1 Il linguaggio degli insiemi

Definizione 1.1
Per simboli logici intendiamo i seguenti simboli: (i) Connettivi, negazione $\neg$, congiunzione $\wedge$, disgiunzione $\vee$, implicazione $\rightarrow$, equivalenza $\leftrightarrow$; (ii) Variabili, $x, y, z, t, ..., x_1, x_2, x_3, ...$; (iii) Quantificatori, esistenziale $\exists$, universale $\forall$.
Definizione 1.2
Siano P e Q enunciati, cioè affermazioni cui si possa attribuire uno ed uno solo dei valori di verità $vero$ o $falso$. Allora:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Principio del Linguaggio
Ogni proprietà che consideriamo deve essere esprimibile nel linguaggio della teoria degli insiemi, cioè deve poter essere scritta come formula nella quale compaiono soltanto i simboli logici, il simbolo di uguaglianza "$=$", e il simbolo di appartenenza "$\in$".
Principio di Estensionalità
Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, cioè: $\forall A \forall B[\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B]$.
Principio di Comprensione (o di Astrazione)
Se P è una proprietà "ammissibile", allora esiste la sua estensione: $\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow P(X))$.
Notazione 2.1
Scriviamo "$A \neq B$" per intendere la formula "$\neg(A = B)$", e scriviamo "$A \notin B$" per intendere "$\neg(A \in B)$".
Notazione 3.1
Con la scrittura "$\emptyset$" denotiamo l'insieme $\{x | x \neq x\}$.
Notazione 3.2
(i) Con la scrittura "$A = \emptyset$" denotiamo la proprietà: "$\forall t(t \in A \leftrightarrow t \neq t)$"; (ii) con la scrittura "$A \in \emptyset$" denotiamo la proprietà: "$A \neq A$"; (iii) con la scrittura "$\emptyset \in A$" denotiamo la proprietà: "$\exists t(t = \emptyset) \wedge t \in A$", dove "$t = \emptyset$" è a sua volta l'abbreviazione di una formula, come indicato sopra.
Notazione 3.4
Siano fissati $a_1, ..., a_n$. Scrivendo "$\{a_1, ..., a_n\}$" denotiamo l'insieme $\{x | (x = a_1) \vee ... \vee (x = a_n)\}$ i cui elementi sono tutti e soli gli a_i, dunque: (ia) "$t \in \{a_1, ..., a_n\}$" è una notazione per "$(t = a_1) \vee ... \vee (t = a_n)$"; (iia) "$t = \{a_1, ..., a_n\}$" sta per "$\forall x(x \in t \leftrightarrow ((t = a_1) \vee ... \vee (t = a_n)))$"; (iiia) "$\{a_1, ..., a_n\} \in t$" sta per "$\exists x(x \in t \wedge x = \{a_1, ..., a_n\})$". In generale, se denotiamo con $A_{a_1,...,a_n} = \{x | \varphi(x, a_1, ..., a_n)\}$ dove φ è una formula del linguaggio della teoria degli insiemi, allora conveniamo che: (ib) "$t \in A_{a_1,...,a_n}$" è una notazione per "$\varphi(t, a_1, ..., a_n)$";

iib "$t = A_{a_1,...,a_n}$" sta per "$\forall x(x \in t \leftrightarrow \varphi(t, a_1, ..., a_n))$"; iiib "$A_{a_1,...,a_n} \in t$" sta per "$\exists x(x \in t \wedge \varphi(x, a_1, ..., a_n))$".

Notazione 3.5

Siano A, B insiemi assegnati, allora: i "$A \cup B$" denota l'insieme $\{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$, che viene chiamato l'unione di A e B; ii "$A \cap B$" denota l'insieme $\{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$, chiamato l'intersezione di A e B; iii "$A \setminus B$" denota l'insieme $\{x|(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, chiamato la differenza insiemistica di A e B; iv "$A \triangle B$" denota l'insieme $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definizione 3.7

Siano A e B insiemi. Diciamo che A è sottoinsieme di B (o che A è incluso in B) se vale la proprietà: "$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$". In questo caso scriviamo "$A \subseteq B$".

Notazione 3.8

La scrittura "$\mathcal{P}(A)$" denota l'insieme $\{X|X \subseteq A\}$, che è chiamato l'insieme potenza o l'insieme delle parti di A.

Notazione 3.9

i Scrivendo "$\{x \in A|P(x)\}$" intendiamo $\{x|x \in A \wedge P(x)\}$; ii scrivendo "$\forall x \in A\ P(x)$" intendiamo "$\forall x(x \in A \rightarrow P(x))$"; iii scrivendo "$\exists x \in A\ P(x)$" intendiamo "$\exists x(x \in A \wedge P(x))$"; iv scrivendo "$\exists! x\ P(x)$", intendiamo "$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$".

Definizione 4.1

Chiamiamo coppia ordinata di prima componente a e seconda componente b, il seguente insieme, detto coppia di Kuratowski: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Proposizione 4.3

i Se (a, b) è una coppia ordinata, allora la prima componente a è quell'unico elemento tale che $a \in x\ \forall x \in (a, b)$; ii $(a, b) = (a', b') \implies a = a'$; iii $(a, b) = (a, b') \implies b = b'$; iv $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

Definizione 4.6

Il prodotto cartesiano di A con B, denotato $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie ordinate la cui prima componente appartiene ad A e la cui seconda componente appartiene a B. In formule: $A \times B = \{x|\exists a \in A\ \exists b \in B\ x = (a, b)\}$.

Definizione 5.1

Una relazione binaria R è un insieme di coppie ordinate, allora chiameremo: i dominio di R l'insieme $\text{dom}(R) = \{a|\exists b(a, b) \in R\}$; ii immagine di R l'insieme $\text{Imm}(R) = \{b|\exists a(a, b) \in R\}$. Si dice che R è una relazione su A quando $\text{dom}(R), \text{Imm}(R) \subseteq A$.

Definizione 5.2

Una relazione di equivalenza su un insieme A è una relazione R su A che gode delle proprietà seguenti: i riflessiva, $\forall a \in A, aRa$; ii simmetrica, $\forall a, b \in A, aRb \rightarrow bRa$; iii transitiva, $\forall a, b, c \in A, (aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$.

Definizione 5.3

Sia A un insieme, $\approx$ una relazione di equivalenza su A. La classe di equivalenza di un elemento $a \in A$ rispetto a $\approx$ è l'insieme: $[a] = \{a'|a' \approx a\}$. L'insieme quoziente di A rispetto a $\approx$ è l'insieme di tutte le classi di equivalenza: $A/\approx = \{x|\exists a \in A\ x = [a]\}$.

Definizione 5.4

Un insieme parzialmente ordinato è una coppia $(A, \leq)$ dove il dominio A è un insieme, e l'ordine parziale $\leq$ è una relazione su A che gode delle proprietà seguenti: ⓘ riflessiva, $\forall a \in A, a \leq a$; ⓘⓘ anti-simmetrica, $\forall a, b \in A, (a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b$; ⓘⓘⓘ transitiva, $\forall a, b, c \in A, (a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$.

Definizione 5.5

Una relazione $<$ su A è un ordine parziale stretto se gode delle proprietà seguenti: ⓘ irriflessiva, $\forall a \in A, a \not< a$; ⓘⓘ asimmetrica, $\forall a, b \in A, a < b \rightarrow b \not< a$; ⓘⓘⓘ transitiva, $\forall a, b, c \in A, (a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c$.

Definizione 5.7

Un insieme parzialmente ordinato $(A, <)$ si dice totalmente ordinato (o, più semplicemente, ordinato) se vale la tricotomia, ovvero $\forall a, b, c \in A$, vale una delle seguenti tre possibilità: ⓘ $a < b$; ⓘⓘ $a = b$; ⓘⓘⓘ $b < a$.

Definizione 5.9

Un insieme totalmente ordinato $(A, <)$ si dice buon ordine se ogni sottoinsieme non vuoto $X \subseteq A$ ha elemento minimo.

Definizione 6.1

Una funzione f è una relazione univoca, ovvero una relazione con la proprietà: $\forall a \in \operatorname{dom}(f)\ \exists! b : (a, b) \in f$. Si usa la notazione $f(a) = b$, o anche $f : a \mapsto b$, per intendere che $(a, b) \in f$. In questo caso si dice che b è l'immagine di a mediante f, oppure che b è il valore assunto da f in a.

Notazione 6.2

Con la scrittura "$f : A \rightarrow B$" si intende che f è una funzione il cui dominio è l'insieme A, e la cui immagine è un sottoinsieme di B. Quando $\operatorname{Imm}(f) = B$, si dice che f è suriettiva.

Definizione 6.4

Dato un prodotto cartesiano $A \times B$, le proiezioni canoniche $\pi_1 : A \times B \rightarrow A, \pi_2 : A \times B \rightarrow B$ sono le funzioni definite ponendo $\pi_1((a, b)) = a \wedge \pi_2((a, b)) = b\ \forall (a, b) \in A \times B$.

Definizione 6.5

Una funzione f è iniettiva quando elementi diversi del dominio hanno immagini diverse, ovvero: $\forall a, a' \in A(a \neq a' \rightarrow f(a) \neq f(a'))$.

Definizione 6.6

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice biunivoca o bigezione se è sia iniettiva che suriettiva.

Definizione 6.7

Sia $f : A \rightarrow B$, e siano $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, allora chiameremo ⓘ immagine di X mediante f l'insieme $X, f[X] := \{y | \exists x \in X\ f(x) = y\}$; ⓘⓘ controimmagine di Y mediante f l'insieme $Y : f^{-1}[Y] := \{x \in A | f(x) \in Y\}$.

