1 + x + \theta(x^2) \Rightarrow e^{th} = 1 + th + \theta(h^2)$$

$\Rightarrow x(t) = t e^{\tilde{\lambda} t}$ e' soluzione di

$$x'' - 2\tilde{\lambda} x' + \tilde{\lambda}^2 x = 0.$$

Lezione 54

Proposizione 1:

Sia $x_1(t)$ una soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c_1(t)$ con a, b, c_1 funzioni date.

Sia $x_2(t)$ una soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c_2(t)$ con a, b, c_2 funzioni date.

Allora x_1+x_2 è soluzione di

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c_1(t)+c_2(t).$$

Dimostrazione:

Considero $(x_1+x_2)(t)$. Vale

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2)''(t) + a(t)\left((x_1+x_2)'(t)\right)+b(t)(x_1+x_2)(t)\\
&= x_1''(t)+x_2''(t)+a(t)x_1'(t)+a(t)x_2'(t)+b(t)x_1(t)+b(t)x_2(t)\\
&= x_1''(t)+a(t)x_1'(t)+b(t)x_1(t)+x_2''(t)+a(t)x_2'(t)+b(t)x_2(t)\\
&= c_1(t)+c_2(t).
\end{aligned}
$$

↳ uso il fatto che x_1 è soluzione di $x''+a(t)x'+b(t)x=c_1(t)$, x_2 è soluzione di $x''+a(t)x'+b(t)x=c_2(t)$

$\Rightarrow$ x_1+x_2 è soluzione di

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c_1(t)+c_2(t).$$

Proposizione 2: Sia $x_{om}(t)$ la soluzione generale di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$ con a, b funzioni date. Sia $\tilde{x}(t)$ una soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Allora la soluzione generale di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$ è $x(t)=x_{om}(t)+\tilde{x}(t)$.

Dimostrazione:

Abbiamo $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$ e $\tilde{x}(t)$ soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Applico la Proposizione 1 con $c_1(t)\equiv 0$ e $c_2(t)=c(t)$

$\Rightarrow$ $x_{om}(t)+\tilde{x}(t)$ è soluzione di

$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Inoltre $x(t)=x_{om}(t)+\tilde{x}(t)$ è una famiglia a due parametri di soluzioni, dunque $x(t)$ è la soluzione generale di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Osservazione: Chiamiamo X lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea

$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$.

Allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$ (con $c(t)$ non zero) è $S=X+\tilde{x}=\{x+\tilde{x} \mid x\in X, \tilde{x}$ soluzione particolare della eq. non omogenea$\}$

Si vede che S <u>non</u> è uno spazio vettoriale.

La proposizione 2 ci da un metodo operativo di risoluzione di $x''(t)+ax'(t)+bx(t)=c(t)$ per alcune classi di $c(t)$ e per $a,b\in\mathbb{R}$.

Infatti:

- se $a,b\in\mathbb{R}$ abbiamo un metodo per trovare x_{om}.
- ci sono casi in cui è semplice trovare $\tilde{x}$.

Sia $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ l'equazione caratteristica associata a $x'' + ax' + bx = 0$. Se $\Delta \geq 0$, chiamiamo λ_1, λ_2 le soluzioni di $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (possibilmente coincidenti) se $\Delta < 0$, chiamiamo $p \pm iw$ le soluzioni complesse.

Forma di $c(t)$	Forma di $\tilde{x}(t)$
$c(t)$ è una costante	$\tilde{x}(t) = c$ con $c \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è un polinomio di grado d	$\tilde{x}(t)$ è un polinomio di grado d $\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_d t^d$ con $c_0, c_1, c_2 \dots c_d \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è un multiplo di e^{mt}	
con $m \neq \lambda_1$, $m \neq \lambda_2$ (oppure λ_1, λ_2 complessi)	$\tilde{x}(t) = c\, e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$
con $m = \lambda_1$, $m \neq \lambda_2$	$\tilde{x}(t) = c t e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$
con $m = \lambda_1 = \lambda_2$	$\tilde{x}(t) = c t^2 e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è combinazione lineare di $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$	
con $\alpha \neq w$ (oppure λ_1, λ_2 reali)	$\tilde{x}(t) = a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
con $\alpha = w$	$\tilde{x}(t) = a t \sin(\alpha t) + b t \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
$c(t)$ è combinazione lineare di $e^{mt}\sin(\alpha t)$ e $e^{mt}\cos(\alpha t)$.	
con $m \pm i\alpha \neq p \pm iw$	$\tilde{x}(t) = a e^{mt} \sin(\alpha t) + b e^{mt} \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
con $m \pm i\alpha = p \pm iw$	$\tilde{x}(t) = a t e^{mt} \sin(\alpha t) + b t e^{mt} \cos(\alpha t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

* coeffienti in blu da determinare.

