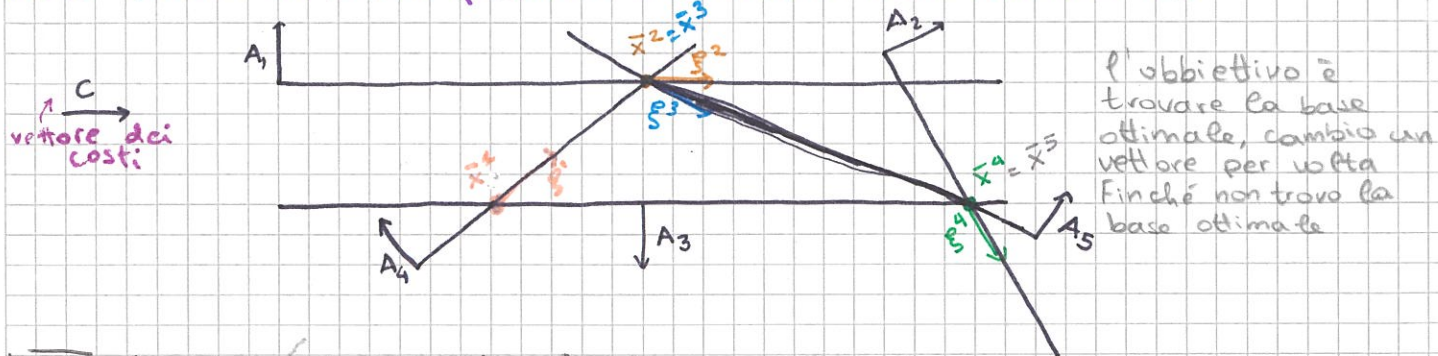


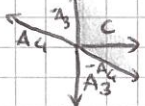
(esercizio 1 21/09/22)
pag 34

Lo riconosco perché primale (P) viene dato dal testo e geometrico perché nel testo c'è un grafico con vettori

Si risolve geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del simplesso primale, il problema PL in figura a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si forniscono la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento di $\bar{x}$, il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Si discuta infine quale sarebbe l'esito di risoluzione nel caso in cui il secondo e terzo vincolo non fossero presenti, e si utilizzasse come base $B = \{1, 5\}$.



II 1 La base è $B_3 = \{3, 4\}$. Prendo i vettori A_3, A_4 e C_i di segno con la stessa origine con $C \leftarrow 3$.



$C \in \text{cono}(-A_3, -A_4)$

$\Rightarrow y_3 < 0$ e $y_4 < 0$ dunque la soluzione duale
non è ammissibile ed è non degenera
(se è uguale a zero)

Dunque uno dei due vettori deve uscire dalla base (esce il negativo ma in questo caso sono entrambi negativi) $h = \min\{3, 4\} = 3$. Dunque $B(h) = 1$ perché tolgo il primo elemento della base.
 regola anticiclo di Bland

$\bar{x}^1$ è l'intersezione fra A_3 e A_4 . $I(\bar{x}^1)$ è l'insieme dei punti che si intersecano in $\bar{x}^1$. Dunque $I(\bar{x}^1) = \{3, 4\} = B$, $\Rightarrow$ base primale non degenere

Se ci fosse stato un vettore
non appartenente alla base
sarebbe stato degenerare

Adesso dobbiamo scegliere chi entra (k_i), per questo dobbiamo capire la direzione di spostamento.

di spostamento.

$$\mathbf{p}^1 = -\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{u}_{BCh}$$

dove $\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ i due vettori delle baricentriche

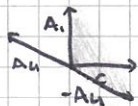
$$\mathbf{u}_{BCh} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } BCh = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } BCh = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} A_3 \vec{s}^1 = -1 \leftarrow \text{riga 1} \\ A_4 \vec{s}^1 = 0 \leftarrow \text{riga 2} \end{cases}$ ovvero $\vec{s}^1$ viaggia nel verso opposto di A_3 e perpendicolarmente ad A_4

la prima intersezione che trovo è $\bar{x}^2$ dove si incrociano i vettori 1, 4, 5; 4 fa già parte della base dunque $k = \min\{1, 5\} = 1$
 ↑ sempre per la regola anticiclo di Bland

IT2 • La base è $\mathcal{B}_2 = \{1, 4\}$

• Disegno i vettori



$C \in \text{cono}(A_1, -A_4)$

- $y_1 > 0, y_4 < 0 \Rightarrow$ soluzione ^{non} duale non ammessa non degenera

• $h = 4$. $B(h) = 2$

- $J(\bar{X}^2) = \{1, 4, 5\} \neq B_2$ base primele degenerare

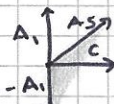
$$\bullet A_0 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_4 \end{pmatrix}, u_{B(e_1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \beta^2 = 0 \\ A_4 \beta^2 = -1 \end{cases}$$

• Nota bene: dato che in $\bar{x}^2$ si intersecano 3 vettori, la prossima intersezione è $\bar{x}^2 = \bar{x}$

 $\bullet K=5$

IT3 • Base $B_3 = \{1, 5\}$

• Disegno i vettori



$C \in \text{cono}(-A_1, A_5)$

• $y_1 < 0, y_5 > 0 \Rightarrow$ soluzione duale non ammessa, base duale non degenera

• $h = 1, B(h) = 1$

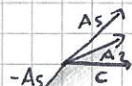
• $I(\bar{x}^3) = \{1, 4, 5\} \neq B_3$ base primale degenera

• $A_B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_5 \end{pmatrix}, u_{B(h)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \bar{x}^3 = -1 \\ A_5 \bar{x}^3 = 0 \end{cases}$

• la prima intersezione è in $\bar{x}^4$ dove si incontrano i vettori A_2, A_3, A_5 ; A_5 fa già parte della base dunque $\kappa = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland

IT4 • Base $B_4 = \{2, 5\}$

• Disegno i vettori



$C \in \text{cono}(A_2, -A_5)$

• $y_2 > 0, y_5 < 0 \Rightarrow$ soluzione duale non ammessa, base duale non degenera

• $h = 5, B(h) = 2$

• $I(\bar{x}^4) = \{2, 3, 5\} \neq B_4$ base primale degenera

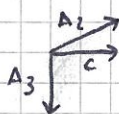
• $A_B = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_5 \end{pmatrix}, u_{B(h)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_2 \bar{x}^4 = 0 \\ A_5 \bar{x}^4 = -1 \end{cases}$

• la prima intersezione è in $\bar{x}^5 = \bar{x}^4$ perché A_3 è attivo ma non in base

• $\kappa = 3$

IT5 • Base $B_5 = \{2, 3\}$

• Disegno i vettori



$C \in \text{cono}(A_2, A_3)$

• $y_2 > 0, y_3 > 0 \Rightarrow$ soluzione duale ammessa, base duale non degenera

• $I(\bar{x}^5) = \{2, 3, 5\} \neq B_5$ base primale degenera

L'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima per il primale e una soluzione ottima per il duale. La soluzione ottima duale non è unica perché la soluzione primale è degenera. Un'altra soluzione ottima per il duale è $\{3, 5\}$

Per il secondo punto basta togliere A_2, A_3 e ripetere l'algoritmo (chiaramente fare osservazioni intelligenti è più conveniente)

N. B. Se con $\bar{x}^i$ non trovo nessuna intersezione, l'algoritmo termina e diciamo che il problema primale è illimitato, e di conseguenza il problema duale è vuoto superiormente

Se la base primale è degenera $\Rightarrow$ base duale non unica. Questo significa che le altre soluzioni ottime sono $B = \{i, j\}$ con $i, j \in I(x)$ tali che $C \in \text{cono}(A_i, A_j)$ controllabili in figura.