Notazione 6.11

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, denotiamo con $\widehat{f} : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ la funzione dove $\widehat{f}(X) = f[X]$ è l'immagine dell'insieme X mediante f.

Notazione 6.13

Per denotare l'insieme $\{f | f : A \rightarrow B\}$, si usa la scrittura "$\operatorname{Fun}(A, B)$", o anche "$B^A$".

Definizione 6.16 (funz. caratteristica)

Dato un insieme X, la funzione caratteristica di un suo sottoinsieme $A \subseteq X$ è la funzione $\chi_A : X \to \{0,1\}$ tale che $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A \end{cases}$.

Notazione 6.17

In teoria degli insiemi, si denota con $2 = \{0,1\}$. In particolare, scrivendo 2^X si intende denotare l'insieme di tutte le funzioni $\chi : X \to \{0,1\}$, cioè l'insieme delle funzioni caratteristiche su X.

Definizione 6.18

La restrizione di una funzione f ad un sottoinsieme $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$ del suo dominio, è la funzione $f_{|X}$ avente come dominio X e tale che $f_{|X}(x) = f(x)\ \forall x \in X$.

Definizione 6.21

Una successione è una funzione il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Si parla di I-successione o I-sequenza per indicare una funzione f avente come dominio l'insieme I.

Notazione 6.22

Per indicare una I-sequenza f, si usa spesso la scrittura $(f(i))_{i\in I}$ oppure $(f(i)|i \in I)$.

Notazione 7.1

Se $\mathcal{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi, si denota: (ia) $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = \{x|\exists F \in \mathcal{F}\ x \in F\}$; (iia) $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \{x|\forall F \in \mathcal{F}\ x \in F\}$. Se $\langle F_i|i \in I\rangle$ è una sequenza non vuota di insiemi (cioè $I \neq \emptyset$), analogamente a sopra si denota: (ib) $\bigcup_{i\in I} F_i = \{x|\exists i \in I\ x \in F_i\}$; (iib) $\bigcap_{i\in I} F_i = \{x|\forall i \in I\ x \in F_i\}$.

Definizione 7.3

Diciamo che l'insieme parzialmente ordinato $(A, <_A)$ è restrizione dell'insieme parzialmente ordinato $(B, <_B)$ se $A \subseteq B$, ed inoltre l'ordine su A è quello indotto da B, cioè $a <_A a' \iff a <_B a'\ \forall a, a' \in A$.

Definizione 7.4

Una famiglia di insiemi parzialmente ordinati $\mathcal{F}$ si dice catena se $\forall (A, <_A), (B, <_B) \in \mathcal{F}$ si ha che $(A, <_A)$ è restrizione di $(B, <_B)$ o viceversa. Chiamiamo unione di una catena $\mathcal{F}$ di insiemi parzialmente ordinati, l'insieme parzialmente ordinato $(X, <)$ dove: (i) Il dominio $X = \bigcup\{A|(A, < A) \in \mathcal{F}\}$ è l'unione di tutti i domini; (ii) La relazione $<= \bigcup\{<_A |(A, <_A) \in \mathcal{F}\}$ è l'unione di tutte le relazioni degli elementi di $\mathcal{F}$, cioè $x < y \iff x <_A y\ \forall (A, <_A) \in \mathcal{F}$ tale che $x, y \in A$.

Proposizione 7.5

L'unione di una catena di insiemi totalmente ordinati è un insieme totalmente ordinato.

Definizione 7.6

Sia $(A_i)_{i\in I}$ una sequenza di insiemi. Il corrispondente prodotto è definito ponendo: $\prod_{i\in I} A_i = \{f|f \text{ è una } I\text{-sequenza} \wedge \forall i \in I\ f(i) \in A_i\}$.

Assioma di Scelta

Se $(A_i)_{i\in I}$ è una sequenza di insiemi non vuoti, allora $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

Teorema 8.1

Le seguenti proprietà sono equivalenti: (i) assioma di scelta; (ii) ogni famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti ha una "funzione di scelta", cioè $\exists f$ funzione tale che $f(F) \in F\ \forall F \in \mathcal{F}$ non vuoto; (iii) ogni insieme A ha una "funzione di scelta" $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tale che $f(B) \in B\ \forall B$; (iv) ogni famiglia non vuota $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti a due a due disgiunti ha un "insieme di scelta", cioè un insieme X tale che $X \cap F = \{x_F\}$ contiene un unico elemento $x_F\ \forall F \in \mathcal{F}$; (v) ogni funzione suriettiva $f : A \to B$ ammette un'inversa destra, cioè esiste $g : B \to A$ tale che $f \circ g = id_B$ (tale g è necessariamente iniettiva).

2 Cardinalità numerabile e cardinalità del continuo

Definizione 0.1
Un insieme A si dice finito se è equipotente ad un segmento iniziale $\{1, ..., n\}$ dei numeri naturali. A si dice infinito in caso contrario.
Definizione 1.1
Due insiemi A e B sono equipotenti o hanno la stessa cardinalità se $\exists f : A \to B$ bigettiva. In questo caso scriviamo $|A| = |B|$.
Proposizione 1.2
L'insieme delle funzioni caratteristiche su un insieme X è equipotente all'insieme delle parti, cioè $|2^X| = |\mathcal{P}(X)|$.
Proposizione 1.3
i Proprietà riflessiva, $|A| = |A|$; ii proprietà simmetrica, $|A| = |B| \implies |B| = |A|$; iii proprietà transitiva, $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \implies |A| = |C|$.
Teorema 1.6
Non esistono funzioni suriettive $\Psi : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$, dunque $|\mathbb{N}| \neq |2^{\mathbb{N}}|$.
Teorema 1.7 (Cantor)
$\forall A$ insieme, $\nexists f : A \to \mathcal{P}(A)$ suriettive , dunque $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.
Corollario 1.8
Non può esistere l'insieme universale $V = \{x | x = x\}$ che contiene tutti gli insiemi.
Definizione 2.1
Diciamo che l'insieme A ha cardinalità minore o uguale a quella di B, e scriviamo $|A| \leq |B|$, se vale una delle due seguenti proprietà equivalenti: i $\exists f : A \to B$ iniettiva; ii esiste un sottoinsieme $\exists A' \subseteq B : |A| = |A'|$. Useremo la disuguaglianza stretta $|A| < |B|$ se $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$.
Proposizione 2.2
Se $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'| \implies |A| \leq |B| \iff |A'| \leq |B'|$.
Teorema 2.3 (Cantor-Bernstein)
Se esistono $f : A \to B, g : B \to A$ iniettive, $\implies \exists h : A \to B$ bigettiva, ovvero $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$.
Proposizione 2.4
i Proprietà riflessiva, $|A| \leq |A|$; ii proprietà anti-simmetrica, $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$; iii proprietà transitiva, $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C|, \implies |A| \leq |C|$.
Proposizione 2.6
i Se $|A| \leq |B| \implies \exists g : B \to A$ surgettiva; ii (AC) Se $\exists g : B \to A$ surgettiva, $\implies |A| \leq |B|$.
Definizione 3.1
Un insieme A ha cardinalità numerabile se $|A| = |\mathbb{N}|$. In questo caso scriviamo $|A| = \aleph_0$, che si legge: "A ha cardinalità aleph-zero". Un'enumerazione di A è una funzione biunivoca $(a_n | n \in N)$ da $\mathbb{N}$ in A. Scriveremo $\aleph_0 \leq |A| \wedge |A| \leq \aleph_0$ per intendere rispettivamente $|\mathbb{N}| \leq |A| \wedge |A| \leq |\mathbb{N}|$.
Proposizione 3.3

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è un sottoinsieme infinito, allora $|A| = \aleph_0$.
Corollario 3.4
Se A è un insieme infinito e $|A| \leq \aleph_0$ allora $|A| = \aleph_0$.
Corollario 3.5
Sia B un insieme numerabile, $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$.
Teorema 3.6 (AC)
Se A è un insieme infinito allora $\exists A' \subseteq A$ numerabile, quindi $\aleph_0 \leq |A|$.
Proposizione 3.8
Sia A insieme numerabile, B insieme finito, allora $|A \setminus B| = |A \cup B| = |A|$.
Proposizione 3.9 (AC)
Sia A insieme infinito, B insieme finito, allora $|A \setminus B| = |A \cup B| = |A|$.
Proposizione 4.1
Se A, B sono numerabili $\implies A \cup B$ è numerabile.
Corollario 4.2
$|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.
Proposizione 4.3
$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.
Proposizione 4.4
L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile.
Teorema 4.6 (Cantor)
Sia $(X, <)$ un insieme totalmente ordinato denso senza massimo né minimo. Se $|X| = \aleph_0 \implies (X, <) \cong (Q, <)$.
Teorema 4.7 (AC)
Sia $(A_i | i \in I)$ una sequenza di insiemi dove $|I| \leq \aleph_0 \wedge |A_i| \leq \aleph_0 \ \forall i \in I$; allora $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \aleph_0$.
Notazione 4.9
Dato un insieme non vuoto X, denotiamo con: ⓘ $Fin(X) = \{A \subseteq X | A \text{ finito}\}$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di X; ⓘⓘ $FSeq(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Fun}(\{1, ..., n\}, X) = \{\sigma | \exists n \in \mathbb{N} \ \sigma : \{1, ..., n\} \to X\}$ l'insieme delle sequenze finite di elementi di X.
Proposizione 4.11
$|FSeq^{\uparrow}(\mathbb{N})| = |FSeq(\mathbb{N})| = |Fin(\mathbb{N})| = \aleph_0$.
Proposizione 4.13
L'insieme $\mathbb{Z}[X]$ dei polinomi a coefficienti interi è numerabile.
Teorema 4.14
L'insieme dei numeri reali algebrici è numerabile.
Teorema 5.1
$|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$.
Teorema 5.2
$|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
Definizione 5.3
Un insieme A ha la cardinalità del continuo se $|A| = |\mathbb{R}|$. In questo caso scriveremo $|A| = \mathfrak{c}$.
Proposizione 5.6
$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.
Proposizione 5.12

ⓘ $A \subset B, |A| \leq \aleph_0 \wedge |B| = \mathfrak{c} \implies |B \setminus A| = \mathfrak{c}$; ⓘⓘ (AC) $A \subset B, |A| < \mathfrak{c} \wedge |B| = \mathfrak{c} \implies |B \setminus A| = \mathfrak{c}$.