ESEMPI:

1.a: Risolvere $x'' + x' - 6x = 3$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 0$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) \equiv c$ con $c \in \mathbb{R}$.

$$\tilde{x}(t) = c$$

$$\tilde{x}'(t) = 0$$

$$\tilde{x}''(t) = 0$$

$$0 + 0 - 6c = 3 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2}$$

$$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{2}$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.b. Risolvere $x'' + x' - 6x = 2t^2$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \qquad \text{con } c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

$$\tilde{x}'(t) = c_1 + 2c_2 t$$

$$\tilde{x}''(t) = 2c_2$$

$$2c_2 + c_1 + 2c_2 t - 6(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) = 2t^2$$

$$2c_2 + c_1 - 6c_0 + t(2c_2 - 6c_1) - 6c_2 t^2 = 2t^2$$

$$\begin{cases} 2c_2 + c_1 - 6c_0 = 0 \\ 2c_2 - 6c_1 = 0 \\ -6c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_0 &= -7/54 \\ c_1 &= -1/9 \\ c_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\tilde{x}(t) = -\frac{7}{54} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{3}t^2$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{7}{54} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{3}t^2 \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.a. Risolvere $x'' + x' - 6x = 8e^{t}$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = c e^{t}$ $\quad (m = 1,\ m \neq \lambda_1,\ m \neq \lambda_2)$

$$\tilde{x}(t) = ce^{t}$$

$$\tilde{x}'(t) = ce^{t}$$

$$\tilde{x}''(t) = ce^{t}$$

$$ce^{t} + ce^{t} - 6ce^{t} = 8e^{t} \implies c = -2$$

$$\tilde{x}(t) = -2e^{t}$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - 2e^{t} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.b. Risolvere $x'' + x' - 6x = 5e^{2t}$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = c\,te^{2t}$ $\quad (m = 2,\ m = \lambda_2,\ m \neq \lambda_1)$

$$\tilde{x}(t) = cte^{2t}$$

$$\tilde{x}'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t}$$

$$\tilde{x}''(t) = 4ce^{2t} + 4cte^{2t}$$

$$4ce^{2t} + 4cte^{2t} + ce^{2t} + 2cte^{2t} - 6cte^{2t} = 5e^{2t}$$

$$5ce^{2t} = 5e^{2t} \implies c = 1$$

$$\tilde{x}(t) = te^{2t}$$

· La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + te^{2t} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.c. Risolvere $x'' - 2x' + x = 3e^t$

· Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

· Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = c\, t^2 e^t \qquad (m = 1 = \lambda_1 = \lambda_2)$$

$$\tilde{x}(t) = ct^2 e^t$$

$$\tilde{x}'(t) = 2cte^t + ct^2e^t$$

$$\tilde{x}''(t) = 2ce^t + 4cte^t + ct^2e^t$$

$$2ce^t + 4cte^t + ct^2e^t - 4cte^t - 2ct^2e^t + ct^2e^t = 3e^t$$

$$2ce^t = 3e^t \implies c = \frac{3}{2}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{3}{2} t^2 e^t$$

· La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{3}{2} t^2 e^t \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.a. Risolvere $x'' + x' - 6x = 10\cos(t)$

· $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

· Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \qquad (\alpha = 1 \neq \omega)$$

$$\tilde{x}(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -a\cos(t) - b\sin(t)$$

$-a\cos(t) - b\sin(t) - a\sin(t) + b\cos(t)$

$-6a\cos(t) - 6b\sin(t) = 10\cos(t)$

$(b-7a)\cos(t) + (-a-7b)\sin(t) = 10\cos(t)$

$$\begin{cases} b-7a = 10 \\ -a-7b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = -\frac{7}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{matrix}$$

$\tilde{x}(t) = -\frac{7}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{7}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3.c. Risolvere $x'' + 4x = \cos(2t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' + 4x = 0$.