Simplesso primale algebrico (esercizio 1 08/11/22) pag 37

Lo riconosco perché primale (P) viene dato dal testo e algebrico perché nel testo c'è un'equazione

Si risolve il seguente problema PL max $2x_1 - 8x_2$

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & -2 \\ x_1 & \leq & 4 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_2 & \leq & 6 \\ -2x_1 + x_2 & \leq & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del simplesso primale, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indicano: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito (i) si discute se la soluzione ottima primale individuata sia unica (ii) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale.

IIT1 La base è $B_1 = \{2, 4\}$. Chiameremo A_B la matrice associata alla base $A_B = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$ dove A_2 sono i coefficienti dell'equazione 2 e A_4 sono i coefficienti dell'equazione 4. Dunque $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Chiameremo b_B il vettore dei coefficienti associati alla base $b_B = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_4 \end{pmatrix}$ dove b_2 è il termine noto dell'equazione 2 e b_4 è il termine noto dell'equazione 4. Dunque $b_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Chiameremo c il vettore dei costi, metto i coefficienti dell'equazione di massimo dunque $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$. $\bar{y}$ è la soluzione di base duale $\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ \bar{y}_N^T]$ dove $\bar{y}_B^T$ è la soluzione in base del duale e $\bar{y}_N^T$ è la soluzione in non base del duale. Poniamo $\bar{y}_N = 0$. Calcoliamo $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2 \ -8) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ -8)$ dunque la base duale è non degenera e $\bar{y}^T = (0 \ 2 \ 0 \ -8 \ 0)$.

è degenera se uno degli $\bar{y}_B$ è uguale a zero

x è la soluzione di base primale $x = A_B^{-1} b_B$ dunque $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Cerco le intersezioni in x : sostituisco $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$, se le disequazioni sono uguaglianze allora intersecano in x .

$$\begin{array}{rcl} 4 - 6 & = & -2 \\ 4 & = & 4 \\ -4 + 6 & = & 2 \\ +6 & = & 6 \\ -8 + 6 & = & -2 \leq -1 \leftarrow \text{non interseca} \end{array}$$

$I(x) = \{1, 2, 3, 4\} \neq B_1$, dunque la base primale è degenera. $\rightarrow$ è non degenera se è uguale alla base

Scelgo il vettore uscente dalla base, $h=4$ dunque $B(h)=2$

Adesso dobbiamo capire la direzione di spostamento $\bar{s}_1 = -A_B^{-1} u_{acc,1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Chiameremo A_N la matrice non base in cui inserisco i vettori non della base $A_N = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$

A questo punto voglio calcolare $A_N \bar{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

se $A_N \bar{s}_1 \leq 0$ la base primale è superiormente limitata e il duale è vuoto

κ è la più piccola entrata positiva della matrice quindi $\kappa = 1$

IIT2 • La base è $B_2 = \{1, 2\}$

• Calcolo $A_B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

• Calcolo $b_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

• Calcolo $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

• Calcolo $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2 \ -8) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (8 \ -6)$

• Quindi $\bar{y}^T = (8 \ -6 \ 0 \ 0 \ 0)$ la base duale è non degenera

• Calcolo $x = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

• $I(x) = \{1, 2, 3, 4\} \neq B_2$ dunque la base primale è degenera

• $h=2$ $B(h)=2$

• $\bar{s}_1 = -A_B^{-1} u_{acc,1} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\bar{s}_2 = -A_B^{-1} u_{acc,2} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $A_N \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $k=5$ (la più piccola entrata positiva)

IT3

- La base è $B_3 = \{1, 5\}$
- Calcolo $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ - $A_B^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Calcolo $b_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Calcolo $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$
- Calcolo $\bar{y}_B = C^T A_B^{-1} = -(2 \ -8) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (14 \ 6)$
- Quindi $\bar{y} = (14 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6)$ la base duale è non degenera
- Calcolo $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $I(x) = \{1, 3, 5\} \neq B_3$ dunque la base primale è degenera

L'algoritmo termina perché $y_5 \geq 0$, dunque $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ è soluzione ottima per il problema primale dato, $y = (14 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6)$ è la soluzione ottima per il problema duale

Dato che la soluzione duale è non degenera, x è l'unica soluzione del problema primale

Dato che la soluzione primale è degenera, la soluzione non è unica ma sono tutte e sole le soluzioni che soddisfano le condizioni degli scarti complementari ovvero leggiamo la matrice dei valori scambiando riga - colonna e ponendolo uguale ai coefficienti di massimo. Dato che i vettori attivi in x sono $I(x) = \{1, 3, 5\}$ poniamo $y_2 = y_4 = 0$. Otteniamo

$$\begin{cases} y_1 - y_3 - 2y_5 = 2 \\ -y_1 + y_3 + y_5 = -8 \\ y_1, y_3, y_5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{pongo } y_3 = d$$

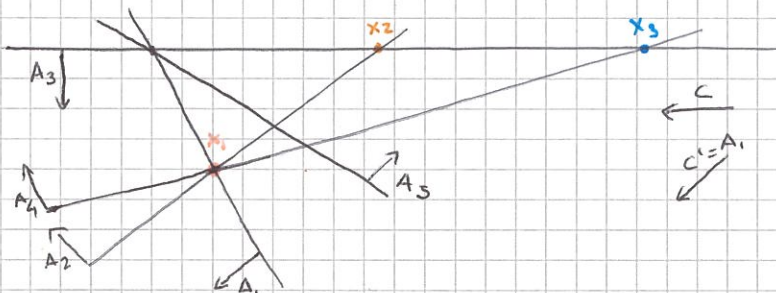
le soluzioni di questo sistema sono della forma $(14+d, d, 6)$ con $d \geq 0$. dunque le soluzioni ottime del duale sono della forma $y = (14+d \ 0 \ d \ 0 \ 6)$

Simplesso duale geometrico (esercizio 1 09/06/21)

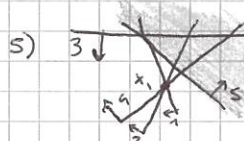
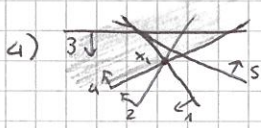
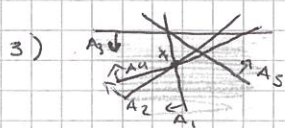
pag 7

Lo riconosco perché duale (D) viene dato dal testo e algebrico perché nel testo c'è un'equazione.