Proposizione 5.13

ⓘ L'insieme dei numeri irrazionali ha la cardinalità del continuo; ⓘⓘ l'insieme dei numeri trascendenti ha la cardinalità del continuo.

3 La teoria di Zermelo-Fraenkel

Definizione 1.2
Le formule del linguaggio della teoria degli insiemi, in breve le formule, sono particolari sequenze finite di simboli nelle quali possono comparire, oltre ai simboli logici e alle parentesi "(" e ") ", soltanto il simbolo di uguaglianza "=", e il simbolo di appartenenza "$\in$"; precisamente: i se x e y sono variabili, $x = y, x \in y$ sono formule, le variabili x e y si dicono variabili libere in quelle formule; ii se φ è una formula, anche $\neg(\varphi)$ è una formula che ha le stesse variabili libere di φ; iii se $\varphi \wedge \psi$ sono formule, allora anche $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sono formule, le cui variabili libere sono quelle di φ più quelle di ψ; iv se x è una variabile libera della formula φ, allora anche $\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$ sono formule, le cui variabili libere sono quelle di φ tranne x, in questo caso x si dice variabile legata; v ogni formula si ottiene applicando un numero finito di volte le procedure indicate sopra. Si dice enunciato una formula senza variabili libere, cioè una formula dove tutte le variabili sono legate.
Assioma 2: insieme vuoto
$\exists x$ "$x = \emptyset$".
Assioma 3: coppia
$\forall a \forall b \exists X$ "$X = \{a, b\}$".
Proposizione 2.1
$\forall a, b$ insieme $\exists!$ $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ insieme.
Assioma 4: unione
$\forall \mathcal{F} \exists X$ "$X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$".
Proposizione 2.2
$\forall A, B$ insieme $\exists A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$ insieme.
Assioma 5: separazione
Sia $\varphi(x, x_1, ..., x_n)$ una formula dove $x, x_1, ..., x_n$ sono tutte e sole le variabili libere. Allora il seguente è un assioma: $\forall A_1 ... \forall A_n \forall X \exists B$ "$B = \{x \in X | \varphi(x, A_1, ..., A_n)\}$".
Proposizione 2.3
$\forall A, B$ insiemi, esistono gli insiemi: i $A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$; ii $A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.
Assioma 6: potenza
$\forall A \exists X$ "$X = \mathcal{P}(A)$". Ricordiamo che "$X = \mathcal{P}(A)$" indica la formula $\forall x((x \in X) \leftrightarrow$ "$(x \subseteq A)$") dove, a sua volta, "$x \subseteq A$" è una abbreviazione di $\forall y((y \in x) \rightarrow (y \in A))$.
Proposizione 2.8
$\forall A \forall B, \exists A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.
Proposizione 2.10
i Non esistono insiemi R tali che $R = \{x | x \notin x\}$; ii non esistono insiemi V tali che $V = \{x | x = x\}$.
Assioma 7: scelta
$\forall \mathcal{F} \exists f(f$ funzione $\wedge \forall F \in \mathcal{F}(F \neq \emptyset \rightarrow f(F) \in F))$.
Notazione 3.1
$\forall x$, denotiamo $\hat{x} = x \cup \{x\}$.
Definizione 3.2

Un insieme X si dice induttivo se soddisfa le proprietà: i $\emptyset \in X$; ii $\forall x(x \in X \rightarrow \hat{x} \in X)$.
Assioma 8: infinito
$\exists X$ "X induttivo".
Definizione 3.3
n si dice numero naturale se appartiene a tutti gli insiemi induttivi X.
Proposizione 3.4
$\exists! \omega$ insieme i cui elementi sono tutti e soli i numeri naturali: $\omega = \{n |$ "n è un numero naturale"$\}$; inoltre tale ω è esso stesso induttivo, e dunque è il "più piccolo" insieme induttivo.
Notazione 3.5
i ω denota l'insieme dei numeri naturali garantito dalla proposizione di sopra (dove $0 \in \omega$); ii $\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\} = \{1, 2, ...\}$ denota l'insieme dei naturali diversi da zero.
Teorema 3.6 (Principio di induzione)
Sia $P(x, y_1, ..., y_k)$ una formula, dove $x, y_1, ..., y_k$ sono tutte e sole le sue variabili libere, $A_1, ..., A_k$ insiemi fissati (parametri), e supponiamo che valgano le due condizioni: i base induttiva, $P(0, A_1, ..., A_k)$; ii passo induttivo, $\forall n \in \omega,\ P(n, A_1, ..., A_k) \implies P(\hat{n}, A_1, ..., A_k)$. Allora $P(n, A_1, ..., A_k)$ vale $\forall n \in \omega$.
Proposizione 3.7
i Sia $x \in \omega, x \neq 0$, allora $0 \in x$. ii siano $x, y \in \omega$ allora $x \in y \implies \hat{x} \in \hat{y}$.
Teorema 3.9
La relazione di appartenenza $\in$ è una relazione di ordine lineare stretto su ω, infatti valgono: i antiriflessività, $\forall x \in \omega\ (x \notin x)$; ii transitività, $\forall x, y, z \in \omega\ (x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z$; iii tricotomia, $\forall x, y \in \omega$, vale una ed una sola delle seguenti: $x \in y, x = y, y \in x$.
Proposizione 3.10
$\hat{n}$ è il successore di $n \in \omega$ nell'insieme ordinato $(\omega, \in)$, cioè $\hat{n}$ è il più piccolo dei naturali maggiori di n.
Notazione 3.11
Sia $n \in \omega$, denotiamo $\hat{n} = n + 1$.
Proposizione 3.12
La funzione "successore" $S : n \mapsto n + 1$ è una bigezione tra ω e $\omega \setminus \{0\}$.
Teorema 3.14
Sia $(N, <)$ un insieme totalmente ordinato avente un elemento minimo 0, allora le seguenti proprietà sono equivalenti: i buon ordinamento, ogni sottoinsieme non vuoto $X \subseteq N$ ha minimo; ii induzione forte, sia $P(x)$ una proprietà e supponiamo 1a $P(0)$, 2a $\forall x \neq 0, x \in N$, vale l'implicazione $(\forall y < x\ P(y)) \rightarrow P(x)$. Allora $\forall x \in N\ P(x)$. Se inoltre ogni elemento $x \in N$ ha un successore $x+1$ e tutti gli $x \neq 0$ sono successori, vale anche l'equivalenza con: iii induzione, sia $P(x)$ una proprietà. supponiamo: 1b $P(0)$, 2b $\forall x \in N$, vale l'implicazione $P(x) \rightarrow P(x + 1)$. Allora $\forall x \in N\ P(x)$.
Teorema 4.1 (Ricorsione Numerabile)

Sia A insieme, $a \in A$, $g : \omega \times A \to A$ funzione, allora $\exists! f : \omega \to A$ successione tale che $\begin{cases} f(0) = a \\ f(n+1) = g(n, f(n)) \end{cases}$.

Definizione 4.3

Due funzioni $\varphi \wedge \psi$ sono compatibili se assumono gli stessi valori sull'intersezione dei rispettivi domini: $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}\ \forall x \in \mathrm{dom}(\varphi) \cap \mathrm{dom}(\psi)\ \ \varphi(x) = \psi(x)$.

Teorema 4.5 (Ricorsione Numerabile II)

$\forall A$ insieme, $\forall a \in A, \forall g : \omega \times FSeq(A) \to A$ funzione, $\exists! f : \omega \to A$ funzione tale che: $\begin{cases} f(0) = a \\ f(n+1) = g(n, f_{|n+1}) \end{cases}$.

Teorema 4.6 (Cantor-Bernstein)

Siano X, Y insiemi, allora $|X| \le |Y| \wedge |Y| \le |X| \implies |X| = |Y|$.

Lemma 4.7

Siano $A \supseteq B \supseteq C$ con $|A| = |C|$, allora $|A| = |B| = |C|$.

