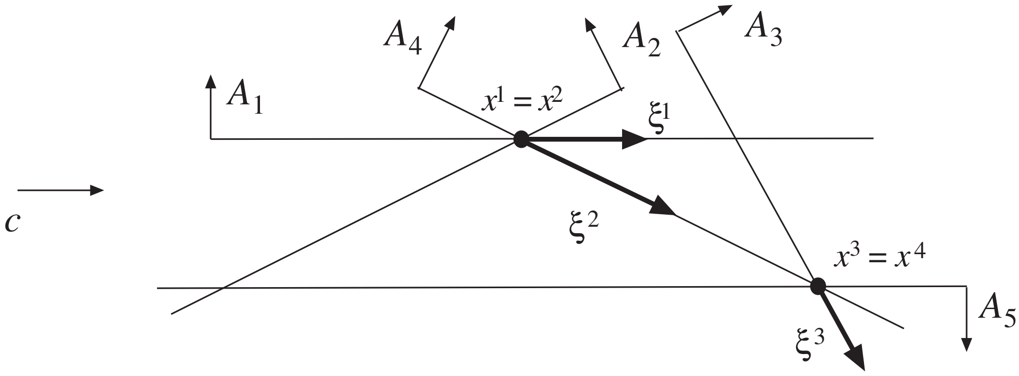
# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente il problema di *PL* in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale $x$ e la direzione di spostamento $\xi$ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito, si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale, individuate dall'algoritmo.




**SVOLGIMENTO**

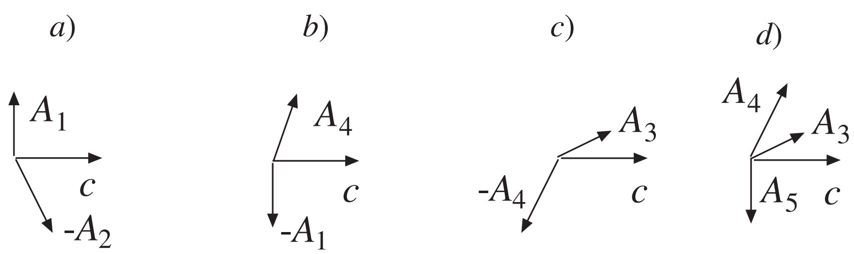
it. 1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_1$ e $-A_2$, come mostrato in *a*). Quindi $h = 2$. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 4\}$, e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, che è attivo ma non in base: quindi $k = 4$ e si esegue un cambio di base degenere.

it. 2) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_1$ e $A_4$, come mostrato in *b*). Quindi $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 5, quindi $k = \min\{3, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. Il cambio di base è pertanto non degenere.

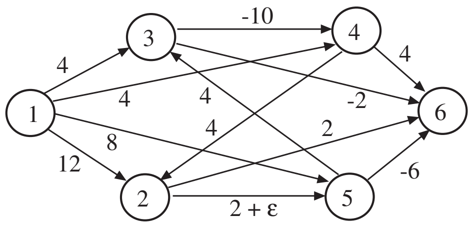
it. 3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_3$ e $-A_4$, come mostrato in *c*). Quindi $h = 4$. La base è primale degenere in quanto $I(x^3) = \{3, 4, 5\}$, e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^3$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, che è attivo ma non in base: quindi $k = 5$ e si esegue un ulteriore cambio di base degenere.

it. 4) $B = \{3, 5\}$, $y_3 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_3$ e $A_5$, come mostrato in *d*). Pertanto l'algoritmo termina con esito ottimo finito. La base è duale non degenere, mentre resta primale degenere in quanto $x^4 = x^3$ implica $I(x^4) = I(x^3)$.

La soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è unica, in quanto non esistono facce del poliedro (di dimensione maggiore di zero) incidenti nel vertice corrispondente a tale soluzione ottima e perpendicolari al gradiente $c$ della funzione obiettivo. La soluzione ottima duale invece non è unica. Tale proprietà si può verificare mediante la figura *d*), in quanto esistono basi alternative (ad esempio $B' = \{4, 5\}$) che individuano la stessa soluzione ottima primale ma una diversa soluzione ammissibile duale, che è quindi anch'essa ottima per il problema duale.



**2)** Si consideri la famiglia di problemi di albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, al variare del parametro reale $\varepsilon$. Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 per $\varepsilon = 0$, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati $Q$. In ogni iterazione si visitino gli archi in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Infine si indichi: $i$) per quali valori del parametro $\varepsilon$ la soluzione ottenuta rimane ottima, $ii$) per quali valori del parametro $\varepsilon$ il problema diventa inferiormente illimitato, giustificando la risposta.




**SVOLGIMENTO**

Essendo presenti cicli orientati (ad esempio $(3, 4, 2, 5, 3)$) e archi di costo negativo (ma non cicli di costo negativo), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L in cui $Q$ è implementata come una *coda*, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 12 + 1 = 61.$

| it. | u | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 61 | 61 | 61 | 61 | 61 | $(1)$ |
| 1 | 1 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 12 | 4 | 4 | 8 | 61 | $(2,3,4,5)$ |
| 2 | 2 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 12 | 4 | 4 | 8 | 14 | $(3,4,5,6)$ |
| 3 | 3 | *nil* | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 0 | 12 | 4 | $-6$ | 8 | 2 | $(4,5,6)$ |
| 4 | 4 | *nil* | 4 | 1 | 3 | 1 | 4 | 0 | $-2$ | 4 | $-6$ | 8 | $-2$ | $(5,6,2)$ |
| 5 | 5 | *nil* | 4 | 1 | 3 | 1 | 4 | 0 | $-2$ | 4 | $-6$ | 8 | $-2$ | $(6,2)$ |
| 6 | 6 | *nil* | 4 | 1 | 3 | 1 | 4 | 0 | $-2$ | 4 | $-6$ | 8 | $-2$ | $(2)$ |
| 7 | 2 | *nil* | 4 | 1 | 3 | 2 | 4 | 0 | $-2$ | 4 | $-6$ | 0 | $-2$ | $(5)$ |
| 8 | 5 | *nil* | 4 | 1 | 3 | 2 | 5 | 0 | $-2$ | 4 | $-6$ | 0 | $-6$ | $(6)$ |
| 9 | 6 | *nil* | 4 | 1 | 3 | 2 | 5 | 0 | $-2$ | 4 | $-6$ | 0 | $-6$ | $\emptyset$ |

L'albero dei cammini minimi è mostrato in figura a). Le etichette associate a tale albero, espresse in funzione del parametro $\varepsilon$, sono $d[5] = \varepsilon$ e $d[6] = \varepsilon - 6$ (le altre etichette non dipendono da $\varepsilon$). Ovvero, solo $d[5]$ e $d[6]$ dipendono da $\varepsilon$. Segue che gli archi del grafo che non hanno il nodo 5 e/o il nodo 6 come coda o testa soddisfano le condizioni di Bellman per ogni valore di $\varepsilon$. Resta quindi da verificare per quali valori di $\varepsilon$ i restanti archi, non appartenenti all'albero, soddisfino tali condizioni:

$$d[2] + c_{26} \geq d[6] \iff \varepsilon \leq 6$$

$$d[3] + c_{36} \geq d[6] \iff \varepsilon \leq 8$$

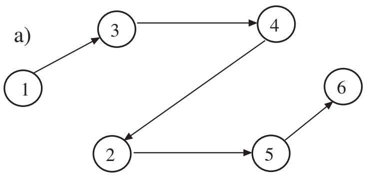
$$d[4] + c_{46} \geq d[4] \iff \varepsilon \leq 4$$

$$d[1] + c_{15} \geq d[5] \iff \varepsilon \leq 8$$

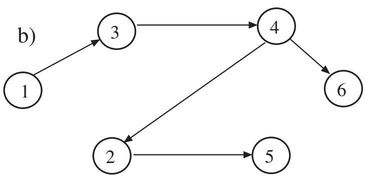
$$d[5] + c_{53} \geq d[3] \iff \varepsilon \geq 0.$$

Segue che l'albero individuato resta ottimo se e solo se $0 \leq \varepsilon \leq 4$. La soluzione ottima cambia invece per $\varepsilon > 4$: in figura b) è riportato, a titolo di esempio, l'albero dei cammini minimi per $\varepsilon = 5$. Per $\varepsilon > 4$, in ogni modo, il problema ammette ottimo finito. Per $\varepsilon < 0$, invece, il ciclo orientato $(3, 4, 2, 5, 3)$ assume costo negativo, e pertanto il problema risulta inferiormente illimitato.

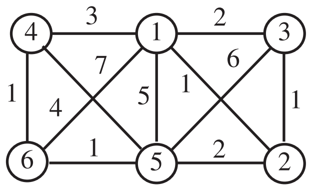
a)



b)



**3)** Si risolva la seguente istanza del problema TSP




mediante un algoritmo di Branch and Bound che utilizza MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo $i$ con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti in MS1T, crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero le variabili corrispondenti a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, e si inseriscano in coda i figli di un nodo dell'albero delle decisioni in ordine lessicografico crescente dell'insieme di archi la cui variabile è fissata a zero. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap relativo ottenuto al momento dell'interruzione dell'algoritmo, giustificando la risposta.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 8$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata nessuna soluzione ammissibile e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre archi incidenti, e e creare tre figli, in ciascuno dei quali si fissa a zero la variabile corrispondenti a uno di tali archi.

$\boxed{x_{21} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (b). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 10$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

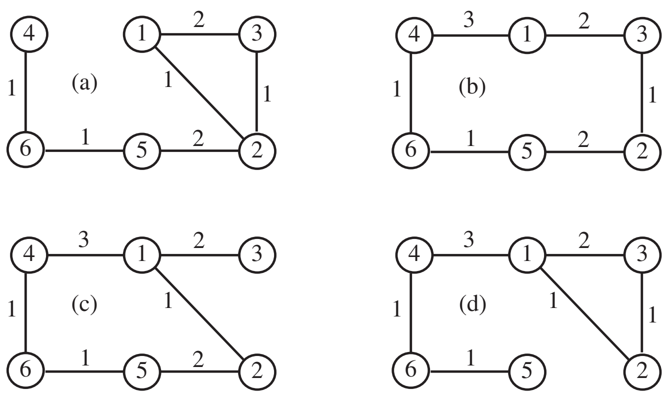
$\boxed{x_{23} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} \geq z$, il nodo viene potato dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{25} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 9$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} < z = 10$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, la variabile relativa agli archi $(1,2)$, $(1,3)$ e $(1,4)$.

Poiché $Q$ non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo di Branch and Bound assicura che

$$\min\left\{ z \;,\; \min\{\, \underline{z}(P') \;:\; P' \in Q' \,\}\right\}$$

è una valutazione inferiore globale, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso $Q'$ contiene il nodo $x_{25} = 0$, che ha $\underline{z} = 9$, e pertanto una valutazione inferiore globale è 9. Poiché $z = 10$, il gap relativo quando l'algoritmo viene interrotto è limitato superiormente da $(10-9)/9 \approx 11.11\%$.



# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & \beta x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
$$

Si determinino tutte le terne di valori dei parametri reali $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ per i quali $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ sono rispettivamente una soluzione ottima del problema e del suo duale. Fissati quindi $\alpha = 0$, $\beta = 3$ e $\gamma = 3$, si dimostri che in tale scenario $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile ma non ottima per $(P)$, e si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Consideriamo il problema dato e il suo duale:

$$
(P)\quad
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & \beta x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
\qquad
(D)\quad
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 5y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 4y_4 & & \\
 & \beta y_1 & + & \gamma y_2 & - & \alpha y_3 & + & y_4 & = & 4 \\
 & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & \alpha y_4 & = & 1 \\
 & 4y_1 & & & + & 2y_3 & - & \beta y_4 & = & 4 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Affinché $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime, rispettivamente primale e duale, devono soddisfare le condizioni degli scarti complementari. Poiché $\bar{y}_2, \bar{y}_3 > 0$, ciò accade se e solo se i corrispondenti vincoli del problema primale sono attivi in $\bar{x}$. Deve pertanto valere:

$$\gamma - 1 = 3, \quad -\alpha + 1 = 1,$$

da cui si ricava $\gamma = 4$ e $\alpha = 0$. Affinché $\bar{x}$ sia ammissibile per il problema primale, i rimanenti vincoli devono essere soddisfatti, ovvero deve valere:

$$1 + \beta \leq 5, \quad 1 + \alpha \leq 4.$$

Poiché $\alpha = 0$, la seconda disuguaglianza è verificata mentre la prima lo è per $\beta \leq 4$. Infine, posti $\gamma = 4$ e $\alpha = 0$, la soluzione $\bar{y}$ è ammissibile per il problema duale per qualsiasi valore di $\beta$.

Dal Teorema degli Scarti Complementari, poiché $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime del problema dato $(P)$ e del suo duale $(D)$, rispettivamente, se e solo se sono ammissibili per $(P)$ e $(D)$, rispettivamente, e soddisfano le condizioni degli scarti complementari, tale proprietà si verifica se e solo se $\alpha = 0$, $\beta \leq 4$ e $\gamma = 4$.

Fissando $\alpha = 0$, $\beta = 3$ e $\gamma = 3$, $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per $(P)$ in quanto le quattro disuguaglianze risultano verificate. In particolare, l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{3\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $y$ che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, ma nessuna soluzione con tali caratteristiche può soddisfare il primo vincolo duale in quanto $\beta y_1 + \gamma y_2 - \alpha y_3 + y_4 = 3y_1 + 3y_2 + y_4 = 0$. Segue che $\bar{x}$ non è una soluzione ottima e ammette pertanto direzioni ammissibili di crescita. L'insieme di tali direzioni è costituito da tutte le soluzioni del sistema:

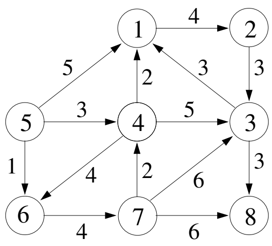
$$(PR)\quad \begin{cases} A_{I(\bar{x})}\xi & \leq \quad 0 \\ c\xi & > \quad 0, \end{cases}$$

che in questo caso diventa:

$$(PR)\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & \xi_2 & + & 2\xi_3 & \leq & 0 \\ 4\xi_1 & + & \xi_2 & + & 4\xi_3 & > & 0. \end{array} \right.$$

La direzione $\bar{\xi} = (1, 0, 0)$ è pertanto una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$.

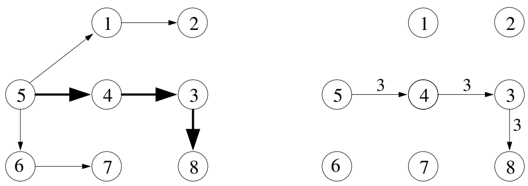
**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 8, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Si visitino gli archi di ogni stella uscente per ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si riporti il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. Aumentando la capacità dell'arco $(5,6)$ di una unità, come varia il valore del flusso massimo? Giustificare la risposta.



**SVOLGIMENTO**

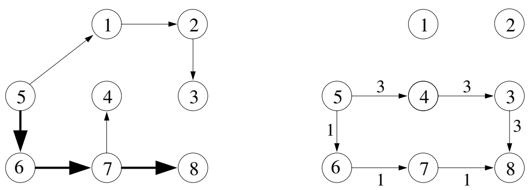
Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo $P$, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1:



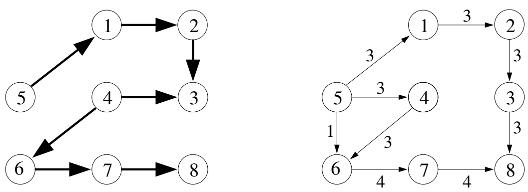
$\theta(P,x) = 3, \quad v = 3$

Iterazione 2:



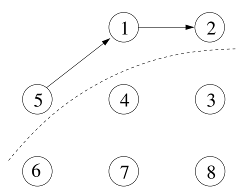
$\theta(P,x) = 1, \quad v = 4$

Iterazione 3:



$\theta(P,x) = 3, \quad v = 7$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo.
Inoltre, il taglio $N_s = \{1,2,5\}$, $N_t = \{3,4,6,7,8\}$ è di capacità minima:
$u(N_s, N_t) = u_{56} + u_{54} + u_{23} = 1 + 3 + 3 = 7 = v$.

Aumentando la capacità dell'arco $(5,6)$ di una unità, ovvero se $u_{56} = 2$, il valore del flusso massimo resta invariato. Infatti, partendo dal flusso ammissibile di valore 7 ottenuto alla terza iterazione, nel caso $u_{56} = 2$ la procedura di visita termina senza raggiungere la destinazione, individuando il taglio $(\{1,2,3,4,5,6\},\{7,8\})$, anch'esso di capacità 7. Si osservi che in tal caso $(\{1,2,5\},\{3,4,6,7,8\})$ non è più un taglio di capacità minima: la sua capacità è aumentata infatti di una unità e pertanto vale 8.

**3)** Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max & 18x_1 & +12x_2 & +10x_3 & +4x_4 & +2x_5 & & \\ & 5x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

un algoritmo Branch and Bound che usa il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, esegue il branching sull'unica variabile frazionaria nella soluzione ottima del rilassamento continuo, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli (compresa la radice) dell'albero di enumerazione. Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore e inferiore disponibili nel momento in cui l'esplorazione viene interrotta, valutando il gap relativo ottenuto.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 0]$, $\bar{z} = 37 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 34$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [1, 3/4, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 37$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 32$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [1, 1, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 34$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} \leq z$.

$\boxed{x_3 = 1, x_2 = 1}$ $x^* = [4/5, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 36 + 2/5$, $\bar{x} = [0, 1, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 26$. Poiché $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_1$.

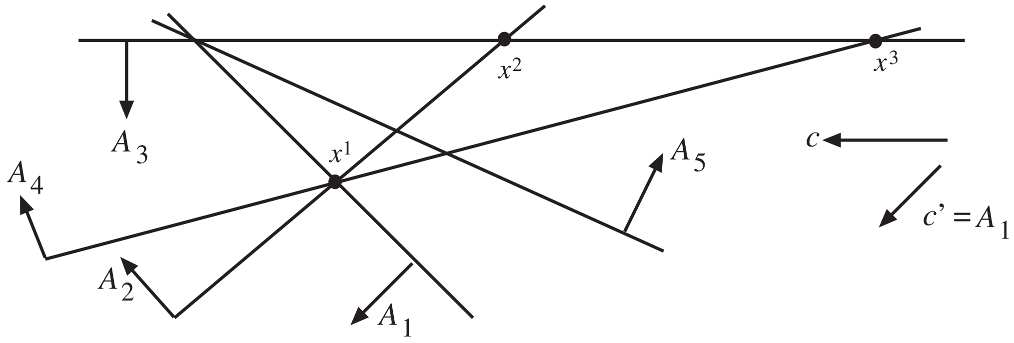
$\boxed{x_3 = 1, x_2 = 0}$ $x^* = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 32$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} \leq z$.

L'esplorazione viene a questo punto interrotta. La miglior valutazione inferiore disponibile è $z = 34$, mentre la miglior valutazione superiore disponibile è il massimo tra $z$ e le valutazioni superiori associate ai predecessori dei nodi in $Q$, ossia $36 + 2/5$ associata al nodo $\boxed{x_3 = 1, x_2 = 1}$, ovvero l'unico i cui figli sono ancora in $Q$. Poiché, essendo tutti i dati interi, una valutazione superiore più accurata è data da 36, la soluzione ottenuta è garantita avere un errore relativo $\leq (36 - 34)/34 \approx 0.058$, ossia all'incirca un gap del 6%.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il problema di *PL* in figura, per via geometrica, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante $k$, il segno delle componenti dei vettori $y_B$ e $\eta_B$, e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Si specifichi infine come cambierebbe lo svolgimento dell'esercizio se il gradiente della funzione obiettivo fosse il vettore $c'$ riportato in figura.



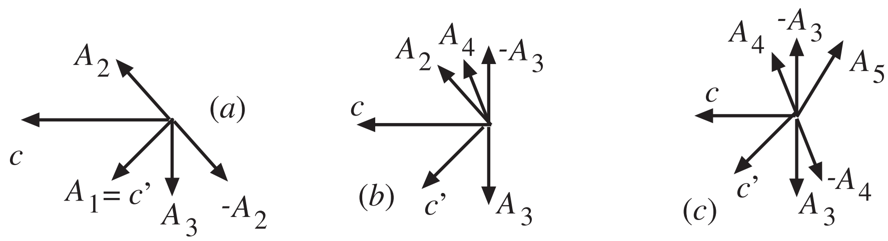

**SVOLGIMENTO**

it. 1) $B = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale $x^1$ viola il solo vincolo 3, pertanto $k = 3$ per la regola anticiclo di Bland. $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$ in quanto $c$ è interno al cono generato da $A_1$ e $A_2$. La base è pertanto duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 4\}$. Poiché $A_3 \in \text{cono}(A_1, -A_2)$, come mostrato in figura ($a$), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 < 0$, pertanto $h = 1$.

it. 2): $B = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale $x^2$ viola i vincoli 4 e 5, pertanto $k = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland. $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ in quanto $c$ è interno al cono generato da $A_2$ e $A_3$. La base è pertanto duale non degenere, ed è inoltre primale non degenere in quanto $I(x^2) = \{2, 3\}$. Poiché $A_4 \in \text{cono}(A_2, -A_3)$, come mostrato in figura ($b$), risultano $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 < 0$, pertanto $h = 2$.

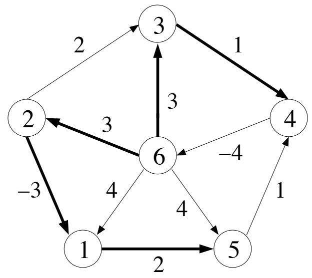
it. 3): $B = \{3, 4\}$. La soluzione di base primale $x^3$ viola il solo vincolo 5, pertanto $k = 5$. $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ in quanto $c$ è interno al cono generato da $A_3$ e $A_4$. La base è pertanto duale non degenere, ed è inoltre primale non degenere in quanto $I(x^3) = \{3, 4\}$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(-A_3, -A_4)$, come mostrato in figura ($c$), l'algoritmo termina in quanto $\eta_B \leq 0$. Segue che il problema duale è inferiormente illimitato e di conseguenza il problema primale è vuoto.

Se il gradiente della funzione obiettivo fosse $c'$, l'esecuzione dell'algoritmo sarebbe sostanzialmente invariata, in quanto tutte le basi visitate sono duali ammissibili rispetto a $c'$, come mostrato nelle figure ($a$), ($b$) e ($c$). La base $B = \{1, 2\}$, tuttavia, risulterebbe duale degenere poiché, essendo $c' = A_1$, si avrebbe $y_1 = 1$ e $y_2 = 0$.



**2)** *a)* Dato il grafo orientato in figura, si verifichi se l'albero $T$ evidenziato sia un albero dei cammini minimi di radice 6. In caso di risposta negativa, si modifichi il costo di uno o più archi del grafo in modo che $T$ diventi l'unico albero dei cammini minimi di radice 6. Giustificare le risposte.

*b)* Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice $r$ su un generico grafo orientato $G = (N, A)$. Si dimostri che nessun vettore di etichette può soddisfare le condizioni di Bellman qualora nel grafo sia presente un ciclo orientato di costo negativo.




**SVOLGIMENTO**

*a)* Sia $d$ il vettore delle etichette tale che $d(i)$ rappresenti il costo dell'unico cammino in $T$ dal nodo 6 al nodo $i$:

$$d(1) = 0, \quad d(2) = 3, \quad d(3) = 3, \quad d(4) = 4, \quad d(5) = 2, \quad d(6) = 0.$$

$T$ è un albero dei cammini minimi di radice 6 se e solo se $d$ soddisfa le condizioni di Bellman, ovvero $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$ per ogni arco $(i, j)$. Poiché gli archi in $T$ verificano tali condizioni in forma di uguaglianza, è sufficiente verificarle per gli archi non in $T$:

$$d(2) + c_{23} = 3 + 2 > 3 = d(3)$$

$$d(6) + c_{61} = 0 + 4 > 0 = d(1)$$

$$d(6) + c_{65} = 0 + 4 > 2 = d(5)$$

$$d(4) + c_{46} = 4 - 4 = 0 = d(6)$$

$$d(5) + c_{54} = 2 + 1 < 4 = d(4)$$

Segue che $T$ non è un albero dei cammini minimi di radice 6. Poiché l'unico arco a violare le condizioni di Bellman è $(5, 4)$, è sufficiente aumentare il suo costo di una quantità $\geq d(4) - (d(5) + c_{54}) = 1$ per garantire che $T$ diventi un albero dei cammini minimi di radice 6. Affinché $T$ risulti l'unico albero dei cammini minimi di radice 6, il costo dell'arco $(5, 4)$ deve essere incrementato di una quantità $> 1$, in modo che le relative condizioni di Bellman siano soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta. Si osservi che i restanti archi non in $T$ soddisfano già le condizioni di Bellman in forma di disuguaglianza stretta, ad eccezione di $(4, 6)$. L'arco $(4, 6)$, tuttavia, non può far parte di un albero dei cammini minimi di radice 6. Segue che, incrementando il costo di $(5, 4)$ di un qualsiasi valore $> 1$, $T$ diventa l'unico albero dei cammini minimi di radice 6.

*b)* Supponiamo che nel grafo $G$ sia presente un ciclo orientato $C = (i_1, i_2, ..., i_k, i_1)$ di costo negativo, ovvero $c(C) = c_{i_1 i_2} + c_{i_2 i_3} + ... + c_{i_k i_1} < 0$. Supponiamo per assurdo che esista un vettore di etichette $d$ che soddisfa le condizioni di Bellman. Considerando gli archi appartenenti al ciclo $C$, valgono allora le disuguaglianze

$$\begin{aligned} d(i_1) + c_{i_1 i_2} &\geq d(i_2) \\ d(i_2) + c_{i_2 i_3} &\geq d(i_3) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ d(i_{k-1}) + c_{i_{k-1} i_k} &\geq d(i_k) \\ d(i_k) + c_{i_k i_1} &\geq d(i_1) \end{aligned}$$

che, sommate membro a membro, danno la disuguaglianza $c(C) \geq 0$, in contraddizione con l'ipotesi.

**3)** La società *FastLog* deve progettare una rete logistica. L'insieme $N$ dei nodi della rete è prestabilito. Dato un insieme $A$ di collegamenti (ovvero archi orientati) potenzialmente utilizzabili, *FastLog* deve invece decidere quali di questi attivare, con l'obiettivo di inviare un dato prodotto da un nodo sorgente $s \in N$ a un nodo destinazione $t \in N$ lungo la rete, una volta progettata. Per ogni collegamento $(i, j) \in A$ che decida di attivare, *FastLog* deve pagare un costo fisso di attivazione $f_{ij}$. Inoltre, *FastLog* deve pagare un costo $c_{ij}$ per ogni unità di prodotto inviato lungo $(i, j)$.

Sapendo che ogni collegamento $(i, j)$, se attivato, ha una capacità pari a $u_{ij}$, e sapendo che *FastLog* ha un budget complessivo pari a $C$ (sia per i costi fissi che per i costi di invio), si proponga un modello PLI che aiuti *FastLog* a decidere quali archi attivare, e come inviare il prodotto lungo gli archi attivati, in modo da massimizzare il numero di unità inviate da $s$ a $t$, nel rispetto della capacità dei collegamenti attivati e non sforando il budget disponibile per il progetto della rete.

Come cambieresti la formulazione proposta nel caso in cui, invece di dover pagare un costo fisso di attivazione $f_{ij}$ per ogni collegamento $(i, j)$ attivato, *FastLog* dovesse decidere di quanti moduli di capacità dotare ogni collegamento $(i, j)$ (eventualmente zero, se non lo si vuole attivare), sapendo che in commercio sono disponibili moduli standard di capacità $u$ al costo unitario $f$?

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le variabili di flusso $x_{ij}$, $\forall(i, j) \in A$, tali che $x_{ij}$ denota il numero di unità di prodotto che *FastLog* decide di inviare lungo il collegamento $(i, j)$. Introduciamo inoltre le variabili binarie $y_{ij}$, $\forall(i, j) \in A$, con il seguente significato:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se viene attivato il collegamento } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando tali famiglie di variabili, è possibile formulare il problema proposto mediante il seguente modello PLI, che generalizza il modello relativo al problema di flusso massimo da un nodo sorgente $s$ a un nodo destinazione $t$. Come nel modello di flusso massimo, la variabile $v$ rappresenta il numero di unità di prodotto inviate da $s$ a $t$:

$$\begin{array}{lll}
\max & v & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & i = s \\ v & i = t \\ 0 & i \neq s,t \end{cases} & \forall i \in N \\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij} & \forall i,j) \in A \\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \leq C & \\
& y_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij} \in \mathcal{Z} & \forall (i,j) \in A
\end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, garantisce l'invio di $v$ unità di prodotto da $s$ a $t$ lungo la rete. Il secondo blocco di vincoli è costituito da vincoli di capacità congiuntamente a vincoli logici. Tali vincoli assicurano che, se il collegamento $(i, j)$ è attivato (ovvero $y_{ij} = 1$), allora è possibile inviare il prodotto lungo $(i, j)$, e il massimo numero di unità inviabili è $u_{ij}$, ovvero la capacità del collegamento. Se invece $y_{ij} = 0$, cioè $(i, j)$ non è attivato, allora non è possibile inviare il prodotto lungo $(i, j)$. Segue il vincolo di budget, che impone che il costo totale derivante dal progetto della rete, espresso dalla somma dei costi fissi di attivazione dei collegamenti e del costo totale di invio, non ecceda l'ammontare disponibile $C$. La funzione obiettivo è $v$, ovvero il numero di unità di prodotto inviate da $s$ a $t$, che pertanto verrà massimizzato.

Nel caso si dovesse decidere di quanti moduli di capacità dotare ogni collegamento $(i, j)$, basterebbe definire le variabili $y_{ij}$, $\forall(i, j) \in A$, come variabili intere non negative invece che binarie, con $y_{ij}$ indicante il numero di moduli di cui si vuole dotare $(i, j)$, e sostituire i vincoli di capacità e il vincolo di budget della formulazione proposta mediante: $0 \leq x_{ij} \leq u y_{ij}, \forall(i, j) \in A$ e $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} f y_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \leq C$.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si consideri il seguente problema di PL parametrico rispetto a $\alpha \in \Re$:

$$(P_\alpha)\qquad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & \alpha \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Si determini per quali valori di $\alpha$ la soluzione di base duale associata alla base $B = \{1, 2\}$ sia ottima per il problema duale, discutendo l'unicità di tale soluzione ottima al variare di $\alpha$. Si dimostri inoltre che il problema $(P_\alpha)$ non può essere superiormente illimitato per nessun valore di $\alpha$. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Consideriamo la matrice di base associata a $B = \{1, 2\}$ e la sua inversa:

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di base duale associata a $B$ è:

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\bar{y}$ è ottima se e solo se la corrispondente soluzione di base primale, ovvero:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

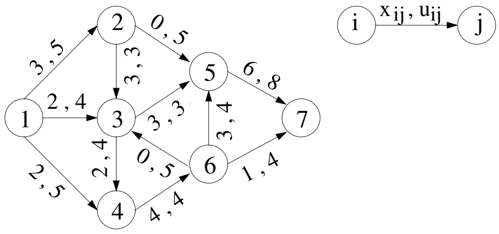
è ammissibile per $(P_\alpha)$. Ciò si verifica se e solo se $2 + 3 \leq \alpha$, ovvero se e solo se $\alpha \geq 5$.