Si risolva il problema di PL in figura, per via geometrica, utilizzando l'algoritmo del simplesso duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale, l'indice entrante k , il segno delle componenti dei vettori y_0 e η_0 e l'indice uscente h . Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale delle basi visitate dall'algoritmo. Si specifichi inoltre come cambierebbe lo svolgimento dell'esercizio se il gradiente della funzione obiettivo fosse c' .



IT 1 La base è $B_1 = \{1, 2\}$. Chiameremo x_1 l'intersezione fra i due vettori della base. A questo punto prendo i vettori della non base e controllo se x_1 li viola:



coloro per ogni retta nella non base dalla retta nella direzione in cui va il vettore. Se x_1 sta nell'area colorata, x_1 viola quel vincolo.

Dunque il vettore entrante k è il minimo dei vincoli violati $k=3$.

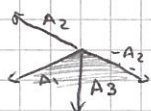
Voglio controllare se la base duale è degenerare, per questo controllo il cono



$C \in \text{cono}(A_1, A_2) \Rightarrow y_1 > 0, y_2 > 0$ quindi la base duale è non degenerare.

Voglio controllare se la base primale è degenerare per questo controllo le intersezioni $I(x_1) = \{1, 2, 4\} \neq B_1$ quindi la base primale è degenerare.

Per capire il vettore uscente disegno il vettore entrante con i vettori della base



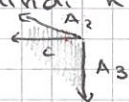
quindi $A_3 \in \text{cono}(A_1, A_2) \Rightarrow \eta_1 > 0, \eta_2 < 0$

$h = \min \left\{ \frac{y_i}{\eta_i} \mid \eta_i > 0 \right\}$ ovvero prendo quello positivo alternativamente fanno parte della base il vettore entrante e A_j $C \in \text{cono}(A_3, A_j) \quad h=1$

IT 2 La base è $B_2 = \{2, 3\}$, trovo x_2

• x_2 viola 4, 5 quindi $k=4$

• Disegno i vettori

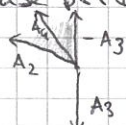


$C \in \text{cono}(A_2, A_3)$

• $y_2 > 0, y_3 > 0$ base duale non degenerare

• $I(x_2) = \{2, 3\} = B_2$ base primale non degenerare

• Disegno i vettori

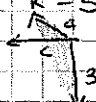


• $A_4 \in \text{cono}(A_2, -A_3) \Rightarrow \eta_2 > 0, \eta_3 < 0$

• $h=2$

IT 31 • La base è $B_3 = \{3, 4\}$

• x_3 viola 5, quindi $k=5$

• Disegna i vettori:  $c \in \text{cono}(A_3, A_4)$

• $y_3 > 0, y_4 > 0$ base duale non degenera

• $I(x_3) = \{3, 4\} = B_3$ base primale non degenera

• Disegna vettori: 

• $A_5 \in \text{cono}(-A_3, -A_4) \Rightarrow \eta_3 < 0, \eta_4 < 0$

L'algoritmo termina perché $\eta_i \leq 0$. Dato che io ho ancora un punto che viola un vincolo, il problema duale è inferiormente illimitato e il problema primale è vuoto.

Per il secondo punto basta ripetere l'algoritmo con c' (chiaramente fare osservazioni intelligenti è meglio)

V. B. Se finisco l'algoritmo e trovo un punto che non viola nessun vincolo e x_i è la scelta ottima del problema primale

Simplexso duale algebrico (esercizio 1 05/06/23) pag 47

Lo riconosco perché duale (D) viene dato dal testo e geometrico perché nel testo c'è un grafico con vettori.

Si consideri il seguente problema PL: max

$$\begin{aligned} & x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_2 \leq 0 \\ & -2x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1 \leq -1 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

si applichi l'algoritmo del simplexso duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base l'indice entrante k , il vettore b_B , il passo di spostamento $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h . In caso di ottimo finito, si individuino (i) l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali (ii) l'insieme di tutte le soluzioni ottime primali.

IT 1 La base è $B_1 = \{2, 4\}$. Chiameremo A_B la matrice associata alla base, $A_B = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$

Dunque $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Chiameremo b_B il vettore dei coefficienti associati alla base $b_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Chiameremo c il vettore dei costi, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{y}$ è la soluzione di base duale $\bar{y}^T = [\bar{y}_B \quad \bar{y}_N^T]$, ($\bar{y}_N^T = 0$)

Calcoliamo $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$, dunque $\bar{y}_B^T = (0 \ 1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0)$ dunque la base duale è degenera $\bar{y}^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

x è la soluzione della base primale $x = A_B^{-1} b_B$ dunque $x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cerco le intersezioni in x $I(x) = \{2, 3, 4\} \neq B_1$ dunque la base primale è degenera

Chiamo A_N la matrice non base $A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A questo punto voglio calcolare $A_N x$, se $A_N x \leq b_N \Rightarrow$ la soluzione è ammissibile

$$A_N x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ prendo l'entrata per cui l'equazione}$$

è falsa e quella è il vettore entrante $k=6$

$$\text{calcolo } \eta_B^T = A_k A_B^{-1} \text{ dove } A_k \text{ è il vettore entrante quindi } \eta_B^T = (1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1 \ 1)$$

$$\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{y_i}{\eta_i} \mid i \in B, \eta_i > 0 \right\} = 0 \quad h=4$$

IT 2 La base è $B_2 = \{2, 6\}$

- Calcolo $A_B = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcolo $b_B = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Calcolo $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Calcolo $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0)$

- Quindi $\bar{y}^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ la base duale è degenera

- Calcolo $x = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $I(x) = \{2, 6\} = B_2$ la base primale è non degenera

- Calcolo $A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcolo $A_N x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $k=3$ (l'entrata per cui $A_N x$ non funziona)

- Calcolo $\eta_B^T = A_3 A_B^{-1} = (-2 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ -2)$

- $\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{y_i}{\eta_i} \mid i \in B, \eta_i > 0 \right\} = 1$

- $h=2$

IT31 • La base è $B_3 = \{3, 6\}$

• Calcolo $A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

• Calcolo $b_B = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Calcolo $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Calcolo $\bar{y}_B^T = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 2)$

• Quindi $\bar{y}^T = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2)$ la base duale è non degenera

• Calcolo $x = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

• $I(x) = \{1, 3, 6\} \neq B_3$ la base primale è degenera

• Calcolo $A_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Calcolo $A_N x = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

L'algoritmo termina perché $A_N x \leq b_N$ dunque $x = (-1, -4)$ è una soluzione ottima per il problema primale e $y = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

Dato che la soluzione duale è non degenera, x è l'unica soluzione del problema primale

Dato che la soluzione primale è degenera, la soluzione non è unica ma sono tutte e sole le soluzioni che soddisfano le condizioni degli scarti complementari.