4

Proposizione 1.2
Se $|B| = |n|$ è un insieme finito, e $A \subset B$ un suo sottoinsieme proprio, allora $|A| = |m|$ per un opportuno $m < n$.
Corollario 1.3
(i) Sottoinsiemi di insiemi finiti sono insiemi finiti; (ii) soprainsiemi di insiemi infiniti sono insiemi infiniti.
Proposizione 1.4 (principio dei cassetti)
Siano n, m numeri naturali. Se $n > m$ allora $\nexists f : n \to m$ funzione iniettiva. Equivalentemente, $|n| \leq |m| \implies n \leq m$.
Proposizione 1.5
Due numeri naturali diversi non sono equipotenti.
Corollario 1.6
Se A è un insieme finito e $B \subset A$ è un suo sottoinsieme proprio, allora $|A| \neq |B|$.
Definizione 1.8
Si dice cardinalità di un insieme finito A quell'unico numero naturale n tale che $|A| = |n|$. In tal caso scriviamo direttamente $|A| = n$.
Definizione 1.9
Un insieme A si dice Dedekind-infinito se è equipotente ad una sua parte propria, e si dice Dedekind-finito se non è Dedekind-infinito.
Proposizione 1.10
Se A è Dedekind-infinito allora A è infinito. Inoltre, assumendo (AC), vale anche il viceversa.
Proposizione 1.11
L'insieme ω dei numeri naturali è infinito.
Definizione 2.1
Siano $n, m \in \omega$, poniamo: (i) $n + m = |A \cup B|$ dove $|A| = n \wedge |B| = m$, e $A \cap B = \emptyset$; (ii) $n \cdot m = |A \times B|$ dove $|A| = n \wedge |B| = m$.
Definizione 2.2
$\forall k \neq 0$, la funzione esponenziale con base k è definita ponendo: $\begin{cases} k^0 = 1 \\ k^{n+1} = k^n \cdot k \end{cases}$.
Definizione 2.5
Una struttura $(N, 0, S, +, \cdot)$ dove: (i) N è un insieme; (ii) $0 \in N$ è un elemento fissato di N; (iii) $S : N \to N$ è una funzione, detta funzione successore; (iv) $+ : N \times N \to N$ è una funzione binaria, detta somma; (v) $\cdot : N \times N \to N$ una funzione binaria, detta prodotto. Tale struttura viene detta sistema di numeri naturali se soddisfa gli assiomi di Peano.
(PA1)
Tutti e soli i numeri diversi da zero sono successori, $\forall x\ (x \neq 0) \leftrightarrow (\exists y\ S(y) = x)$.
(PA2)
La funzione successore è iniettiva, $\forall x, y\ (x \neq y) \to (S(x) \neq S(y))$.
(PA3)
La somma + soddisfa le seguenti proprietà: (s1) $\forall x\ x + 0 = x$; (s2) $\forall x, y\ (x + S(y) = S(x + y))$.

(PA4)
Il prodotto $\cdot$ soddisfa le seguenti proprietà: p1 $\forall x\ x \cdot 0 = 0$; p2 $\forall x, y\ (x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x)$.
(PA5)$_2$
Principio di induzione del secondo ordine: sia A un sottoinsieme di N; se $0 \in A$ ed A è chiuso per successore, cioè $\forall x\ (x \in A) \to (S(x) \in A)$, allora $A = N$.
(PA5)
Principio di induzione del primo ordine: Ssia $P(x)$ una proprietà espressa come formula nel linguaggio dell'aritmetica di Peano, allora il seguente è un assioma: $(P(0) \wedge (\forall x\ P(x) \to P(S(x)))) \to \forall x\ P(x)$.
Proposizione 2.6
La seguente proprietà è un teorema di PA: $\forall x, y, z \quad x + y = y + x$.
Teorema 2.9
La struttura $(\omega, 0, S, +, \cdot)$ dove la funzione successore è definita da $S(n) = \hat{n} = n + 1$; e le operazioni di somma e prodotto sono quelle della definizione 2.1 (sistema dei naturali), soddisfa tutti gli assiomi dell'aritmetica di Peano al secondo ordine PA$_2$.
Teorema 2.10 (unicità del sistema dei numeri naturali)
Ogni sistema $(N, 0', S', \oplus, \odot)$ che soddisfa gli assiomi di Peano PA$_2$ al secondo ordine è isomorfo a $(\omega, 0, S, +, \cdot)$, cioè esiste una funzione biunivoca $\Theta : \omega \to N$ tale che: i $\Theta(0) = 0'$; ii $\forall n \in \omega \quad \Theta(S(n)) = S'(\Theta(n))$; iii $\forall n, m \in \omega \quad \Theta(n + m) = \Theta(n) \oplus \Theta(m)$; iv $\forall n, m \in \omega \quad \Theta(n \cdot m) = \Theta(n) \odot \Theta(m)$.
Definizione 3.1
Il sistema $(\mathbb{Z}, \leq, 0, +, \cdot)$ dei numeri interi è il sistema dove: i $\mathbb{Z}$ è l'insieme quoziente $(\omega \times \omega)/ \sim$; ii 0 è la classe di equivalenza $[(0, 0)]$; iii $[(a, b)] \leq [(c, d)] \iff a + d \leq b + c$; iv la somma tra elementi di $\mathbb{Z}$ è definita ponendo $[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$; v il prodotto tra elementi di $\mathbb{Z}$ è definito ponendo $[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)]$.
Teorema 3.3
Il sistema dei numeri interi $(\mathbb{Z}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ è un anello ordinato discreto, la cui parte non-negativa è il sistema dei numeri naturali.
Definizione 3.6
Il sistema $(\mathbb{Q}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ dei numeri razionali è il sistema dove: i $\mathbb{Q}$ è l'insieme quoziente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/ \approx$; ii 0 è la classe di equivalenza $[(0, 1)]$; iii 1 è la classe di equivalenza $[(1, 1)]$; iv $[(a, b)] \leq [(c, d)] \iff a \cdot d \leq b \cdot c$; v la somma tra elementi di $\mathbb{Q}$ è definita ponendo $[(a, b)] + [(c, d)] = [(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)]$; vi il prodotto tra elementi di $\mathbb{Q}$ è definito ponendo $[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)]$.
Teorema 3.7
Il sistema dei numeri razionali $(\mathbb{Q}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ è un campo ordinato; inoltre: i $\mathbb{Q}$ è denso, cioè $\forall q_1, q_2,\ q_1 < q_2\ \exists q$ tale che $q_1 < q < q_2$; ii $\mathbb{Q}$ gode della "proprietà archimedea", cioè $\forall q_1, q_2,\ 0 < q_1 < q_2\ \exists n \in N$ con $q_1 \cdot n > q_2$.
Definizione 4.1
Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{Q}$ si dice taglio di Dedekind se: i X è non banale, cioè $X \neq \emptyset$ e $X \neq \mathbb{Q}$; ii X è un segmento iniziale, cioè $\forall x \in X, x' < x \implies x' \in X$; iii X non ha massimo.

Teorema 4.5
(i) Per $X, Y \in \mathbb{R}$, poniamo $X \leq Y$ quando $X \subseteq Y$, allora $(\mathbb{R}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato; (ii) $\forall q, q' \in \mathbb{Q}$ si ha $q \leq q' \iff \mathbb{Q}_q \leq \mathbb{Q}_{q'}$, dunque, vista l'identificazione di ogni $q \in \mathbb{Q}$ con il corrispondente taglio di Dedekind $\mathbb{Q}_q \in \mathbb{R}, (\mathbb{Q}, \leq)$ è un sottoinsieme ordinato di $(\mathbb{R}, \leq)$; (iii) $\mathbb{Q}$ è denso in $(\mathbb{R}, \leq)$, cioè $\forall X, Y \in R,\ X < Y\ \exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $X < q < Y$; (iv) $(\mathbb{R}, \leq)$ è completo, cioè ogni sottoinsieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ che sia superiormente limitato, ammette estremo superiore: $\sup A = \min\{x \in R | x > a\ \forall a \in A\}$.
Definizione 4.12
Il sistema dei numeri reali è il sistema $(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ dove: (i) $\mathbb{R} = \{X \subset \mathbb{Q} | X$ è un taglio di Dedekind$\}$; (ii) $X \leq Y \iff X \subseteq Y$; (iii) ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ è identificato con il corrispondente taglio $X_q = \{q' \in \mathbb{Q} | q' < q\}$, in particolare $0 = X_0$ e $1 = X_1$; (iv) la somma e il prodotto tra tagli sono definiti come $X + Y = \{x + y | (x \in X) \wedge (y \in Y)\}, -X = \{q \in \mathbb{Q} | -q \notin X\}, X \cdot Y = \{x \cdot y | (x \in X^+) \wedge (y \in Y^+)\} \cup \{q \in \mathbb{Q} | q \leq 0\}, 1/X = \{1/q | q \notin X\}$.
Teorema 4.13
Il sistema dei numeri reali $(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ è un campo ordinato completo.
Teorema 4.14 (unicità dei reali)
Ogni campo ordinato completo è isomorfo al sistema dei numeri reali $(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$.
Proposizione 4.15
Sia F un campo ordinato qualunque, allora le seguenti condizioni sono equivalenti: (i) F soddisfa la proprietà archimedea: "sia $x > 0$, allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot \varepsilon > x$"; (ii) $\mathbb{Q}$ è denso in F; (iii) non esistono infinitesimi $\delta \neq 0$, cioè elementi $\delta \neq 0$ tali che $-1/n < \delta < 1/n\ \forall n \in \mathbb{N}^+$; (iv) $\mathbb{N}$ è illimitato in F, cioè $\forall x \in F\ \exists n \in \mathbb{N}$ con $x < n$. Inoltre, quando F è completo, tutte le condizioni di sopra sono verificate.
Definizione 4.18
Il sistema $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ dei numeri complessi è il sistema dove: (i) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali; (ii) 0 è la coppia $(0, 0)$ e 1 è la coppia $(1, 0)$; (iii) la somma è definita ponendo: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; (iv) il prodotto è definito ponendo: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
Teorema 4.19
Il sistema dei numeri complessi $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ è la chiusura algebrica del campo dei numeri reali.