Per discutere l'unicità della soluzione ottima $\bar{y}$ distinguiamo due casi:

1. $\alpha > 5$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ottima non degenere, e pertanto $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima duale, essendo l'unica soluzione duale ammissibile in scarti complementari con $\bar{x}$;
2. $\alpha = 5$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ottima degenere, in quanto $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$, e quindi potrebbero esistere altre soluzioni duali ammissibili in scarti complementari con $\bar{x}$, oltre a $\bar{y}$. In particolare, la soluzione di base duale ammissibile $\begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, corrispondente alla base $\{2, 3\}$, soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, ed è quindi una soluzione ottima duale alternativa a $\bar{y}$.

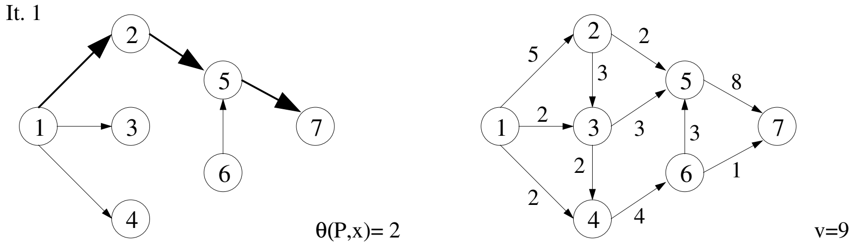
$(P_\alpha)$ non può essere superiormente illimitato per nessun valore di $\alpha$. Infatti, il problema duale ammette la soluzione ammissibile $\bar{y}$ indipendentemente dal valore assunto da $\alpha$. Da un corollario del Teorema debole della dualità segue che la funzione obiettivo di $(P_\alpha)$ è superiormente limitata.

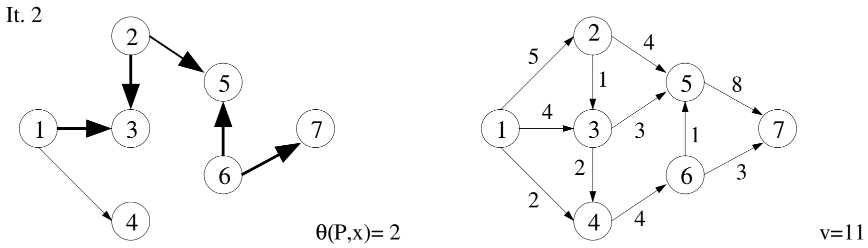
**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 7$. A ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. È possibile aumentare il valore del flusso massimo aumentando la capacità di un solo arco? Giustificare la risposta.

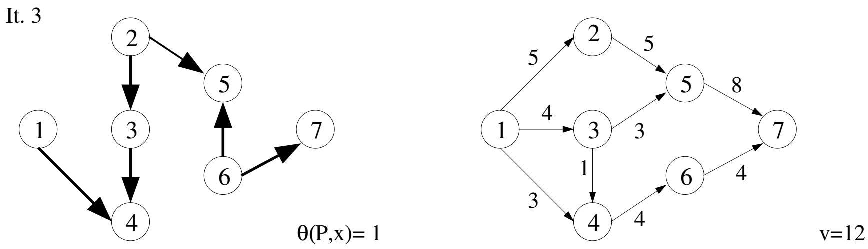


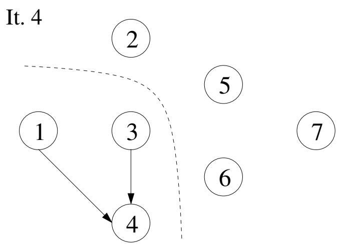

**SVOLGIMENTO**

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo $P$, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.



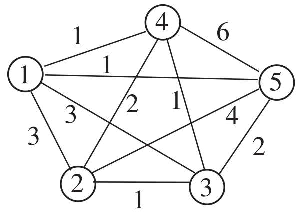




Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo e il taglio $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{35} + u_{46} = 5 + 3 + 4 = 12$.
Oltre al taglio individuato dall'algoritmo, anche il taglio $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7\})$ è di capacità minima. Poiché i due tagli non hanno archi in comune, non è possibile aumentare il valore del flusso massimo, che coincide con la capacità minima dei tagli che separano 1 da 7, aumentando la capacità di un solo arco.

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema TSP mediante un algoritmo di Branch and Bound che utilizza MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo $i$ con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti in MS1T, crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero le variabili corrispondenti a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first. Inoltre, per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap relativo ottenuto al momento dell'interruzione dell'algoritmo, giustificando la risposta.



**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 6$, è mostrato in (a). Poiché $\underline{z} < z$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli, nei quali si fissano a zero, rispettivamente, le variabili $x_{23}$, $x_{34}$ e $x_{35}$.

$\boxed{x_{34} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 7$, è mostrato in (c). Poiché è un ciclo Hamiltoniano e $z = +\infty > 7$, si pone $z = 7$; inoltre, il nodo viene chiuso per ottimalità.

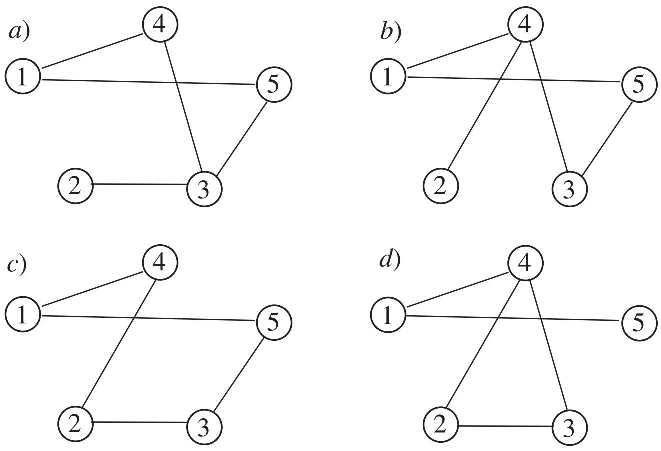
$\boxed{x_{23} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 7$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} \geq z$, il nodo viene potato dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{35} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 6$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} < z$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, le variabili $x_{14}$, $x_{24}$ e $x_{34}$.

Poiché $Q$ non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo di Branch and Bound assicura che

$$\min\left\{\ z\ ,\ \min\left\{\ \underline{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \right\}\ \right\}$$

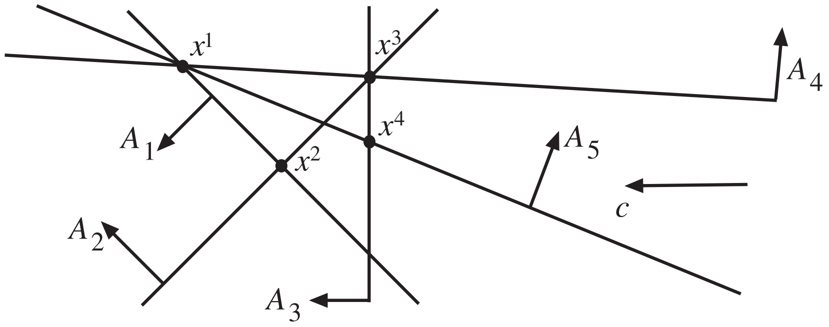
è una valutazione inferiore globale, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. La migliore valutazione inferiore disponibile è pertanto 6, mentre la miglior valutazione superiore disponibile è 7. Quindi il gap relativo ottenuto è pari a $1/6 = 16.\bar{6}\%$.



# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il problema di $PL$ in figura, per via geometrica, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Si osservi che $c \,//\, A_3$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante $k$, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e $\eta_B$, e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si individui l'insieme delle soluzioni ottime sia del problema primale che del problema duale, giustificando la risposta.




**SVOLGIMENTO**

it. 1) $B = \{1, 4\}$. La soluzione di base primale $x^1$ viola i vincoli 2 e 3, pertanto $k = 2$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ in quanto $c$ è interno al cono generato da $A_1$ e $A_4$. La base è pertanto duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 4, 5\} \neq B$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_1, A_4)$, come mostrato in figura $(a)$, si ha $\eta_1 > 0$ e $\eta_4 > 0$. Poiché la base $\{1, 2\}$ è ammissibile mentre la base $\{2, 4\}$ non lo è, come è immediato verificare sempre mediante la figura $(a)$, deve necessariamente risultare $h = 4$.

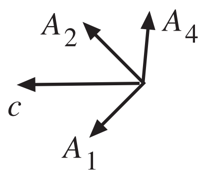
it. 2) $B = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale $x^2$ viola il solo vincolo 3, pertanto $k = 3$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto $c$ è interno al cono generato da $A_1$ e $A_2$. La base è pertanto duale non degenere, e anche primale non degenere in quanto $I(x^2) = \{1, 2\}$. Poiché $A_3 \in \text{cono}(A_1, A_2)$, come mostrato in figura $(b)$, risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Essendo $c \,//\, A_3$ si ha inoltre $\bar{y}_1/\eta_1 = \bar{y}_2/\eta_2$, e pertanto $h = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3): $B = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale $x^3$ viola il solo vincolo 5, pertanto $k = 5$. Poiché $c \,//\, A_3$ si ha $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_3 > 0$. La base è pertanto duale degenere, ed è anche primale degenere in quanto $I(x^3) = \{2, 3, 4\}$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(A_2, -A_3)$, come mostrato in figura $(c)$, risultano $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 < 0$, e pertanto $h = 2$.

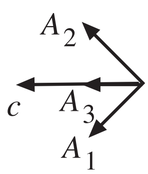
it. 4): $B = \{3, 5\}$. La soluzione di base primale $x^4$ non viola alcun vincolo, ed è quindi una soluzione ottima del problema primale. Poiché $c \,//\, A_3$ si ha $\bar{y}_3 > 0$ e $\bar{y}_5 = 0$. La base è pertanto duale degenere, mentre è primale non degenere in quanto $I(x^4) = \{3, 5\}$.

Poiché $c \,//\, A_3$, $x^4$ non è l'unica soluzione ottima primale. L'insieme delle soluzioni ottime del problema primale è infatti costituito dalla faccia del poliedro individuato dall'iperpiano corrispondente al terzo vincolo, avente come estremi $x^4$ e il vertice del poliedro ottenuto dall'intersezione degli iperpiani corrispondenti al primo e al terzo vincolo.

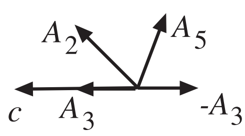
Poiché $B = \{3, 5\}$ è primale non degenere, invece, il problema duale ammette un'unica soluzione ottima, ovvero $(0, 0, \bar{y}_3, 0, 0)$.




(a)

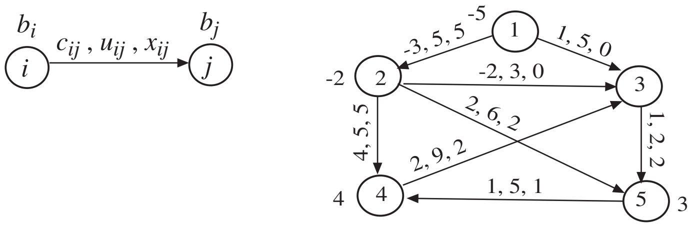



(b)



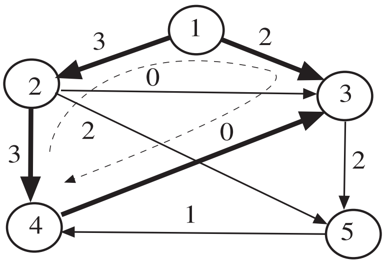

(c)

**2)** Si risolva il problema di flusso di costo minimo per l'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 16$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

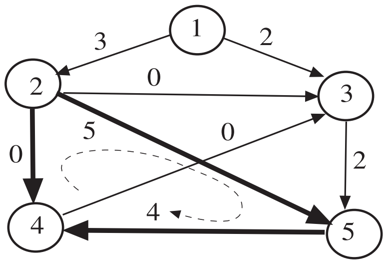


**SVOLGIMENTO**

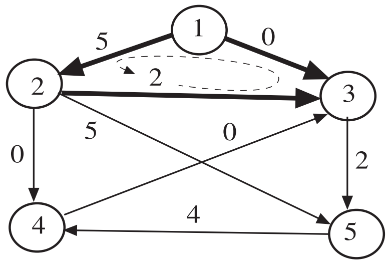
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (in alto, da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo $C$ utilizzato (archi evidenziati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità $\theta$, nonché il flusso $x$ al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con $C$, con il relativo costo $cx$. La figura in basso mostra invece il grafo residuo relativo all'ultimo flusso individuato e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi evidenziati) di radice fittizia $r$ (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato $x$, che è quindi un flusso di costo minimo.



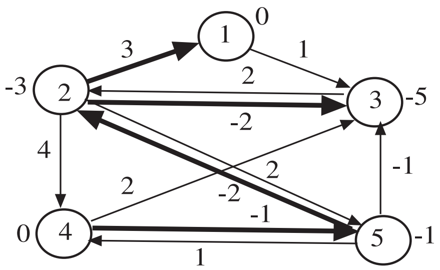
θ = 2, c(C) = -2, *cx* = 12



θ = 3, c(C) = -1, *cx* = 9



θ = 2, c(C) = -6, *cx* = -3



**3)** Il comune di Pisa decide di aprire alcuni centri vaccinali, per far fronte alla crescente richiesta. Individua pertanto un insieme $J$ di siti candidati per la costruzione di tali centri, e stima pari a $c_j$ il costo da sostenere per costruire un centro nel sito $j$, $j \in J$. Individua inoltre l'insieme dei quartieri $I$ che necessitano del servizio di vaccinazione, e stima pari ad $a_i$ il numero di abitanti del quartiere $i$ ancora da vaccinare, $i \in I$.

Gli assessori preposti al servizio valutano che 15 minuti sia il tempo di viaggio adeguato per accedere al servizio. In altri termini, il tempo che un abitante dovrebbe impiegare per recarsi dal proprio quartiere a un centro di vaccinazione non dovrebbe eccedere 15 minuti. Il comune di Pisa ha però un budget limitato, pari a $B$. Decide quindi di costruire centri vaccinali, compatibilmente con il budget disponibile, in modo da massimizzare il numero di abitanti che riusciranno a recarsi presso un centro vaccinale entro tale limite temporale, ovvero entro 15 minuti. Per garantire un servizio accettabile per tutti, si stabilisce inoltre che ogni abitante debba comunque potersi recare presso almeno uno dei centri aperti entro 30 minuti.

Dati i sottoinsiemi $D_{15}(i)$ e $D_{30}(i)$ che specificano, per ogni quartiere $i$, i siti in $J$ la cui distanza temporale da $i$ è $\leq 15$ minuti e $\leq 30$ minuti, rispettivamente, si formuli in termini di PLI il problema di decidere in quali siti di $J$ costruire i centri rispettando il vincolo di budget e garantendo che ogni abitante possa recarsi presso almeno uno dei centri aperti entro 30 minuti, con l'obiettivo di massimizzare il numero di abitanti che riusciranno a recarsi presso un centro vaccinale entro 15 minuti.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema introduciamo le variabili binarie

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperto un centro vaccinale nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J.$$

Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se il quartiere } i \text{ ha una distanza temporale} \leq 15 \text{ min da almeno un centro aperto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in I.$$

Utilizzando tali variabili decisionali, il problema del comune di Pisa può essere formulato mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i \in I} a_i z_i & \\ & \sum_{j \in J} c_j y_j \leq B & \\ & \sum_{j \in D_{30}(i)} y_j \geq 1 & i \in I \\ & \sum_{j \in D_{15}(i)} y_j \geq z_i & i \in I \\ & y_j \in \{0,1\} & j \in J \\ & z_i \in \{0,1\} & i \in I. \end{array}$$

Il primo vincolo è il vincolo di budget. Tale vincolo impone che il costo totale di costruzione dei centri non ecceda il budget disponibile $B$. Il secondo blocco è costituito da classici vincoli di copertura: per ogni quartiere $i$, si impone che almeno uno dei centri aperti disti da $i$ non più di 30 minuti. Tali vincoli garantiscono quindi che ogni abitante possa recarsi presso almeno uno dei centri vaccinali aperti entro 30 minuti.

Il terzo blocco di vincoli è costituito da vincoli di copertura e vincoli logici. Per ogni quartiere $i$, se nessun centro è raggiungibile da $i$ entro 15 minuti, allora $\sum_{j \in D_{15}(i)} y_j = 0$, e ciò forza la variabile $z_i$ a 0. Se invece almeno un centro è raggiungibile da $i$ entro 15 minuti, allora $\sum_{j \in D_{15}(i)} y_j$ è un intero $\geq 1$. In questo caso $z_i$ può assumere sia il valore 0 che il valore 1. A livello di soluzione ottima, tuttavia, poiché la funzione obiettivo, da massimizzare, è $\sum_{i \in I} a_i z_i$, in tale caso $z_i$ assumerà correttamente il valore 1, segnalando che il quartiere $i$ ha una distanza temporale $\leq 15$ min da almeno un centro vaccinale aperto, e conteggiando gli abitanti del quartiere $i$ nel gruppo di cittadini che riescono a recarsi presso un centro vaccinale nel tempo ritenuto più adeguato, ovvero entro 15 minuti.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\
& y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\
& y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & -1 \\
& y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Utilizzando le condizioni degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ sia ottima per il problema. Nel caso in cui lo sia, si discuta se $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ sia l'unica soluzione ottima del problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{c} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min \ y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema della dualità forte e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità duale:

**Proposizione.** Sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per $(D)$. $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per $(P)$ complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & - & x_2 & & \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
& x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
& & - & x_2 & \leq & 1
\end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\
& y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\
& y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & -1 \\
& y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ è ammissibile per $(D)$. L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{2\}$. Di conseguenza, una soluzione primale ammissibile $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_2 - A_2\bar{x} = 0$, ovvero il secondo vincolo deve essere attivo. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere l'equazione

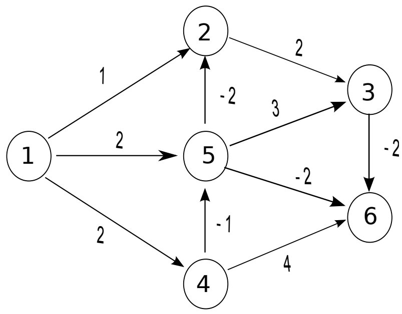
$$x_1 \ - \ x_2 \ = \ 1.$$

Posto $x_2 = \alpha$, tale equazione ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (1 + \alpha, \alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per $(P)$ per ogni $-1 \leq \alpha \leq 1/2$. Infatti, $x(\alpha)$ rispetta il primo vincolo per $\alpha \leq 1/2$, il terzo per $\alpha \leq 1$ e il quarto per $\alpha \geq -1$. Poiché per $-1 \leq \alpha \leq 1/2$ la soluzione $x(\alpha)$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$ ed è ammissibile, $\bar{y}$ è una soluzione ottima per $(D)$. Poiché inoltre ogni soluzione ottima di $(P)$ deve essere ammissibile e complementare a $\bar{y}$, $\{(1 + \alpha, \alpha) \ : \ -1 \leq \alpha \leq 1/2\}$ rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema $(P)$, duale di quello dato.

Considerando la soluzione ottima primale $(1, 0)$, ottenuta fissando $\alpha = 0$, è immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per tale soluzione è $\{2\}$. Pertanto, la prima, la terza e la quarta variabile devono valere 0 in qualsiasi solutione duale ammissibili in scarti complementari con $(1, 0)$. Segue che $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema dato.

**2)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$ (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima è unica?

Infine, si discuta quale algoritmo converrebbe utilizzare, dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, nel caso in cui l'arco $(4, 6)$ cambiasse orientamento, mantenendo invariato il proprio costo. Giustificare le risposte.




**SVOLGIMENTO**
Rinumerando i nodi come segue

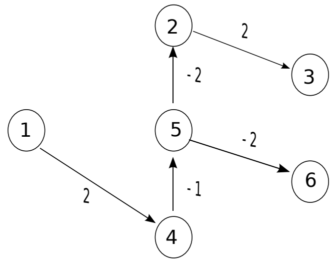
| originale | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| rinumerato | 1 | 4 | 5 | 2 | 3 | 6 |

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco $(i, j)$ del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi. Inoltre, non viene riportato $Q$ in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

$$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 5 \times 4 + 1 = 21.$$

| it. | u | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 21 | 21 | 21 | 21 | 21 |
| 1 | 1 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 21 | 21 |
| 2 | 2 | *nil* | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 21 | 6 |
| 3 | 3 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | $-1$ | 4 | $-1$ |
| 4 | 4 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 0 | 2 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| 5 | 5 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 0 | 2 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):




La soluzione ottima non è unica. Infatti l'arco $(3, 6)$, di costo $-2$, rispetta le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza e può sostituire l'arco $(5, 6)$ nell'albero individuato, producendo un diverso albero dei cammini minimi di radice 1. Se l'arco $(4, 6)$ cambiasse orientamento, il grafo non risulterebbe più aciclico: conterrebbe infatti tre cicli orientati di costo positivo. Per la presenza di archi di costo negativo, l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulterebbe quindi essere l'algoritmo di Bellman, avente complessità in tempo pari a $O(mn)$.

**3)** L'agenzia per lo sviluppo energetico *Energie* deve aprire $p$ centrali elettriche. Individua pertanto un insieme $J$ di siti candidati all'apertura di una centrale, con $|J| \geq p$. L'agenzia censisce inoltre l'insieme $I$ dei principali centri abitati della regione interessata, e stima le distanze $d_{ij}$ intercorrenti tra il centro abitato $i$ e il sito candidato $j$, $\forall i \in I, j \in J$.

Tenendo conto che, per ogni centro abitato $i$, la centrale elettrica *critica* per $i$ è la centrale più vicina a $i$ tra quelle aperte, si formuli in termini di PLI il problema di decidere dove aprire le $p$ centrali elettriche in modo da massimizzare la minima distanza intercorrente tra un centro abitato e la centrale elettrica critica per tale centro abitato.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema introduciamo le variabili binarie

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'agenzia per lo sviluppo energetico decide di aprire una centrale elettrica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J.$$

Introduciamo inoltre una variabile ausiliaria $z$ per stimare la minima distanza centro abitato - centrale critica. Utilizzando tali variabili decisionali, il problema di *Energie* può essere formulato mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll} \max & z & \\ & \sum_{j \in J} x_j = p & \\ & x_j d_{ij} + M(1 - x_j) \geq z & i \in I, j \in J \\ & x_j \in \{0, 1\} & j \in J \end{array}$$

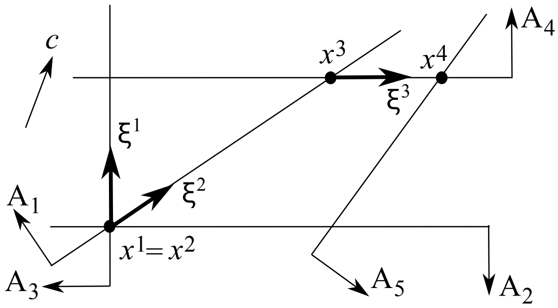
Il primo vincolo impone che vengano aperte $p$ centrali elettriche. Il secondo blocco di vincoli, in cui $M$ è una costante opportunamente elevata, garantisce che, per ogni centro abitato $i$, $z$ sia una stima per difetto della distanza intercorrente tra $i$ e la relativa centrale elettrica critica (la più vicina a $i$). Infatti, se $x_j = 1$, ovvero in $j$ è stata aperta una centrale elettrica, il vincolo relativo al centro abitato $i$ garantisce che sia $z \leq d_{ij}$. Se invece $x_j = 0$, il vincolo risulta sempre soddisfatto se $M$ viene scelta adeguatamente. Ad esempio, $M$ può essere scelta uguale alla massima distanza tra i centri in $I$ e i siti in $J$, ovvero $M = \max_{i \in I, j \in J} d_{ij}$. Alternativamente, è possibile scegliere una costante distinta $M_i$ per ogni $i$, pari a $\max_{j \in J} d_{ij}$. Si noti che, stimando $z$ per difetto la distanza tra $i$ e la sua centrale critica per ogni $i$, $z$ stima anche per difetto la minima di tali distanze.

Poiché la funzione obiettivo, da massimizzare, è $z$, a livello di soluzione ottima $z$ risulterà uguale alla minima distanza intercorrente tra un centro abitato e la relativa centrale critica, che verrà pertanto massimizzata.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di $PL$ in figura a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si specifichino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, se l'algoritmo termina con esito "ottimo finito", si discuta l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia primale che duale. Si discuta infine come cambierebbe la risposta finale nel caso in cui il vettore dei costi venisse modificato, e risultasse $c = A_5$.




**SVOLGIMENTO**

it. 1) $B = \{2, 3\}$: $y_2 < 0$ e $y_3 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_2$ e $-A_3$, come mostrato in *a*). Quindi $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland. La base è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 3\}$ (esiste un vincolo attivo non in base), ma duale non degenere perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^1$ è nullo, e si ottiene in corrispondenza del vincolo 1, che è attivo ma non in base. Quindi $k = 1$, e si esegue un cambio di base degenere.

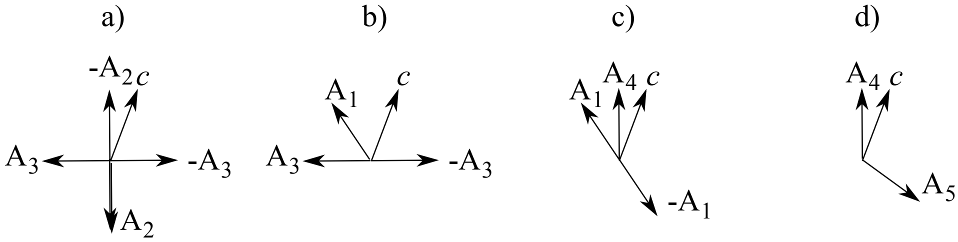
it. 2) $B = \{1, 3\}$: $y_1 > 0$ e $y_3 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_1$ e $-A_3$, come mostrato in *b*). Quindi $h = 3$. La base è duale non degenere, mentre resta primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, quindi $k = 4$.

it. 3) $B = \{1, 4\}$: $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_1$ e $A_4$, come mostrato in *c*), quindi $h = 1$. La base è primale non degenere, in quanto $I(x^3) = B$, e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^3$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, quindi $k = 5$.

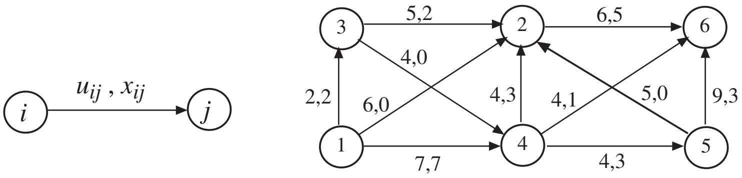
it. 4) $B = \{4, 5\}$: $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_4$ e $A_5$, come mostrato in *d*). L'algoritmo quindi termina avendo individuato in $x^4$ una soluzione ottima primale. La base è sia primale che duale non degenere.

Poiché la base ottima individuata è sia primale che duale non degenere, le corrispondenti soluzioni di base, sia primale che duale, sono le uniche soluzioni ottime primali e duali, rispettivamente.

Se $c = A_5$, $x^4$ continuerebbe a essere una soluzione ottima primale, ma non sarebbe più unica. Infatti, l'intero lato del politopo avente come estremi $x^4$ e il vertice individuato dall'intersezione delle rette associate al secondo e al quinto vincolo primale definirebbe un insieme di soluzioni ottime primali alternative. La soluzione ottima duale, invece, pari a $(0, 0, 0, 0, 1)$, continuerebbe a essere unica.

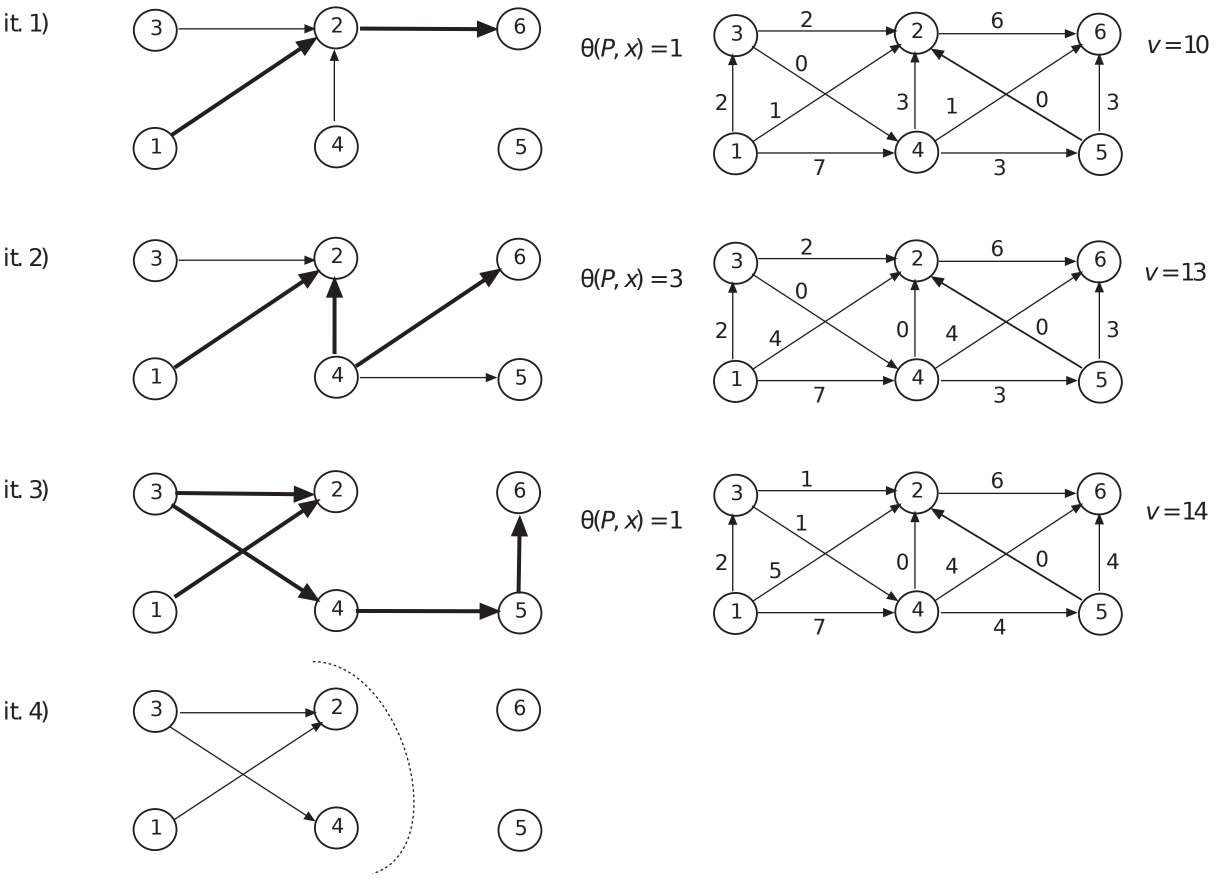


**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso dato, di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio $(N_s, N_t)$ restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si consideri infine il caso in cui la capacità dell'arco $(1, 2)$ sia un parametro $\alpha$ positivo, e si discuta quale sia il minimo valore di $\alpha$ per cui il valore del flusso massimo precedentemente individuato rimanga invariato, giustificando la risposta.