Dato che i vettori attivi in x sono $I(x) = \{1, 3, 6\}$ pongo $y_2 = y_4 = y_5 = 0$.

Otteniamo
$$\begin{cases} -y_1 - 2y_3 + y_6 = 0 \\ -y_1 + y_3 = 1 \\ y_1, y_3, y_6 \geq 0 \end{cases}$$

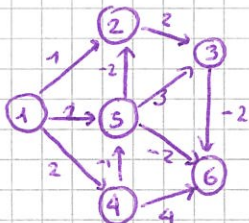
pongo $y_6 = \alpha$ le soluzioni di questo sistema sono della forma $(\frac{\alpha-2}{3}, \frac{\alpha+1}{3}, \alpha)$ con $\alpha \geq 2$, dunque le soluzioni ottime del duale sono della forma $y = (\frac{\alpha-2}{3}, 0, \frac{\alpha+1}{3}, 0, 0, \alpha)$

Cammini minimi SPT.Acyclic (esercizio 2 08/09/21) costo $O(n)$ pag 17

Scelgo l'algoritmo SPT.Acyclic se il grafico non è ciclico

Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima è unica?

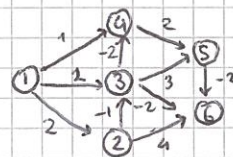
In fine si discuta quale algoritmo converrebbe usare, dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, nel caso in cui l'arco $(4,6)$ cambiasse orientamento, mantenendo invariato il proprio costo.



Rinumero i nodi: 1 diventa il nodo non raggiunto da nessuno.
2 diventa il nodo raggiunto solo da 1
3 diventa il nodo raggiunto solo da 1,2
4 diventa il nodo raggiunto solo da 1,2,3
5 diventa il nodo raggiunto solo da 1,2,3,4
6 diventa il nodo raggiunto solo da 1,2,3,4,5

Dunque originale: 1 2 3 4 5 6
rinumerato: 1 4 5 2 3 6

Ridisegno il grafo



Trovo l'upperbound $M = (n-1)C_{max} + 1 = 5 \cdot 4 + 1 = 21$

L'inizializzazione avviene come SPT.L

II 11 Analisi 1. I nodi uscenti da 1 sono $\{2, 3, 4\}$. Considero il costo per raggiungerlo:

$$d(2) = d(1) + 2 = 2$$

$$d(3) = d(1) + 2 = 2$$

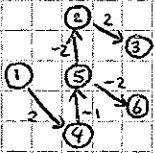
$$d(4) = d(1) + 1 = 1$$

Dato che il costo nuovo è minore del costo vecchio, modifico il costo nella tabella e il predecessore.

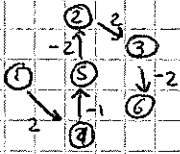
Nell'Acyclic non c'è bisogno della coda: mi è sufficiente analizzare i nodi in ordine perché una volta visitati non posso tornare indietro

it	u	pcu	pc2	pc3	pc4	pc5	pc6	dc1	dc2	dc3	dc4	dc5	dc6
0		nil	1	1	1	1	1	0	21	21	21	21	21
1	1	nil	1	1	1	1	1	0	2	2	1	21	21
2	2	nil	1	2	1	1	2	0	2	1	1	21	6
3	3	nil	1	2	3	3	3	0	2	1	-1	4	-1
4	4	nil	1	2	3	4	3	0	2	1	-1	1	-1
5	5	nil	1	2	3	4	3	0	2	1	-1	1	-1

L'algoritmo termina perché abbiamo analizzato tutti i nodi. Abbiamo individuato il cammino minimo:



non è unico perché calcolando $d(6) = d(5) + c_{56} = 1 - 2 = -1$ abbiamo trovato un arco che mantiene lo stesso costo, dunque esiste un albero alternativo:



Per l'altra domanda possiamo rifare l'algoritmo da capo (o fare ragionamenti intelligenti).

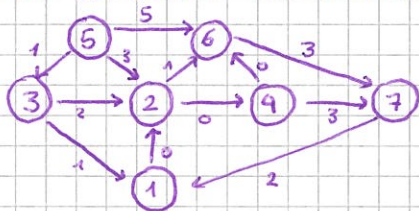
Cammini minimi SPT.S

(esercizio 2
pag. 23)

17/02/22) Algoritmo Dijkstra
costo $O(n^2)$

Scelgo l'algoritmo SPT.S se nel grafo ci sono dei cicli ma i costi sono positivi

Si individui un albero dei cammini minimi di radice 5 sul grafo in figura



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Tale albero è unico?

Innanzitutto, etichetto tutti i nodi in base al costo: sottraggo per i costi uscenti e aggiungo quelli entranti;

$$\begin{aligned} E_1 &= 1 - 0 + 2 = 3 \\ E_2 &= 0 - 0 - 1 + 3 + 2 = 4 \\ E_3 &= 1 - 2 - 1 = -2 \\ E_4 &= 0 - 0 - 3 = -3 \\ E_5 &= -1 - 3 - 5 = -9 \\ E_6 &= 5 + 1 + 0 - 3 = 3 \\ E_7 &= 3 + 3 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Poi trovo l'upperbound $M = (\underbrace{n}_{\text{numero di nodi}} - 1) \cdot \underbrace{C_{\max}}_{\text{costo massimo di un nodo}} + 1 = (7 - 1) \cdot 5 + 1 = 31$

Prendo il nodo con l'etichetta minore ed inizializzo la tabella:

it	u	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	Q
0		5	5	5	5	nil	5	5	31	31	31	31	0	31	31	{5}

ponendo $p(i) = 5$ e $d(i) = 31$ (la distanza massima data da M)

IT 1: Analizzo 5. I nodi uscenti da 5 sono $\{2, 3, 6\}$. Considero il costo per raggiungerli:
 $d(2) = d(5) + c_{25} = 0 + 3 = 3$
 $d(3) = d(5) + c_{35} = 0 + 1 = 1$
 $d(6) = d(5) + c_{65} = 0 + 5 = 5$

Se non ci fosse il costo nuovo è minore stretto a quello vecchio modifico il costo nella tabella (ponendo il costo nuovo) e il predecessore minore stretto (ponendo il nodo attuale come predecessore).