5 Buoni ordini e ordinali

Definizione 1.2
Sia $(A,<)$ un insieme bene ordinato, $a \in A$. Se a non è il massimo di A, il successore di a è l'elemento $a^+ = \min\{a' \in A | a' > a\}$.
Proposizione 1.4
Sia $(A,<)$ un insieme ordinato, allora $\forall X \subseteq A,\ X \neq \emptyset$ sottoinsieme finito ammette massimo e minimo.
Corollario 1.5
Sia $(A,<)$ insieme ordinato dove il supporto A è finito allora $(A,<)$ bene ordinato.
Corollario 1.7
Due insiemi ordinati $(A,<),(B,<)$ tali che i loro supporti sono insiemi finiti equipotenti allora $(A,<) \cong (B,<)$.
Proposizione 1.6
Sia $(A,<)$ un insieme ordinato finito, allora $(A,<) \cong (n,\in)$ dove $n = |A|$.
Proposizione 1.8. (AC)
Un insieme ordinato $(A,<)$ è bene ordinato se e solo se non esistono catene discendenti $a_0 > a_1 > ... > a_n > a_{n+1} > ...$.
Definizione 1.9
Un sottoinsieme S di un insieme ordinato A si dice segmento iniziale se è "chiuso verso il basso", cioè se $x < s \in S \implies x \in S$. Il segmento iniziale generato da un elemento $a \in A$ è il segmento $A_a = \{x \in A | x < a\}$.
Proposizione 1.10
Un insieme ordinato $(A,<)$ è bene ordinato se e solo se ogni segmento iniziale $S \neq A$ è generato da un elemento $a \in A$, cioè $S = A_a$ per un opportuno $a \in A$.
Proposizione 1.13
Sia $\mathcal{F}$ una catena di insiemi bene ordinati, se gli elementi di $\mathcal{F}$ sono uno segmento iniziale dell'altro, cioè se $\forall (A,<_A),(B,<_B) \in \mathcal{F}$, si ha che $(A,<_A)$ è un segmento iniziale di $(B,<_B)$ o viceversa, allora l'unione è un insieme bene ordinato.
Proposizione 1.14
Sia $(A,<)$ un insieme bene ordinato, se $\varphi : A \to A$ preserva l'ordine, cioè "se $a < a' \implies \varphi(a) < \varphi(a')$", allora φ è non decrescente, cioè "$\varphi(a) \geq a\ \forall a \in A$".
Proposizione 1.15
Sia $(A,<)$ un insieme bene ordinato, allora: i A non è isomorfo ad alcun suo segmento iniziale proprio, cioè $A_a \ncong A\ \forall a \in A$; ii segmenti iniziali propri diversi non sono isomorfi, cioè $a \neq a' \implies A_a \ncong A_{a'}$; iii l'unico automorfismo $\varphi : A \to A$ è l'identità.
Proposizione 1.17
Sia $\varphi : (A,<) \to (B,<)$ un isomorfismo tra insiemi ordinati. Allora $\forall a \in A$, la restrizione $\varphi_{|A_a} : A_a \to B_{\varphi(a)}$ è un isomorfismo tra il segmento iniziale di A generato da a, e il segmento iniziale di B generato da $\varphi(a)$.
Teorema 1.18 (tricotomia degli insiemi bene ordinati)

Siano $(A,<),(B,<)$ insiemi bene ordinati. Allora vale una ed una sola delle seguenti tre possibilità: i $A \cong B$; ii $A \cong B_b$ per un opportuno $b \in B$; iii $B \cong A_a$ per un opportuno $a \in A$.

Notazione 1.19

Siano A, B insiemi bene ordinati, dunque scriviamo: i $\mathrm{ot}(A) = \mathrm{ot}(B)$ quando $A \cong B$; ii $\mathrm{ot}(A) < \mathrm{ot}(B)$ quando $A \cong B_b$ per qualche $b \in B$; iii $\mathrm{ot}(A) \leq \mathrm{ot}(B)$ quando $\mathrm{ot}(A) = \mathrm{ot}(B)$ oppure $\mathrm{ot}(A) < \mathrm{ot}(B)$.

Proposizione 1.20

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi bene ordinati, allora $\exists A \in \mathcal{F}$ che ha tipo d'ordine minimo, cioè tale che $\mathrm{ot}(A) \leq \mathrm{ot}(B)\ \forall B \in \mathcal{F}$.

Proposizione 1.21

Sia A bene ordinato, $B \subseteq A \implies \mathrm{ot}(B) \leq \mathrm{ot}(A)$.

Proposizione 1.23

$\mathrm{ot}(\omega)$ è il più piccolo tipo di buon ordine infinito.

Definizione 2.1

L'unione disgiunta $A \sqcup B$ di due insiemi A, B è definita ponendo $A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) = \{(a,0)|a \in A\} \cup \{(b,1)|b \in B\}$.

Definizione 2.2

La somma $A + B$ di due insiemi ordinati $(A,<_A),(B,<_B)$ è l'insieme ordinato $(A \sqcup B, <)$ dove l'ordine è definito ponendo: i $(a,0) < (a',0) \iff a <_A a'\ \forall a, a' \in A$; ii $(b,1) < (b',1) \iff b <_B b'\ \forall b, b' \in B$; iii $(a,0) < (b,1)\ \forall a \in A, b \in B$.

Proposizione 2.3

Siano A, B insiemi ordinati. Allora $A + B$ è bene ordinato se e solo se sia A che B sono bene ordinati.

Proposizione 2.9

Sia A un insieme bene ordinato e sia $\{\star\}$ un singoletto. Allora $\mathrm{ot}(A + \{\star\})$ è il più piccolo tra i tipi d'ordine maggiori di $\mathrm{ot}(A)$.

Notazione 2.10

$\forall (A,<)$ insieme bene ordinato, denotiamo con $\mathrm{ot}(A) + 1 = \mathrm{ot}(A + \{\star\})$ il tipo di buon ordine successore di $\mathrm{ot}(A)$.

Definizione 2.11

Il prodotto $A \times B$ di due insiemi ordinati $(A,<_A),(B,<_B)$ è l'insieme ordinato $(A \times B, <)$ con l'ordine anti-lessicografico: $(a,b) < (a',b') \iff b < b' \vee (b = b' \wedge a < a')$.

Proposizione 2.13

$A \times B$ è ben ordinato se e solo se sia A che B sono bene ordinati.

Proposizione 2.18)

Vale la proprietà distributiva a destra per tipi d'ordine: $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$.

Notazione 2.20

Siano X, Y insiemi bene ordinati, e sia $0 = \min X$, allora chiameremo: i supporto di una funzione $f : X \to Y$ l'insieme $\mathit{supp}(f) = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$; ii l'insieme di tutte le funzioni da X in Y aventi supporto finito l'insieme $\mathrm{Fun}_0(X,Y) = \{f : X \to Y | \mathit{supp}(f) \text{ è finito}\}$.

Definizione 2.21
L'esponenziale $\mathrm{Exp}(A, B)$ tra due insiemi bene ordinati$(A, <_A), (B, <_B)$ è l'insieme ordinato $(\mathrm{Fun}_0(B, A), <)$ con l'ordine della massima differenza: $f < g \iff f(\tilde{b}) < g(\tilde{b})$ dove $\tilde{b} = \max\{b \in B | f(b) \neq g(b)\}$.
Proposizione 2.22
Sia $B = \{b_1 < ... < b_k\}$ un insieme ordinato finito con k elementi, e sia A bene ordinato. Allora l'esponenziale $\mathrm{Exp}(A, B) \cong \underbrace{A \times ... \times A}_{k \text{ volte}}$.
Proposizione 2.23
Siano A, B due insiemi bene ordinati. Allora il loro esponenziale $\mathrm{Exp}(A, B)$ è un insieme bene ordinato.
Definizione 3.1
Un insieme A si dice transitivo se $a' \in a \in A \implies a' \in A$; equivalentemente, se $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.
Definizione 3.3
Un insieme α è un ordinale se: i $(\alpha, \in)$ è un insieme bene ordinato dalla relazione di appartenenza; ii α è un insieme transitivo.
Proposizione 3.5
Non esistono catene discendenti di ordinali: $\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni ... \ni \alpha_n \ni \alpha_{n+1} \ni ...$.
Proposizione 3.6
Sia $(\alpha, \in)$ un insieme bene ordinato dalla relazione di appartenenza. Allora sono proprietà equivalenti: i α è un insieme transitivo; ii $\forall a \in \alpha$, il segmento iniziale generato da a coincide con a stesso, cioè: $\alpha_a = \{a' \in \alpha | a' < a\} = a$. In particolare, se α è un ordinale allora $\alpha_a = a \ \forall a \in \alpha$.
Proposizione 3.7
Se α è un ordinale e $\beta \in \alpha$, allora anche β è un ordinale.
Proposizione 3.8
Sia $\{\alpha_i | i \in I\}$ una famiglia non vuota di ordinali. Allora anche $\bigcap_{i \in I} \alpha_i$ è un ordinale.
Proposizione 3.9
Siano α, β ordinali. Sono proprietà equivalenti: i $\alpha \in \beta$; ii α è un segmento iniziale proprio di β; iii $\alpha \subsetneq \beta$.
Proposizione 3.10
Siano α, β ordinali; $\alpha \cong \beta \implies \alpha = \beta$.
Teorema 3.11 (tricotomia degli ordinali)
Siano α, β due ordinali; allora vale una ed una sola delle seguenti: i $\alpha = \beta$; ii $\alpha \in \beta$; iii $\beta \in \alpha$.
Teorema 3.12
La relazione di appartenenza $\in$ soddisfa tutte le proprietà di ordine totale sulla collezione degli ordinali, ovvero $\forall \alpha, \beta, \gamma$ ordinali: i irriflessiva, $\alpha \notin \alpha$; ii asimmetrica, $\alpha \in \beta \implies \beta \notin \alpha$; iii transitiva, $(\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma) \implies \alpha \in \gamma$; iv ordine totale, vale una ed una sola delle seguenti: $\alpha \in \beta, \alpha = \beta, \beta \in \alpha$.
Proposizione 3.13
Se α è un ordinale, allora anche $\alpha \cup \{\alpha\}$ è un ordinale, e il suo tipo d'ordine è il più piccolo tipo di buon ordine tra quelli maggiori di α.
Proposizione 3.15