**SVOLGIMENTO**

Le iterazioni sono illustrate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante $P$ individuato (archi evidenziati). A destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio della quantità $\theta(P, x)$ lungo $P$, con il relativo valore $v$. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = 6 + 4 + 4 = 14 = v$.




Se la capacità dell'arco $(1, 2)$ fosse un parametro $\alpha$ intero positivo, il minimo valore del parametro per cui il valore del flusso massimo continuerebbe a valere 14 è $\alpha = 5$. Per $\alpha < 5$, infatti, il taglio $(N'_s, N'_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$ avrebbe capacità minore di 14. Pertanto, per il Teorema *Flusso massimo-Taglio di capacità minima*, il valore del flusso massimo sarebbe minore di 14.

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +8x_4 & +10x_5 & & \\ & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \leq & 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si proponga quindi un rilassamento basato su eliminazione di vincoli per l'istanza in esame, e si indichi quale sarebbe stata la valutazione superiore al nodo radice utilizzando tale rilassamento alternativo, giustificando la risposta.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottima del rilassamento continuo e con $\bar{x}$ la soluzione restituita dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

**Nodo radice**: $x^* = [0, 0, 1/2, 1, 1]$, $\bar{z} = 21$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 19$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$x_3 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1/2, 1]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_4$.

$x_3 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 19 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché i costi sono interi, una valutazione superiore più accurata è 19. Pertanto, poiché $\bar{z} = z$, il nodo può essere chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1$, $x_4 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1, 1/2]$, $\bar{z} = 19$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\bar{z} = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 17 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

L'algoritmo termina in quanto $Q$ è vuota. La soluzione ottima determinata è $[1, 0, 0, 1, 1]$, di valore 19.

Un rilassamento basato su eliminazione di vincoli potrebbe consistere nel rilassare il vincolo di zaino. In tal caso, la soluzione ottima del problema rilassato si otterrebbe banalmente ponendo a 1 tutte le variabili decisionali, ottenendo pertanto una valutazione superiore pari a 28 al nodo radice. Un rilassamento basato su eliminazione di vincoli alternativo potrebbe essere ottenuto eliminando i vincoli di integralità, e sostituendoli con vincoli di non negatività. In tal caso, la soluzione ottima del problema rilassato si otterrebbe ponendo a 2.5 la variabile decisionale $x_5$, ovvero la prima secondo l'ordine CUD, ottenendo una valutazione superiore pari a 25 al nodo radice. Si osservi che il rilassamento continuo domina entrambi i rilassamenti proposti.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Dato il seguente problema di *PL*, si determini per quali valori del parametro reale $\alpha$ la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia ottima

$$(P_\alpha) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & \alpha \end{array}$$

Si determini inoltre: **1.a)** per quali valori di $\alpha$ la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia l'unica soluzione ottima, e **1.b)** per quali valori di $\alpha$ la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Data la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \;\; \max\{\, c^T x \;:\; Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \;\; \min\{\, y^T b \;:\; y^T A = c^T \,,\, y \geq 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

**Proposizione.** Una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per $(P)$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per $(D)$ complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il duale di $(P_\alpha)$ è

$$(D_\alpha) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & y_1 & & & + & y_3 & + & \alpha y_4 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 3 \\ & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & = & -1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \;:\; A_i\bar{x} = b_i \,\} = \{2, 3\}$ per ogni $\alpha \neq 2$, mentre $I(\bar{x}) = \{2, 3, 4\}$ per $\alpha = 2$. Si osservi che, essendo le righe $A_2$ e $A_3$ linearmente indipendenti, $\bar{x}$ è una soluzione di base per ogni $\alpha$, è ammissibile per $\alpha \geq 2$, ed è degenere per $\alpha = 2$.

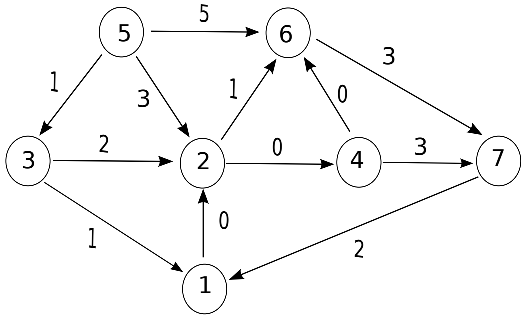
Per $\alpha > 2$, una soluzione duale $\bar{y}$ che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_1 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per $(D_\alpha)$ essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -y_2 & + & 2y_3 & = & 3 \\ y_2 & - & y_3 & = & -1 \\ y_2 & , & y_3 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $[\bar{y}_2, \bar{y}_3] = [1, 2]$. Pertanto, per $\alpha > 2$, $\bar{x}$ è soluzione ottima di $(P_\alpha)$. Poiché $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è ammissibile per $(D_\alpha)$ indipendentemente dal valore del parametro $\alpha$, e rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$ anche per $\alpha = 2$, possiamo concludere che $\bar{x}$ è soluzione ottima di $(P_\alpha)$ anche per $\alpha = 2$. Segue che $\bar{x}$ è soluzione ottima di $(P_\alpha)$ per $\alpha \geq 2$.

Per discuterne l'unicità possiamo considerare ancora il teorema degli scarti complementari. $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è una soluzione di base ottima non degenere per $(D_\alpha)$ per ogni $\alpha \geq 2$. Poiché qualsiasi soluzione ottima di $(P_\alpha)$ deve verificare le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$, e $\bar{y}$ è non degenere, possiamo concludere che $\bar{x}$ sia l'unica soluzione ottima di $(P_\alpha)$ (per $\alpha \geq 2$).

**2)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 5 sul grafo in figura.




Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Tale albero è unico? Giustificare la risposta.

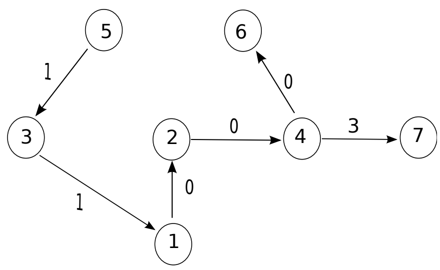
**SVOLGIMENTO**

Il grafo contiene cicli orientati, ad esempio $(1, 2, 6, 7)$, e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità $Q$ sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$

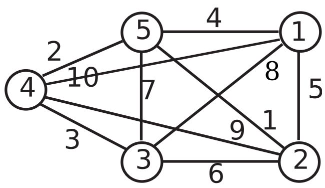
| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $p[7]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | $d[7]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 5 | 5 | 5 | 5 | *nil* | 5 | 5 | 31 | 31 | 31 | 31 | 0 | 31 | 31 | $(5)$ |
| 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | *nil* | 5 | 5 | 31 | 3 | 1 | 31 | 0 | 5 | 31 | $(2, 3, 6)$ |
| 2 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | *nil* | 5 | 5 | 2 | 3 | 1 | 31 | 0 | 5 | 31 | $(1, 2, 6)$ |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 5 | 5 | *nil* | 5 | 5 | 2 | 2 | 1 | 31 | 0 | 5 | 31 | $(2, 6)$ |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | 2 | *nil* | 2 | 5 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 3 | 31 | $(4, 6)$ |
| 5 | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 | *nil* | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 5 | $(6, 7)$ |
| 6 | 6 | 3 | 1 | 5 | 2 | *nil* | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 5 | $(7)$ |
| 7 | 7 | 3 | 1 | 5 | 2 | *nil* | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 5 | $\emptyset$ |

L'albero ottimo individuato è mostrato in figura:




Considerando gli archi non appartenenti a tale albero, le condizioni di ottimalità di Bellman sono soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta tranne che per l'arco $(6, 7)$. Si ha infatti $d(6) + c_{6,7} = 2 + 3 = 5 = d(7)$. Poiché è possibile utilizzare l'arco $(6, 7)$ al posto dell'arco $(4, 7)$, ottenendo un albero di radice 5 alternativo, segue che l'albero ottimo individuato non è l'unico albero dei cammini minimi di radice 5.

**3)** Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento, non utilizza nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi $Q$ come una coda, e si inseriscano in $Q$ i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente (ad esempio, se si seleziona il nodo 1, $(1,2)$ è inserito prima di $(1,3)$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (incluso il nodo radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, si indichi la migliore valutazione inferiore e la miglior valutazione superiore disponibili nel momento in cui l'esecuzione dell'algoritmo viene interrotta (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.



**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile. Pertanto $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti, e a creare $3(3-1)/2 = 3$ figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(1,5)$, $(2,5)$ e $(4,5)$ (i nodi sono inseriti in $Q$ in quest'ordine).

$\boxed{x_{15} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 17$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} = 17 < z = +\infty$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e a creare tre figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(1,2)$, $(2,3)$ e $(2,5)$, inserendoli in $Q$ in quest'ordine.

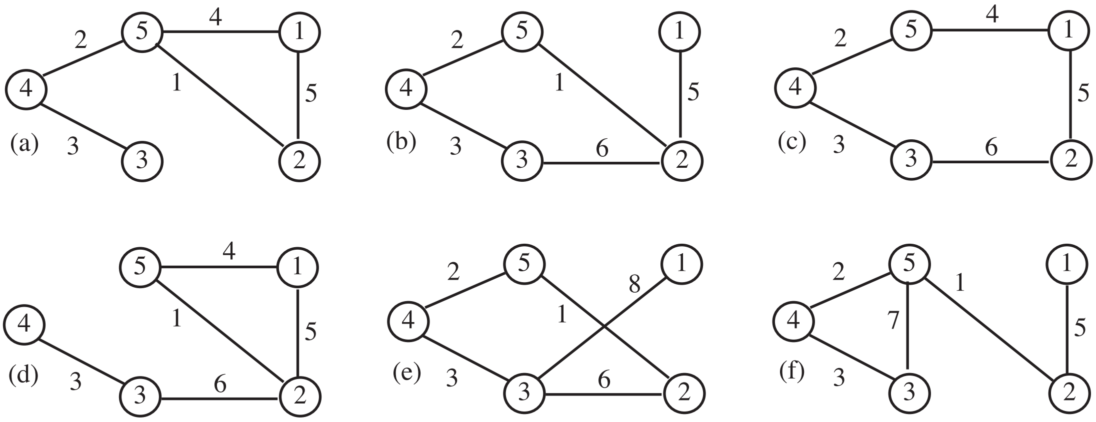
$\boxed{x_{25} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (c). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $20 < z = +\infty$, si pone $z = 20$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{45} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 19$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 19 < z = 20$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e a creare tre figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(1,2)$, $(2,3)$ e $(2,5)$, inserendoli in $Q$ in quest'ordine.

$\boxed{x_{15} = x_{12} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 20 \geq z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{15} = x_{23} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (f). Poiché $\underline{z} = 18 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti, e a creare tre figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(2,5)$, $(3,5)$ e $(4,5)$, inserendoli in $Q$ in quest'ordine.

Poiché sono stati visitati 6 nodi, l'algoritmo viene interrotto anche se $Q$ non è vuota. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che la migliore valutazione inferiore al termine dell'esecuzione è pari a $\min\{\ z\ ,\ \min\ \{\ \underline{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso $Q'$ contiene i nodi $\boxed{x_{15} = 0}$, $\boxed{x_{45} = 0}$ e $\boxed{x_{15} = x_{23} = 0}$, pertanto la miglior valutazione inferiore disponibile quando l'algoritmo termina è $\min\{\,20, \min\{\,17\,,\,19\,,\,18\,\}\,\} = 17$, mentre la migliore valutazione superiore è 20. Il gap relativo a terminazione è pertanto $(20-17)/17 \approx 17.6\%$.

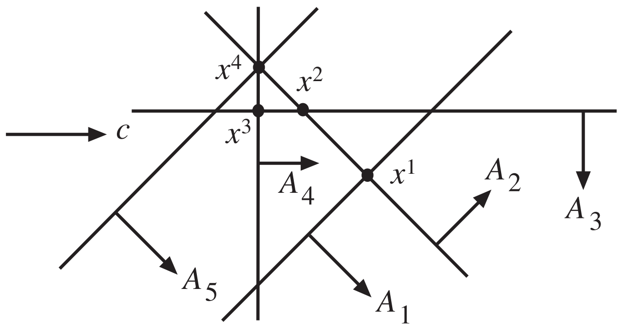


# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il problema di $PL$ in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante $k$, i segni delle componenti del vettore $\eta_B$ e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base visitate. Al termine, si discuta l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia per il problema primale che per il duale.

Come cambierebbe l'esecuzione dell'algoritmo se non fosse presente il quinto vincolo primale? Quale sarebbe, in tale caso, l'insieme delle soluzioni ottime primali? Giustificare le risposte.



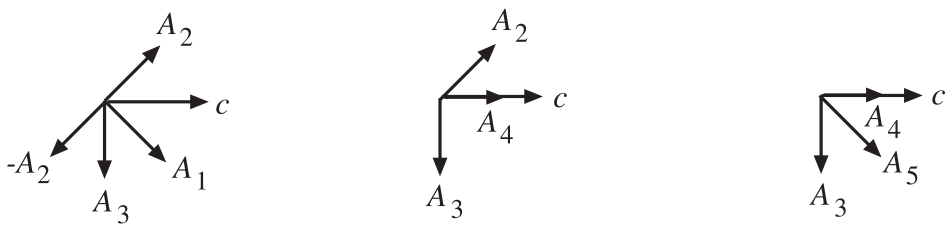

**SVOLGIMENTO**

It. 1) Alla base $B_1 = \{1, 2\}$ corrisponde la soluzione di base primale $x^1$ in figura, non ammissibile. La soluzione di base primale è non degenere in quanto $I(x^1) = B_1$. Pure la soluzione di base duale è non degenere in quanto $c$ non è collineare né con $A_1$ né con $A_2$, come mostrato in $(a)$, e quindi sia $y_1$ che $y_2$ sono strettamente positive. $k = \min\{i \in N : A_i x^1 > b_i\} = \min\{3, 4, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. $\eta_1 > 0, \eta_2 < 0$ in quanto $A_3$ appartiene al cono finitamente generato da $A_1$ e $-A_2$, come mostrato in $(a)$, quindi $h = 1$.

It. 2) Alla base $B_2 = \{2, 3\}$ corrisponde la soluzione di base primale $x^2$ in figura, non ammissibile. La base non è né primale né duale degenere. $k = \min\{i \in N : A_i x^2 > b_i\} = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland. Si ha $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 > 0$. Inoltre $y_2/\eta_2 = y_3/\eta_3$ in quanto $c$ e $A_4$ sono collineari, come mostrato in $(b)$, pertanto $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

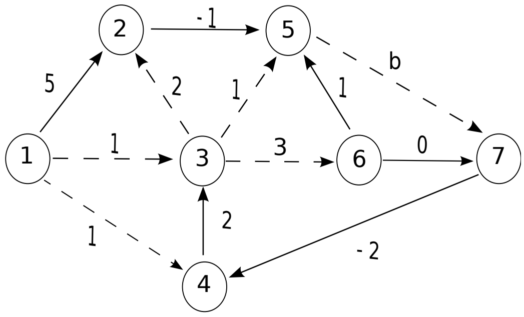
It. 3) Alla base $B_3 = \{3, 4\}$ corrisponde la soluzione di base primale $x^3$ in figura, non ammissibile e non degenere. La soluzione di base duale è invece degenere in quanto $y_3 = 0$ e $y_4 > 0$, come evidenziato in $(c)$. L'unico vincolo primale violato è il quinto, e quindi $k = 5$. $\eta_3 > 0, \eta_4 > 0$ in quanto $A_5$ appartiene al cono finitamente generato da $A_3$ e $A_4$, come mostrato in $(c)$. Poiché $y_3/\eta_3 = 0 < y_4/\eta_4$, si ha $h = 3$.

It. 4) Alla base $B_4 = \{4, 5\}$ corrisponde la soluzione di base primale $x^4$ in figura. Tale soluzione è degenere in quanto $I(x^4) = \{2, 4, 5\}$. Pure la soluzione di base duale è degenere in quanto $y_5 = 0$, come segue da $(c)$). Essendo $x^4$ primale ammissibile l'algoritmo termina: $x^4$ è soluzione ottima per il problema primale. Come segue immediatamente da considerazioni di natura geometrica, $x^4$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. La soluzione ottima duale invece non è unica. Ad esempio, alla base $\{2, 5\}$ corrisponde una soluzione di base duale ottima distinta da quella determinata dall'algoritmo, in quanto sia la seconda che la quinta componente sono strettamente positive.




Se non fosse presente il quinto vincolo primale, l'algoritmo terminerebbe alla terza iterazione, restituendo la soluzione ottima primale $x^3$. Si osservi che, in tal caso, $x^4$ sarebbe una soluzione ottima alternativa, cosí come l'insieme di tutte le soluzioni appartenenti al segmento di estremi $x^3$ e $x^4$, essendo $c$ collineare con $A_4$. Tale segmento rappresenterebbe pertanto l'insieme delle soluzioni ottime primali.

**2)** Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, in cui è evidenziato un albero di copertura $T$ radicato in 1 e orientato (mediante linee tratteggiate), e in cui $b$ denota un parametro a valori reali.




Si discuta per quali valori del parametro $b$:

1. $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1;
2. $T$ è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1;
3. il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura risulta essere inferiormente illimitato.

Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

1. Associamo a ogni nodo $i$ del grafo un'etichetta $d(i)$ che rappresenta il costo dell'unico cammino in $T$ dal nodo radice, ovvero dal nodo 1, a $i$: $d(1) = 0$, $d(2) = 3$, $d(3) = 1$, $d(4) = 1$, $d(5) = 2$, $d(6) = 4$, $d(7) = 2 + b$.

   $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di $b$ per cui gli archi non appartenenti a $T$ soddisfano le condizioni di Bellman, ovvero $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$, $\forall (i, j) \notin T$. Tali condizioni sono soddisfatte per tutti gli archi non incidenti il nodo 7. Per quanto riguarda i due archi non in $T$ incidenti il nodo 7, si ha:

   - $(6, 7)$: $d(6) + 0 \geq d(7)$, ovvero $4 + 0 \geq 2 + b$ se e solo se $b \leq 2$
   - $(7, 4)$: $d(7) - 2 \geq d(4)$, ovvero $2 + b - 2 \geq 1$ se e solo se $b \geq 1$.

   Segue che $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $1 \leq b \leq 2$.

2. Dato un valore di $b$, $1 \leq b \leq 2$, $T$ è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1 se non esistono archi non appartenenti a $T$ che soddisfino le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza oppure, se ne esistono, per ognuno di tali archi $(i, j)$ l'inserzione di $(i, j)$ in $T$, e la conseguente eliminazione da $T$ dell'unico arco entrante in $j$, determini una struttura che non è un albero. Osserviamo che l'arco $(2, 5)$, non appartenente a $T$, soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza: $d(2) - 1 = 3 - 1 = d(5) = 2$. Inoltre, inserendo $(2, 5)$ in $T$, e rimuovendo $(3, 5)$, si ottiene ancora un albero. Segue che, per nessun valore di $b$, $T$ è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1.

   Si osservi che, per $b = 2$, anche l'arco $(6, 7)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire $(5, 7)$ in $T$. Analogamente, per $b = 1$ l'arco $(7, 4)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire $(1, 4)$ in $T$, ottenendo una soluzione ottima alternativa.

3. Il problema dell'albero dei cammini minimi risulta essere inferiormente illimitato se e solo se sono presenti cicli orientati di costo negativo. Nel caso specifico, per ispezione si può verificare che il grafo contiene quattro cicli orientati:

   - $(4, 3, 6, 7)$, di costo 3
   - $(4, 3, 6, 5, 7)$, di costo $4 + b$
   - $(4, 3, 5, 7)$, di costo $1 + b$
   - $(4, 3, 2, 5, 7)$, di costo $1 + b$.

   Segue che il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura risulta essere inferiormente illimitato per $b < -1$.

**3)** Si consideri una rete di trasporto intermodale, descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. Sia $u_{ij}$ la capacità del collegamento $(i, j) \in A$. Sia inoltre $v$ la quantità di merce che deve essere inviata lungo $G$ dal nodo sorgente $s$ al nodo destinazione $t$.

L'insieme $A$ dei collegamenti della rete è partizionato in $k$ sottoinsiemi, $A_1$, $A_2$, $\dots$, $A_k$: gli archi appartenenti a uno stesso sottoinsieme modellano collegamenti della rete caratterizzati dalla stessa modalità di trasporto, quali tratte stradali, linee ferroviarie, rotte navali, ecc.

**3.1**) Si formuli in termini di *PLI* il problema di inviare la quantità di merce $v$ da $s$ a $t$ lungo $G$ rispettando la capacità dei collegamenti e utilizzando il minor numero possibile di modalità di trasporto distinte. **3.2**) Si modifichi la formulazione proposta in **3.1**) per lo scenario in cui, se venisse utilizzata sia la modalità di trasporto 1 che la modalità di trasporto 2, entrambe molto costose, allora la modalità di trasporto 3, particolarmente onerosa, non potesse essere utilizzata (assumendo $k \geq 3$).

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo una variabile di flusso $x_{ij}$, per ciascun collegamento $(i, j) \in A$, per denotare la quantità di merce inviata lungo $(i, j)$. Introduciamo inoltre una variabile binaria $y_h$ per ogni modalità di trasporto $h$, $h = 1, ...k$, con il seguente significato:

$$y_h = \begin{cases} 1 & \text{se viene utilizzata la modalità di trasporto } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad h = 1, \dots, k$$

Utilizzando tali famiglie di variabili, è possibile formulare il problema mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{h=1}^{k} y_h & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ \phantom{-}v & \text{se } i = t \\ \phantom{-}0 & \text{se } i \neq s, t \end{cases} & i \in N \\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} y_h & (i, j) \in A_h, h = 1, \dots, k \\
& y_h \in \{0, 1\} & h = 1, \dots, k
\end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, garantisce l'invio della quantità di merce $v$ da $s$ a $t$. Il secondo blocco di vincoli è costituito da vincoli di capacità congiuntamente a vincoli logici. In particolare tali vincoli garantiscono che, se viene usata la modalità di trasporto $h$, vale a dire se viene inviata merce utilizzando almeno un arco appartenente all'insieme $A_h$, allora la corrispondente variabile $y_h$ è forzata ad assumere il valore 1. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, conteggia il numero totale di modalità di trasporto utilizzate per l'invio.

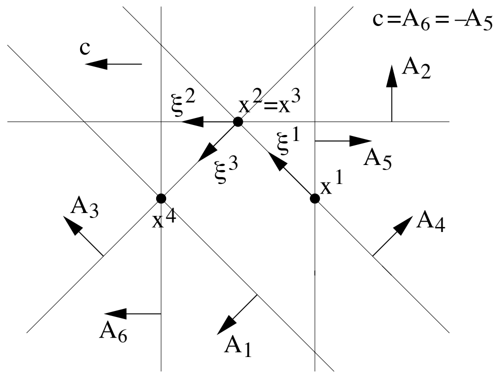
Il requisito addizionale, descritto in **3.2**), può essere formulato aggiungendo al modello PLI il seguente vincolo logico:

$$y_3 \leq (1 - y_1) + (1 - y_2)$$

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale $x$ e la direzione di spostamento $\xi$ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Successivamente, si consideri il caso in cui $c = A_1$: la soluzione ottima trovata in precedenza resta tale? Qual è, in questo caso, l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema primale? Giustificare le risposte.



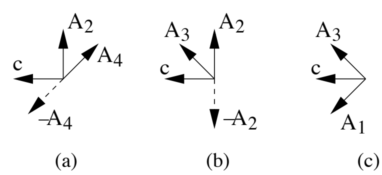

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{4, 5\}$, $y_4 = 0$ e $y_5 = -1 < 0$ poiché $c = -A_5$, quindi $h = 5$. La base è primale non degenere ($I(x^1) = B$) ma duale degenere ($y_4 = 0$). Il massimo passo lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza ai vincoli 2 e 3: quindi $k = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

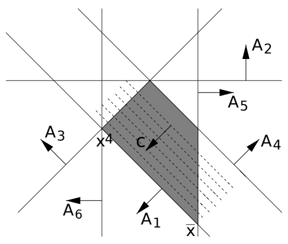
it.2) $B = \{2, 4\}$, $y_2 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_2$ e $-A_4$, come mostrato in figura ($a$). Quindi $h = 4$. La base è primale degenere ($I(x^2) = \{2, 3, 4\}$), ma duale non degenere ($y_2, y_4 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza al vincolo 3, attivo ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere selezionando $k = 3$.

it.3) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_2$ e $A_3$, come mostrato in figura ($b$). Quindi $h = 2$. La base è duale non degenere ($y_2, y_3 \neq 0$), ma è primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4\}$). Il massimo passo lungo la direzione $\xi^3$ si ottiene in corrispondenza ai vincoli 1 e 6: quindi $k = \min\{1, 6\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

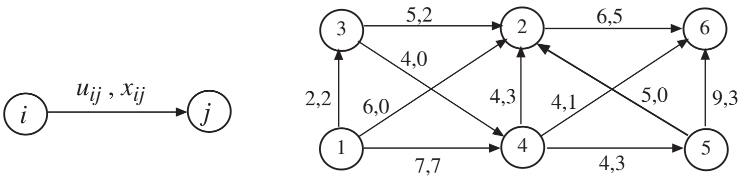
it.4) $B = \{1, 3\}$, $y_1 > 0$ e $y_3 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_1$ e $A_3$, come mostrato in figura ($c$). La base è duale ammissibile e quindi l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale $x^4$. La base è primale degenere ($I(x^4) = \{1, 3, 6\}$) ma duale non degenere ($y_1, y_3 \neq 0$).




Nel caso in cui $c = A_1$, la base $B = \{1, 3\}$ resta duale ammissibile poiché $c$ continua ad appartenere al cono generato da $A_1$ e $A_3$ (in tal caso $y_1 = 1$ e $y_3 = 0$). Quindi $x^4$ è una soluzione ottima del problema primale anche in questo scenario. Essendo $c = A_1$, in tale scenario l'insieme delle soluzioni ottime del problema primale è costituito dalla faccia del poliedro avente come estremi $x^4$ e il vertice $\bar{x}$ evidenziato nella figura seguente.

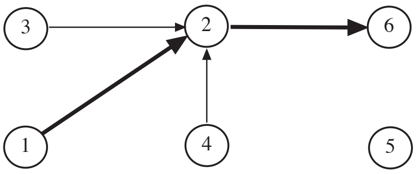


**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione si specifichi l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio $(N_s, N_t)$ restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si discuta infine come cambierebbero il flusso massimo e il taglio di capacità minima individuati dall'algoritmo se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 5$.

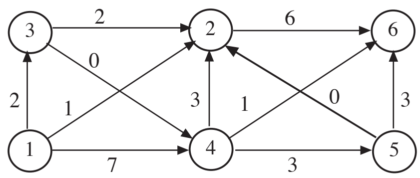



**SVOLGIMENTO**
Le iterazioni sono illustrate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante $P$ individuato (archi evidenziati). A destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio della quantità $\theta(P, x)$ lungo $P$, con il relativo valore $v$. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{45} + u_{46} = 6 + 4 + 4 = 14 = v$.

it. 1)

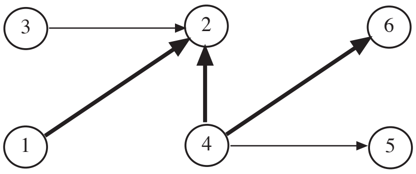


$\theta(P, x) = 1$

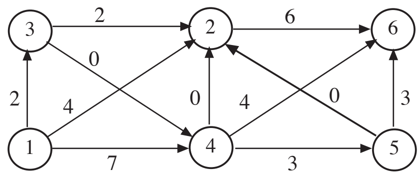


$v = 10$

it. 2)

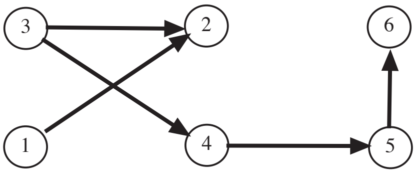


$\theta(P, x) = 3$

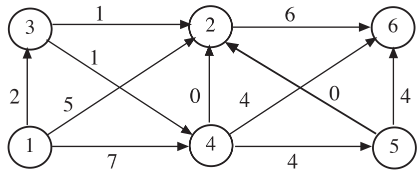


$v = 13$

it. 3)

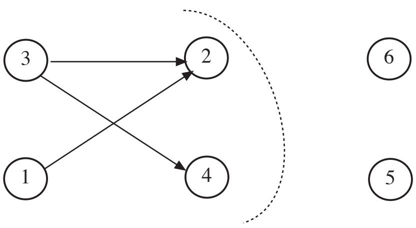


$\theta(P, x) = 1$



$v = 14$

it. 4)



Se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 5$, le iterazioni eseguite dall'algoritmo rimarrebbero invariate tranne l'ultima, nella quale il taglio determinato sarebbe $(N'_s, N'_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$, anch'esso di capacità minima $u(N'_s, N'_t) = 14$. Pertanto, il flusso massimo individuato dall'algoritmo sarebbe invariato, mentre cambierebbe il taglio di capacità minima restituito (si noti che $(N_s, N_t)$ è comunque un taglio di capacità minima alternativo).

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
\max & x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +8x_4 & +10x_5 & & \\
 & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \leq & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Al termine si discuta se la soluzione ottima determinata resterebbe tale nel caso in cui il costo del secondo oggetto venisse ridotto di un'unità, ovvero valesse 3 invece di 4, giustificando la risposta.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento in ogni nodo e con $\bar{x}$ la soluzione ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore in ogni nodo ($\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore in ogni nodo ($\underline{z} = c^T \bar{x}$), e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; si pone inoltre $z = -\infty$.

**Nodo radice**: $x^* = [0, 0, 1/2, 1, 1]$, $\bar{z} = 21$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 19$. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$x_3 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1/2, 1]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_4$.