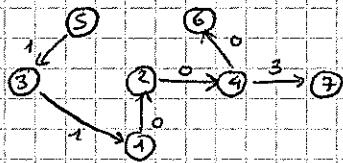
non modifico. Aggiorno la coda, ponendo i nodi in ordine di costo per arrivarci: niente per $Q = \{3, 2, 6\}$ metto in coda tutti i nodi che modifico quel nodo.

ogni volta che aggrasso la coda va ordinata

it	u	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	Q
0		5	5	5	5	nil	5	5	31	31	31	31	0	31	31	{5}
1	5	5	5	5	5	nil	5	5	31	3	1	31	0	5	31	{3, 2, 6}
2	3	3	5	5	5	nil	5	5	2	3	1	31	0	5	31	{2, 6}
3	1	3	1	5	5	nil	5	5	2	2	1	31	0	5	31	{2, 6}
4	2	3	1	5	2	nil	2	5	2	2	1	2	0	3	31	{4, 6}
5	4	3	1	5	2	nil	4	4	2	2	1	2	0	2	5	{6, 7}
6	6	3	1	5	2	nil	4	4	2	2	1	2	0	2	5	{7}
7	7	3	1	5	2	nil	4	4	2	2	1	2	0	2	5	$\emptyset$

it è l'iterazione
 u è il nodo preso in analisi
 $p(i)$ è il predecessore del nodo i
 $d(i)$ è il costo minimo per arrivare al nodo i

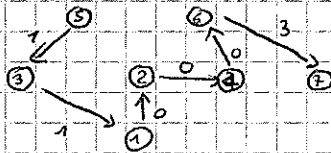
L'algoritmo termina perché la coda è vuota. Abbiamo individuato il cammino minimo:



N.B. la distanza $d(u)$ è la distanza a partire dalla sorgente non dal nodo precedente

Un tip per velocizzare è che sto riscrivendo il grafo tagliando degli archi. Gli archi che tengo avranno lo stesso costo di prima

Non è unico perché calcolando $d(7) = d(6) + c_{67} = 2 + 3 = 5$ abbiamo trovato un arco che mantiene lo stesso costo, dunque esiste un albero alternativo

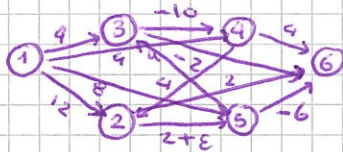


Cammini minimi SPT.L

(esercizio 2 14/01/21) Bellman
pag. 2 costo $O(nm)$

Scelgo l'algoritmo SPT.L se nel grafo ci sono dei cicli ma almeno uno dei costi è negativo

Si consideri la famiglia di problemi di albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in Figura, al variare del parametro reale ϵ . Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 per $\epsilon=0$, utilizzando l'algoritmo più appropriato in termini di complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscono il nodo selezionato u , i vettori predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q . In ogni iterazione si visitano gli archi in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Infine si indichi (i) per quali valori del parametro ϵ la soluzione ottenuta rimane ottima; (ii) per quali valori del parametro ϵ il problema diventa inferiormente finito.



Trovo l'upperbound $M = (n-1)C_{\max} + 1 = (6-1) \cdot 12 + 1 = 61$

L'inizializzazione avviene come per SPT.S, ma prendendo il nodo 1 del grafo.

IT 1 Analisi 1. I nodi uscenti da 1 sono $\{2, 3, 4, 5\}$. Considero il costo per raggiungerli

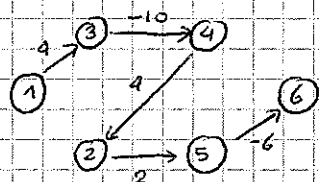
$$\begin{aligned} d(2) &= d(1) + 12 = 12 \\ d(3) &= d(1) + 4 = 4 \\ d(4) &= d(1) + 4 = 4 \\ d(5) &= d(1) + 8 = 8 \end{aligned}$$

Dato che il costo nuovo è minore stretto a quello vecchio modifico il costo nella tabella e il predecessore.

Aggiorno la coda $Q = \{2, 3, 4, 5\}$ → per aggiornare la coda pongo il nodo modificato in fondo, è proprio CODA

it	u	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	Q
0		nil	1	1	1	1	1	0	61	61	61	61	61	{1}
1	1	nil	1	1	1	1	1	0	12	4	4	8	61	{2,3,4,5}
2	2	nil	1	1	1	1	2	0	12	4	4	8	14	{3,4,5,6}
3	3	nil	1	1	3	1	3	0	12	4	-6	8	2	{4,5,6}
4	4	nil	4	1	3	1	4	0	-2	4	-6	8	-2	{5,6,2}
5	5	nil	4	1	3	1	4	0	-2	4	-6	8	-2	{6,2}
6	6	nil	4	1	3	1	4	0	-2	4	-6	8	-2	{2}
7	2	nil	4	1	3	2	4	0	-2	4	-6	0	-2	{5}
8	5	nil	4	1	3	2	5	0	-2	4	-6	0	-6	{6}
9	6	nil	4	1	3	2	5	0	-2	4	-6	0	-6	$\emptyset$

L'algoritmo termina perché la coda è vuota. Abbiamo individuato il cammino minimo:



Questo grafo vale solo per $0 \leq \varepsilon \leq 4$:

I nodi per cui le condizioni cambiano sono 3 e 6.

Innanzitutto voglio che l'arco $C_{36} \leq C_{46} \Rightarrow -6 + \varepsilon \leq -2 \Rightarrow \varepsilon \leq 4$

Poi voglio che $C_{13} \leq C_{35} \Rightarrow 4 \leq 4 + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \varepsilon$

qua sto chiaramente facendo il calcolo dei costi totali e non solo il valore dell'arco.
 il secondo minimo visto dalla tabella

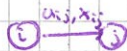
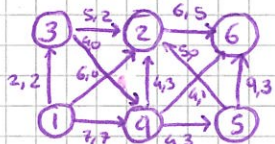
Altrimenti non soddisfa la condizione di Bellmann $d(i) \leq d(j) + c_{ji}$

Per $\varepsilon < 0$ ho il ciclo $(3, 4, 2, 5, 3)$ che assume costo negativo $\Rightarrow$ il problema è inferiormente illimitato

Flusso massimo

(esercizio 2 27/06/22) Algoritmo Edmonds e Karp
pag. 29

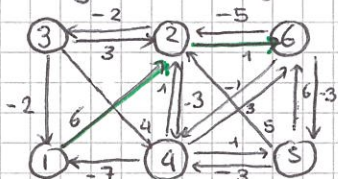
Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v=9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente rispetto ai nodi di testa. Per ogni iterazione si specifichi l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si discuta come cambierebbero il flusso di massimo e il taglio di capacità minima individuati dall'algoritmo se l'arco $(1,2)$ avesse capacità $u_{1,2}=5$.