Sia X un insieme non vuoto di ordinali. Allora l'intersezione $\xi = \bigcap X$ è l'elemento minimo di X rispetto alla relazione di appartenenza.
Corollario 3.16
Sia Λ un insieme di ordinali. Allora $(\Lambda, \in)$ è un insieme bene ordinato.
Proposizione 3.18
Sia X un insieme di ordinali, X è ordinale $\iff$ X è transitivo.
Proposizione 3.19 (paradosso Burali-Forti)
La collezione $ORD = \{\alpha | \text{"}\alpha \text{ è un ordinale"}\}$ non è un insieme.
Teorema 3.20
Ogni insieme bene ordinato è isomorfo ad un unico ordinale.
Proposizione 3.21
Un ordinale α ha massimo $\iff$ $\exists \beta$ ordinale tale che $\alpha = \beta + 1$.
Definizione 3.22
Un ordinale $\alpha \neq 0$ si dice successore se ha massimo (cioè se è della forma $\alpha = \beta + 1$), altrimenti chiameremo tale α limite.
Proposizione 3.23
Un ordinale λ è limite se e solo se $\bigcup \lambda = \lambda$.
Proposizione 3.24
Sia X un insieme non vuoto di ordinali, allora $\eta = \bigcup X$ è un ordinale, e vale $\eta = \sup X$.
Teorema 3.25 (Induzione Transfinita)
ⓘ Induzione forte, sia $P(X)$ una formula, eventualmente con parametri. supponiamo che $\forall \beta$ ordinale valga l'implicazione $(\forall \gamma < \beta \; P(\gamma)) \to P(\beta)$; allora $\forall \alpha$ ordinale vale $P(\alpha)$; ⓘⓘ induzione per casi, Sia $P(x)$ una formula, eventualmente con parametri, supponiamo che valgano ① $P(0)$, ② $\forall \beta$ ordinale, vale implicazione $P(\beta) \to P(\beta + 1)$, ③ $\forall \lambda$ ordinale limite, vale l'implicazione $(\forall \gamma < \lambda \; P(\gamma)) \to P(\lambda)$; allora $\forall \alpha$ ordinale vale $P(\alpha)$.

6 Classi, rimpiazzamento, ricorsione transfinita

Definizione 1.1 (Meta-definizione in ZFC)
Una classe $\boldsymbol{C}$ è l'estensione di una formula $\varphi(x)$, eventualmente con parametri; cioè, $\boldsymbol{C}$ è la collezione di tutti gli insiemi x che soddisfano $\varphi(x)$. In questo caso, con abuso di notazione, scriviamo: $\boldsymbol{C} = \{x|\varphi(x)\}$.
Definizione 2.1
La formula $\varphi(x, y, a_1, ..., a_k)$ con parametri gli insiemi $a_1, ..., a_k$ si dice formula funzionale rispetto alle variabili x e y se vale: $\forall x \forall y \forall y'(\varphi(x, y, a_1, ..., a_k) \wedge \varphi(x, y', a_1, ..., a_k)) \rightarrow y = y'$.
Definizione 2.2
Se una classe di coppie ordinate $\boldsymbol{F} = \{(x, y)|\varphi(x, y)\}$ è definita da una formula funzionale $\varphi(x, y)$ rispetto alle variabili x e y, allora $\boldsymbol{F}$ si dice funzione-classe. Il dominio e l'immagine di $\boldsymbol{F}$ sono rispettivamente le classi: i dom$(\boldsymbol{F}) := \{x|\exists y\ \varphi(x, y)\}$; ii Imm$(\boldsymbol{F}) := \{y|\exists x\ \varphi(x, y)\}$.
Assioma 9: schema di Rimpiazzamento
$\forall\varphi(x, y, z_1, ..., z_k)$ formula, il seguente è un assioma: $\forall A_1 ... \forall A_k$ "$\varphi(x, y, A_1, ..., A_k)$ funzionale in x e y" $\rightarrow \forall B\ \exists C$ "$C = \{y|\exists x \in B\ \varphi(x, y, A_1, ..., A_k)\}$".
Definizione 2.3
Sia $\boldsymbol{F}$ una funzione-classe, $\forall \boldsymbol{A} \subseteq$ dom$(\boldsymbol{F})$ classe, la restrizione $\boldsymbol{F}_{|\boldsymbol{A}}$ è la funzione-classe tale che dom$(\boldsymbol{F}_{|\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{A}$ e $(\boldsymbol{F}_{|\boldsymbol{A}})(x) = \boldsymbol{F}(x)\ \forall x \in \boldsymbol{A}$. Più precisamente, se $\boldsymbol{F}$ è determinata dalla formula funzionale $\varphi(x, y)$ e se $\boldsymbol{A} = \{z|\psi(z)\}$, allora $\boldsymbol{F}_{|\boldsymbol{A}} = \{(x, y)|\psi(x) \wedge \varphi(x, y)\}$.
Teorema 2.4 (Meta-teorema di ZFC)
Lo schema di rimpiazzamento è equivalente alla seguente proprietà: se $\boldsymbol{F}$ è una funzione-classe e $A \subseteq$ dom$(\boldsymbol{F})$ è un insieme, allora la restrizione $\boldsymbol{F}_{|A}$ è un insieme (ed è una funzione).
Definizione 3.1
Una classe A si dice insieme se $\exists B$ classe tale che $A \in B$. Una classe che non è un insieme si dice classe propria.
Notazione 3.2
i Scriviamo "x è un insieme" per intendere la formula "$\exists y\ x \in y$"; ii scriviamo "$\forall^{\mathcal{I}} x\ \varphi(x)$" per intendere "$\forall x$("$x$ insieme"$\rightarrow \varphi(x)$)", ovvero, "$\forall x(\exists y\ x \in y) \rightarrow \varphi(x)$"; iii scriviamo "$\exists^{\mathcal{I}} x\ \varphi(x)$" per intendere "$\exists x$("$x$ insieme" $\wedge\varphi(x)$)", ovvero, "$\exists x(\exists y\ x \in y) \wedge \varphi(x)$".
Definizione 3.3
Una formula φ si dice predicativa se tutti i suoi quantificatori sono ristretti ad insiemi, cioè compaiono sempre nella forma "$\forall^{\mathcal{I}} x$..." oppure "$\exists^{\mathcal{I}} x$...".
NGB 2: Comprensione (o Astrazione)
Se $\varphi(x, x_1, ..., x_n)$ una formula predicativa dove $x, x_1, ..., x_n$ sono tutte e sole le variabili libere, allora il seguente è un assioma: $\forall A_1, ..., A_n\ \exists C\ \forall x\ (x \in C \leftrightarrow$ ("x è un insieme"$\wedge\varphi(x, A_1, ..., A_n)))$.
NGB 3: rimpiazzamento
Se F è una funzione e $a \subseteq$ dom(F) è un insieme, allora anche l'immagine $F[a] := \{F(x)|x \in a\}$ è un insieme: $\forall F \forall^{\mathcal{I}} a$("$F$ funzione"$\rightarrow (\exists^{\mathcal{I}} x b$"$b = F[a]$")).
NGB 4: Assiomi ZFC ristretti ad insiemi

(i) Insieme vuoto, $\exists^{\mathcal{I}} x \forall y \; y \notin x$; (ii) coppia, $\forall^{\mathcal{I}} x \forall^{\mathcal{I}} y \exists^{\mathcal{I}} z$"$z = \{x, y\}$"; (iii) unione, $\forall^{\mathcal{I}} x \exists^{\mathcal{I}} x$"$y = \bigcup x$"; (iv) insieme potenza, $\forall^{\mathcal{I}} x \exists^{\mathcal{I}} y$"$y = \mathcal{P}(X)$"; (v) infinito, $\exists^{\mathcal{I}} x$ "x induttivo "; (vi) scelta, $\forall^{\mathcal{I}} \mathcal{F} \exists^{\mathcal{I}} f($"$f$ funzione" $\wedge \forall F \in \mathcal{F}(F \neq \emptyset \to f(F) \in F))$.

Teorema 3.6 (NGB)
Vale la proprietà dell'intersezione: se C è una classe e b è un insieme, allora anche $C \cap b$ è un insieme, $\forall C \forall^{\mathcal{I}} \exists^{\mathcal{I}} a \forall x (x \in a \leftrightarrow (x \in C \wedge x \in b)))$.

Teorema 3.7 (NGB)
Vale lo schema di rimpiazzamento di ZFC.

Teorema 4.1 (NGB - ricorsione transfinita su un ordinale)
Sia $G : V \to V$ una funzione definita per tutti gli insiemi, $\implies \forall \alpha$ ordinale $\exists! f$ funzione tale che $\mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge \forall \gamma \in \alpha \; f(\gamma) = G(f_{|\gamma})$.

Definizione 4.2
Si dice chiusura transitiva di un insieme A l'insieme $TC(A) = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, dove si pone per ricorsione su ω : $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = \bigcup A_n = \{y | \exists x \in A_n \; y \in x\} \end{cases}$.

Proposizione 4.3
La chiusura transitiva di un insieme è il più piccolo insieme transitivo che lo include.