$x_3 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

$x_3 = 1$, $x_4 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1, 1/2]$, $\bar{z} = 19$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\bar{z} = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 18$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 0$, $x_2 = 1$: $x^* = [0, 1, 0, 1/2, 1]$, $\bar{z} = 18$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 0, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 0$, $x_2 = 0$: $x^* = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 19$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità (sarebbe stato chiuso anche grazie alla valutazione superiore).

L'algoritmo termina in quanto $Q$ è vuota. La soluzione ottima determinata è $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, di valore $z = 19$. Se il costo del secondo oggetto valesse 3 invece di 4, la soluzione $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, di valore $z = 19$, continuerebbe a essere ottima. Infatti l'istanza risolta, in cui il secondo oggetto costa 4, rappresenta un rilassamento per l'istanza modificata, in cui il secondo oggetto costa 3. Poiché la soluzione ottima del rilassamento, ovvero $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, è ammissibile per l'istanza rilassata, e il suo valore, ovvero $z = 19$, è lo stesso assunto nell'istanza rilassata (in $x$, infatti, la componente relativa al secondo oggetto vale 0), segue che la soluzione ottima del rilassamento è ottima anche per l'istanza rilassata.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si consideri il seguente problema di $PL$:

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
& x_1 & + & \beta x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
& \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
& -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
& x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}$$

Si determinino tutte le terne di valori dei parametri $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ per le quali $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ sono, rispettivamente, una soluzione ottima del problema dato e del suo duale. Tra le terne individuate, si determinino quelle per cui il problema duale ammette una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Consideriamo il problema dato e il suo duale:

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
& x_1 & + & \beta x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
& \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
& -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
& x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 5y_1 & + & 3y_2 & & & + & 4y_4 & & \\
& y_1 & + & \gamma y_2 & - & \alpha y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
& \beta y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & \alpha y_4 & = & 1 \\
& y_1 & & & + & 2y_3 & - & \beta y_4 & = & 4 \\
& y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

Le soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime, rispettivamente per il problema dato e il suo duale, se e solo se sono ammissibili e soddisfano le condizioni degli scarti complementari. Essendo $\bar{y}_2, \bar{y}_3 \neq 0$, i corrispondenti vincoli del problema primale devono essere attivi in $\bar{x}$. Abbiamo quindi:

$$\gamma - 1 = 3, \quad -\alpha + 1 = 0,$$

da cui si deduce $\gamma = 4$ e $\alpha = 1$. Affinché $\bar{x}$ sia ammissibile per il problema primale, i rimanenti vincoli devono essere soddisfatti, ovvero:

$$1 + \beta \leq 5, \quad 1 + \alpha \leq 4.$$

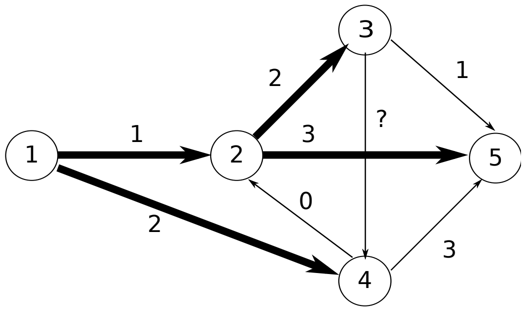
Poiché $\alpha = 1$, la seconda disugualianza è verificata mentre la prima vale per $\beta \leq 4$. Infine, posti $\gamma = 4$ e $\alpha = 1$, la soluzione $\bar{y}$ è ammissibile per il problema duale per qualsiasi valore di $\beta$. Pertanto, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono rispettivamente una soluzione ottima del problema dato e del suo duale se e solo se $\alpha = 1$, $\beta \leq 4$ e $\gamma = 4$.

Per ogni terna individuata, una qualsiasi soluzione ottima $\hat{y}$ del problema duale deve costituire una coppia di soluzioni complementari con qualsiasi soluzione ottima del problema primale, in particolare con $\bar{x}$ . Affinché risulti $\hat{y}_1 > 0$, il primo vincolo del problema primale deve essere attivo in $\bar{x}$ e pertanto deve risultare $\beta = 4$. Possiamo quindi limitarci a considerare il caso $\alpha = 1$, $\beta = 4$ e $\gamma = 4$, per il quale risulta $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : A_i\bar{x} = b_i\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, in questo caso l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale è costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl}
y_1 & + & 4y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
4y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
y_1 & & & + & 2y_3 & - & 4y_4 & = & 4 \\
& & & & & & y_4 & = & 0 \\
y_1, & & y_2, & & y_3 & & & \geq & 0.
\end{array} \right.$$

Tale sistema ammette $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ come unica soluzione, pertanto non esiste alcuna terna di valori dei parametri per cui il problema duale ammetta una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$.

**2)** Si consideri il grafo in figura, in cui il costo associato all'arco $(3,4)$, $c_{34}$, non è noto. Si individui per quali valori di $c_{34}$ l'albero $T$ evidenziato in figura è un albero dei cammini minimi di radice 1, giustificando la risposta. Si fissi quindi $c_{34} = -2$ e, nel caso in cui per tale scelta $T$ non sia un albero dei cammini minimi di radice 1, si esegua un passo dell'algoritmo SPT per migliorare $T$.




**SVOLGIMENTO**

$T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se il vettore di etichette dei nodi $d \in R^5$, tale che $d_i$ è il costo dell'unico cammino in $T$ da 1 a $i$, $i = 1, ..., 5$, soddisfa le condizioni di Bellman:

$$d_i + c_{ij} \geq d_j, \text{ per ogni arco } (i,j).$$

Effettuando una visita a ventaglio di $T$ a partire dal nodo 1 si determinano i seguenti valori:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 3, \quad d_4 = 2, \quad d_5 = 4.$$

$T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di $c_{34}$ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di Bellman per ogni arco non appartenente a $T$. Consideriamo tali archi:

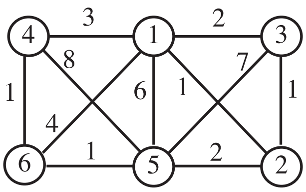
1. $(4,2)$: $d_4 + c_{42} \geq d_2$, ovvero $2 \geq 1$: condizione rispettata;
2. $(3,5)$: $d_3 + c_{35} \geq d_5$, ovvero $3 + 1 \geq 4$: condizione rispettata;
3. $(4,5)$: $d_4 + c_{45} \geq d_5$, ovvero $2 + 3 \geq 4$: condizione rispettata;
4. $(3,4)$: $d_3 + c_{34} \geq d_4$, ovvero $3 + c_{34} \geq 2$; tale condizione è soddisfatta se e solo se $c_{34} \geq -1$.

Quindi, $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $c_{34} \geq -1$. Si osservi che l'imposizione delle condizioni di Bellman garantisce che il costo dell'unico ciclo orientato presente nel grafo, vale a dire $(2,3,4)$, sia non negativo per $c_{34} \geq -1$: il ciclo ha infatti costo $\geq 0$ se e solo se $c_{34} \geq -2$.

Scegliendo $c_{34} = -2$, l'arco $(3,4)$ viola le condizioni di Bellman. E' quindi possibile migliorare $T$, mediante un passo dell'algoritmo SPT, inserendo l'arco $(3,4)$ al posto di $(1,4)$, e aggiornando $d$ e il vettore dei predecessori $p$ di conseguenza: $d_4 := 1$ e $p_4 := 3$.

**3)** Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento, non utilizza nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati in esso incidenti nella soluzione di MS1T (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi $Q$ come una coda, e si inseriscano in $Q$ i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente (ad esempio, se si seleziona il nodo 1, $(1,2)$ è inserito prima di $(1,3)$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché.

Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap relativo ottenuto quando l'esecuzione viene interrotta, giustificando la risposta.



**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 8$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli, in ciascuno dei quali si fissa a zero la variabile corrispondente a uno di tali archi.

$\boxed{x_{21} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (b). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 10$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

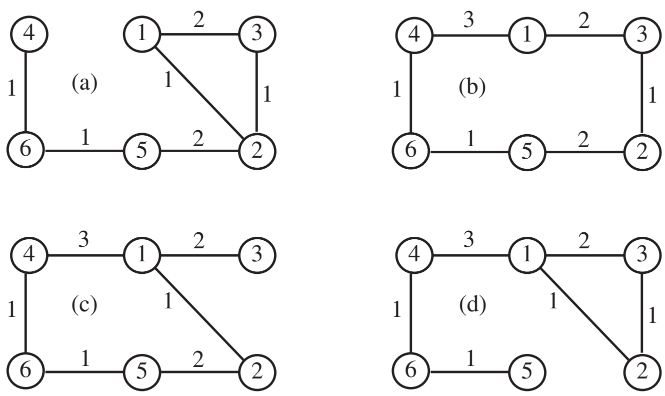
$\boxed{x_{23} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} \geq z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{25} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 9$, è mostrato in (d). Poichè $\underline{z} < z = 10$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, la variabile relativa agli archi $(1,2)$, $(1,3)$ e $(1,4)$.

Poiché $Q$ non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che

$$\min \{ \; z \; , \; \min \{ \; \underline{z}(P') \; : \; P' \in Q' \; \} \; \}$$

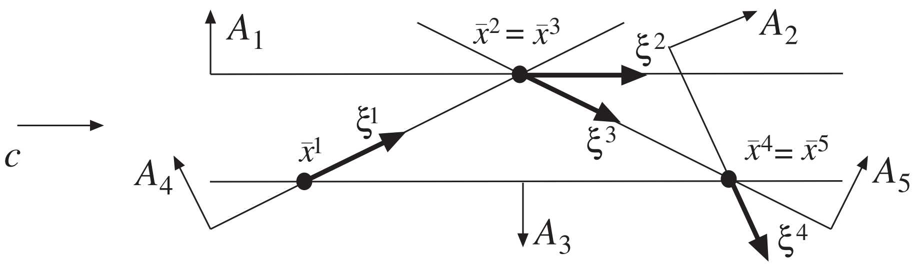
è una valutazione inferiore globale, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso $Q'$ contiene il nodo $x_{25} = 0$, che ha $\underline{z} = 9$, e pertanto la valutazione inferiore globale è 9. Poiché $z = 10$, il gap relativo quando l'algoritmo viene interrotto è limitato superiormente da $(10-9)/9 \approx 11.11\%$.



# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di $PL$ in figura a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento $\xi$ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Si discuta infine quale sarebbe l'esito di risoluzione nel caso in cui il secondo e il terzo vincoli non fossero presenti, e si utilizzasse l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $\{1, 5\}$. Giustificare tutte le risposte.




**SVOLGIMENTO**

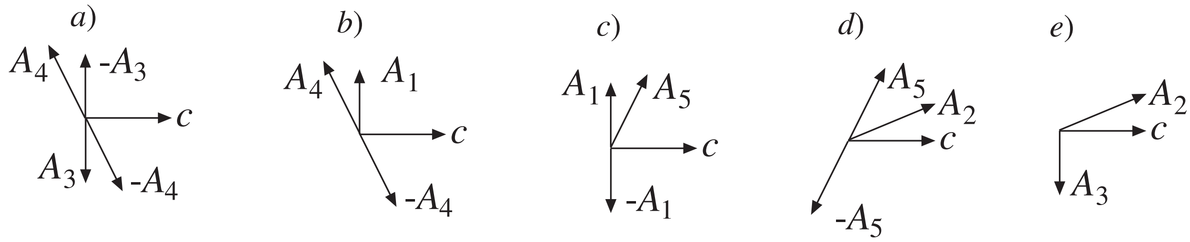
it. 1) $B = \{3, 4\}$: $y_3 < 0$ e $y_4 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_3$ e $-A_4$, come mostrato in figura *a*). Quindi $h = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. La base non è primale degenere, in quanto $I(\bar{x}^1) = \{3, 5\} = B$, e neppure duale degenere in quanto tutte le variabili duali in base sono non nulle. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 1 e 5, e quindi $k = \min\{1, 5\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2) $B = \{1, 4\}$: $y_1 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_1$ e $-A_4$, come mostrato in figura *b*), quindi $h = 4$. La base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(\bar{x}^2) = \{1, 4, 5\} \neq B$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^2$ è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 5, attivo ma non in base. Si esegue quindi un cambio di base degenere ponendo $k = 5$.

it. 3) $B = \{1, 5\}$: $y_1 < 0$ e $y_5 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_1$ e $A_5$, come mostrato in figura *c*), quindi $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre è ancora primale degenere in quanto $\bar{x}^3 = \bar{x}^2$ implica $I(\bar{x}^3) = I(\bar{x}^2)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^3$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 2 e 3, e quindi $k = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

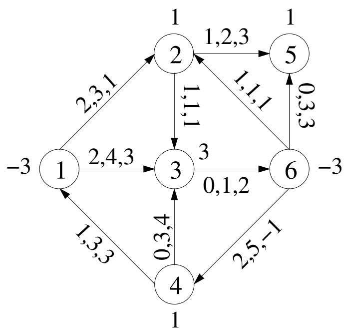
it. 4) $B = \{2, 5\}$: $y_2 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_2$ e $-A_5$, come mostrato in figura *d*), quindi $h = 5$. La base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(\bar{x}^4) = \{2, 3, 5\}$. II massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^4$ è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 3, attivo ma non in base. Si esegue quindi un altro cambio di base degenere ponendo $k = 3$.

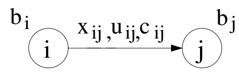
it. 5) $B = \{2, 3\}$: $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_2$ e $A_3$, come mostrato in figura *e*). L'algoritmo quindi termina avendo determinato una soluzione ottima per il primale e una soluzione ottima per il duale. In effetti la soluzione ottima primale era stata determinata al passo precedente ($\bar{x}^4 = \bar{x}^5$), ma solo nel corso della quinta iterazione viene dimostrata la sua ottimalità individuando una soluzione duale ammissibile che rispetta con essa le condizioni degli scarti complementari.




Se il secondo e il terzo vincolo non fossero presenti, $\xi^3$ sarebbe una direzione di crescita ammissibile illimitata. Pertanto, il problema primale sarebbe superiormente illimitato, e di conseguenza il problema duale risulterebbe vuoto.

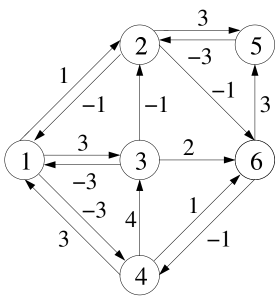
**2)** Si consideri il problema di flusso di costo minimo in figura. Si verifichi se il flusso ammissibile riportato sia di costo minimo e, nel caso non lo sia, si determini un flusso ammissibile di costo minore, utilizzando un opportuno ciclo aumentante (*Suggerimento*: si considerino cicli aumentanti formati da tre nodi). Qualora neppure il flusso determinato sia di costo minimo, si modifichi il costo di alcuni archi del grafo in maniera tale che lo diventi. Giustificare le risposte.



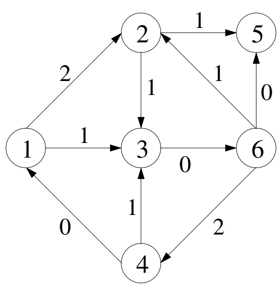



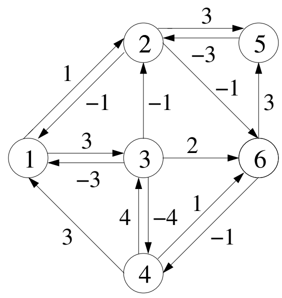

**SVOLGIMENTO**

Un flusso ammissibile è di costo minimo se e solo se non ammette cicli aumentanti di costo negativo, ovvero se e solo se il corrispondente grafo residuo non contiene cicli (orientati) negativi. La figura sotto riportata mostra il grafo residuo associato al flusso dato, con i relativi costi. Tale grafo residuo contiene cicli negativi. Ad esempio, il ciclo $C_1 = (1, 4, 3)$, di costo $C(C_1) = -2$ e capacità $\theta = 1$, che può essere individuato applicando l'algoritmo SPT.L a partire da un nodo radice fittizio, collegato a ogni nodo del grafo mediante un arco di costo zero.

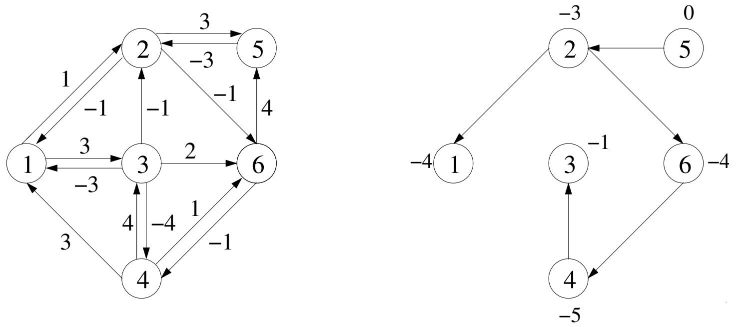


Inviando una unità di flusso lungo il ciclo $C_1$ si ottiene il flusso riportato nella figura in basso a sinistra, di costo 12, mentre il flusso dato ha costo 14. Neppure questo flusso è di costo minimo in quanto il grafo residuo, riportato nella figura a destra, contiene cicli negativi. Ad esempio, contiene il ciclo $C_2 = (2, 6, 5)$, di costo $C(C_2) = -1$.





Ponendo $c_{65} = 4$, il costo del ciclo $C_2$ diventa 0, e il flusso risulta essere di costo minimo. Applicando infatti l'algoritmo SPT.L sul grafo residuo modificato (figura in basso a sinistra), a partire da un nodo radice fittizio collegato a ogni nodo del grafo originario mediante un arco di costo zero, si ottiene l'albero dei cammini minimi riportato nella figura in basso a destra. L'esistenza di tale albero dei cammini minimi certifica la non esistenza di cicli orientati negativi nel grafo residuo, ovvero la non esistenza di cicli aumentanti di costo negativo, e quindi l'ottimalità del flusso determinato.




**3)** Si consideri una rete di telecomunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. Il gestore della rete deve inviare un messaggio da un nodo sorgente $s \in N$ a un nodo destinazione $d \in N$. Per velocizzare l'invio, ed evitare conflitti lungo gli archi della rete, il gestore decide di suddividere il messaggio in due pacchetti, e di inviare i due pacchetti simultaneamente lungo due cammini disgiunti di $G$ da $s$ a $d$, ovvero lungo due cammini formati da insiemi di archi tra loro disgiunti.

Indicando con $t_{ij}$ il tempo di transito di un pacchetto lungo l'arco $(i, j)$, si formuli in termini di $PLI$ il problema di individuare due cammini disgiunti del grafo, da $s$ a $d$, lungo cui inviare i due pacchetti, in modo tale da minimizzare il massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in $d$ (si assuma che il gestore invii simultaneamente i due pacchetti dal nodo $s$ al tempo zero).

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti due famiglie di variabili di flusso:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se l'arco } (i,j) \in A \text{ è utilizzato per inviare il pacchetto } k \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A, k = 1,2.$$

Introduciamo inoltre una variabile di soglia $z$, che rappresenta una valutazione superiore del massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in $d$.

Utilizzando le variabili introdotte, il problema può essere formulato mediante il seguente modello $PLI$:

$$\begin{array}{lll}
\min & z & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s, \\ \ \ 1 & \text{se } i = d, \\ \ \ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N, k = 1,2 \\
& x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq 1 & (i,j) \in A \\
& \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij}^1 \leq z & \\
& \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij}^2 \leq z & \\
& x_{ij}^k \in \{0, 1\} & (i,j) \in A, k = 1,2
\end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, esprime la richiesta relativa all'individuazione di due cammini di $G$ da $s$ a $d$ per l'invio dei due pacchetti. Il secondo blocco di vincoli garantisce che i due cammini utilizzati siano formati da sottoinsiemi di archi tra loro disgiunti. Infine, gli ultimi due vincoli definiscono $z$ come una valutazione superiore sia del tempo di arrivo in $d$ del primo pacchetto (lungo il primo cammino selezionato), sia del tempo di arrivo in $d$ del secondo pacchetto (lungo il secondo cammino selezionato): minimizzando $z$, si minimizza pertanto il massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in $d$.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

## Nome: Cognome:

**1)** Si risolva il seguente problema di $PL$

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{2,4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: $i$) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; $ii$) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{2,4\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 4$ , $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i\xi > 0 \,\} = \{1\} \ ,$$

$$\bar\lambda = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = \lambda_1 = 0 \ , \ k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar\lambda \,\} = 1$$

[cambio di base degenere]

it.2) $B = \{1,2\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 2$ , $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{5\} \ , \ \bar\lambda = \lambda_5 = 1 \ , \ k = 5$$

it.3) $B = \{1,5\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

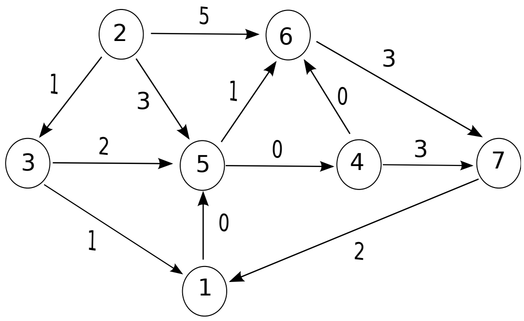
[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (3,5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (14,0,0,0,6)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. $i$) Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $x = (3,5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. $ii$) Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (3,5)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $x = (3,5)$ è $I(x) = \{1,3,5\}$. Di conseguenza una soluzione duale $y$, tale che $y^TA = c^T$, che formi con $x$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_2 = y_4 = 0$. Affinché $y$ sia ammissibile per $(D)$, essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

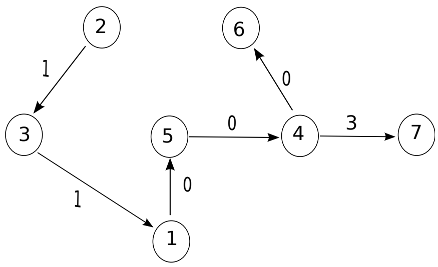
$$\begin{cases} y_1 \ -y_3 \ -2y_5 = 2 \\ -y_1 \ +y_3 \ +y_5 = -8 \\ y_1, \ \ y_3, \ \ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(14+\alpha, \alpha, 6)$, per $\alpha \geq 0$. Pertanto, le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni aventi forma $y(\alpha) = (14+\alpha, 0, \alpha, 0, 6)$, per $\alpha \geq 0$.

**2)** Si consideri il problema di determinare un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura:



**2.1)** Si verifichi se l'albero sotto riportato sia una soluzione ottima di tale problema:



**2.2)** Nel caso in cui il costo dell'arco $(6, 7)$ sia un parametro reale $\alpha$ (anzichè valere 3, come in figura), si determini per quali valori di tale parametro l'albero in figura sia un albero dei cammini minimi di radice 2, e per quali valori di $\alpha$ sia l'unico albero dei cammini minimi di radice 2. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

**2.1)** Sia $d$ il vettore delle etichette associate ai nodi dell'albero in figura, indicato nel seguito mediante la notazione $T$. Si ha: $d(1) = 2$, $d(2) = 0$, $d(3) = 1$, $d(4) = 2$, $d(5) = 2$, $d(6) = 2$, $d(7) = 5$. L'albero è ottimo se e solo se valgono le condizioni di Bellman, ovvero se e solo se $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$, $\forall (i, j) \notin T$. Poiché tali condizioni sono verificate, segue che $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 2.

**2.2)** Se il costo dell'arco $(6, 7)$ è pari a un parametro reale $\alpha$, $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di $\alpha$ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman, ovvero per tutti e soli i valori di $\alpha$ tali che $d(6) + \alpha \geq d(7)$ (si osservi che, per gli archi restanti non appartenenti a $T$, le condizioni di Bellman valgono in quanto $T$ è ottimo per $\alpha = 3$). Segue che $T$ è un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se $\alpha \geq 3$. Poiché per $\alpha = 3$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(6, 7)$ sono soddisfatte in forma di uguaglianza, mentre per i restanti archi non appartenenti all'albero sono soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta, segue inoltre che $T$ è l'unico albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di $\alpha > 3$. In particolare, per $\alpha = 3$ l'albero ottimo alternativo si ottiene inserendo l'arco $(6, 7)$ al posto di $(4, 7)$.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

## Nome: Cognome:

**1)** Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrrcl} \max & 6x_1 & +10x_2 & +18x_3 & +10x_4 & +18x_5 & +2x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la migliore valutazione superiore e la migliore valutazione inferiore disponibili nel momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

**SVOLGIMENTO**
Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 34$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} = 30 > z = -\infty$, $z = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 24$. Siccome $\bar{z} < z = 30$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

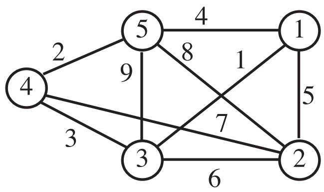
$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 33$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} = 30 = z = 30$, $z$ non cambia. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 28$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 28 < z = 30$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [2/3, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 32$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} = 30 = z = 30$, $z$ non cambia. Siccome $\bar{z} = 32 > z = 30$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_1$.

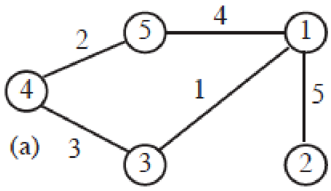
Poiché il massimo numero di livelli dell'albero è stato raggiunto, l'algoritmo viene interrotto anche se $Q$ non è vuota. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che la miglior valutazione superiore nel momento in cui l'algorimo viene interrotto è pari a $\max\{\ z\ ,\ \max\ \{\ \bar{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso $Q'$ contiene il solo nodo $x_3 = x_2 = 0$, pertanto tale miglior valutazione superiore è 32. La miglior valutazione inferiore è invece $z = 30$, pertanto il gap relativo a terminazione è $(32 - 30)/30 = 2/30 = 6.\bar{6}\%$. In effetti con semplici argomentazioni è facile dimostrare che il valore $z = 30$ è ottimo per il problema, e che quindi l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima.

**2)** Si consideri l'istanza del problema TSP in figura. Si fornisca una valutazione inferiore del suo valore ottimo, mediante il rilassamento MS1T, e una valutazione superiore, mediante l'algoritmo euristico *nearest neighborhood*, eseguendo tale algoritmo a partire dal nodo 1. Si specifichi quindi l'intervallo di appartenenza del valore ottimo individuato mediante le due valutazioni. Come cambierebbe la risposta se il costo dell'arco (1,3) fosse 10 invece di 1? Giustificare le risposte.

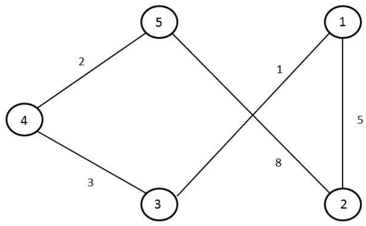


**SVOLGIMENTO**

Il rilassamento MS1T restituisce l'1-albero mostrato in figura (a). Viene quindi determinata la seguente valutazione inferiore del valore ottimo: $\underline{z} = 15$.




L'algoritmo euristico *nearest neighborhood*, a partire dal nodo 1, individua il ciclo Hamiltoniano sotto riportato. Viene determinata pertanto la seguente valutazione superiore del valore ottimo: $\bar{z} = 19$.



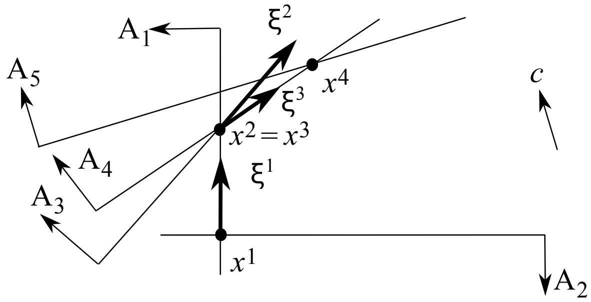
L'intervallo di appartenenza del valore ottimo individuato mediante le due valutazioni è quindi $[15, 19]$.

Se l'arco (1,3) costasse 10 invece di 1, il rilassamento MS1T individuerebbe il ciclo Hamiltoniano $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$, di costo 20. Essendo in tal caso 20 sia una valutazione inferiore che una valutazione superiore del valore ottimo, 20 sarebbe il valore ottimo del problema TSP per l'istanza modificata.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente il problema di $PL$ in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Si osservi che $c$ è collineare ad $A_5$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima primale e di quella duale.




**SVOLGIMENTO**

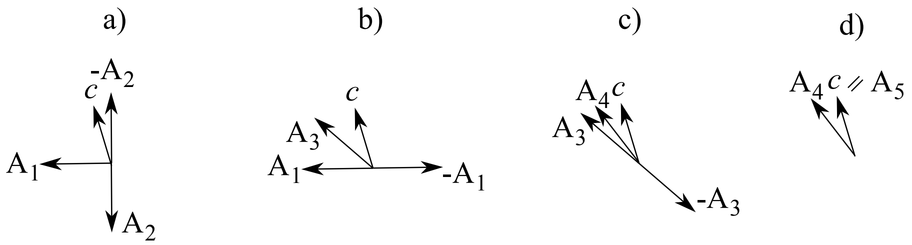
it. 1) $B = \{1, 2\}$: $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_1$ e $-A_2$, come mostrato in $a$), quindi, $h = 2$. La base è primale non degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2\} = B$, e anche duale non degenere perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero ($c$ è interno al cono generato da $A_1$ ed $-A_2$). Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 4, quindi $k = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $y_1 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_1$ ed $A_3$, come mostrato in $b$), pertanto $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(x^2) = \{1, 3, 4\} \supset B$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base. Quindi $k = 4$ e si esegue un cambio di base degenere.

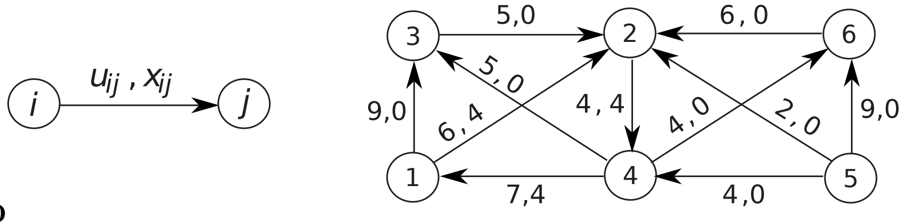
it. 3) $B = \{3, 4\}$: $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_3$ ed $A_4$, come mostrato in $c$), quindi $h = 3$. La base continua a essere primale degenere e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^3$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, quindi $k = 5$.

it. 4) $B = \{4, 5\}$: $y_4 = 0$ e $y_5 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato dal solo $A_5$ (essendo $c$ collineare ad $A_5$), come mostrato in $d$). Quindi l'algoritmo termina avendo individuato in $x^4$ una soluzione ottima primale. La base è primale non degenere, in quanto $I(x^4) = \{4, 5\} = B$, ma duale degenere in quanto $y_4 = 0$.

La soluzione ottima primale non è unica. Infatti, poiché $c$ è collinare ad $A_5$, sono ottime tutte le soluzioni appartenenti alla semiretta ammissibile, di origine $x^4$, individuata dall'iperpiano corrispondente al quinto vincolo. Di conseguenza, la soluzione ottima duale è unica. In una qualsiasi soluzione ottima primale, infatti, il vincolo 5 è l'unico attivo. Pertanto, per rispettare le condizioni degli scarti complementari, solamente la quinta componente può essere strettamente positiva in una qualsiasi soluzione ottima duale.