dove u_{ij} è la capacità
 x_{ij} è il flusso che passa fra i e j

un arco è saturo
se $u_{ij} = x_{ij}$

IT1 Disegniamo il grafo residuo:



dove indico con la freccia inversa e col - tutto quello che posso "ritirare"

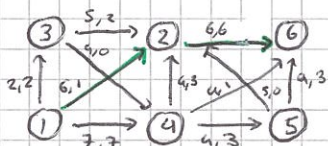
e con la freccia concorde e il + quanto posso "mandare" per saturare il nodo

1 è il grado entrante e 6 è il grado uscente. Dunque prendo il percorso $P = (1, 2, 6)$ nel grafo residuo

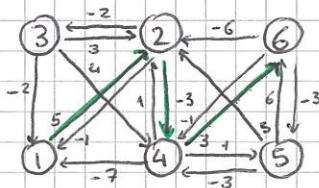
$$\theta(P, x) = \min\{x_{ij} \mid x_{ij} \in P\} = \min\{6, 1\} = 1$$

$$\text{Aggiorniamo } v = v + \theta(P, x) = 9 + 1 = 10$$

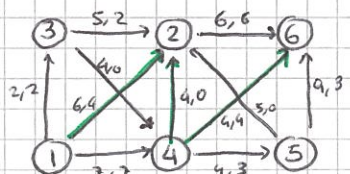
Adesso dobbiamo aumentare il flusso di 1 negli archi del percorso



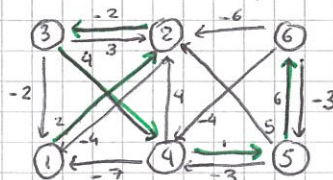
IT2 Disegniamo il grafo residuo



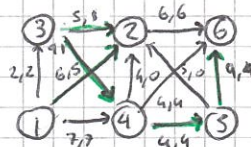
- Trovo il percorso $P = (1, 2, 4, 6)$
- Calcolo $\theta(P, x) = \min\{5, 1-3, 3\} = 3$
- Aggiorno $v = v + \theta(P, x) = 10 + 3 = 13$
- Aggiorno il grafo



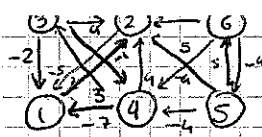
IT3 Disegniamo il grafo residuo



- Trovo il percorso $P = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$
- Calcolo $\theta(P, x) = \min\{2, 1-2, 4, 1, 6\} = 1$
- Aggiorno $v = v + \theta(P, x) = 13 + 1 = 14$
- Aggiorno il grafo



IT 41 • Disegniamo il grafo residuo



L'algoritmo termina perché il grafo non raggiunge 6.

Devo controllare che il flusso è davvero il massimo. Indico con N_s i nodi raggiungibili dalla sorgente, N_t gli altri.

Il flusso è il massimo se $\mu(N_s, N_t) = 14$ $\mu(N_s, N_t)$ è la somma del
Flusso fra gli archi che vanno da N_s a N_t
↑ capacità del taglio

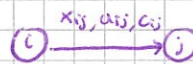
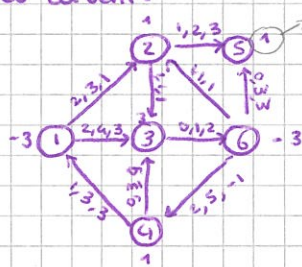
Dunque $\mu(N_s, N_t) = C_{2,6} + C_{4,5} + C_{4,6} = 6 + 4 + 4 = 14$; quindi il flusso è massimo.

Per la seconda domanda posso iterare l'algoritmo (o fare osservazioni intelligenti)

Costo minimo

(esercizio 2 21/09/22)
pag. 35

Si consideri il problema di flusso di costo minimo in figura. Si verifichi se il flusso ammissibile riportato sia di costo minimo e, nel caso non lo sia, si determini un flusso ammissibile di costo minore, utilizzando un opportuno ciclo aumentante. Qualora neppure il flusso determinato sia di costo minimo, si modifichi il costo di alcuni archi del grafo in maniera tale che lo diventi.

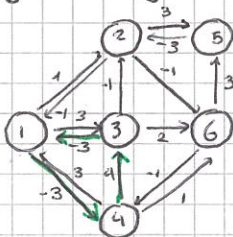


dove x_{ij} è il flusso
 u_{ij} è la capacità
 c_{ij} è il costo

Il costo del flusso è $C_x = 14$ perché è la somma del costo di ogni unità trasportata

Il flusso è ammissibile se e solo se non ammette cicli aumentanti negativi

IT 1 Disegno il grafo residuo



dove indico con la freccia inversa e il - se posso ritirare flusso

dove indico con la freccia concorde e il + se posso mandare per saturare il nodo

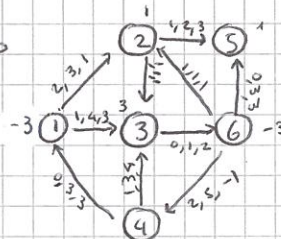
nella freccia scrivo il costo

Cerco se c'è un ciclo negativo. Il percorso $P = (1, 4, 3)$ ha costo $C(C_2) = -2$

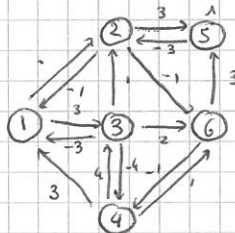
Allora calcolo $\theta(C, x) = \min\{|x_{ij}| \mid x_{ij} \in P\} = \{1, 2, 3\} = 1$