Teorema 4.4 (NGB - ricorsione transfinita su ORD)
Sia $G : V \to V$ una funzione definita per tutti gli insiemi $\implies \exists! F : ORD \to V$ funzione tale che $\forall \gamma$ ordinale $f(\gamma) = G(f_{|\gamma})$.

Teorema 4.5 (NGB - ricorsione transfinita su ORD, formulazione per casi)
Sia A un insieme, e siano $G_1, G_2 : V \to V$ due funzioni $\implies \exists! F : ORD \to V$ funzione tale che: $\begin{cases} F(0) = A; \\ F(\beta + 1) = G_1(\beta, F(\beta)); \\ F(\lambda) = G_2(\lambda, F_{|\lambda}) \text{ se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$.

7 Algebra ordinale

Definizione 1.1
$\forall \alpha$ ordinale fissato, per ricorsione transfinita su β poniamo (per l'esponenziale vogliamo $\alpha \geq 1$):
$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha + \beta \text{ se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha \cdot \beta \text{ se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha^0 = 1 \\ \alpha^{\beta+1} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha^\beta \text{ se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$.
Proposizione 1.2
Siano α, β ordinali, allora: i l'insieme bene ordinato $\alpha \boldsymbol{+} \beta$ è isomorfo alla somma ordinale $\alpha + \beta$; ii l'insieme bene ordinato $\alpha \boldsymbol{\times} \beta$ è isomorfo al prodotto ordinale $\alpha \cdot \beta$.
Proposizione 1.5
Siano α, β, γ ordinali, allora: i $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$; ii $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$; iii $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
Proposizione 1.7
Siano $\alpha, \beta \neq 0$ ordinali, allora: i $\alpha + \beta$ è successore $\iff$ β è successore; ii $\alpha \cdot \beta$ è successore $\iff$ $\alpha \wedge \beta$ sono successori; iii Sia $\alpha \geq 2$, α^β è successore $\iff$ $\beta \in \omega$.
Teorema 1.8 (sottrazione a destra)
$\alpha < \beta \implies \exists! \gamma > 0$ tale che $\alpha + \gamma = \beta$.
Proposizione 1.9
Siano α, β, γ ordinali, allora: i $\alpha \leq \beta \implies \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$; ii $\alpha < \beta \implies \gamma + \alpha < \gamma + \beta$; iii $\alpha \leq \beta \implies \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$; iv $\alpha < \beta \wedge \gamma \geq 1 \implies \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.
Teorema 1.11 (divisione euclidea)
$\forall \alpha \forall \beta \neq 0 \exists! \gamma, \rho,\ \rho < \beta$ tali che $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho$.
Proposizione 1.16
Siano α, β, γ ordinali con $\alpha \geq 1$, allora: i $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$; ii $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.
Proposizione 1.17
$\forall \alpha \neq 0$ ordinale $\exists! \delta$ tale che $\omega^\delta \leq \alpha < \omega^{\delta+1}$.
Teorema 1.19 (forma normale di Cantor)
$\forall \alpha > 0\ \exists! \beta_1 > ... > \beta_k$ ordinali e $n_1, ..., n_k \in \omega \setminus \{0\}$ tali che $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + ... + \omega^{\beta_k} \cdot n_k$.
Proposizione 1.21
$\forall \alpha > 0$ ordinale, le seguenti condizioni sono equivalenti: i α è additivamente chiuso, cioè $\beta, \gamma < \alpha \implies \beta + \gamma < \alpha$; ii α assorbe additivamente a sinistra, cioè $\forall \beta < \alpha,\ \beta + \alpha = \alpha$; iii $\exists \delta$ tale che $\alpha = \omega^\delta$.
Proposizione 1.22
$\forall \alpha$ ordinale infinito, sono equivalenti: i α è moltiplicativamente chiuso, cioè $\beta, \gamma < \alpha \implies \beta \cdot \gamma < \alpha$; ii α assorbe moltiplicativamente a sinistra, cioè $\forall \beta,\ 0 < \beta < \alpha$, si ha $\beta \cdot \alpha = \alpha$; iii $\exists \delta$ tale che $\alpha = \omega^{(\omega^\delta)}$.

8 I cardinali

Definizione 1.1
$\omega_1 = \{\alpha \text{ ordinale } \mid |\alpha| \leq |\omega|\}$.
Proposizione 1.2 (ZF)
ω_1 è il più piccolo degli ordinali non numerabili.
Definizione 2.1
Un cardinale è un ordinale iniziale, cioè un ordinale κ con la proprietà $\forall\alpha < \kappa, |\alpha| \neq |\kappa|$ (e quindi $|\alpha| < |\kappa|$).
Proposizione 2.3
Ogni cardinale infinito è un ordinale limite.
Proposizione 2.4
Ogni ordinale è in bigezione con un unico cardinale.
Proposizione 2.5
Sia $\mathcal{K}$ un insieme non vuoto di cardinali, allora: ⓘ l'unione $\bigcup\mathcal{K} = \bigcup_{\kappa\in\mathcal{K}}\kappa = \sup\mathcal{K}$ è un cardinale; ⓘⓘ l'intersezione $\bigcap\mathcal{K} = \bigcap_{\kappa\in\mathcal{K}}\kappa = \min\mathcal{K}$ è un cardinale.
Teorema 3.1 (Pincus 1974)
In ZF non esiste alcuna funzione-classe $\boldsymbol{F}$ definita per tutti gli insiemi che soddisfi le seguenti due proprietà: ⓘ $|\boldsymbol{F}(A)| = |A|$; ⓘⓘ $\boldsymbol{F}(A) = \boldsymbol{F}(B) \iff |A| = |B|$. Esistono invece rappresentanti canonici nelle classi si equipotenza degli insiemi bene ordinabili, cioè di quegli insiemi A per i quali esiste una relazione di buon ordine $\prec$ su A.
Definizione 3.2
$\forall A$ insieme bene ordinabile, la cardinalità di A è l'unico cardinale κ equipotente ad A. In questo caso scriviamo: $\kappa = |A|$.
Definizione 3.4
$\forall A$ insieme, chiameremo $\mathbb{H}(A) = \{\alpha \text{ ordinale } \mid |\alpha| \leq |A|\}$ il suo numero di Hartogs.
Teorema 3.5 (ZF - Hartogs 1915)
$\mathbb{H}(A)$ è un cardinale, ed è il più piccolo ordinale tale che $|\mathbb{H}(A)| \nleq |A|$.
Corollario 3.6
Sia β ordinale, allora $\mathbb{H}(\beta)$ è il più piccolo cardinale maggiore di β.
Definizione 3.8 (sequenza $\aleph$

La sequenza degli alephs è definita per ricorsione transfinita come segue: $\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha) \\ \aleph_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda}\aleph_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$.

Proposizione 3.9
La sequenza degli aleph è una sequenza strettamente crescente di cardinali infiniti.
Lemma 3.10
$\forall\alpha$ ordinale, si ha $\alpha \leq \aleph_\alpha$.
Teorema 3.14
Gli alephs sono tutti e soli i cardinali infiniti.
Teorema 3.15
Ogni insieme infinito bene ordinabile è equipotente ad un unico aleph.

Corollario 3.16 (ZF)
Il Teorema di Zermelo è equivalente alla proprietà: "Ogni insieme infinito è equipotente ad un aleph".
Definizione 3.17
Un cardinale κ si dice successore se esiste il massimo dei cardinali $\mu < \kappa$. Un cardinale $\kappa \neq 0$ si dice limite altrimenti.
Proposizione 3.18
Sia κ un cardinale infinito, allora κ è successore $\iff \kappa = \aleph_\alpha$, dove $\alpha = \beta + 1$ è un ordinale successore; invece κ è limite $\iff \kappa = \aleph_\lambda$, dove λ è un ordinale limite.
Teorema 3.19 (ZF)
$\forall \alpha$ ordinale, $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = |\aleph_\alpha|$.

9 Formulazioni equivalenti dell'assioma di scelta

Lemma di Zorn
Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Se ogni catena ammette maggioranti allora esistono elementi massimali.
Teorema 1.1 (ZF)
"Assioma di scelta" $\implies$ "Lemma di Zorn".
Teorema 1.2 (ZF - Teorema Zermelo)
"Lemma di Zorn" $\implies$ "Ogni insieme è bene ordinabile".
Teorema 1.3 (ZF)
"Ogni insieme è bene ordinabile" $\implies$ "Assioma di scelta".
Teorema 2.1 (ZF)
Le seguenti proprietà sono equivalenti: i proprietà di Zermelo, "ogni insieme è bene ordinabile"; ii Confrontabilità delle cardinalità; iii Idempotenza delle cardinalità infinite.
Teorema 2.2 (ZF - Tarski 1924)
Le seguenti proprietà sono equivalenti: i proprietà di Zermelo; ii $|A \times B| = |A \cup B|$ $\forall A, B$ insiemi infiniti tali che $A \cap B = \emptyset$; iii $|A \times A| = |B \times B| \implies |A| = |B|$ $\forall A, B$ insiemi infiniti; iv $\forall A$ insieme infinito $\exists B$ insieme tale che $|A| = |B \times B|$ (cioè ogni cardinalità infinita ha una radice quadrata).
Teorema 3.1 (ZF)
"Lemma di Zorn" $\implies$ "Confrontabilità delle cardinalità".
Proposizione 3.2 (ZF)
"$\forall A, B$ insiemi $|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$" $\implies$ $\forall X$ infinito si ha $|\mathbb{N}| \leq |X|$.
Proposizione 3.4 (ZF)
Sia X un insieme infinito e supponiamo che $|X \times X| = |X|$. Se $|A_1| = ... = |A_k| = |X|$ allora anche $|A_1 \cup ... \cup A_k| = |X|$.
Teorema 3.5 (ZF)
Lemma di Zorn $\implies$ $|A \times A| = |A|$ $\forall A$ insieme infinito.