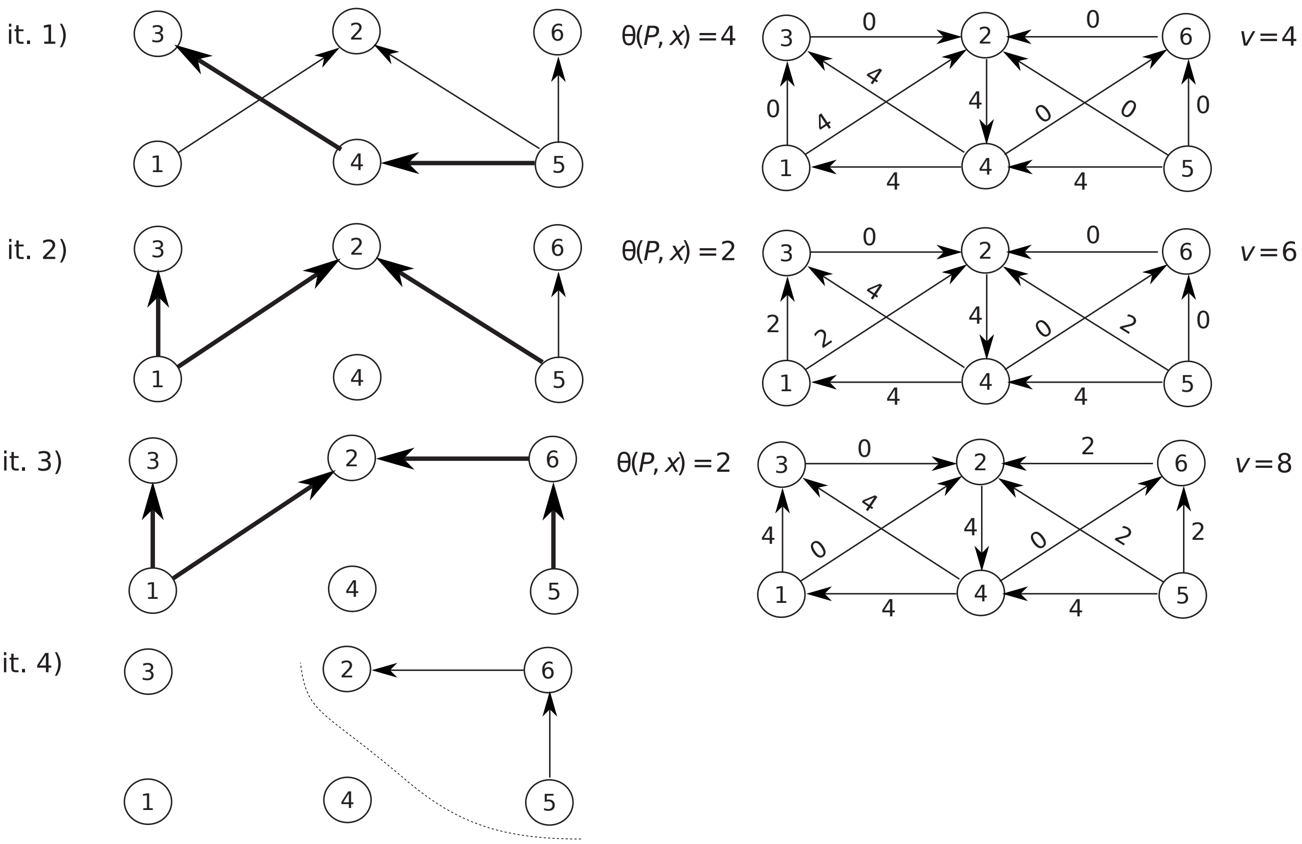


**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 3 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio $(N_s, N_t)$ restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine, nel caso in cui la capacità dell'arco $(5, 6)$ fosse un parametro reale positivo $\epsilon$, per quali valori di $\epsilon$ il valore del flusso massimo resterebbe lo stesso determinato per lo scenario $u_{56} = 9$.




**SVOLGIMENTO**

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione tranne l'ultima, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante $P$ individuato (archi evidenziati). A destra viene invece riportato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo $P$ di un flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$ del cammino aumentante, con il relativo valore $v$. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{2, 5, 6\}, \{1, 3, 4\})$ determinato dall'algoritmo nel corso dell'ultima iterazione: i nodi in $N_s$ sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo, mentre $N_t = N \setminus N_s$. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{54} = 4 + 4 = 8 = v$.




Per valori di $\epsilon \geq 2$, il valore del flusso massimo risulta invariato, ovvero è sempre pari a 8. Il flusso individuato dall'algoritmo, di valore 8, continua infatti a essere ammissibile, ed è massimo a causa del taglio $(N_s, N_t) = (\{2, 5, 6\}, \{1, 3, 4\})$, che continua ad avere capacità minima pari a 8. Per valori di $\epsilon < 2$, invece, il valore del flusso massimo risulta inferiore a 8, in quanto la capacità del taglio $(\{5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\})$ risulta essere $u_{52} + u_{54} + u_{56} = 4 + 2 + \epsilon < 8$.

**3)** Il gruppo commerciale *UNI-TOSC* decide di aprire $m$ punti vendita per rifornire $n$ clienti. Sia $u_j$ il massimo numero di clienti che il punto vendita $j$ è in grado di rifornire, e sia $c_{ij}$ il costo di servizio sostenuto dal punto vendita $j$ nel caso in cui rifornirà il cliente $i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Tramite un'indagine di mercato, *UNI-TOSC* stima il coefficiente di soddisfacimento, $s_{ij}$, del cliente $i$ nel caso in cui verrà rifornito dal punto vendita $j$. Per cercare di favorire il soddisfacimento dei clienti, *UNI-TOSC* decide di far pagare a ogni punto vendita $j$ una penalità $p_j$ nel caso in cui il soddisfacimento totale dei clienti da esso riforniti risulterà inferiore a una soglia prefissata $S$.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di assegnare gli $n$ clienti agli $m$ punti vendita in modo che ogni cliente sia rifornito da esattamente un punto vendita e i vincoli di capacità siano rispettati, minimizzando il costo complessivo sostenuto dai punti vendita, dato dai costi di servizio più le eventuali penalità legate al grado di scarso soddisfacimento dei clienti.

**SVOLGIMENTO**
Introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato al punto vendita } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se il punto vendita } j \text{ pagherà la penale,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Utilizzando tali variabili binarie si può proporre la seguente formulazione per il problema di *UNI-TOSC*:

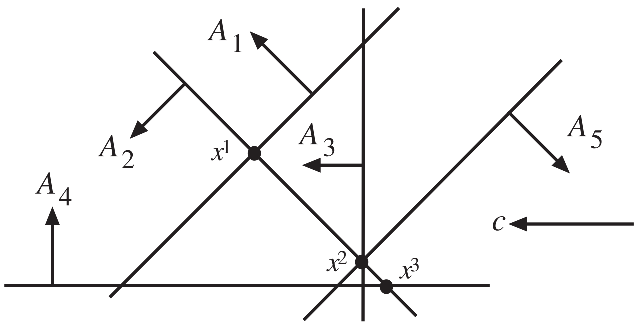
$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} p_j y_j & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le u_j & j = 1, \ldots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij} \ge S(1 - y_j) & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \\ & y_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli stabilisce che ogni cliente sia assegnato a esattamente un punto vendita. Il secondo gruppo di vincoli rappresenta i vincoli di capacità relativi ai punti vendita. Il terzo gruppo di vincoli garantisce che, a livello di soluzione ottima, il punto vendita $j$ pagherà la penale se e solo se il soddisfacimento totale dei clienti assegnati a $j$, $\sum_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij}$, risulterà minore di $S$. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, è definita dalla somma dei costi di servizio e delle penalità.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il problema di *PL* in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che $c$ ed $A_3$ sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (direttamente in figura), la soluzione di base duale, l'indice entrante $k$, i segni delle componenti del vettore $\eta_B$ e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle basi visitate.

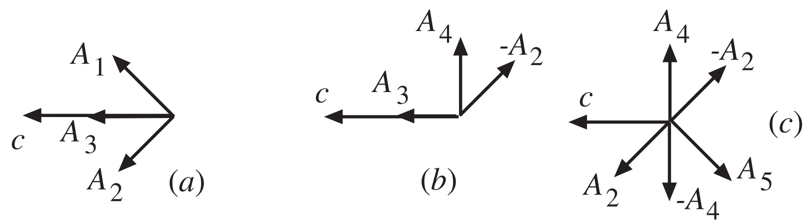



**SVOLGIMENTO**

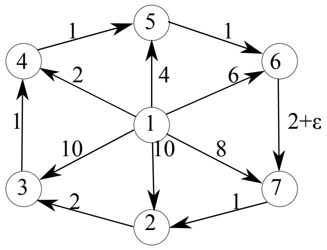
It. 1) $B = \{1, 2\}$: la soluzione di base primale ($x^1$ in figura) è non degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2\}$. Anche la soluzione di base duale è non degenere in quanto $c$ non è collineare né con $A_1$ né con $A_2$, come mostrato in ($a$). In particolare sia $y_1$ che $y_2$ sono maggiori di zero. Si ha $k = \min\{i \in N : A_i x^1 > b_i\} = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. Inoltre, $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$, in quanto $A_3$ appartiene al cono finitamente generato da $A_1$ e $A_2$, come mostrato in ($a$). Poiché $A_3$ è collineare a $c$ si ha che $y_1/\eta_1 = y_2/\eta_2$, e pertanto $h = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

It. 2) $B = \{2, 3\}$: la soluzione di base primale ($x^2$ in figura) è degenere (è attivo anche il quinto vincolo, non in base). Pure la soluzione di base duale è degenere in quanto, essendo $c$ collineare ad $A_3$, si ha $y_2 = 0$ (mentre $y_3 > 0$). Inoltre, $k = \min\{i \in N : A_i x^2 > b_i\} = 4$. Infine, $\eta_2 < 0, \eta_3 > 0$ in quanto $A_4$ appartiene al cono finitamente generato da $-A_2$ ed $A_3$, come mostrato in ($b$). Pertanto $h = 3$.

It. 3) $B = \{2, 4\}$: la soluzione di base primale ($x^3$ in figura) è non degenere come pure la soluzione di base duale, essendo $y_2 > 0$ e $y_4 > 0$. Inoltre $k = \min\{i \in N : A_i x^3 > b_i\} = 5$. Poiché $\eta_2 < 0$ ed $\eta_4 < 0$, in quanto $A_5$ appartiene al cono finitamente generato da $-A_2$ ed $-A_4$, come mostrato in ($c$), l'algoritmo termina avendo determinato che il problema duale è inferiormente illimitato, e di conseguenza il problema primale è vuoto.



**2)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, fissando $\epsilon = 0$.




Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta quindi ottimalità e unicità della soluzione individuata al variare di $\epsilon$. Inoltre, si discuta per quali valori di $\epsilon$ il problema risulta inferiormente illimitato, giustificando tutte le risposte.

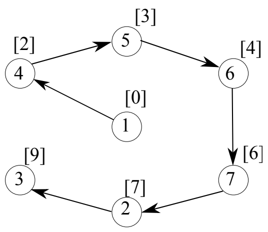
**SVOLGIMENTO**

Il grafo contiene il ciclo orientato $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 2)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 6 \times 10 + 1 = 61.$

| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $p[7]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | $d[7]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 61 | 61 | 61 | 61 | 61 | 61 | $\{1\}$ |
| 1 | 1 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 | 10 | 2 | 4 | 6 | 8 | $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ |
| 2 | 4 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 0 | 10 | 10 | 2 | 3 | 6 | 8 | $\{2, 3, 5, 6, 7\}$ |
| 3 | 5 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 4 | 5 | 1 | 0 | 10 | 10 | 2 | 3 | 4 | 8 | $\{2, 3, 6, 7\}$ |
| 4 | 6 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 0 | 10 | 10 | 2 | 3 | 4 | 6 | $\{2, 3, 7\}$ |
| 5 | 7 | *nil* | 7 | 1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 0 | 7 | 10 | 2 | 3 | 4 | 6 | $\{2, 3\}$ |
| 6 | 2 | *nil* | 7 | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 0 | 7 | 9 | 2 | 3 | 4 | 6 | $\{3\}$ |
| 7 | 3 | *nil* | 7 | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 0 | 7 | 9 | 2 | 3 | 4 | 6 | $\{\emptyset\}$ |

L'albero trovato è mostrato in figura:

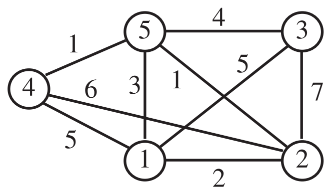



Al variare di $\epsilon$ le etichette dei nodi $2, 3$ e $7$ variano nel modo seguente: $d_2 = 7 + \epsilon$, $d_3 = 9 + \epsilon$ e $d_7 = 6 + \epsilon$. Occorre quindi verificare per quali valori di $\epsilon$ gli archi del grafo non appartenenti all'albero, e incidenti nei nodi $2, 3$ e $7$, ovvero $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 7)$ e $(3, 4)$, soddisfino le condizioni di Bellman, ovvero le condizioni di ottimalità per il problema dell'albero dei cammini minimi di radice data:

$$\left\{\begin{array}{rcl} d_1 + c_{12} & \geq & d_2 \\ d_1 + c_{13} & \geq & d_3 \\ d_1 + c_{17} & \geq & d_7 \\ d_3 + c_{34} & \geq & d_4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 10 & \geq & 7 + \epsilon \\ 10 & \geq & 9 + \epsilon \\ 8 & \geq & 6 + \epsilon \\ 9 + \epsilon + 1 & \geq & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \epsilon & \leq & 3 \\ \epsilon & \leq & 1 \\ \epsilon & \leq & 2 \\ \epsilon & \geq & -8 \end{array}\right.$$

Segue che l'albero dei cammini minimi individuato resta ottimo se e solo se $-8 \leq \epsilon \leq 1$. Per $\epsilon = 1$ tale soluzione ottima non è unica: l'arco $(1, 3)$ può infatti sostituire $(2, 3)$, in quanto le condizioni di Bellman valgono in forma di uguaglianza. Per $\epsilon = -8$ l'albero individuato dall'algoritmo è invece l'unica soluzione ottima in quanto l'arco $(3, 4)$, che soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, non può essere inserito al posto di $(1, 4)$ in quanto non si ottiene un albero. Si osservi infine che, per $\epsilon < -8$, il costo del ciclo $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 2)$ diventa negativo, e il problema risulta quindi inferiormente illimitato.

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema TSP mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo $i$ con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti nell'1-albero di copertura di costo minimo individuato, si generino $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero di enumerazione in modo breadth-first. Inoltre, per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore, indicando se, e come, viene effettuato il branching, oppure se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Nel caso ciò non sia sufficiente a risolvere il problema, si stimi il gap relativo ottenuto quando l'algoritmo viene interrotto, giustificando la risposta.



**SVOLGIMENTO** Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta in corrispondenza di ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 11$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata una soluzione ammissibile e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha quattro archi incidenti, e a generare sei figli, ciascuno dei quali è ottenuto fissando a zero le variabili corrispondenti a una delle possibili coppie dei seguenti archi: $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$ e $(4,5)$.

$\boxed{x_{15} = x_{25} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 17$, è mostrato in (b). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere col branching sul nodo 1, che ha tre archi incidenti.

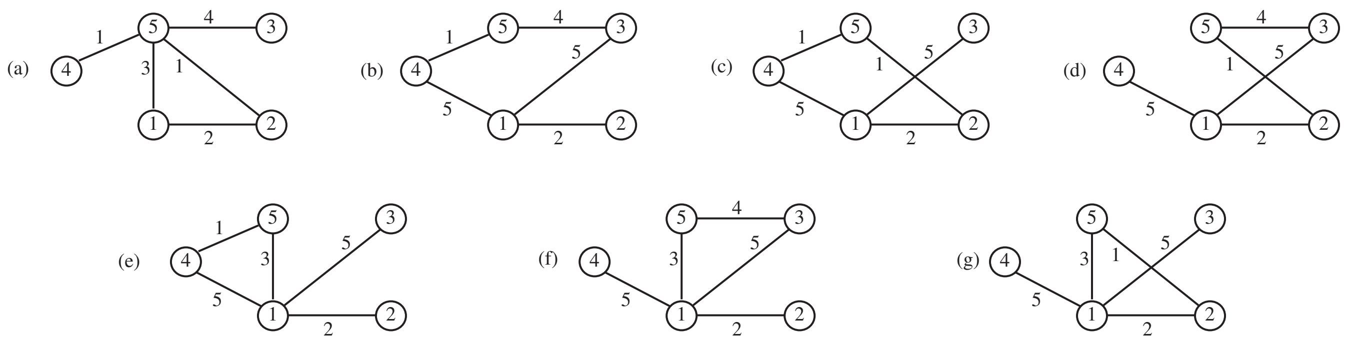
$\boxed{x_{15} = x_{35} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 14$, è mostrato in (c). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha tre archi incidenti.

$\boxed{x_{15} = x_{45} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 17$, è mostrato in (d). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha tre archi incidenti.

$\boxed{x_{25} = x_{35} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 16$, è mostrato in (e). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha quattro archi incidenti.

$\boxed{x_{25} = x_{45} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 19$, è mostrato in (f). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha quattro archi incidenti.

$\boxed{x_{35} = x_{45} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 16$, è mostrato in (g). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha quattro archi incidenti.




Poiché $Q$ non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che

$$\min\left\{ z \ , \ \min\left\{ \underline{z}(P') \ : \ P' \in Q' \right\} \right\}$$

è una valutazione inferiore globale corretta, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso $Q'$ contiene tutti i nodi esaminati tranne il nodo radice, poiché nessuno è stato potato, e il minimo si ottiene in corrispondenza del nodo $x_{15} = x_{35} = 0$, per cui $\underline{z} = 14$. Pertanto, la valutazione inferiore globale è 14. Poiché $z = +\infty$, non essendo stata generata nessuna soluzione ammissibile per il problema, il gap relativo quando l'algoritmo viene interrotto è $+\infty$.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si consideri il seguente problema di $PL$:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
& -x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
& & & x_2 & \leq & 0 \\
& -2x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& x_1 & & & \leq & 4 \\
& x_1 & & & \leq & -1
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante $k$, il vettore $\eta_B$, il passo di spostamento $\bar{\theta}$ e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si individui 1) l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali, 2) l'insieme di tutte le soluzioni ottime primali, giustificando le risposte.

**SVOLGIMENTO**

$$\text{it. 1) } B = \{2,4\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{y}_N^T = 0,\ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},\quad k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = 6,$$

$$\eta_B^T = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\ \bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 0,$$

$$h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i \,\} = 4$$

$$\text{it. 2) } B = \{2,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{y}_N^T = 0,\ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\quad k = 3,$$

$$\eta_B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix},\ \bar{\theta} = 1,\quad h = 2$$

$$\text{it. 3) } B = \{3,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ \bar{y}_N^T = 0,\ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \mathit{STOP}.$$

$B = \{3, 6\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (-1, -4)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 0, 2)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

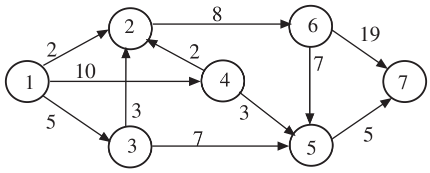
Per individuare l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale, consideriamo il Duale Ristretto associato a $\bar{x}$. Poiché $I(\bar{x}) = \{1, 3, 6\}$ (la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è infatti degenere), il Duale Ristretto risulta essere:

$$(DR) \quad \begin{cases} -y_1 - 2y_3 + y_6 = 0 \\ -y_1 + y_3 = 1 \\ y_1, \; y_3, \; y_6 \geq 0 \end{cases}$$

Posto $y_6 = \alpha$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $((\alpha-2)/3, (\alpha+1)/3, \alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per il duale del problema dato per ogni $\alpha \geq 2$. Pertanto, $y(\alpha) = ((\alpha-2)/3, 0, (\alpha+1)/3, 0, 0, \alpha)$, $\alpha \geq 2$, è l'insieme di tutte e sole le soluzioni ottime del problema duale.

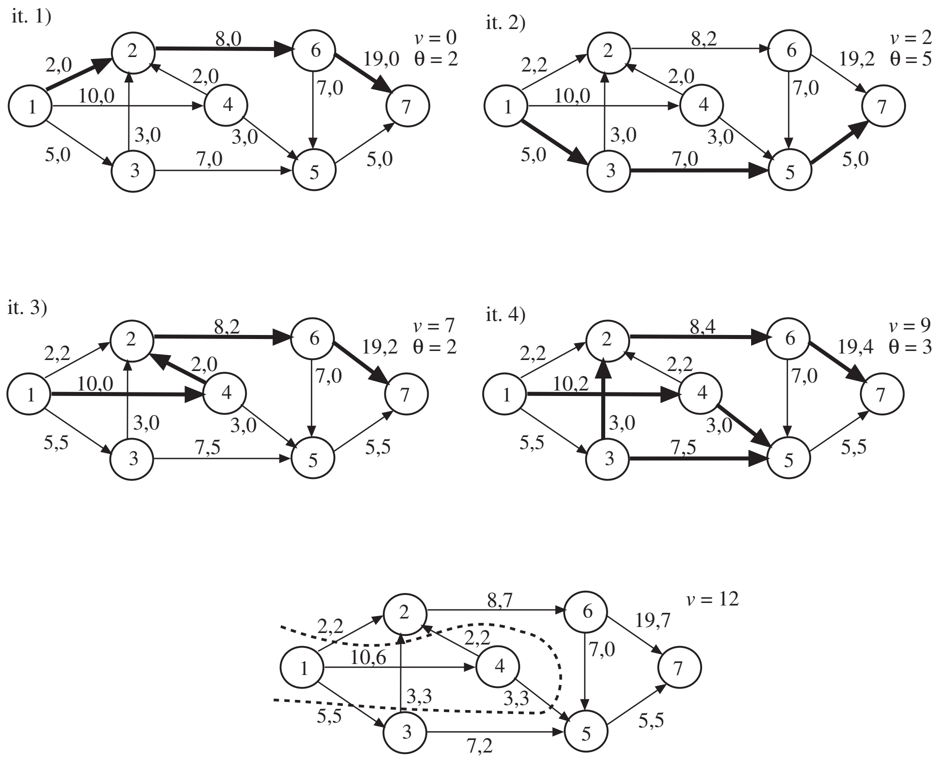
Per quanto riguarda invece l'insieme delle soluzioni ottime primali, poiché la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo è non degenere, dalle condizioni degli scarti complementari segue che $\bar{x} = (-1, -4)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale.

**2)** Si risolva il problema di flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Per ogni iterazione si riporti il flusso $x$ determinato, il suo valore $v$, il cammino aumentante individuato e la sua capacità $\theta$. Al termine si riporti il taglio minimo determinato dall'algoritmo e la sua capacità.



**SVOLGIMENTO**

Le iterazioni sono mostrate in figura, dall'alto in basso e da sinistra a destra. Il secondo numero associato a ogni arco indica il flusso lungo l'arco. Gli archi evidenziati indicano il cammino aumentante selezionato. Nell'ultima figura in basso è mostrato il flusso ottimo determinato. La linea tratteggiata indica il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 4\}, \{2, 3, 5, 6, 7\})$ determinato dall'algoritmo nel corso dell'ultima iterazione: i nodi in $N_s$ sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo, mentre $N_t = N \setminus N_s$. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{13} + u_{42} + u_{45} = 2 + 5 + 2 + 3 = 12 = v$.



**3)** L'agenzia turistica Tour deve organizzare un viaggio, da Roma ($r$) a Torino ($t$), composto da esattamente $k$ tappe intermedie. L'agenzia ha individuato un insieme $N_1$ di possibili località da visitare come prima tappa intermedia, un insieme $N_2$ di possibili località da visitare come seconda tappa intermedia, e così via fino a un insieme $N_k$ di possibili località da visitare come ultima tappa intermedia prima di recarsi a Torino e terminare il viaggio. Definendo $N_0 = \{r\}$ e $N_{k+1} = \{t\}$, sia $G = (N, A)$ il grafo orientato a livelli che descrive la rete logistica pertinente per l'organizzazione del viaggio, tale che $N = \cup_{h=0}^{k+1} N_h$, mentre $A$ contiene tutti e soli gli archi che connettono ciascun nodo in $N$ a tutti i nodi del livello successivo, ossia $A = \{(i,j) : i \in N_h, j \in N_{h+1}, h = 0,\ldots,k\}$. Per ogni $(i,j) \in A$, è noto il costo $c_{ij}$ per viaggiare da $i$ a $j$ (comprensivo del costo di pernottamento in $j$).

Per rendere più gradevoli le tratte del viaggio, ovvero ogni spostamento tra due tappe consecutive, Tour dispone di $m \geq k$ animatori. Per ogni tratta va selezionato un animatore, con il vincolo che ciascun animatore può essere impiegato lungo al più una tratta. Impiegare l'animatore $p$ lungo la tratta $(i,j)$ comporta per l'agenzia un costo $c_{ij}^p$, $p = 1,\ldots,m$, $(i,j) \in A$.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere quali tappe intermedie effettuare, ovvero quali tratte percorrere, e quale animatore selezionare per ogni tratta del viaggio, in modo da minimizzare il costo complessivo sostenuto dall'agenzia.

**SVOLGIMENTO**

Per ogni $(i,j) \in A$, introduciamo la variabile binaria

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se la località } j \text{ è visitata subito dopo la località } i, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $(i,j) \in A$ e $p = 1,\ldots,m$ introduciamo la variabile binaria

$$y_{ij}^p = \begin{cases} 1, & \text{se l'animatore } p \text{ viene selezionato per la tratta } (i,j), \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando tali variabili binarie, il problema di Tour può essere formulato nel modo seguente:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \left( c_{ij} x_{ij} + \sum_{p=1}^{m} c_{ij}^p y_{ij}^p \right)$$

$$\sum_{(j,i)\in A} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } i = r, \\ 1, & \text{se } i = t, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N$$

$$\sum_{p=1}^{m} y_{ij}^p = x_{ij} \quad (i,j) \in A$$

$$\sum_{(i,j)\in A} y_{ij}^p \leq 1 \quad p = 1,\ldots,m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$

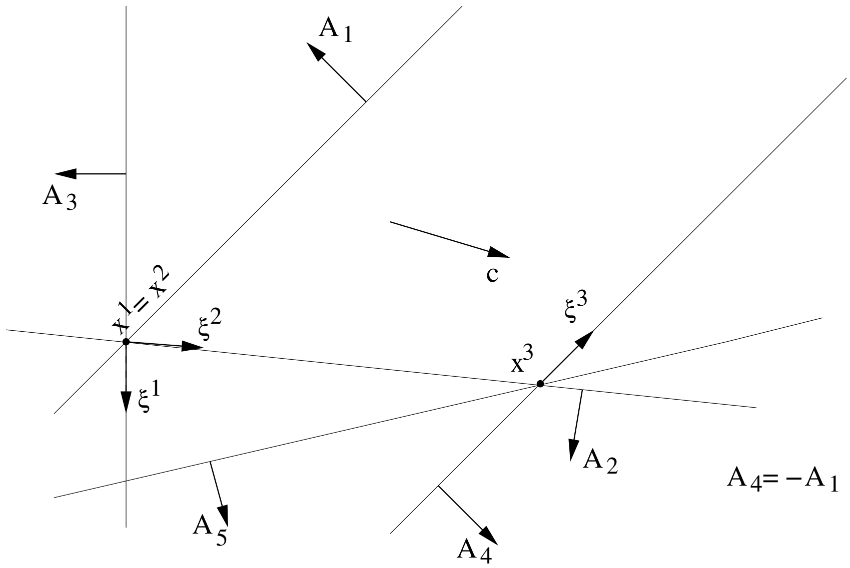
$$y_{ij}^p \in \{0,1\} \quad p = 1,\ldots,m, (i,j) \in A$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, impone che venga selezionato un cammino orientato da $r$ a $t$ in $G$. Grazie alla struttura del grafo, a livelli, tale cammino risulta composto da esattamente $k$ nodi intermedi, ovvero visita esattamente una località per ciascuno degli insiemi $N_h$, $h = 1,\ldots,k$, come richiesto. Il secondo blocco di vincoli impone la selezione di un animatore per ogni tratta del viaggio. Si osservi che, se $(i,j)$ non costituisce una tratta del viaggio, ovvero $x_{ij} = 0$, allora nessun animatore viene associato a $(i,j)$. Il terzo blocco di vincoli, infine, garantisce che ogni animatore sia impiegato in al più una tratta.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente il problema di $PL$ in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1,3\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle soluzioni di base visitate dall'algoritmo.



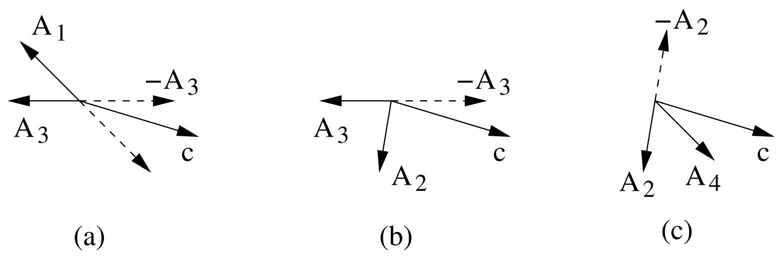

**SVOLGIMENTO**

it. 1) $B = \{1,3\}$: $y_1 < 0$, $y_3 < 0$ in quanto $c$ appartiene al cono finitamente generato da $-A_1$ e $-A_3$, come mostrato in (a), pertanto $h = \min\{1,3\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. La soluzione di base primale è degenere in quanto $I(x^1) = \{1,2,3\}$, mentre quella duale è non degenere perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero ($c$ è interno al cono generato da $-A_1$ e $-A_3$). Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 2, attivo ma non in base. Pertanto $k = 2$ e si esegue un cambio di base degenere.

it. 2) $B = \{2,3\}$: $y_2 > 0$, $y_3 < 0$ in quanto $c$ appartiene al cono finitamente generato da $A_2$ e $-A_3$, come mostrato in (b), pertanto $h = 3$. La soluzione di base primale è sempre degenere, mentre quella duale è non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 4 e 5, quindi $k = \min\{4,5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland.