$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i \quad (p = 0, \omega = 2)$

$x_{om}(t) = c_1\sin(2t) + c_2\cos(2t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = a t\sin(2t) + b t\cos(2t) \qquad (\alpha = 2 = \omega)$

$\tilde{x}(t) = at\sin(2t) + bt\cos(2t)$

$\tilde{x}'(t) = a\sin(2t) + 2at\cos(2t) + b\cos(2t) - 2bt\sin(2t)$

$\tilde{x}''(t) = 4a\cos(2t) - 4at\sin(2t) - 4b\sin(2t) - 4bt\cos(2t)$

$4a\cos(2t) - 4at\sin(2t) - 4b\sin(2t) - 4bt\cos(2t)$

$+ 4at\sin(2t) + 4bt\cos(2t) = \cos(2t)$

$4a\cos(2t) - 4b\sin(2t) = \cos(2t$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \end{matrix}$$

$\tilde{x}(t) = \frac{1}{4} t\sin(t)$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1\sin(2t) + c_2\cos(2t) + \frac{1}{4} t\sin(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4.a. Risolvere $x'' + x' + x = e^t \sin(t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' + x' + x = 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad \left(\rho = -\frac{1}{2},\ \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a\, e^t \sin(t) + b\, e^t \cos(t) \qquad (m \pm i\omega \neq \rho \pm i\omega)$$

$$\tilde{x}(t) = a e^t \sin(t) + b e^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = (a-b) e^t \sin(t) + (a+b) e^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -2b\, e^t \sin(t) + 2a\, e^t \cos(t)$$

$$-2be^t \sin(t) + 2ae^t \cos(t) + (a-b) e^t \sin(t) + (a+b) e^t \cos(t)$$
$$+ a e^t \sin(t) + b e^t \cos(t) = e^t \sin(t)$$

$$(2a - 3b) e^t \sin(t) + (3a + 2b) e^t \cos(t) = e^t \sin(t)$$

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = \frac{2}{13} \\ b = -\frac{3}{13} \end{matrix}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{2}{13} e^t \sin(t) - \frac{3}{13} e^t \cos(t)$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{2}{13} e^t \sin(t) - \frac{3}{13} e^t \cos(t)$$
$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4.b. Risolvere $x'' - 2x' + 2x = e^t \cos(t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' - 2x' + 2x = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm i \qquad (\rho = 1,\ \omega = 1)$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^t \sin(t) + c_2 e^t \cos(t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a t e^t \sin(t) + b t e^t \cos(t) \qquad (m \pm i\omega = \rho \pm i\omega)$$

$$\tilde{x}(t) = ate^t \sin(t) + bte^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = (a-b)te^t \sin(t) + (a+b)te^t \cos(t)$$
$$+ ae^t \sin(t) + be^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -2bte^t \sin(t) + 2ate^t \cos(t)$$
$$+ (2a-2b)e^t \sin(t) + (2a+2b)e^t \cos(t)$$

$$-2bte^t \sin(t) + 2ate^t \cos(t) + (2a-2b)e^t \sin(t)$$
$$+ (2a+2b)e^t \cos(t) + (2b-2a)te^t \sin(t)$$
$$-2(a+b)te^t \cos(t) - 2ae^t \sin(t) - 2be^t \cos(t)$$
$$+ 2ate^t \sin(t) + 2bte^t \cos(t) = e^t \cos(t)$$

$$-2be^t \sin(t) + 2ae^t \cos(t) = e^t \cos(t)$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{matrix}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}te^t \sin(t).$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t \sin(t) + c_2 e^t \cos(t) + \frac{1}{2}te^t \sin(t)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lezione 55

Osservazione: Supponiamo di dover risolvere

$$x''(t) + a\, x'(t) + b x(t) = c(t)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Supponiamo di poter scrivere $c(t)$ come somma di funzioni $c_1(t) + c_2(t) + \dots c_d(t)$ e supponiamo di saper trovare una soluzione particolare $\tilde{x}_i(t)$ di $x''(t) + a x'(t) + b x(t) = c_i$ per $i = 1 \dots d$.