Aggiorno $C_x = C_x - 2 = 14 - 2 = 12$

Ma quindi aggiorno il grafo



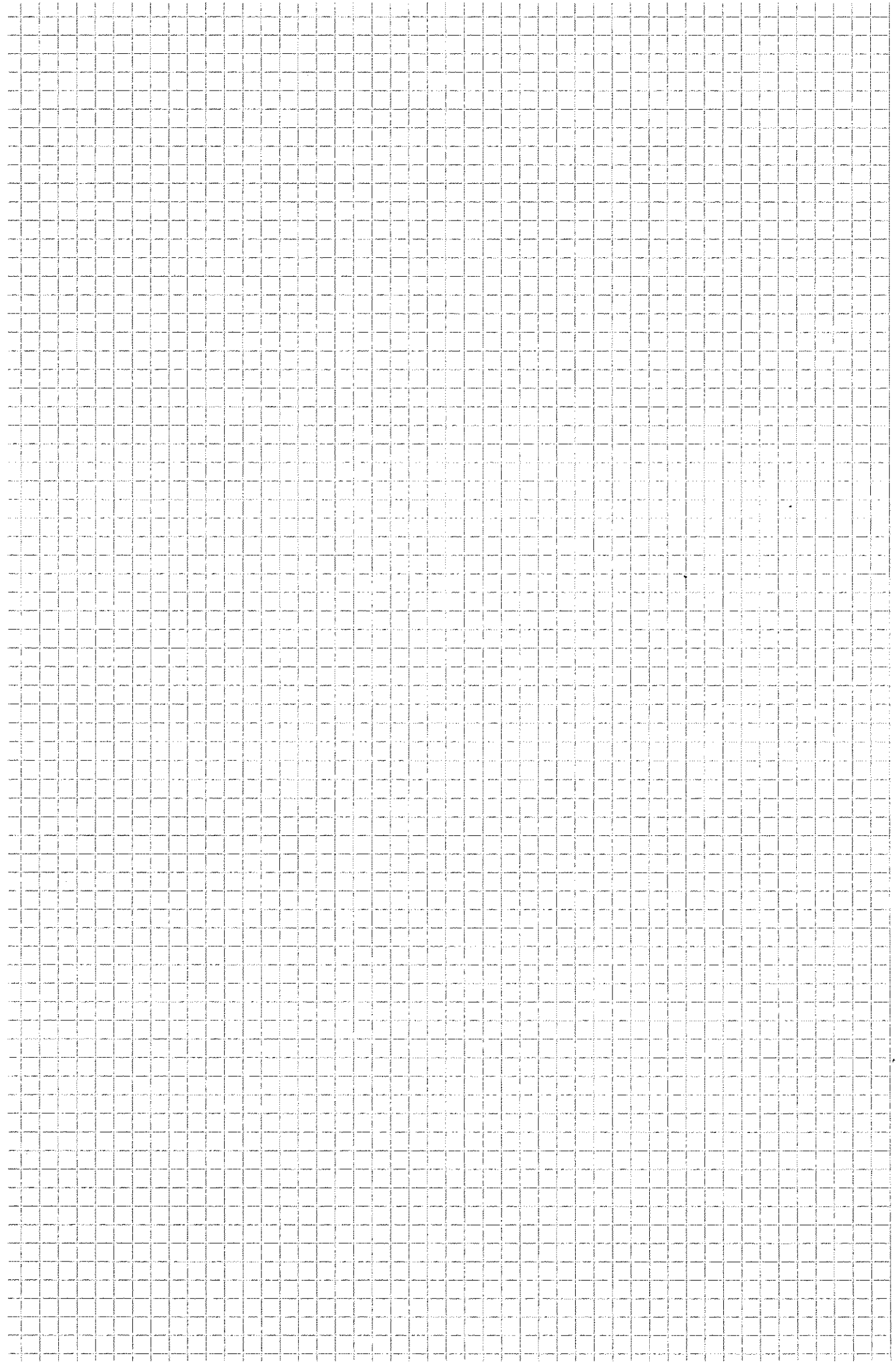
IT 2 Disegno il grafo residuo



Il percorso $P = (2, 6, 5)$ ha costo $C(C_2) = -1$

In questo caso l'algoritmo termina perché richiesto dal testo.

L'esercizio vuole modificare un costo affinché funzioni. porre $c_{5,6} = 4$ rende tutti i cicli positivi e il grafo è ammissibile



Zaino binario (Algoritmo Branch and Bound) (esercizio 3 27/06/22)

pag 30

Si risolve la seguente istanza del problema dello zaino binario: $\max x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5$
 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 5$
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Al termine si discuta se la soluzione ottima determinata resterebbe tale nel caso in cui il costo del secondo oggetto venisse ridotto di un'unità, ovvero valesse 3 invece di 4, giustificando la risposta.

$x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5$ → questi coefficienti rappresentano il beneficio di ognuno degli oggetti ad averlo nello zaino

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 5$ → questi coefficienti rappresentano quanto pesano e il peso dello zaino dev'essere minore o uguale della capienza

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$ → x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rappresentano le variabili booleane e nello zaino? sì = 1 no = 0

Prima ordiniamo gli oggetti in ordine decrescente per Costo unitario $X_i = \frac{\text{beneficio}_i}{\text{peso}_i}$

$CU(x_1) = \frac{1}{1} = 1$; $CU(x_2) = \frac{4}{2} = 2$; $CU(x_3) = \frac{6}{2} = 3$; $CU(x_4) = \frac{8}{2} = 4$; $CU(x_5) = \frac{10}{2} = 5$

L'ordinamento CUD è quindi $(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$

→ INIZIALIZZAZIONE

La coda $Q = \{(P)\}$ viene inizializzata inserendo solo il nodo radice dell'albero delle decisioni e $z = -\infty$ (con z indichiamo la migliore delle valutazioni inferiori)

→ RILASSAMENTO (noi usiamo il rilassamento continuo (RC)) serve a dare un upper bound $\bar{z}$

Chiamiamo x^* la soluzione del rilassamento $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ma ci consideriamo in $[0, 1] \cap \mathbb{R}$. Prendiamo quindi gli elementi in ordine di CUD

Ho 5. x_5 pesa 2. Lo metto nello zaino. Mi resta $5-2=3$

Ho 3. x_4 pesa 2. Lo metto nello zaino. Mi resta $3-2=1$

Ho 1. x_3 pesa 2. Non entra, ne prendo solo metà. Lo metto nello zaino. Mi resta $1-2=-1$

Perciò $x^* = (0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1)$. L'upper bound è $\bar{z} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 10 = 21$

→ EURISTICA (noi usiamo Greedy Costo Unitario Decrescente (CUD)) serve a dare il lower bound $\underline{z}$

Chiamo $\bar{x}$ la soluzione dell'euristica $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con valori in $\{0, 1\}$. Prendiamo quindi gli elementi in ordine di CUD

Ho 5. x_5 pesa 2. Lo metto nello zaino. Mi resta $5-2=3$

Ho 3. x_4 pesa 2. Lo metto nello zaino. Mi resta $3-2=1$

Ho 1. x_3 pesa 2. Non entra, non lo metto. Mi resta 1

Ho 1. x_2 pesa 2. Non entra, non lo metto. Mi resta 1

Ho 1. x_1 pesa 1. Lo metto nello zaino. Mi resta $1-1=0$

Perciò $\bar{x} = (1, 0, 0, 1, 1)$. Il lower bound è $\underline{z} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 10 = 19$

→ BRANCHING (lo facciamo sulla variabile frazionaria di x^*)

x_3 è la variabile frazionaria. Creiamo 2 sotto problemi: P_1 in cui $x_3 = 1$, P_2 in cui $x_3 = 0$.

Aggiorniamo la coda $Q = \{(P_1), (P_2)\}$, aggiorniamo $z = 19$ $z = \max\{z, \max\{z \in P_i \mid P_i \in Q\}\}$

→ NEXT (approccio breadth First quindi operiamo in ampiezza)

Adesso devo ripetere le stesse identiche fasi per il problema P_1 ($x_3 = 1$)

• rilassamento: $x^* = (0, 0, 1, \frac{1}{2}, 1)$. $\bar{z} = 20$

• euristica: $\bar{x} = (1, 0, 1, 0, 1)$. $\underline{z} = 17$

• branching: poiché $\bar{z} > \underline{z}$ facciamo il branching sulla variabile frazionaria x_4 . Aggiorniamo la coda $Q = \{(P_1), (P_2), (P_3), (P_4)\}$. $z > \bar{z}$ dunque $z = 19$.