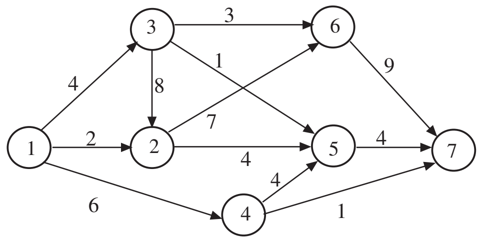
it. 3) $B = \{2,4\}$: $y_2 < 0$, $y_4 > 0$ in quanto $c$ appartiene al cono finitamente generato da $-A_2$ e $A_4$, come mostrato in (c). Si ha quindi $h = 2$. La soluzione di base primale è degenere in quanto $I(x^3) = \{2,4,5\}$, mentre quella duale è non degenere perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero. La direzione di spostamento scelta dall'algoritmo è $\xi^3$. Poiché $A_i\xi^3 \le 0$ per $i \in N = \{1,3,5\}$, $\xi^3$ è una direzione di crescita illimitata. STOP.

Il problema primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il suo problema duale è vuoto.



**2)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo di Dijkstra. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Si discuta quindi se l'algoritmo di Dijkstra sia il più appropriato, per l'istanza proposta, dal punto di vista della complessità computazionale in tempo. In caso contrario, quale algoritmo sarebbe teoricamente più conveniente, tra quelli studiati? Giustificare le risposte.

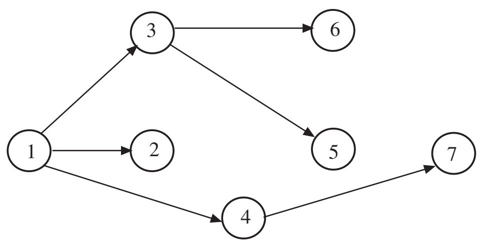



**SVOLGIMENTO**

$M = (n-1)C_{max} + 1 = 6 \times 9 + 1 = 55.$

| Iter. | $u$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | $d[7]$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $p[7]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 55 | 55 | 55 | 55 | 55 | 55 | nil | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\{1\}$ |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 4 | 6 | 55 | 55 | 55 | nil | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\{2,3,4\}$ |
| 2 | 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 6 | 9 | 55 | nil | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | $\{3,4,5,6\}$ |
| 3 | 3 | 0 | 2 | 4 | 6 | 5 | 7 | 55 | nil | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | $\{4,5,6\}$ |
| 4 | 5 | 0 | 2 | 4 | 6 | 5 | 7 | 9 | nil | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | $\{4,6,7\}$ |
| 5 | 4 | 0 | 2 | 4 | 6 | 5 | 7 | 7 | nil | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | $\{6,7\}$ |
| 6 | 6 | 0 | 2 | 4 | 6 | 5 | 7 | 7 | nil | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | $\{7\}$ |
| 7 | 7 | 0 | 2 | 4 | 6 | 5 | 7 | 7 | nil | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | $\emptyset$ |

L'albero ottimo individuato è mostrato in figura.




Si osservi che il grafo non contiene cicli orientati. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo per reti acicliche, avente complessità in tempo $O(m)$, mentre la complessità in tempo dell'algoritmo di Dijkstra è $O(n^2)$. Si osservi anche che il grafo non è ben numerato (si consideri a riguardo l'arco $(3,2)$). Per applicare l'algoritmo per reti acicliche è pertanto necessario rinumerare i nodi del grafo in accordo a una buona enumerazione. A tal fine, è sufficiente invertire la numerazione dei nodi 2 e 3.

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{llllllll} \max & 4x_1 & +16x_2 & +8x_3 & +14x_4 & +2x_5 & & \\ & 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +2x_5 & \leq & 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti), con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si interrompa l'esecuzione dell'algoritmo dopo aver visitato cinque nodi dell'albero (incluso il nodo radice), riportando il gap assoluto finale, ovvero la differenza tra la miglior valutazione superiore e la miglior valutazione inferiore disponibili nel momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

**SVOLGIMENTO**
Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottima del rilassamento continuo e con $\bar{x}$ la soluzione restituita dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: $x_2, x_3, x_4, x_1, x_5$.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

**Nodo radice**: $x^* = [0, 1, 1, 3/4, 0]$, $\bar{z} = 34 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 28$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 28$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_4$.

$x_4 = 0$: $x^* = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 28$. Poiché la soluzione del rilassamento continuo è intera, si ha $\underline{z} = 28$. Dato che $\bar{z} = \underline{z}$, il nodo viene chiuso per ottimalità (avrebbe potuto anche essere chiuso dalla valutazione superiore).

$x_4 = 1$: $x^* = [0, 1, 1/2, 1, 0]$, $\bar{z} = 34$, $\bar{x} = [0, 1, 0, 1, 0]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} > z$, si pone $z = 30$. Inoltre, poiché $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$x_4 = 1, x_3 = 0$: $x^* = [1/3, 1, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 31 + 1/3$, $\bar{x} = [0, 1, 0, 1, 0]$, $\underline{z} = 30$, quindi $z$ non cambia. Poiché $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_1$.

$x_4 = x_3 = 1$: $x^* = [0, 2/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 32 + 2/3$, $\bar{x} = [0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 24$. Poiché $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

Poiché sono stati visitati cinque nodi, l'esecuzione dell'algoritmo viene interrotta. Nel momento dell'interruzione, la miglior valutazione inferiore disponibile è data da $z = 30$. La miglior valutazione superiore disponibile è invece pari a $\max\{\ z\ ,\ \max\ \{\ \bar{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso $Q'$ contiene sia il nodo $x_4 = 1, x_3 = 0$ che il nodo $x_4 = x_3 = 1$. Pertanto, la miglior valutazione superiore disponibile è $32 + 2/3$, che può essere arrotondata a 32 essendo tutti i coefficienti di costo interi, e di conseguenza il gap assoluto finale è 2.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il seguente problema di $PL$

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i*) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; *ii*) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{2,3\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 3$ , $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1\} \ ,$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = \lambda_1 = 0 \ , \ k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 1$$

[cambio di base degenere]

it.2) $B = \{1,2\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 2$ , $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ J = \{4\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_4 = 1 \ , \ k = 4$$

it.3) $B = \{1,4\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

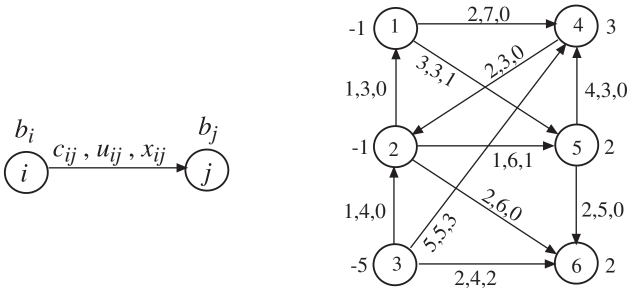
Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (3, 5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (14, 0, 0, 6, 0)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. *i*) Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $x = (3, 5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. *ii*) Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (3, 5)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $x = (3, 5)$ è $I(x) = \{1, 4, 5\}$. Di conseguenza una soluzione duale $y$, tale che $y^T A = c^T$, che formi con $x$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_2 = y_3 = 0$. Affinché $y$ sia ammissibile per $(D)$, essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y_1 \ -2y_4 \ -y_5 = 2 \\ -y_1 \ +y_4 \ +y_5 = -8 \\ y_1, \ y_4, \ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(14 + \alpha, 6, \alpha)$, per $\alpha \geq 0$. Pertanto, le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni aventi forma $y(\alpha) = (14 + \alpha, 0, 0, 6, \alpha)$, per $\alpha \geq 0$.

**2)** Si risolva il problema di flusso di costo minimo, per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo basato su cancellazione di cicli a partire dal flusso ammissibile indicato, di costo $c^T x = 23$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo aumentante determinato con il relativo verso, costo e capacità, e si indichi il flusso ottenuto con il corrispondente costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

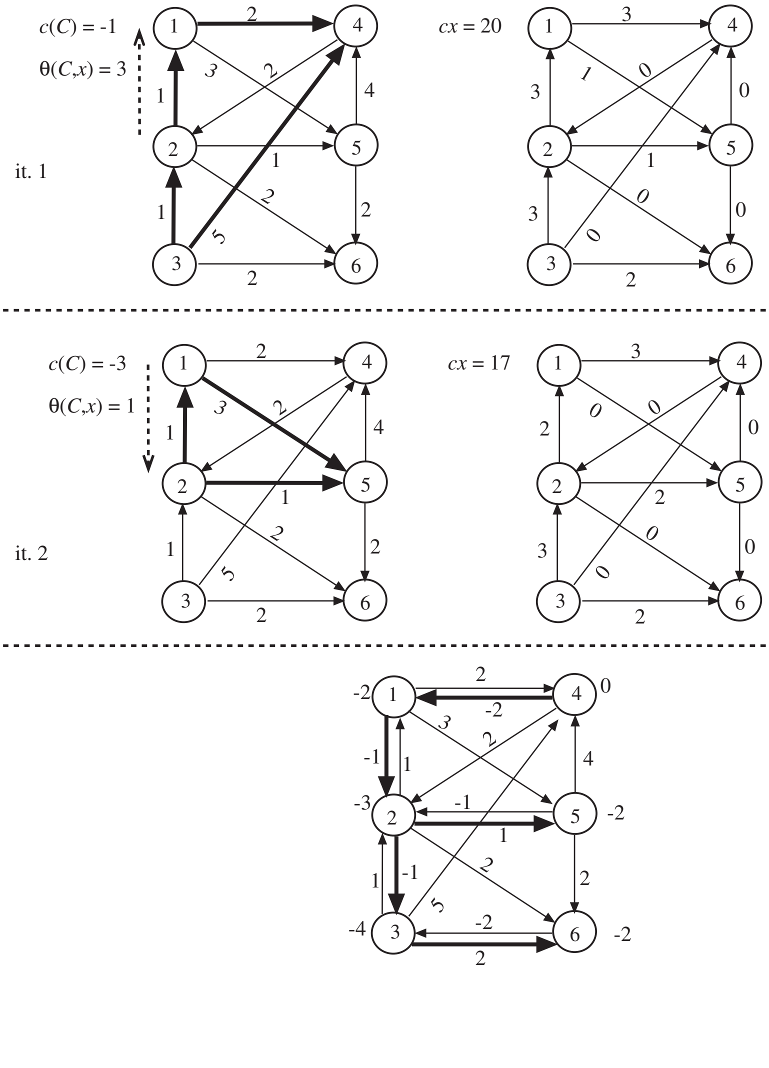
(Suggerimento: si inizi la ricerca del primo ciclo aumentante a partire dal nodo 3)




**SVOLGIMENTO**

L'algoritmo esegue le due iterazioni mostrate nel seguito. A sinistra è mostrato il ciclo $C$ individuato (archi in grassetto, sul grafo originale) con il suo verso (freccia tratteggiata), il suo costo $c(C)$ e la sua capacità $\theta(C, x)$. A destra è mostrato il flusso $x$ determinato dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il relativo costo $c^T x$.

Nell'ultima figura è mostrato il grafo residuo relativo all'ultimo flusso determinato, dove è evidenziato un albero dei cammini minimi (archi in grassetto) avente come radice un nodo fittizio collegato a costo zero ai nodi del grafo originale (il nodo radice e gli archi di collegamento non sono mostrati in figura). Tale albero è ottimo, come si può verificare grazie alle etichette riportate, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto al flusso individuato, che quindi è ottimo.



**3)** Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & 8x_1 & +9x_2 & +4x_3 & +2x_4 & +2x_5 & & \\ & 7x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +4x_4 & +7x_5 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo di Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visitando l'albero di enumerazione in modo *depth-first* ($Q$ è pertanto uno stack) e, tra i figli di uno stesso nodo, inserendo per primo nello stack quello ottenuto fissando la variabile frazionaria a 1 (quindi, estraendo per primo il figlio ottenuto fissando la variabile frazionaria a 0). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti), con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, oppure se il nodo viene chiuso e perché.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la miglior valutazione inferiore determinata. Si noti che le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

**Inizializzazione**: L'insieme $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$1^a$ **iterazione**: Da $Q$ viene estratto il nodo radice. Risolvendo il rilassamento continuo si ottiene $x^* = [1, 5/9, 0, 0, 0]$, $\bar{z} = 13$, mentre l'euristica Greedy CUD determina $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 12$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si pone $z = 12$. Inoltre, poiché $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

$2^a$ **iterazione**: Nello stack $Q$ sono presenti i due figli del nodo radice. Per la modalità di inserimento nello stack dei figli di uno stesso nodo, in testa allo stack è presente il nodo ottenuto fissando $x_2 = 0$, che viene quindi estratto. Risolvendo il corrispondente rilassamento continuo si ottiene $x^* = [1, 0, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 12$. La soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, e quindi il nodo viene chiuso per ottimalità. Il nodo sarebbe comunque stato chiuso perchè $\bar{z} = 12 \leq z = 12$.

$3^a$ **iterazione**: In $Q$ è presente il solo nodo ottenuto fissando $x_2 = 1$, che viene pertanto estratto. Risolvendo il corrispondente rilassamento continuo si ottiene $x^* = [3/7, 1, 0, 0, 0]$, $\bar{z} = 12 + 3/7$. Si osservi che la valutazione superiore può essere arrotondata per difetto al valore 12 in quanto i costi dell'istanza sono interi. L'euristica Greedy CUD determina invece $\bar{x} = [0, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 9$ (e quindi $z$ non viene aggiornata). Poichè $\bar{z} = 12 \leq z = 12$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché $Q = \emptyset$, la visita dell'albero di enumerazione è conclusa, e l'algoritmo termina avendo risolto all'ottimo l'istanza data. La soluzione ottima individuata è $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 0]$, di costo 12.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

## Nome: Cognome:

**1)** Si risolva il seguente problema di $PL$

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 1, \quad B(h) = 1,$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{3, 4\},$$

$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \;:\; i \in J \,\} = \lambda_3 = \lambda_4 = 4, \quad k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = \min\{3, 4\} = 3$ [regola anticiclo di Bland]

it.2) $B = \{2, 3\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 2, \quad B(h) = 1,$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$J = \{4\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_4 = 0, \quad k = 4$ [cambio di base degenere]

it.3) $B = \{3, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 3, \quad B(h) = 1,$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{STOP.}$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, il problema dato è superiormente illimitato e di conseguenza il suo duale è vuoto.

**2)** Si consideri il seguente problema di $PL$:

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\max & x_1 & + & (1-\alpha)x_2 & - & \alpha x_3 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2
\end{array}$$

**2.1)** Si determinino i valori del parametro $\alpha$ per i quali $\hat{x} = (0,0,0)$ è una soluzione ottima del problema. **2.2)** Si determinino i valori del parametro $\alpha$ per i quali $\bar{x} = (1,1,-1)$ è soluzione ottima. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

**2.1)** Poiché $I(\hat{x}) = \emptyset$, $\hat{x}$ è un punto interno della regione ammissibile del problema dato. Inoltre, il vettore dei costi è diverso dal vettore zero per qualsiasi valore del parametro $\alpha$. Segue che $\hat{x}$ non può essere soluzione ottima del problema dato per qualsiasi valore di $\alpha$.

**2.2)** Poiché l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I = I(\bar{x}) = \{3,6\}$, il Duale Ristretto associato a $\bar{x}$

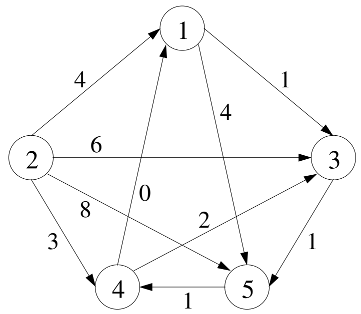
$$(DR)\ \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

risulta essere:

$$(DR)\ \begin{cases} 2y_3 + y_6 = 1 \\ y_3 + y_6 = 1-\alpha \\ -y_3 = -\alpha \\ y_3,\ y_6 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni ammette come unica soluzione $(y_3, y_6) = (\alpha, 1-2\alpha)$. Tale soluzione ha componenti non negative se e solo se $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Quindi $(DR)$ ha soluzione se e solo se il parametro $\alpha$ appartiene all'intervallo $[0,1/2]$. Di conseguenza, $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema dato se e solo se $\alpha \in [0,1/2]$.

**3)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. **3.1)** L'albero dei cammini minimi individuato è unico? **3.2)** Se il costo dell'arco (3,5) fosse un parametro reale $\beta$, invece di valere 1 come in figura, per quali valori di $\beta$ l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 2? Giustificare tutte le risposte.



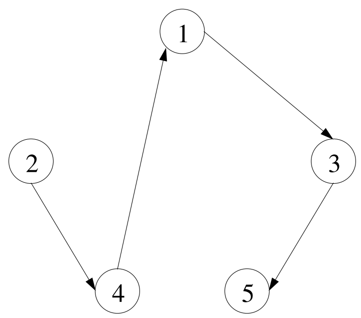

**SVOLGIMENTO**

Non essendo presenti archi di costo negativo e non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo orientato $(3, 5, 4)$), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, cioè l'algoritmo SPT.S in cui l'insieme $Q$ è implementato come una coda di priorità, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 4 \times 8 + 1 = 33.$

| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 2 | *nil* | 2 | 2 | 2 | 33 | 0 | 33 | 33 | 33 | $\{2\}$ |
| 1 | 2 | 2 | *nil* | 2 | 2 | 2 | 4 | 0 | 6 | 3 | 8 | $\{1, 3, 4, 5\}$ |
| 2 | 4 | 4 | *nil* | 4 | 2 | 2 | 3 | 0 | 5 | 3 | 8 | $\{1, 3, 5\}$ |
| 3 | 1 | 4 | *nil* | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 4 | 3 | 7 | $\{3, 5\}$ |
| 4 | 3 | 4 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 | 4 | 3 | 5 | $\{5\}$ |
| 5 | 5 | 4 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 | 4 | 3 | 5 | $\emptyset$ |

L'albero dei cammini minimi individuato è mostrato in figura.




**3.1)** La soluzione trovata è unica in quanto tutti gli archi non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman come disuguaglianza stretta, ovvero $d[i] + c_{ij} > d[j]$ per ogni arco $(i, j)$ non appartenente all'albero.

**3.2)** Se il costo dell'arco $(3, 5)$ fosse un parametro reale $\beta$, l'etichetta del nodo 5 varrebbe $d(5) = 4 + \beta$. L'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di $\beta$ per cui valgono le condizioni di Bellman. In tal caso, è sufficiente imporre tale condizioni per gli archi non appartenenti all'albero e incidenti il nodo 5:

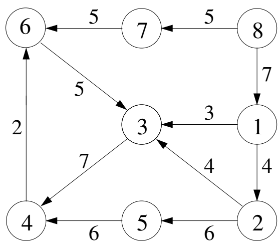
1. $(1, 5)$: $d[1] + 4 \geq d[5]$, ovvero $3 + 4 \geq 4 + \beta$, ovvero $\beta \leq 3$
2. $(2, 5)$: $d[2] + 8 \geq d[5]$, ovvero $0 + 8 \geq 4 + \beta$, ovvero $\beta \leq 4$
3. $(5, 4)$: $d[5] + 1 \geq d[4]$, ovvero $4 + \beta + 1 \geq 3$, ovvero $\beta \geq -2$

Segue che, se il costo dell'arco $(3, 5)$ fosse un parametro reale $\beta$, l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se $-2 \leq \beta \leq 3$.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

## Nome: Cognome:

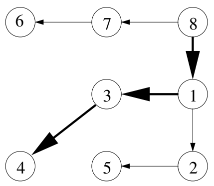
**1)** Si individui un flusso massimo dal nodo 8 al nodo 4, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se la capacità dell'arco $(3,4)$ fosse un parametro intero $\epsilon > 7$? Giustificare tutte le risposte.

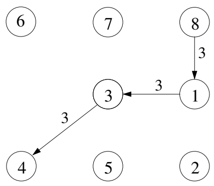


**SVOLGIMENTO**

Per ogni iterazione tranne l'ultima viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo $P$ di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo. Viene anche riportato il corrispondente valore di flusso $v$.

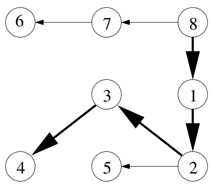
It. 1)

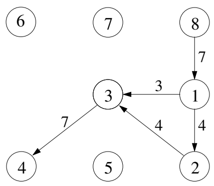




$\theta(P,x) = 3, \quad v = 3$

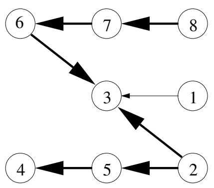
It. 2)

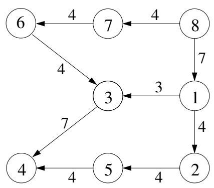




$\theta(P,x) = 4, \quad v = 7$

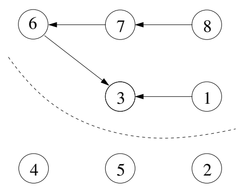
It. 3)





$\theta(P,x) = 4, \quad v = 11$

It. 4)



Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato è massimo e il taglio $N_s = \{1,3,6,7,8\}$, $N_t = \{2,4,5\}$ è di capacità minima: $u(N_s,N_t) = u_{34} + u_{12} = 7 + 4 = 11$.

Se la capacità dell'arco $(3,4)$ fosse un parametro intero $\epsilon > 7$, il valore del flusso massimo sarebbe 12 per ogni valore di $\epsilon$ in tale insieme. Infatti, sarebbe possibile inviare una sola ulteriore unità di flusso lungo il cammino aumentante $(8,7,6,3,4)$, a causa del taglio $N'_s = \{8\}$, $N'_t = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, di capacità 12.

**2)** Si consideri la seguente formulazione

$$\max \left\{ \min_{i=1,\dots,n} c_i x_i \quad : \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \quad x_i \in \{0,5,7,12\}, \quad i = 1,...,n \right\}$$

dove $b$, $a_i$ e $c_i$, per $i = 1,...,n$, sono dati di input. Si modifichi la formulazione in modo tale che il modello risultante sia espresso in termini di PLI, giustificando le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Ogni variabile a valori discreti $x_i$ può essere modellata in termini di PLI introducendo tre variabili binarie $y_i^1$, $y_i^2$ e $y_i^3$ per indicare l'attribuzione a $x_i$ del valore 5, 7, 12, rispettivamente. I vincoli non lineari

$$x_i \in \{0,5,7,12\}, \qquad i = 1,...,n$$

possono pertanto essere modellati mediante:

$$\begin{aligned} & x_i = 5y_i^1 + 7y_i^2 + 12y_i^3 && i = 1,...,n \\ & y_i^1 + y_i^2 + y_i^3 \le 1 && i = 1,...,n \\ & y_i^1, y_i^2, y_i^3 \in \{0,1\} && i = 1,...,n \end{aligned}$$

Nel caso in cui $y_i^1 = y_i^2 = y_i^3 = 0$, il primo vincolo attribuisce alla variabile $x_i$ il valore 0.

La funzione obiettivo non lineare

$$\min_{i=1,\dots,n} c_i x_i$$

può invece essere modellata in termini di PLI introducendo una variabile di soglia $w$, che stimi per difetto il minimo dei valori $c_i x_i$, e formulando

$$\max \min_{i=1,\dots,n} c_i x_i$$

mediante

$$\begin{aligned} \max \quad & w \\ & c_i x_i \ge w \qquad i = 1,...,n. \end{aligned}$$

Il modello matematico iniziale può essere quindi riformulato in termini di PLI nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & w \\ & c_i x_i \ge w && i = 1,...,n \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\ & x_i = 5y_i^1 + 7y_i^2 + 12y_i^3 && i = 1,...,n \\ & y_i^1 + y_i^2 + y_i^3 \le 1 && i = 1,...,n \\ & y_i^1, y_i^2, y_i^3 \in \{0,1\} && i = 1,...,n \end{aligned}$$

Si osservi che il problema potrebbe essere formulato utilizzando esclusivamente le variabili $y_i^h$, $i = 1,...,n$ e $h = 1,2,3$. Infatti, il terzo blocco di vincoli può essere utilizzato per eliminare le variabili $x_i$ dai primi due gruppi di vincoli.

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max & x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & & \\ & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si consideri quindi la disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$. Si tratta di un piano di taglio per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 15$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3]$, $\bar{z} = 12$. Siccome $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 16 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1]$, $\bar{z} = 14$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} < z$.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 0}$ $x^* = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 15$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = z$.

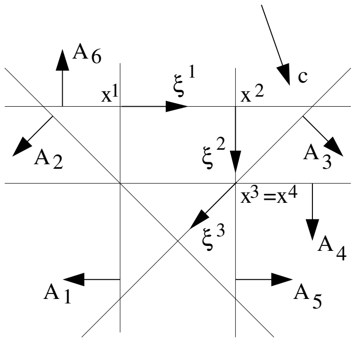
L'algoritmo termina in quanto $Q$ è vuota. Di conseguenza, la soluzione $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, di costo 15, è ottima per il problema.

La disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$ rappresenta un piano di taglio per il problema dato in quanto: 1) è una disuguaglianza valida, ovvero è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato (gli oggetti 3 e 4 non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino); 2) è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (infatti $1/3 + 1 > 1$).

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente il problema di $PL$ in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 6\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle soluzioni di base visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima primale e di quella duale.



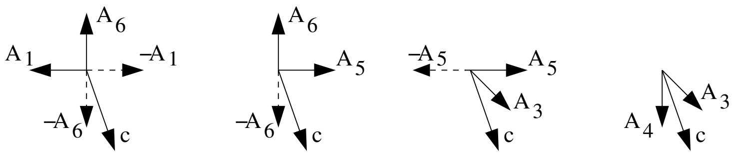

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{1, 6\}$: $y_1 < 0$ e $y_6 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_6$, come mostrato in figura ($a$); quindi, risulta $h = \min\{1, 6\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. La soluzione di base primale è non degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 6\} = B$, come pure quella duale, perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero ($c$ è interno al cono generato da $-A_1$ ed $-A_6$). Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, quindi $k = 5$.

it.2) $B = \{5, 6\}$: $y_5 > 0$ e $y_6 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_5$ e $-A_6$, come mostrato in figura ($b$); si ha quindi $h = 6$. Le soluzioni di base primale e duale sono entrambe non degeneri. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 4, quindi $k = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{3, 5\}$: $y_3 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_3$ e $-A_5$, come mostrato in figura ($c$); quindi $h = 5$. La soluzione di base primale è degenere, in quanto anche il vincolo 4 risulta attivo, mentre quella duale è non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione $\xi^3$ si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere ponendo $k = 4$.

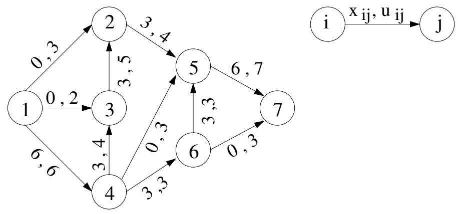
it.4) $B = \{3, 4\}$: $y_3 > 0$ e $y_4 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_3$ e $A_4$, come mostrato in figura ($d$). La base è quindi duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale $x^4$. La soluzione di base primale è degenere, essendo invariata rispetto all'iterazione precedente, mentre quella duale è non degenere.




(a) (b) (c) (d)

La soluzione ottima primale è unica, come si può osservare per via geometrica. Tale proprietà segue anche dal fatto che la soluzione ottima duale determinata dall'algoritmo è non degenere. La soluzione ottima duale, invece, non è unica. Infatti, $c$ appartiene al cono generato da $A_4$ e $A_5$, ovvero anche la soluzione duale ammissibile corrispondente alla base $\{4, 5\}$ è ottima. Si osservi che tale soluzione ottima duale è diversa da quella individuata dall'algoritmo.

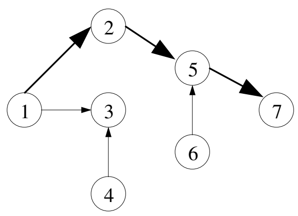
**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura, di valore $v = 6$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. Come cambierebbe il valore del flusso massimo nel caso in cui l'arco $(2, 5)$ dovesse essere rimosso dalla rete per via di un guasto, e non potesse quindi essere utilizzato per l'invio di flusso? Giustificare tutte le risposte.

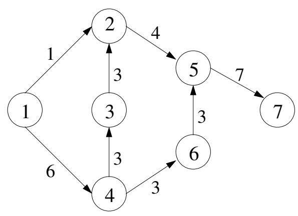



**SVOLGIMENTO**

Per ogni iterazione tranne l'ultima viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo $P$ di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo. Viene infine riportato il corrispondente valore di flusso $v$.

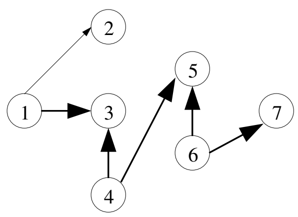
It. 1)

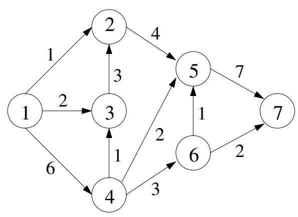




$\theta(P, x) = 1, \quad v = 7$

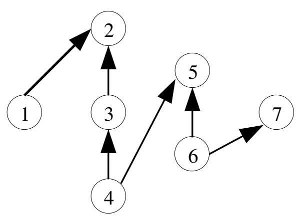
It. 2)

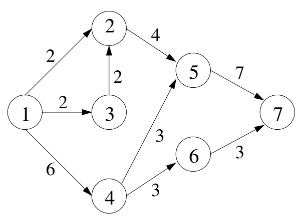




$\theta(P, x) = 2, \quad v = 9$

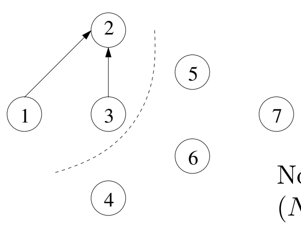
It. 3)





$\theta(P, x) = 1, \quad v = 10$

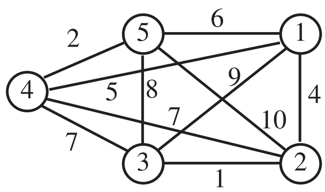
It. 4)



Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato è massimo e il taglio $(N_s = \{1, 2, 3\},\ N_t = \{4, 5, 6, 7\})$ è di capacità minima:
$u(N_s, N_t) = u_{14} + u_{25} = 6 + 4 = 10 = v$.

Se l'arco $(2, 5)$ dovesse essere rimosso dalla rete, il valore del flusso massimo si ridurrebbe a 6. L'arco $(2, 5)$, infatti, è un arco diretto del taglio di capacità minima, $(\{1,2,3\}, \{4, 5, 6, 7\})$, determinato nel caso di rete integra. Pertanto, rimuovendo $(2, 5)$ tale taglio continua a essere di capacità minima anche per la rete ridotta. Per il Teorema Flusso Massimo-Taglio di Capacità Minima, segue che la capacità di tale taglio nella rete ridotta, ovvero 6, coincide con il valore di flusso massimo in assenza dell'arco $(2, 5)$.