10 Algebra cardinale e cofinalità

Definizione 1.3
Siano μ, ν cardinali. Diciamo che $\mu \leq \nu$ se esiste una funzione iniettiva $f : \mu \to \nu$.
Definizione 1.4
Siano μ, ν cardinali, allora (i) $\mu+\nu = |A \cup B|$ dove A, B sono insiemi disgiunti con $|A| = \mu \wedge |B| = \nu$; (ii) $\mu \cdot \nu = |A \times B|$ dove A, B sono insiemi con $|A| = \mu \wedge |B| = \nu$; (iii) $\mu^\nu = |\operatorname{Fun}(A, B)|$ dove A, B sono insiemi con $|A| = \nu \wedge |B| = \mu$.
Proposizione 1.7
Siano $\kappa, \kappa', \mu, \mu', \nu$ cardinali, allora valgono: (i) proprietà associative della somma e del prodotto, (1) $\kappa + (\mu + \nu) = (\kappa + \mu) + \nu$, (2) $\kappa \cdot (\mu \cdot \nu) = (\kappa \cdot \mu) \cdot \nu$; (ii) proprietà commutative della somma e del prodotto, (1) $\kappa + \mu = \mu + \kappa$, (2) $\kappa \cdot \mu = \mu \cdot \kappa$; (iii) proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto, $\kappa \cdot (\mu + \nu) = (\kappa \cdot \mu) + (\kappa \cdot \nu)$; (iv) proprietà di monotonia della somma, del prodotto, e dell'esponenziazione, (1) $\kappa' \leq \kappa \wedge \mu' \leq \mu \implies \kappa' + \mu' \leq \kappa + \mu$, (2) $\kappa' \leq \kappa \wedge \mu' \leq \mu \implies \kappa' \cdot \mu' \leq \kappa \cdot \mu$, (3) $\kappa' \leq \kappa \wedge \mu' \leq \mu \implies (\kappa')^{\mu'} \leq \kappa^\mu$.
Proposizione 1.8
Siano κ, μ, ν cardinali, allora: (i) $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$; (ii) $(\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu \cdot \nu}$; (iii) $(\kappa \cdot \mu)^\nu = \kappa^\nu \cdot \mu^\nu$.
Proposizione 1.12
Siano $\kappa, \mu \neq 0$ cardinali dove almeno uno dei due è infinito. Allora $\kappa + \mu = \kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
Proposizione 1.13
Sia $A \subseteq B$ dove B è un insieme infinito. $|A| < |B| \implies |B \setminus A| = |B|$.
Proposizione 1.16
Sia κ un cardinale infinito e supponiamo che $2 \leq \mu \leq 2^\kappa$. Allora $\mu^\kappa = 2^\kappa$. In particolare, $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ $\forall \kappa$ cardinale infinito.
Definizione 2.1
La sequenza degli beth è definita per ricorsione transfinita come segue: $\begin{cases} \beth_0 = \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$.
Proposizione 2.3
Le seguenti proprietà sono equivalenti: (i) ipotesi generalizzata del continuo (GCH): $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \forall \alpha$ ordinale; (ii) $\aleph_\alpha = \beth_\alpha \forall \alpha$ ordinale.
Definizione 2.5
Un cardinale κ si dice limite forte se $\forall \mu, \nu < \kappa$ cardinali si ha $\mu^\nu < \kappa$.
Proposizione 2.7
Un cardinale $\kappa > \aleph_0$ è limite forte $\iff$ è un punto limite della sequenza dei beth, cioè $\kappa = \beth_\lambda$ dove λ è un ordinale limite.
Definizione 3.1
Sia $(\kappa_i | i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali, la somma infinita è definita come $\sum_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup_{i \in I} A_i|$ dove gli insiemi $|A_i| = \kappa_i$ sono a due a due disgiunti.
Teorema 3.8

Sia $(\kappa_i|i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali diversi da 0, allora $\sum_{i\in I} \kappa_i = \max\{\sup_{i\in I} \kappa_i, |I|\}$.
Definizione 3.11
La famiglia dei Boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene tutti gli aperti.
Proposizione 3.12
La famiglia dei Boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ha la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$.
Definizione 4.1 (AC)
Sia $(\kappa_i|i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali diversi da 0, il prodotto infinito è definito come $\prod_{i\in I} \kappa_i = |\times_{i\in I} A_i|$ dove gli insiemi $|A_i| = \kappa_i$.
Teorema 4.9 (AC)
Sia ν un cardinale infinito, e sia $(\kappa_\alpha|\alpha \in \nu)$ una sequenza non-decrescente di cardinali $\kappa_\alpha \neq 0$, allora $\prod_{\alpha\in\nu} \kappa_\alpha = (\sup_{\alpha\in\nu} \kappa_\alpha)^\nu$.
Proposizione 4.13 (AC)
Sia $(\kappa_i|i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali $\kappa_i \geq 2$, allora $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \kappa_i$.
Teorema 4.14 (AC - König)
Siano $(\mu_i|i \in I), (\kappa_i|i \in I)$ sequenze infinite di cardinali dove $\mu_i < \kappa_i\ \forall i \in I$; allora $\sum_{i\in I} \mu_i < \prod_{i\in I} \kappa_i$.
Corollario 4.15 (AC)
$\forall \kappa$ cardinale infinito, $2^\kappa > \kappa$.
Definizione 5.1
Chiamiamo cofinalità di un insieme ordinato $(A, <)$ la più piccola cardinalità di un suo sottoinsieme illimitato: $cof(A) = \min\{|X| | X \subseteq A \text{ illimitato}\}$.
Proposizione 5.7
ⓘ $cof(A) = \min\{\alpha \text{ ordinale } | \exists f : \alpha \to A \text{ funzione illimitata}\}$; ⓘⓘ $cof(A) = \min\{\alpha \text{ ordinale } | \exists f : \alpha \to A \text{ funzione illimitata crescente}\}$.
Definizione 5.8
Un cardinale κ si dice regolare se $cof(\kappa) = \kappa$, cioè se non ha sottoinsiemi illimitati aventi cardinalità più piccola. Un cardinale si dice singolare se non è regolare.
Proposizione 5.12
Ogni cardinale successore è regolare.
Proposizione 5.13
Se λ è un ordinale limite, allora $cof(\aleph_\lambda) = cof(\lambda) \wedge cof(\beth_\lambda) = cof(\lambda)$.
Proposizione 5.15 ($cof(\kappa) = \nu$)
Sia κ un cardinale, allora $cof(\kappa)$ è il più piccolo cardinale ν tale che $\exists(\kappa_i|i \in \nu)$ sequenza di cardinali $\kappa_i < \kappa$ con $\sum_{i\in\nu} \kappa_i = \kappa$.
Teorema 6.1
$\forall \kappa$ cardinale infinito, allora: ⓘ $\kappa^{cof(\kappa)} > \kappa$; ⓘⓘ $cof(\mu^\kappa) > \kappa\ \forall \mu \geq 2$.
Corollario 6.2
$\forall \lambda$ ordinale limite di cofinalità numerabile si ha $\mathfrak{c} \neq \aleph_\lambda$. In particolare $\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega$.
Teorema 6.3 (Hausdorff)
Siano κ, ν cardinali infiniti, allora $(\kappa^+)^\nu = \max\{\kappa^\nu, \kappa^+\}$.
Corollario 6.4
$\forall \lambda$ ordinale $\forall n \in \omega$; $(\aleph_{\lambda+n})^{\aleph_\beta} = \max\{(\aleph_\lambda)^{\aleph_\beta}, \aleph_{\lambda+n}\}$.
Notazione 6.5

Se ν è un cardinale infinito, $\forall \kappa \geq 2$ è consuetudine denotare $\kappa^{<\nu} := \sup\{\kappa^{\xi} | \xi < \nu\}$.

Teorema 6.6

Sia ν un cardinale limite e sia $\kappa \geq 2$, allora $\kappa^{\nu} = (\kappa^{<\nu})^{cof(\nu)}$.

Teorema 6.9

Sia κ un cardinale limite, e ν un cardinale infinito, allora: ⓘ $\kappa^{\nu} = \sup_{\mu<\kappa} \mu^{\nu}$ se $\nu < cof(\kappa)$; ⓘⓘ $\kappa^{\nu} = (\sup_{\mu<\kappa} \mu^{\nu})^{cof(\kappa)}$ se $\nu \geq cof(\kappa)$.

Teorema 6.11

Siano κ, ν cardinali infiniti, allora: ⓘ $\mu^{\nu} < \kappa \; \forall \mu < \kappa \wedge \nu < cof(\kappa) \implies \kappa^{\nu} = \kappa$; ⓘⓘ $\mu^{\nu} < \kappa \; \forall \mu < \kappa \wedge \nu \geq cof(\kappa) \implies \kappa^{\nu} = \kappa^{cof(\kappa)}$.

Definizione 7.1

Un cardinale κ si dice debolmente inaccessibile se è un cardinale limite regolare. Un cardinale κ si dice fortemente inaccessibile (o semplicemente inaccessibile) se è un cardinale limite forte regolare.

Teorema 7.4

Sia $\kappa > \aleph_0$ un cardinale regolare, allora: ⓘ κ è debolmente inaccessibile $\iff$ è un punto fisso della funzione-classe aleph: $\kappa = \aleph_{\kappa}$; ⓘⓘ κ è fortemente inaccessibile $\iff$ è un punto fisso della funzione-classe beth: $\kappa = \beth_{\kappa}$.