Allora una soluzione particolare di

$$x''(t) + a\, x'(t) + b x(t) = c(t) \quad \text{è}$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t) + \dots + \tilde{x}_d(t).$$

Esempio: $x''(t) + 4x(t) = e^t + 4t + 1$.

- Trovo la soluzione generale di $x'' + 4x = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$x_{om}(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Trovo una soluzione particolare di $x'' + 4x = e^t$.

$$\tilde{x}_1(t) = a e^t$$

$$\tilde{x}_1'(t) = a e^t$$

$$\tilde{x}_1''(t) = a e^t$$

$$\implies 5 a e^t = e^t \implies a = \frac{1}{5}$$

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{5} e^t$$

- Trovo una soluzione particolare di $x'' + 4x = 4t + 1$

$$\tilde{x}_2(t) = a + bt$$

$$\tilde{x}_2'(t) = b$$

$$\tilde{x}_2''(t) = 0$$

$$0 + 4a + 4bt = 4t + 1$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} b = 1 \\ a = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{4} + t$$

- La soluzione generale di $x''(t) + 4x(t) = e^t + 4t + 1$ è $x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{4} + t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ancora sulle equazioni lineari del primo ordine

Le soluzioni di $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (eq. lineare del primo ordine omogenea) formano uno spazio vettoriale di dimensione 1. Inoltre le soluzioni di $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ si possono scrivere come

$$x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{om}(t)$ e' la soluzione generale di $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (ossia una famiglia a un parametro di soluzioni) e $\tilde{x}(t)$ è una soluzione particolare di $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$.

Nel caso in cui $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$ e $b(t)$ è una funzione tra quelle della tabella abbiamo un secondo metodo di risoluzione di $x'(t) + ax(t) = b(t)$.

1) Scrivo l'equazione caratteristica associata a $x'(t) + a x(t) = 0$, ossia

$$\lambda + a = 0 .$$

La soluzione dell'equazione caratteristica è $\lambda = -a \in \mathbb{R}$.

Quindi $x_1(t) = e^{-at}$ è una soluzione di $x'(t) + a x(t) = 0$.

La soluzione generale di $x'(t) + a x(t) = 0$ è $x_{om}(t) = c\,e^{-at}$ con $c \in \mathbb{R}$.

2) Trovo una soluzione particolare $\tilde{x}(t)$ di $x'(t) + a x(t) = b(t)$.

3) La soluzione generale di $x'(t) + a x(t) = b(t)$ è

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{om}(t) + \tilde{x}(t) \\ &= c\,e^{-at} + \tilde{x}(t) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esempio: $x'(t) + 2x(t) = \sin(2t)\,e^{3t}$

1) $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow x_{om}(t) = c\,e^{-2t}, \quad c \in \mathbb{R}$

2) $\tilde{x}(t) = a\,e^{3t}\sin(2t) + b\,e^{3t}\cos(2t)$

$\tilde{x}'(t) = (3a - 2b)\,e^{3t}\sin(2t) + (2a + 3b)\,e^{3t}\cos(2t).$

$$(3a - 2b)\,e^{3t}\sin(2t) + (2a + 3b)\,e^{3t}\cos(2t).$$

$$+2a\,e^{3t}\sin(2t) + 2b\,e^{3t}\cos(2t) = e^{3t}\sin(2t)$$

$$\begin{cases} 5a - 2b = 1 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} a &= \tfrac{5}{29} \\ b &= -\tfrac{2}{29} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{5}{29}\,e^{3t}\sin(2t) - \frac{2}{29}\,e^{3t}\cos(2t)$$

3) La soluzione generale è

$$x(t) = c\,e^{-2t} + \frac{5}{29}\,e^{3t}\sin(2t) - \frac{2}{29}\,e^{3t}\cos(2t), \quad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio: Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ $x(t) = t^a$ risolve l'equazione $t^2 x''(t) - 6x(t) = 0$.