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema TSP mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo $i$ con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti nell'1-albero di copertura di costo minimo individuato, si generino $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero di enumerazione in modo breadth-first, e si inseriscano in $Q$ i figli generati a partire da $i$ rispettando l'ordine crescente dell'estremo $j$ dell'arco $(i, j)$ la cui variabile è fissata a zero (nel caso $r = 3$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore, indicando se, e come, viene effettuato il branching, oppure se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Nel caso ciò non sia sufficiente a risolvere il problema, si stimi il gap relativo ottenuto quando l'algoritmo viene interrotto. Si consideri quindi la disuguaglianza $x_{15} + x_{14} + x_{45} \leq 2$. Si tratta di una disuguaglianza valida per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.



**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta in corrispondenza di ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 18$, è mostrato in (a). Poiché $\underline{z} < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a generare tre figli, fissando a zero la variabile corrispondente a uno degli archi $(1, 2)$, $(1, 4)$ e $(1, 5)$.

$\boxed{x_{12} = 0}$ Un corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 21$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e a generare tre figli, fissando a zero la variabile corrispondente a uno degli archi $(4, 1)$, $(4, 3)$ e $(4, 5)$.

$\boxed{x_{14} = 0}$ Un corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 20$, è mostrato in (c). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 20$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

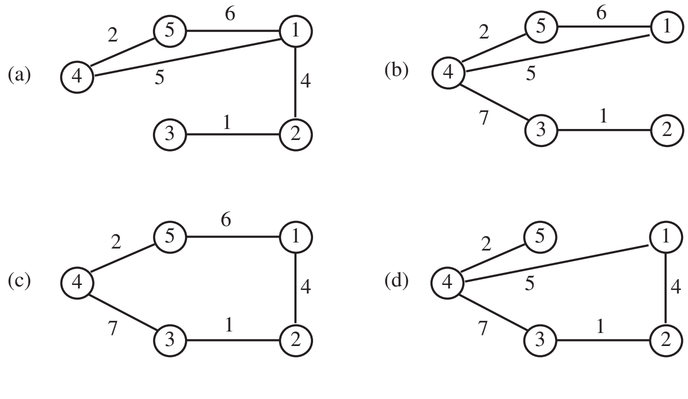
$\boxed{x_{15} = 0}$ Un corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 19$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 19 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e a generare tre figli, fissando a zero la variabile corrispondente a uno degli archi $(4, 1)$, $(4, 3)$ e $(4, 5)$.

Poiché sono stati esplorati i primi due livelli dell'albero delle decisioni, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente, con $Q$ non vuota. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che la valutazione inferiore globale nel momento in cui l'algoritmo viene interrotto è pari a

$$\min \{ \, z \, , \, \min \{ \, \underline{z}(P') \; : \; P' \in Q' \, \} \, \},$$

dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso, $Q'$ contiene i nodi $x_{12} = 0$ e $x_{15} = 0$, e pertanto la valutazione inferiore globale è pari a $\min\{ 20 \, , \, \min\{ 21 \, , \, 19 \} \} = 19$. Il gap relativo nel momento in cui l'algoritmo viene interrotto è quindi

$$\frac{20 - 19}{19} \approx 5,3\%.$$




$x_{15} + x_{14} + x_{45} \leq 2$ è una disuguaglianza valida per il problema dato in quanto è soddisfatta da tutte le sue soluzioni ammissibili. Infatti, poiché $(1, 4, 5)$ è un ciclo che non include tutti i nodi del grafo, in qualsiasi soluzione ammissibile per TSP, ovvero in qualsiasi ciclo Hamiltoniano, almeno uno dei tre archi che compongono il ciclo non può essere presente. Si osservi che tale disuguaglianza è violata dalla soluzione del rilassamento MS1T eseguito in corrispondenza del nodo radice.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si consideri il seguente problema di $PL$, in cui $\gamma$ è un parametro reale:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & (-2-\gamma)x_1 & + & (-2+3\gamma)x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1. \end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di $\gamma$ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il problema. Si consideri quindi la seguente variante del problema, la cui la funzione obiettivo è ottenuta da quella del primo problema di $PL$ fissando $\gamma = 0$, e $\alpha$ è un ulteriore parametro reale:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -2x_1 & - & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4-2\alpha \\ & x_1 & & & \leq & 2-\alpha \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1+\alpha \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1. \end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di $\alpha$ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale secondo problema di $PL$. Si fissi infine $\alpha = 0.5$ nel secondo problema di $PL$, e si determini l'insieme delle soluzioni ottime duali in tale scenario. Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Consideriamo il primo problema di $PL$ e determiniamo la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$:

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che tale soluzione è primale ammissibile, in quanto soddisfa i primi tre vincoli del problema. Determiniamo ora la corrispondente soluzione di base duale in funzione del parametro $\gamma$:

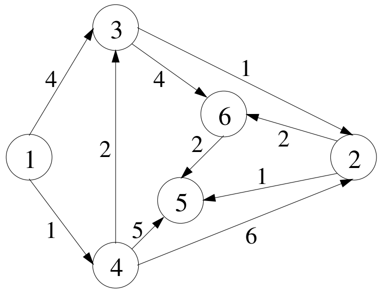
$$y_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} (-2-\gamma) & (-2+3\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\gamma & 2+\gamma \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4\gamma & 2+\gamma \end{bmatrix}.$$

$B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile se e solo se $y_B \geq 0$, vale a dire se e solo se $\gamma \in [-2, 0]$. Quindi, $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il primo problema di $PL$ se e solo se $\gamma \in [-2, 0]$.

Consideriamo ora il secondo problema di di $PL$. La base $B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile per tale problema, in quanto il vettore dei costi di tale problema si ottiene dal vettore dei costi del problema di $PL$ precedentemente considerato fissando $\gamma = 0$. La soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$ è $x = (1, 0)$, come nel caso precedente. Tale soluzione è primale ammissibile se e solo se essa soddisfa anche i vincoli fuori base, vale a dire i primi tre vincoli del problema. È immediato verificare che ciò accade se e solo se $\alpha \in [0, 1]$. Quindi, $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il secondo problema di $PL$ se e solo se $\alpha \in [0, 1]$.

Fissiamo infine $\alpha = 0.5$ nel secondo problema di $PL$. In base ai risultati appena presentati, in tale scenario $B = \{4, 5\}$ è una base ottima. Poiché la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$, ovvero $x = (1, 0)$, è non degenere nello scenario $\alpha = 0.5$, dal Teorema degli Scarti Complementari segue che l'unica soluzione ottima duale nel caso $\alpha = 0.5$ è $(0, 0, 0, 0, 2)$.

**2)** Si determini un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si riportino il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta quindi se l'albero determinato resterebbe ottimo nel caso in cui, dopo la sua individuazione, venisse aggiunto al grafo l'arco $(5, 3)$ di costo -2.




**SVOLGIMENTO**

Rinumerando i nodi come segue

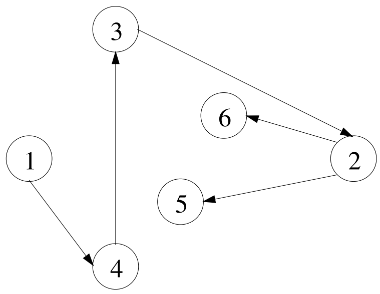
| originale | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| nuova numerazione | 1 | 4 | 3 | 2 | 6 | 5 |

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco $(i, j)$ del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ anche in presenza di archi di costo negativo. Si ricordi che tale algoritmo non necessita dell'insieme dei nodi candidati $Q$. Nello svolgimento vengono utilizzati i nomi dei nodi dopo la rinumerazione.

$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31.$

| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| 1 | 1 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 31 | 31 | 31 |
| 2 | 2 | *nil* | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 3 | 7 | 31 | 6 |
| 3 | 3 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 0 | 1 | 3 | 4 | 7 | 6 |
| 4 | 4 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 5 |
| 5 | 5 | *nil* | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 5 |

L'albero dei cammini minimi individuato, sul grafo originale, è mostrato in figura:




Se al grafo in figura venisse aggiunto l'arco $(5, 3)$, di costo -2, l'albero individuato continuerebbe a essere un albero dei cammini minimi di radice 1, in quanto le condizioni di Bellman relative al nuovo arco sarebbero soddisfatte in forma di uguaglianza. Facendo riferimento alla nuova numerazione dei nodi, si avrebbe infatti $d(6) - 2 = 5 - 2 = 3 = d(3)$. Si osservi che $(5, 3)$ non potrebbe sostituire $(4, 3)$ nell'albero individuato in quanto tale scambio determinerebbe una struttura che non è un albero.

**3)** Uno studente del corso di laurea in Matematica deve recarsi in un centro commerciale per l'acquisto di un nuovo computer. Dopo aver esaminato la cartina stradale, descritta mediante un grafo orientato $G = (N, A)$, decide di recarsi o al centro Uneur, situato nel nodo $t_1 \in N$, oppure al centro Mworld, situato nel nodo $t_2 \in N$. Lo studente si pone quindi il problema di individuare un percorso in $G$ dal nodo $s$, dove si trova la sua abitazione, fino al nodo $t_1$ oppure fino al nodo $t_2$. Noto il tempo di viaggio $t_{ij}$ associato a ogni collegamento $(i, j) \in A$, lo studente vuole individuare un percorso il cui tempo complessivo di viaggio non superi un tempo massimo prefissato $T$.

Indicando con $c_{ij}$ il costo di attraversamento di ogni collegamento $(i, j) \in A$, si formuli in termini di *PLI* il problema di individuare un cammino orientato che parta da $s$ e arrivi o al nodo $t_1$ oppure al nodo $t_2$, il cui tempo di viaggio non superi $T$ e che abbia costo totale di attraversamento minimo.

**SVOLGIMENTO**

Per formulare il problema, introduciamo le seguenti variabili binarie:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il collegamento } (i,j) \in A \text{ fa parte del percorso scelto dallo studente,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A.$$

Introduciamo inoltre una variabile booleana, $y$, per decidere se il percorso avrà il nodo $t_1$ oppure il nodo $t_2$ come nodo destinazione:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{se il percorso ha } t_1 \text{ come nodo destinazione,} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La richiesta di individuare un cammino orientato in $G$ dal nodo $s$ al nodo $t_1$ oppure al nodo $t_2$ può essere quindi espressa mediante la seguente generalizzazione dei vincoli di conservazione di flusso:

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1, & i = s \\ y, & i = t_1 \\ 1-y, & i = t_2 \\ 0, & i \in N, i \neq s, t_1, t_2, \end{cases} \qquad i \in N.$$

Il vincolo relativo al tempo complessivo di viaggio può invece essere espresso mediante:

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \leq T.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$. Il risultante modello *PLI* è pertanto:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1, & i = s \\ y, & i = t_1 \\ 1-y, & i = t_2 \\ 0, & i \in N, i \neq s, t_1, t_2 \end{cases} \qquad i \in N \\ & \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \leq T \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (i,j) \in A \\ & y \in \{0,1\} \end{array}$$

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -4 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & + & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante $k$, il vettore $\eta_B$, il passo di spostamento $\bar{\theta}$ e l'indice uscente $h$. In caso di ottimo finito, si individui l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale. Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it. 1) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^T = 0, \ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2, 5\} = 2,$$

$$\eta_B^T = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B, \ \eta_i > 0\} = \min\{1, 1\} = 1,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = \min\{1, 3\} = 1.$$

it. 2) $B = \{2, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^T = 0, \ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{4, 5\} = 4,$$

$$\eta_B^T = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = 0, \quad h = 3. \quad \text{[cambio di base duale degenere]}$$

it. 3) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N^T = 0, \ \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP}.$$

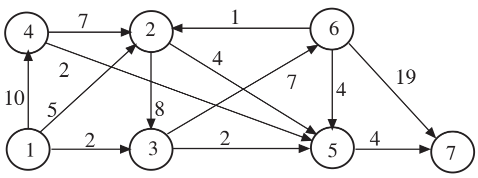
Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, ovvero $\bar{x}$ è una soluzione primale ammissibile, segue che $\bar{x} = (4, 0)$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = (0, 1, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x} = (4, 0)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $\bar{x} = (4, 0)$ è $I(\bar{x}) = \{2, 4, 5\}$. Di conseguenza una soluzione duale $y$, tale che $y^T A = c^T$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_1 = y_3 = 0$. Affinché $y$ sia ammissibile per il problema duale, essa deve inoltre soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} -y_2 + y_4 = -1 \\ y_2 + y_5 = 1 \\ y_2, \quad y_4, \quad y_5 \geq 0 \end{cases}$$

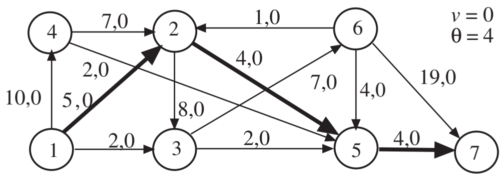
Il sistema di equazioni ammette soluzioni della forma $(\alpha, \alpha - 1, 1 - \alpha)$. Pertanto, imponendo la non negatività delle tre componenti, segue che il sistema ammette come unica soluzione $(1, 0, 0)$. Di conseguenza $\bar{y} = (0, 1, 0, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

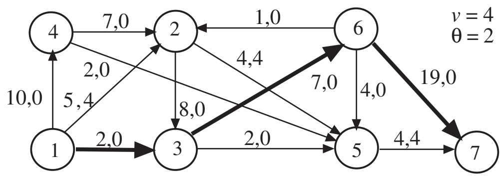
**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riporti il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se, oltre al nodo 7, anche il nodo 6 fosse destinazione di flusso? Giustificare tutte le risposte.

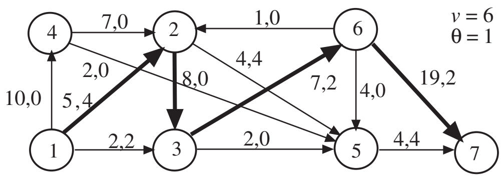


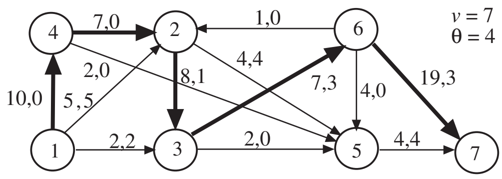
**SVOLGIMENTO**

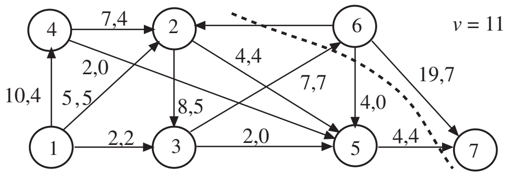
Per ogni iterazione tranne l'ultima viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato e la sua capacità. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo $P$ di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato (secondo valore associato agli archi del grafo), e il corrispondente valore di flusso $v$.




Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato, di valore $v = 11$, è un flusso massimo, e il taglio $(N_s = \{1,2,3,4,5\},\ N_t = \{6,7\})$ è di capacità minima:
$u(N_s, N_t) = u_{36} + u_{57} = 7 + 4 = 11 = v$.

Se, oltre al nodo 7, anche il nodo 6 fosse destinazione di flusso, il valore del flusso massimo resterebbe invariato, a causa della presenza del taglio $(N_s = \{1,2,3,4,5\},\ N_t = \{6,7\})$, precedentemente individuato, avente capacità 11.

**3)** Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max & 2x_1 & +10x_2 & +10x_3 & +18x_4 & +18x_5 & & \\ & 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +6x_4 & +3x_5 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si consideri quindi la disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$. Si tratta di un piano di taglio per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: $x_5, x_3, x_4, x_2, x_1$.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1, 1/3, 1]$, $\bar{z} = 34$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_4$.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [0, 0, 0, 1, 1/3]$, $\bar{z} = 24$. Siccome $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 33$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_2$.

$\boxed{x_4 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1]$, $\bar{z} = 28$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} < z$.

$\boxed{x_4 = 0,\ x_2 = 0}$ $x^* = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 30$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = z$.

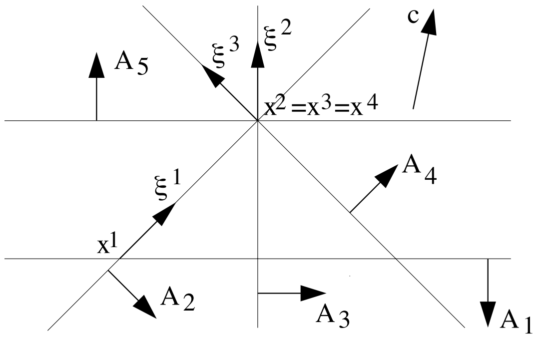
L'algoritmo termina in quanto $Q$ è vuota. Di conseguenza, la soluzione $x = [1, 0, 1, 0, 1]$, di costo 30, è ottima per il problema.

La disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$ rappresenta un piano di taglio per il problema dato in quanto: 1) è una disuguaglianza valida, ovvero è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato (gli oggetti 3 e 4 non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino); 2) è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (infatti $1 + 1/3 > 1$).

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente il problema di $PL$ in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale $x$ e la direzione di spostamento $\xi$ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima primale e di quella duale. Giustificare tutte le risposte.



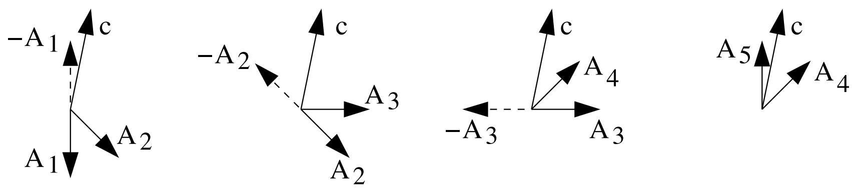

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_1$ e $A_2$, come mostrato in figura $(a)$. Si ha quindi $h = 1$. La base è sia primale ($I(x^1) = B$) che duale non degenere ($y_1, y_2 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3, 4 e 5, quindi $k = \min\{3, 4, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it.2) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_2$ e $A_3$, come mostrato in figura $(b)$. Si ha quindi $h = 2$. La base è primale degenere ($I(x^2) = \{2, 3, 4, 5\}$), ma duale non degenere ($y_2, y_3 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 4 e 5, attivi ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere selezionando $k = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_3$ e $A_4$, come mostrato in figura $(c)$. Si ha quindi $h = 3$. La base è duale non degenere ($y_3, y_4 \neq 0$), ma è primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4, 5\}$). Il massimo passo lungo la direzione $\xi^3$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 5$.

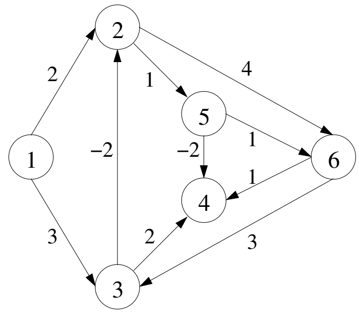
it.4) $B = \{4, 5\}$, $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_4$ e $A_5$, come mostrato in figura $(d)$. La la base è quindi duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo individuato la soluzione ottima primale $x^4$. La base è primale degenere ($I(x^4) = \{2, 3, 4, 5\}$) ma duale non degenere ($y_4, y_5 \neq 0$).




(a) (b) (c) (d)

La soluzione ottima primale è unica, come si può osservare per via geometrica. Tale proprietà segue anche dal fatto che la soluzione ottima duale determinata dall'algoritmo è non degenere. La soluzione ottima duale, invece, non è unica. Infatti, $c$ appartiene al cono generato da $A_3$ e $A_5$, ovvero anche la soluzione duale ammissibile corrispondente alla base $\{3, 5\}$ è ottima. Si osservi che tale soluzione ottima duale è diversa da quella individuata dall'algoritmo.

**2)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. In ogni iterazione si visitino gli archi in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. **2.1)** L'albero dei cammini minimi di radice 1 è unico? **2.2)** Se il costo dell'arco (5,4) fosse un parametro reale $\beta$, invece di valere -2 come in figura, per quali valori di $\beta$ l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 1? Giustificare tutte le risposte.



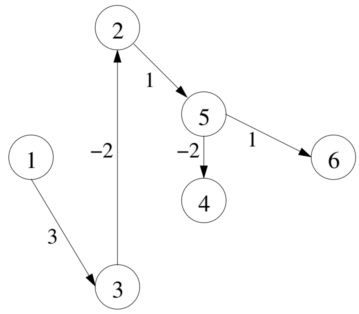

**SVOLGIMENTO**

Essendo presenti sia archi di costo negativo che cicli orientati (si consideri ad esempio $(2, 6, 3, 2)$), l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Bellman, cioè l'algoritmo SPT.L in cui la lista $Q$ è implementata come una coda, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 4 + 1 = 21.$

| it. | $u$ | $p[\cdot]$ | | | | | | $d[\cdot]$ | | | | | | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 21 | 21 | 21 | 21 | 21 | $(1)$ |
| 1 | 1 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 21 | 21 | 21 | $(2,3)$ |
| 2 | 2 | *nil* | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 3 | 21 | 3 | 6 | $(3,5,6)$ |
| 3 | 3 | *nil* | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 1 | 3 | 5 | 3 | 6 | $(5,6,2,4)$ |
| 4 | 5 | *nil* | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | $(6,2,4)$ |
| 5 | 6 | *nil* | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | $(2,4)$ |
| 6 | 2 | *nil* | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | $(4,5)$ |
| 7 | 4 | *nil* | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | $(5)$ |
| 8 | 5 | *nil* | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 3 | $(4,6)$ |
| 9 | 4 | *nil* | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 3 | $(6)$ |
| 10 | 6 | *nil* | 3 | 1 | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 3 | $\emptyset$ |

L'albero dei cammini minimi individuato è mostrato nel seguito:




**2.1)** L'albero dei cammini minimi di radice 1 è unico in quanto tutti gli archi non appartenenti all'albero individuato soddisfano le condizioni di Bellman come disuguaglianza stretta, ovvero $d[i] + c_{ij} > d[j]$ per ogni arco $(i,j)$ non appartenente all'albero.

**2.2)** Se il costo dell'arco $(5,4)$ fosse un parametro reale $\beta$, l'etichetta del nodo 4 varrebbe $d(4) = 2 + \beta$. L'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di $\beta$ per cui valgono le condizioni di Bellman. In tal caso, è sufficiente imporre tale condizioni per gli archi non appartenenti all'albero e incidenti il nodo 4:

1. $(3,4)$: $d[3] + 2 \geq d[4]$, ovvero $3 + 2 \geq 2 + \beta$, ovvero $\beta \leq 3$
2. $(6,4)$: $d[6] + 1 \geq d[4]$, ovvero $3 + 1 \geq 2 + \beta$, ovvero $\beta \leq 2$

Segue che, se il costo dell'arco $(5,4)$fosse un parametro reale $\beta$, l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $\beta \leq 2$.

**3)** Si consideri una rete di comunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$, relativa all'invio di dati sensibili. Il nodo sorgente $s$ deve inviare $v$ dati al nodo destinazione $t$ lungo un cammino orientato di $G$. Per monitorare l'instradamento dei dati in transito, si stabilisce che il cammino da $s$ a $t$ selezionato per l'invio includa almeno due dispositivi di controllo. A tal fine, si individua un sottoinsieme di nodi $D$ candidati per l'installazione di un dispositivo di controllo, che non contiene né $s$ e né $t$.

Sapendo che a ogni collegamento $(i, j)$ della rete è associata una capacità superiore $u_{ij}$ e un costo di utilizzo $c_{ij}$, e che l'installazione di un dispositivo di controllo in un nodo $i \in D$ comporta un costo di installazione $C_i$, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere lungo quale cammino orientato della rete da $s$ a $t$ inviare i dati sensibili in modo da rispettare i vincoli di capacità relativi agli archi utilizzati per l'invio e il vincolo relativo al monitoraggio dei dati, minimizzando il costo totale, dato dalla somma dei costi di utilizzo degli archi e dei costi di installazione dei dispositivi.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo la famiglia di variabili di progetto binarie:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene al cammino selezionato da } s \text{ a } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i,j) \in A.$$

Per garantire il monitoraggio dei dati sensibili, introduciamo inoltre le variabili binarie:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si installa un dispositivo in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in D.$$

Per esprimere la relazione tra il cammino selezionato e i dispositivi, introduciamo infine le variabili binarie:

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ appartiene al cammino selezionato e in esso viene installato un dispositivo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in D.$$

Utilizzando le variabili decisionali precedentemente introdotte, il problema dell'invio dei dati sensibili lungo la rete può essere formulato mediante il seguente modello *PLI*:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in D} C_i y_i$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ 1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N$$

$$v x_{ij} \leq u_{ij} \qquad (i,j) \in A$$

$$s_i \leq \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} \qquad i \in D$$

$$s_i \leq y_i \qquad i \in D$$

$$s_i \geq \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} + y_i - 1 \qquad i \in D$$

$$\sum_{i\in D} s_i \geq 2$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (i,j) \in A$$

$$y_i, s_i \in \{0,1\} \qquad i \in D$$

Il primo blocco di vincoli è costituito dai vincoli di conservazione di flusso, che garantiscono l'invio dei dati sensibili lungo un cammino orientato di $G$ da $s$ a $t$. Seguono i vincoli di capacità, che assicurano che lungo ogni arco del cammino selezionato possano essere inviati $v$ dati. I successivi tre blocchi di vincoli garantiscono che le variabili binarie $s_i$ esprimano la relazione logica di tipo *and* tra la proposizione "il nodo i appartiene al cammino selezionato" (che assume il valore vero se e solo se $\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} = 1$) e la proposizione "in i viene installato un dispositivo" (che assume il valore vero se e solo se $y_i = 1$). L'ultimo vincolo garantisce che il cammino da $s$ a $t$ selezionato per l'invio includa almeno due dispositivi di controllo. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il costo totale di invio e di monitoraggio. Si osservi che, a causa della presenza del vincolo $\sum_{i\in D} s_i \geq 2$, i vincoli $s_i \geq \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} + y_i - 1, i \in D$, potrebbero essere omessi senza compromettere la correttezza della formulazione.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il seguente problema di $PL$ applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il vettore $\eta_B$, il passo di spostamento e l'indice uscente, giustificando le risposte. Al termine, in caso di ottimo finito, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali, e si verifichi se $y = [0, 0, 0, 5, 4]$ sia una soluzione ottima duale alternativa a quella individuata dall'algoritmo. Giustificare le risposte.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2
\end{array}
$$

**SVOLGIMENTO**

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 3, 5\ \} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 4$$

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 7/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 7/3, \quad h = 1$$

it. 3) $B = \{3, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & 7/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5/3 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}$$

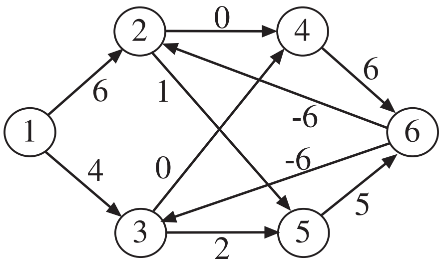
$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathit{STOP}.$$

$B = \{3, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = [2, 0]$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = [0, 0, 5/3, 0, 7/3]$ è una soluzione ottima duale. Osserviamo che $\bar{x}$ è degenere: $I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$. Pertanto, $\bar{y}$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima duale. Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni ammissibili che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$; quindi, affinché $y$, tale che $yA = c$, sia ottima deve soddisfare la condizione $y_1 = y_2 = 0$. Affinché $y$ sia ammissibile per il problema duale essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2y_3 & + & y_4 & - & y_5 & = 1 \\ y_3 & & & + & y_5 & = 4 \\ y_3 & , & y_4 & , & y_5 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Ponendo $y_5 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $[(4 - \alpha), 3\alpha - 7, \alpha]$, per $7/3 \leq \alpha \leq 4$. Pertanto il problema duale ammette infinite soluzioni ottime della forma $y(\alpha) = [0, 0, (4 - \alpha), 3\alpha - 7, \alpha]$, per $7/3 \leq \alpha \leq 4$. Ponendo $\alpha = 4$, segue che $y = [0, 0, 0, 5, 4]$ è una soluzione ottima duale alternativa a $\bar{y}$.

**2)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. $i$) La soluzione ottima ottenuta è unica? $ii$) Come cambierebbe l'esito di risoluzione se l'arco $(2,4)$ costasse -2? Giustificare tutte le risposte.



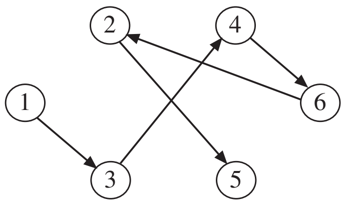

**SVOLGIMENTO**

Il grafo contiene cicli orientati, ad esempio $(3,5,6)$, e archi di costo negativo. Pertanto l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo è SPT.L in cui $Q$ è implementato come una coda, ovvero l'algoritmo di Bellman, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31.$

| it. | $u$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | nil | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | (1) |
| 1 | 1 | 0 | 6 | 4 | 31 | 31 | 31 | nil | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $(2,3)$ |
| 2 | 2 | 0 | 6 | 4 | 6 | 7 | 31 | nil | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | $(3,4,5)$ |
| 3 | 3 | 0 | 6 | 4 | 4 | 6 | 31 | nil | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | $(4,5)$ |
| 4 | 4 | 0 | 6 | 4 | 4 | 6 | 10 | nil | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | (5.6) |
| 5 | 5 | 0 | 6 | 4 | 4 | 6 | 10 | nil | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | (6) |
| 6 | 6 | 0 | 4 | 4 | 4 | 6 | 10 | nil | 6 | 1 | 3 | 3 | 4 | (2) |
| 7 | 2 | 0 | 4 | 4 | 4 | 5 | 10 | nil | 6 | 1 | 3 | 2 | 4 | (5) |
| 8 | 5 | 0 | 4 | 4 | 4 | 5 | 10 | nil | 6 | 1 | 3 | 2 | 4 | $\emptyset$ |

L'albero dei cammini minimi individuato è:




$i$) Tale albero è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1, nonostante esistano tre archi non appartenenti all'albero che soddisfano le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza. Infatti:

1. $d(5) + 5 = 5 + 5 = 10 = d(6)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(5,6)$ valgono in forma di uguaglianza: tuttavia $(5,6)$ non può essere inserito al posto di $(4,6)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;

2. $d(2)+0 = 4+0 = 4 = d(4)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(2,4)$ valgono in forma di uguaglianza: tuttavia $(2,4)$ non può essere inserito al posto di $(3,4)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;

3. $d(6) - 6 = 10 - 6 = 4 = d(3)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(6,3)$ valgono in forma di uguaglianza: tuttavia $(6,3)$ non può essere inserito al posto di $(1,3)$ perché si creerebbe un ciclo orientato.

$ii$) Se l'arco $(2,4)$ costasse -2, il ciclo orientato $(2,4,6)$ avrebbe costo negativo, pari a -2. Il problema risulterebbe quindi inferiormente illimitato.