Adesso devo ripetere le stesse fasi per P_2 ($x_3 = 0$)

- rilassamento: $x^* = (0, \frac{1}{2}, 0, 1, 1)$ $\bar{z} = 20$
- euristica: $\bar{x} = (1, 0, 0, 1, 1)$ $z = 19$
- branching: poiché $\bar{z} > z$ facciamo il branching sulla variabile frazionaria x_2
Aggiorniamo la coda $Q = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. $z = \bar{z} = 19$

Adesso devo ripetere le stesse fasi per P_3 ($x_3 = 1, x_4 = 1$)

- rilassamento: $x^* = (0, 0, 1, 1, \frac{1}{2})$ $\bar{z} = 19$
- euristica: $\bar{x} = (1, 0, 1, 1, 0)$ $z = 15$
- branching: poiché $\bar{z} \leq z$ il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore
Aggiorniamo la coda $Q = \{P_1, P_2, P_4, P_5, P_6\}$ $z = 19$

Adesso devo ripetere le stesse fasi per P_4 ($x_3 = 1, x_4 = 0$)

- rilassamento: $x^* = (0, \frac{1}{2}, 1, 0, 1)$ $\bar{z} = 18$
- euristica: $\bar{x} = (1, 0, 1, 0, 1)$ $z = 17$
- branching: poiché $\bar{z} \leq z$ il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore
Aggiorniamo la coda $Q = \{P_2, P_5, P_6\}$ $z = 19$
(non c'è P_1 perché ho chiuso i suoi sottonodi)

Adesso devo ripetere le stesse fasi per P_5 ($x_3 = 0, x_4 = 1$)

- rilassamento: $x^* = (0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1)$ $\bar{z} = 18$
- euristica: $\bar{x} = (1, 1, 0, 0, 1)$ $z = 15$
- branching: poiché $\bar{z} \leq z$ il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore
Aggiorniamo la coda $Q = \{P_2, P_6\}$ $z = 19$

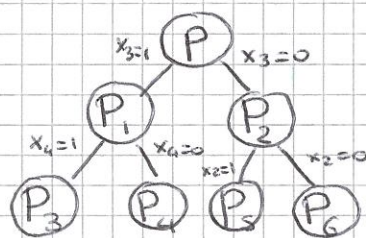
Adesso devo ripetere le stesse fasi per P_6 ($x_3 = 0, x_4 = 0$)

- rilassamento: $x^* = (1, 0, 0, 1, 1)$ $\bar{z} = 19$
- euristica: $\bar{x} = (1, 0, 0, 1, 1)$ $z = 19$
- branching: poiché $\bar{z} = z$ il nodo viene chiuso per ottimalità ^{in questo caso anche per valutazione superiore}
Aggiorniamo la coda $Q = \emptyset$ $z = 19$

L'algoritmo termina perché Q è vuota. La soluzione ottima è $x = (1, 0, 0, 1, 1)$
il valore è $z = 19$

Per il secondo punto basta cambiare il beneficio di x_2 e ripetere l'algoritmo (chiaramente fare osservazioni intelligenti è più conveniente)

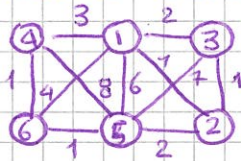
U.B. il gap relativo è $\frac{\bar{z} - z}{z}$
con $\bar{z} = \min\{\bar{z} \in P_i \mid P_i \in Q\}$



Commesso viaggiatore

(esercizio 3 18/07/22)
pag. 33

Si risolve l'istanza di TSP in figura mediante l'algoritmo Branch and Bound che usa MST come rilassamento, non utilizza nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore r_2 di lati in esso incidenti nella soluzione di MST (a parità di valore quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visita l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda, e si inseriscano in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente (ad esempio se si seleziona il nodo 1, (1,2) è inserito prima di (1,3)). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perdersi. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap relativo quando l'esecuzione viene interrotta, giustificando la risposta.

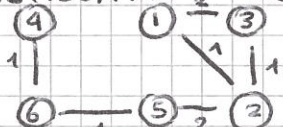


→ INIZIALIZZAZIONE

La coda $Q = \{(P)\}$ viene inizializzata inserendo solo la radice dell'albero delle decisioni e $z = +\infty$

IT 1 con MST scelgo gli $n-1$ archi meno costosi e con MST scelgo l' n -esimo arco meno costoso

RILASSAMENTO (noi usiamo MST)



$$z = \sum x_{ij} = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8$$

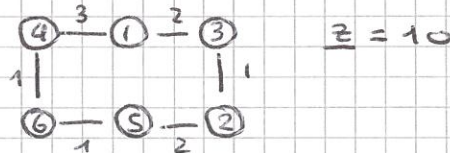
BRANCHING (sui lati incidenti)

non è un ciclo hamiltoniano (ovvero hanno più di 2 archi incidenti) quindi facciamo il branching su 2. Creiamo 3 sotto problemi:
 P_1 in cui $x_{12} = 0$; P_2 in cui $x_{23} = 0$; P_3 in cui $x_{25} = 0$.

Aggiorniamo la coda $Q = \{(P), (P_1), (P_2)\}$

Adesso analizzo P_1

• rilassamento:

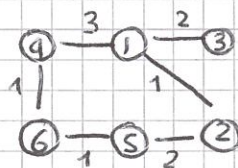


$$z = 10$$

• branching: poiché $z \geq z$, il nodo viene chiuso per valutazione inferiore
 $z = \min\{z, \max\{z \in P \mid P \in Q\}\}$

Adesso analizzo P_2

• rilassamento

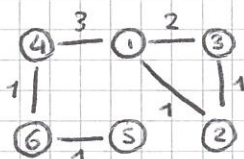


$$z = 10$$

• branching: poiché $z \geq z$, il nodo viene chiuso per valutazione inferiore

Adesso analizzo P_3

• rilassamento



$$z = 9$$

• branching: dato che non è hamiltoniano eseguo il branching su 1. Creiamo 3 sotto problemi: P_4 in cui $x_{12} = 0$; P_5 in cui $x_{13} = 0$; P_6 in cui $x_{14} = 0$.

In questo caso viene richiesto di terminare e' a Roritmo anticipatamente.

Calcolo il gap relativo $\frac{\underline{z} - \bar{z}}{\bar{z}}$ con $\underline{z} = \min \{z, \min \{z \in P \mid z \in Q\}\}$

in questo caso $\frac{10 - 9}{9} = \frac{1}{9} = 11,11\%$

Costruire un modello