Svolgimento: $x(t) = t^a$

$x'(t) = a\, t^{a-1}$

$x''(t) = a(a-1)\, t^{a-2}$

$$t^2 \cdot [a(a-1)t^{a-2}] - 6(t^a) = 0$$

$$(a^2 - a - 6)\, t^a = 0$$

$$a^2 - a - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = 3, \; a_2 = -2}$$

$*$ Osservo inoltre che t^3 e t^{-2} sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ la soluzione generale di $t^2 x''(t) - 6x(t) = 0$ è $x(t) = c_1 t^3 + c_2 t^{-2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio: Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'eq. differenziale

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2-a)x = 4e^{-t}. \qquad (*)$$

i) Trovare la soluzione generale per $a > 0$ e $a \neq 1$.

ii) Trovare la soluzione generale per $a = 1$

iii) Dimostrare che $\forall a \geq 2$ e per ogni $x(t)$ soluzione di $(*)$ si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

Svolgimento:

i) ii) Cerchiamo $x_{om}(t)$ soluzione generale di $\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2-a)x = 0$ al variare di a.

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 2a\lambda + (2-a) = 0$$

e $\Delta = 4a^2 - 4(2-a) = 4(a^2 + a - 2)$

CASO 1: Se $a > 1$, allora $\Delta > 0$ e

$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+a-2}$.

Dunque

$x_{om}(t) = c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + c_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

CASO 2: Se $0 < a < 1$, allora $\Delta < 0$ e

$\lambda_{1,2} = -a \pm (\sqrt{2-a-a^2})i$.

Dunque

$x_{om}(t) = e^{-at}(c_1 \cos(\sqrt{2-a-a^2})t + c_2 \sin(\sqrt{2-a-a^2})t)$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

CASO 3: Se $a = 1$, allora $\Delta = 0$ e $\lambda = -1$.

Quindi

$x_{om}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Passiamo ora allora ricerca di $\tilde{x}(t)$ soluzione particolare.

Nel CASO 1 e CASO 2 cerco $\tilde{x}(t)$ tra le funzioni della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-t}$.

$\tilde{x}(t) = ce^{-t}$

$\tilde{x}'(t) = -ce^{-t}$

$\tilde{x}''(t) = ce^{-t}$

$ce^{-t} - 2ace^{-t} + (2-a)ce^{-t} = 4e^{-t} \Rightarrow c = \frac{4}{3-3a}$

$\tilde{x}(t) = \frac{4}{3-3a} e^{-t}$

Nel CASO 3 cerco $\tilde{x}(t)$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) = c\,t^2 e^{-t}$.

$$\tilde{x}(t) = ct^2e^{-t}$$

$$\tilde{x}'(t) = 2cte^{-t} - ct^2e^{-t}$$

$$\tilde{x}''(t) = 2ce^{-t} - 4cte^{-t} + ct^2e^{-t}$$

$$2ce^{-t} - 4cte^{-t} + ct^2e^{-t} + 4cte^{-t} - 2ct^2e^{-t} + ct^2e^{-t} = 4e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad c = 2$$

$$\tilde{x}(t) = 2t^2e^{-t}$$

Riassumendo: abbiamo

CASO 1: $a > 1$

$$x(t) = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t} + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

CASO 2: $0 < a < 1$

$$x(t) = e^{-at}\left(C_1 \cos(\sqrt{2-a-a^2})t + C_2 \sin(\sqrt{2-a-a^2})t\right) + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

CASO 3: $a = 1$

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + 2t^2e^{-t}$$

iii) Visto che $a \geq 2$, una soluzione di (*) è del tipo

$$x(t) = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t} + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

E' chiaro che $\frac{4}{3-3a} e^{-t}$ è $o(e^t)$.

Inoltre $\forall a \geq 2$ vale $-a-\sqrt{a^2+a-2} < -a+\sqrt{a^2+a-2}$,

quindi ci basta far vedere che

$C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t}$ è $o(e^t)$.

Si può ridurre questa affermazione al verificare che $\forall a \geq 2$ vale

$$-a+\sqrt{a^2+a-2} < 1$$

$$\sqrt{a^2+a-2} < a+1$$

$$a^2+a-2 < a^2+2a+1 \quad \Rightarrow \quad a > -3 \quad \checkmark.$$