**3)** Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrll} \max & 6x_1 & +10x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Quale sarebbe una soluzione ottima del problema nel caso in cui le variabili potessero assumere valore intero non negativo, invece di essere binarie? Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordine delle variabili per Costo Unitario Decrescente è $x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$, $\bar{z} = 23 + 1/3$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 22$. Siccome $\bar{z} = 23 + 1/3 > 22 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_4$.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 23$. $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\underline{z} = 22 = z$, $z$ non cambia. Poiché $\bar{z} = 23 > 22 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_5$.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 23$. $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\bar{z} = 23 > 22 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$\boxed{x_4 = x_5 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 22 + 1/2$. Si noti che si può porre $\bar{z} = 22$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 22 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0, x_5 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 22 + 1/2$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 22$. Poiché $\bar{z} = 22 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 0}$ $x^* = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = \underline{z} = 22$. Il nodo viene chiuso per ottimalità. Poiché $\underline{z} = 22 = z$, potrebbe essere chiuso anche dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 1}$ $x^* = [1/3, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 22$. Poiché $\underline{z} = 22 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché $Q$ è vuota, l'algoritmo Branch and Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$, di costo 22.

Se le variabili potessero assumere valore intero non negativo, invece di essere binarie, una soluzione ottima si otterrebbe ponendo $x_2 = 3$, e fissando le variabili restanti a 0. Infatti, nel caso di variabili intere non negative, il problema può essere riformulato sostituendo ogni variabile intera $x_i$ mediante un numero finito (al più 12, per l'istanza in questione) di variabili binarie aventi lo stesso peso e lo stesso costo di $x_i$, $i = 1, .., 6$. L'ottimalità della soluzione indicata segue quindi dall'applicazione dell'algoritmo Branch and Bound alla riformulazione del problema in termini di zaino binario.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

## Nome: Cognome:

**1)** Si risolva il seguente problema di $PL$

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo, sia quella primale che quella duale, siano uniche. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{2,3\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 3$ , $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \, : \, A_i \xi > 0 \,\} = \{1\} \ ,$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \, : \, i \in J \,\} = \lambda_1 = 0 \ , \ k = \min\{\, i \in J \, : \, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 1$$

[cambio di base degenere]

it.2) $B = \{1,2\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 2$ , $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{5\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_5 = 1 \ , \ k = 5$$

it.3) $B = \{1,5\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

[soluzione di base primale non degenere, soluzione di base duale non degenere]

Poiché $y_B \geq 0$, segue che $x = (3, 5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (14, 0, 0, 0, 6)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $x = (3, 5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. Analogamente, poiché la soluzione ottima primale individuata è non degenere, segue che $y = (14, 0, 0, 0, 6)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

**2)** Si consideri il seguente problema di $PL$, in cui $\alpha$ è un parametro reale:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & (-2-\alpha)x_1 & + & (-2+3\alpha)x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1.
\end{array}
$$

**2.1)** Si individui l'insieme di valori di $\alpha$ per cui $B = \{3, 5\}$ è una base ottima per il problema. **2.2)** Fissando $\alpha = 0$, si determini l'insieme delle soluzioni ottime per il duale del problema dato. Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

**2.1)** Determiniamo la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{3, 5\}$:

$$
A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

È immediato verificare che tale soluzione è primale ammissibile, in quanto soddisfa i restanti tre vincoli del problema. Determiniamo ora la corrispondente soluzione di base duale in funzione del parametro $\alpha$:

$$
y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} (-2-\alpha) & (-2+3\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha & 2+\alpha \end{bmatrix}, \; y_N^T = 0, \; y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4\alpha & 0 & 2+\alpha \end{bmatrix}.
$$

$B = \{3, 5\}$ è una base duale ammissibile se e solo se $y_B \geq 0$, vale a dire se e solo se $\alpha \in [-2, 0]$. Quindi, $B = \{3, 5\}$ è una base ottima per il problema di $PL$ se e solo se $\alpha \in [-2, 0]$.

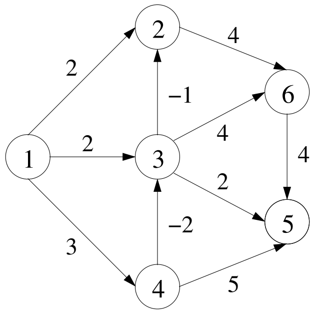
**2.2)** Nel caso $\alpha = 0$, per quanto sopra mostrato si ha che $B = \{3, 5\}$ è una base ottima. Quindi $(1, 0)$ è una soluzione ottima del problema primale, mentre $(0, 0, 0, 0, 2)$ è una soluzione ottima del corrispondente problema duale. Poiché per $\alpha = 0$ la soluzione ottima primale è degenere, in quanto anche il quarto vincolo risulta attivo, la soluzione $(0, 0, 0, 0, 2)$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima duale.

Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (1, 0)$. Poiché $I(x) = \{3, 4, 5\}$, una soluzione duale $y$, tale che $y^T A = c^T$, che formi con $x$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_1 = y_2 = 0$. Affinché $y$ sia ammissibile per il problema duale, essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

$$
\begin{cases}
\quad\quad\; y_4 \quad -y_5 = -2 \\
-y_3 \; -y_4 \quad -y_5 = -2 \\
\; y_3, \quad y_4, \quad y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

Posto $y_4 = \gamma$, il sistema di equazioni ammette soluzioni della forma $(-2\gamma, \gamma, 2 + \gamma)$, le cui componenti sono tutte non negative per il solo valore $\gamma = 0$. Pertanto, $(0, 0, 0, 0, 2)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

**3)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$, se utilizzato. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato, discutendo la sua eventuale unicità.




**SVOLGIMENTO**

Rinumerando i nodi come segue

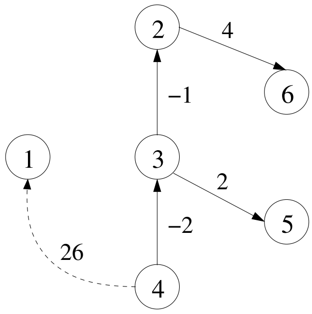
| originale | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| rinumerato | 1 | 4 | 3 | 2 | 6 | 5 |

si può verificare che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco $(i,j)$ del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ anche in presenza di archi di costo negativo. Nello svolgimento si considera l'indicizzazione dei nodi dopo la rinumerazione. Si osservi che l'insieme dei nodi candidati $Q$ non necessita di essere utilizzato.

$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 5 + 1 = 26.$$

| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 2 | *nil* | 2 | 2 | 2 | 2 | 26 | 0 | 26 | 26 | 26 | 26 |
| 1 | 2 | 2 | *nil* | 2 | 2 | 2 | 2 | 26 | 0 | −2 | 26 | 26 | 5 |
| 2 | 3 | 2 | *nil* | 2 | 3 | 3 | 3 | 26 | 0 | −2 | −3 | 2 | 0 |
| 3 | 4 | 2 | *nil* | 2 | 3 | 4 | 3 | 26 | 0 | −2 | −3 | 1 | 0 |
| 4 | 5 | 2 | *nil* | 2 | 3 | 4 | 3 | 26 | 0 | −2 | −3 | 1 | 0 |

L'albero dei cammini minimi individuato, sul grafo originale, risulta quindi:



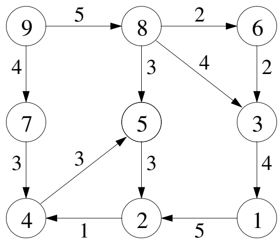

Si osservi che il nodo 1 non è raggiungibile dal nodo radice 4, come segnalato dal valore 26 della sua etichetta al termine dell'algoritmo. Ciò poteva essere stabilito anche a priori: infatti, dopo la rinumerazione il nodo radice 4 viene rinominato 2, perciò il nodo 1 (la rinumerazione non cambia il suo indice) non è raggiungibile a partire dalla radice in quanto la nuova numerazione garantisce $i < j$ per ogni arco $(i,j)$.

L'albero individuato è l'unico albero dei cammini minimi di radice 4 (considerando la numerazione originale dei nodi) in quanto le condizioni di Bellman per gli archi non appartenenti all'albero sono soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta.

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

## Nome: Cognome:

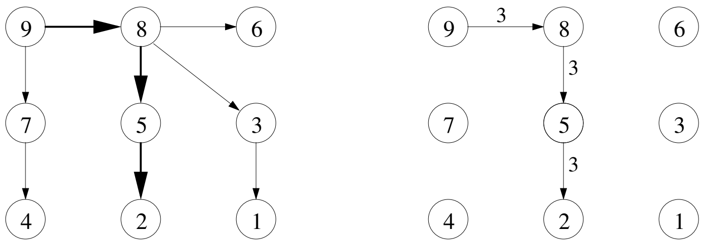
**1)** Si individui un flusso massimo dal nodo 9 al nodo 2 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. Come cambierebbe la capacità del taglio minimo se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità 4 invece di 5? Giustificare tutte le risposte.



**SVOLGIMENTO**

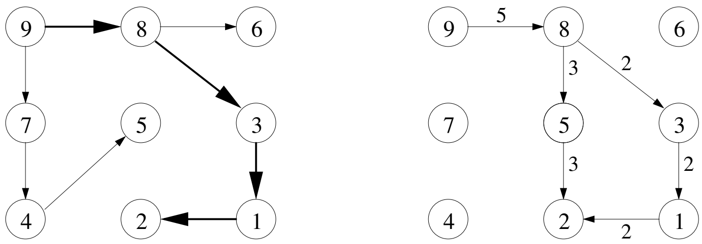
Per ogni iterazione tranne l'ultima viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo $P$ di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo. Viene anche riportato il corrispondente valore di flusso $v$.

**Iterazione 1**



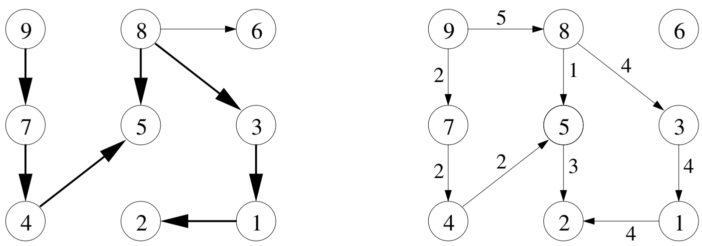
$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$

**Iterazione 2**



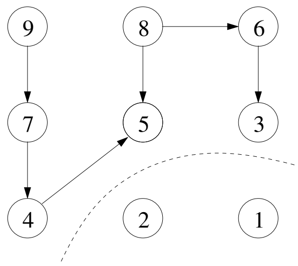
$\theta(P, x) = 2, \quad v = 5$

**Iterazione 3**



$\theta(P, x) = 2, \quad v = 7$

**Iterazione 4**




Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato è massimo e il taglio $N_s = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $N_t = \{1, 2\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{52} + u_{31} = 3 + 4 = 7 = v$.

Se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità 4 invece di 5, il flusso massimo individuato continuerebbe a essere un flusso ammissibile. Di conseguenza, la minima capacità dei tagli che separano la sorgente dal pozzo, uguale al valore massimo di flusso, continuerebbe a valere 7.

**2)** Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{\, x_1 - x_2 + 2x_3\,,\; -x_1 + x_2 + x_3 \,\} \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \\ & x_3 \in \{0,3,5,11\} \\ & x_1 = 1 \;\mathit{or}\; x_2 = 1 \Longrightarrow x_3 = 11 \end{array}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Il modello matematico proposto non è un modello *PLI* in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare, bensì è definita come il massimo di due funzioni lineari;
- la variabile $x_3$ è una variabile a valori discreti;
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile $x_3$ ai valori assunti dalle variabili binarie $x_1$ e $x_2$.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello *PLI* nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le z \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \le z \\ & x_3 = 3y_1 + 5y_2 + 11y_3 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \le 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\} \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \\ & y_3 \ge x_1 \\ & y_3 \ge x_2. \end{array}$$

La variabile di soglia $z$, infatti, permette di stimare per eccesso il massimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $x_1 - x_2 + 2x_3$ e $-x_1 + x_2 + x_3$. Minimizzando $z$, il solutore attribuisce pertanto a $x_1$, $x_2$ e $x_3$ quei valori (ammissibili) che minimizzano il massimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Le variabili binarie ausiliarie $y_1, y_2$ e $y_3$ permettono di formulare la variabile a valori discreti $x_3$ utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Infine, gli ultimi due vincoli del modello *PLI* garantiscono che, se $x_1 = 1$ oppure $x_2 = 1$, allora la variabile ausiliaria $y_3$ sia forzata ad assumere il valore 1, e quindi $x_3$ assuma il valore 11, come desiderato.

**3)** Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max & 16x_1 & +10x_2 & +10x_3 & +6x_4 & +2x_5 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 13 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visitando per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti), con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si eseguano solo le prime tre iterazioni dell'algoritmo, inclusa quella corrispondente al nodo radice, specificando il costo della migliore soluzione ottenuta quando l'algoritmo viene interrotto.

Si consideri quindi la disuguaglianza $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$. Si tratta di un piano di taglio per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 2/3, 0]$, $\bar{z} = 40$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 38$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 38$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_4$.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 1, 0]$, $\bar{z} = 39 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} = 34 < z = 38$, $z$ non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 39. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = \underline{z} = 38$. Il nodo viene pertanto chiuso per ottimalità (avrebbe potuto anche essere chiuso dalla valutazione superiore).

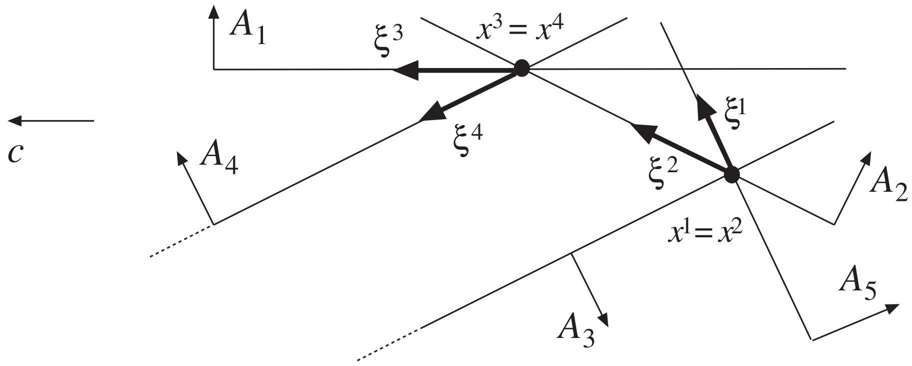
Avendo eseguito tre iterazioni, l'algoritmo Branch and Bound termina anticipatamente. La migliore soluzione individuata nel momento in cui l'algoritmo viene interrotto è $[1, 1, 1, 0, 1]$, di costo 38.

La disuguaglianza $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$ è un piano di taglio per il problema dato in quanto è una disuguaglianza valida, ovvero è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato (infatti, gli oggetti 1, 2, 3 e 4 non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino), e inoltre è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema (infatti, $1 + 1 + 1 + 2/3 > 3$).

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva geometricamente il problema di $PL$ in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{3, 5\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle soluzioni di base visitate dall'algoritmo.



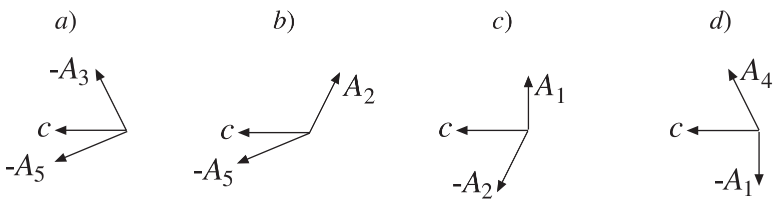

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{3, 5\}$, $y_3 < 0$ e $y_5 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_3$ e $-A_5$, come mostrato in figura $a$). Si ha quindi $h = \min\{3, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. La soluzione di base primale è degenere, in quanto $I(x^1) = \{2, 3, 5\}$, ma duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione $\xi^1$ si ottiene in corrispondenza del vincolo 2, che è attivo: si esegue quindi un cambio di base degenere, selezionando $k = 2$.

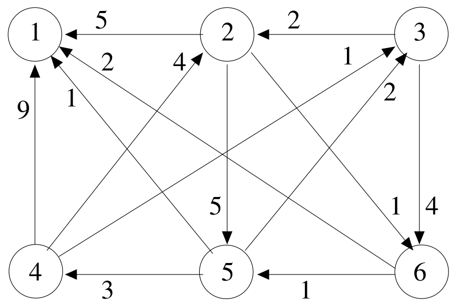
it.2) $B = \{2, 5\}$, $y_2 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_2$ e $-A_5$, come mostrato in figura $b$). Si ha quindi $h = 5$. La soluzione di base duale è quindi non degenere, mentre quella primale resta degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo lungo la direzione $\xi^2$ si ottiene in corrispondenza dei vincoli 1 e 4, e quindi $k = \min\{1, 4\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $A_1$ e $-A_2$, come mostrato in figura $c$). Si ha quindi $h = 2$. La soluzione di base duale è non degenere, mentre quella primale è degenere in quanto $I(x^3) = \{1, 2, 4\}$. Il massimo passo lungo la direzione $\xi^3$ è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 4$.

it.4) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché $c$ appartiene al cono generato da $-A_1$ e $A_4$, come mostrato in figura $d$), quindi $h = 1$. La soluzione di base duale è quindi non degenere, mentre quella primale resta degenere. Poiché la direzione di crescita $\xi^4$ individuata dall'algoritmo è una direzione di recessione per il poliedro primale, l'algoritmo termina segnalando che il problema primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il suo problema duale è vuoto.



**2)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato, discutendo la sua eventuale unicità. Nel caso in cui l'albero individuato non sia unico, si modifichi il costo di un arco del grafo in modo che, per il grafo risultante, l'albero determinato risulti invece l'unico albero dei cammini minimi di radice 4.



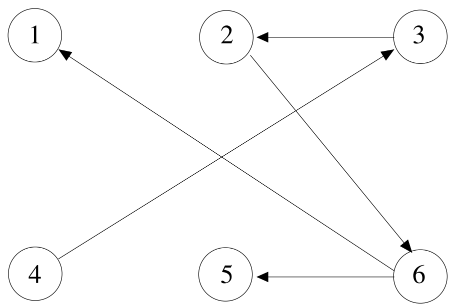

**SVOLGIMENTO**

Non essendo presenti archi di costo negativo e non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo orientato (2, 5, 3)), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, cioè l'algoritmo SPT.S in cui l'insieme $Q$ è implementato come una coda di priorità, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 9 + 1 = 46.$

| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 4 | 4 | 4 | *nil* | 4 | 4 | 46 | 46 | 46 | 0 | 46 | 46 | $\{4\}$ |
| 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | *nil* | 4 | 4 | 9 | 4 | 1 | 0 | 46 | 46 | $\{1,2,3\}$ |
| 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | *nil* | 4 | 3 | 9 | 3 | 1 | 0 | 46 | 5 | $\{1,2,6\}$ |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | *nil* | 2 | 2 | 8 | 3 | 1 | 0 | 8 | 4 | $\{1,5,6\}$ |
| 4 | 6 | 6 | 3 | 4 | *nil* | 6 | 2 | 6 | 3 | 1 | 0 | 5 | 4 | $\{1,5\}$ |
| 5 | 5 | 6 | 3 | 4 | *nil* | 6 | 2 | 6 | 3 | 1 | 0 | 5 | 4 | $\{1\}$ |
| 6 | 1 | 6 | 3 | 4 | *nil* | 6 | 2 | 6 | 3 | 1 | 0 | 5 | 4 | $\emptyset$ |

L'albero individuato è mostrato in figura.




Tale albero non è l'unico albero dei cammini minimi di radice 4. Infatti, le condizioni di Bellman per l'arco $(5,1)$, non appartenente all'albero, valgono in forma di uguaglianza, e l'inserimento di $(5,1)$ al posto dell'arco $(6,1)$ crea una struttura ad albero. Poiché $(5,1)$ è l'unico arco non appartenente all'albero per cui le condizioni di Bellman valgono in forma di uguaglianza, per rendere tale albero l'unico albero dei cammini minimi di radice 4 basta incrementare il suo costo a un qualsiasi valore maggiore di 1.

**3)** Logistik S.p.a. deve inviare $\delta_1$ bancali dal sito $s_1$ al sito $t_1$, e $\delta_2$ bancali dal sito $s_2$ al sito $t_2$, attraverso una rete logistica rappresentata da un grafo orientato $G = (N, A)$, di cui $s_1$, $t_1$, $s_2$ e $t_2$ sono nodi. Sia l'invio da $s_1$ a $t_1$ che l'invio da $s_2$ a $t_2$ devono avvenire lungo un unico cammino di $G$. Per inviare un singolo bancale lungo il collegamento $(i, j) \in A$, Logistik deve pagare un costo di transito $c_{ij}$. Il budget totale disponibile per gli invii è pari a $C$.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di inviare i $\delta_1$ bancali da $s_1$ a $t_1$ e i $\delta_2$ bancali da $s_2$ a $t_2$, rispettando il vincolo di budget e in modo tale da minimizzare la massima cardinalità dei cammini utilizzati per l'invio (per cardinalità di un cammino si intende il numero di archi che compongono il cammino).

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili di flusso:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se il collegamento } (i,j) \in A \text{ è utilizzato per l'invio da } s_k \text{ a } t_k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i,j) \in A, \quad k = 1, 2.$$

La richiesta di effettuare entrambi gli invii lungo un unico cammino di $G$ può essere espressa mediante i seguenti vincoli di conservazione di flusso:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1, & \text{se } i = s_k \\ 1, & \text{se } i = t_k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad k = 1, 2.$$

Il vincolo di budget può invece essere espresso mediante:

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{2} c_{ij} \delta_k x_{ij}^k \leq C.$$

Volendo minimizzare la massima cardinalità dei cammini utilizzati, definiamo una variabile di soglia $z$, e introduciamo i vincoli

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^k \leq z, \qquad k = 1, 2,$$

in modo tale che $z$ risulti un'approssimazione superiore della massima cardinalità dei due cammini.

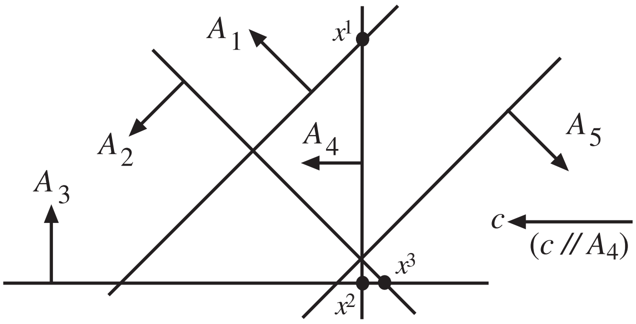
Il problema di Logistik può pertanto essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ & \displaystyle\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1, & \text{se } i = s_k \\ 1, & \text{se } i = t_k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N, \quad k = 1, 2 \\ & \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{2} c_{ij} \delta_k x_{ij}^k \leq C & \\ & \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^k \leq z & k = 1, 2 \\ & x_{ij}^k \in \{0, 1\} & (i,j) \in A, \quad k = 1, 2 \end{array}$$

# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva per via geometrica il problema di $PL$ rappresentato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale (direttamente in figura), l'indice entrante $k$, il segno delle componenti dei vettori $y_B$ e $\eta_B$, e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, si discuta come cambierebbe la risoluzione dell'algoritmo, e il suo esito, nel caso in cui il vettore $A_5$ avesse verso opposto rispetto a quello rappresentato in figura. Giustificare tutte le risposte.

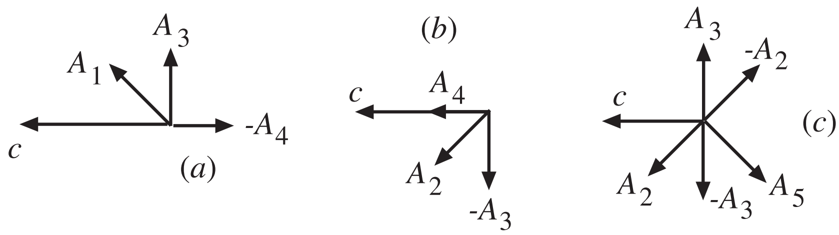



**SVOLGIMENTO**

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $k = 3$, in quanto il terzo vincolo è l'unico violato da $x^1$; inoltre, $y_1 = 0$, $y_4 > 0$ in quanto $c$ è parallelo ad $A_4$ e ha lo stesso verso. La base è pertanto duale degenere ma primale non degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 4\}$. Poiché $A_3 \in \text{cono}(A_1, -A_4)$, come mostrato in figura $(a)$, si ha $\eta_1 > 0$ e $\eta_4 < 0$, pertanto $h = 1$. Si noti che, poiché $\bar{\theta} = y_1/\eta_1 = 0$, si effettua un cambio di base duale degenere.

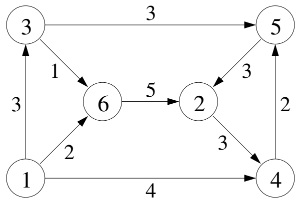
it. 2) $B = \{3, 4\}$: $k = \min\{2, 5\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland; inoltre, $y_3 = 0$, $y_4 > 0$ in quanto $c$ è parallelo ad $A_4$ e ha lo stesso verso. La base è pertanto duale degenere ma primale non degenere in quanto $I(x^2) = \{3, 4\}$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_4, -A_3)$, come mostrato in figura $(b)$, si ha $\eta_4 > 0$ e $\eta_3 < 0$, pertanto $h = 4$.

it. 3) $B = \{2, 3\}$, $k = 5$, in quanto il quinto vincolo è l'unico violato da $x^3$; inoltre, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ in quanto $c \in \text{cono}(A_2, A_3)$, come mostrato in figura $(c)$. La base è pertanto duale non degenere ed è pure primale non degenere in quanto $I(x^3) = \{2, 3\}$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(-A_2, -A_3)$, come mostrato in figura $(c)$, l'algoritmo termina in quanto $\eta_B \leq 0$, segnalando che il problema duale è inferiormente illimitato e di conseguenza il problema primale è vuoto.




Nel caso in cui il vettore $A_5$ avesse verso opposto rispetto a quello rappresentato in figura, le prime due iterazioni dell'algoritmo del Simplesso Duale resterebbero invariate, salvo che $k = \min\{3, 5\} = 3$ nel corso della prima iterazione, e $k = 2$ nel corso della seconda iterazione, senza il ricorso alla regola anticiclo di Bland. Nel corso della terza iterazione, invece, la soluzione di base primale risulterebbe ammissibile, e quindi ottima, per il problema primale. L'algoritmo terminerebbe quindi con esito ottimo finito.

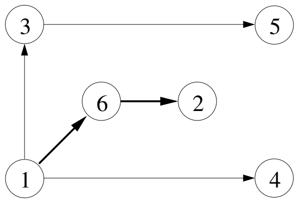
**2)** Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 2 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Durante la ricerca di un cammino aumentante si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l'ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, $(1,2)$ è visitato prima di $(1,3)$). Per ogni iterazione si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi $N_s$, l'insieme dei nodi $N_t$ e la capacità del taglio. Si discuta, infine, come varierebbe il valore del flusso massimo nel caso in cui la capacità dell'arco $(6,2)$ fosse un parametro reale $\epsilon > 0$.

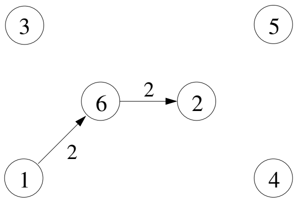


**SVOLGIMENTO**

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato. Viene inoltre riportato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo $P$, di una quantità di flusso pari alla capacità del cammino aumentante, omettendo per semplicità gli archi a flusso nullo.

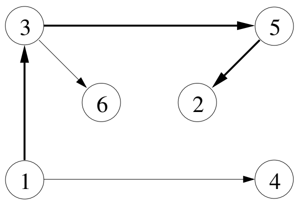
Iterazione 1:

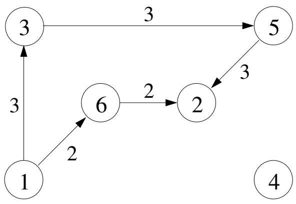




$\theta(P,x) = 2, \quad v = 2$

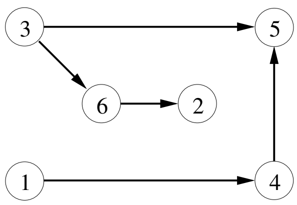
Iterazione 2:

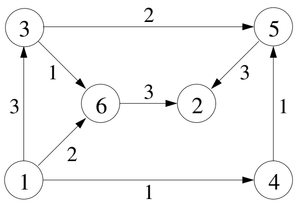




$\theta(P,x) = 3, \quad v = 5$

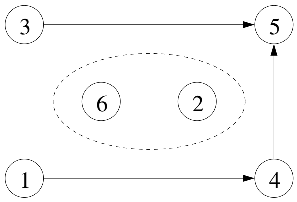
Iterazione 3:





$\theta(P,x) = 1, \quad v = 6$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo e inoltre il taglio individuato dall'algoritmo, definito da $N_s = \{1,3,4,5\}$ e $N_t = \{2,6\}$, è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{16} + u_{36} + u_{52} = 2 + 1 + 3 = 6 = v$.

Se la capacità dell'arco $(6,2)$ fosse un parametro reale $\epsilon > 0$, il flusso individuato dall'algoritmo continuerebbe a essere ammissibile per $\epsilon \geq 3$. Non esistendo cammini aumentanti dalla sorgente al pozzo, pertanto, continuerebbe a essere un flusso massimo. Il valore del flusso massimo sarebbe quindi pari a 6 per $\epsilon \geq 3$. Per $0 < \epsilon < 3$, invece, un taglio di capacità minima sarebbe il taglio che separa l'insieme dei nodi $\{1,3,4,5,6\}$ dal nodo 2, di capacità $3+\epsilon$. Si osservi che l'arco $(6,2)$ è un arco diretto di tale taglio. Pertanto, per $0 < \epsilon < 3$ il valore del flusso massimo sarebbe pari a $3 + \epsilon$.

**3)** Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & 12x_1 & +8x_2 & +10x_3 & +6x_4 & +2x_5 & & \\ & 3x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 11 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visitando per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti), con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Giustificare tutte le risposte.

Al termine, si proponga un piano di taglio per il problema dato, motivando la risposta.

**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $x^*$ la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con $z$ la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

**Inizializzazione**: La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

**Nodo radice**: $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 32$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_4$.

$x_4 = 1$: $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0]$, $\bar{z} = 31$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 28$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_3$.

$x_4 = 0$: $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 31$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria $x_5$.

$x_4 = 1$, $x_3 = 1$: $x^* = [1, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 30 + 2/3$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 28$. Poiché i costi sono interi, la valutazione superiore può essere arrotondata per difetto al valore 30, e pertanto il nodo può essere chiuso dalla valutazione superiore, poiché $\bar{z} \leq z$.

$x_4 = 1$, $x_3 = 0$: $x^* = [1, 1, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 28$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, poiché $\bar{z} < z$.

$x_4 = 0$, $x_5 = 1$: $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1]$, $\bar{z} = 29 + 1/2$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene potato dalla valutazione superiore.

$x_4 = 0$, $x_5 = 0$: $x^* = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 30$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, poiché $\bar{z} \leq z$.

L'algoritmo termina in quanto $Q$ è vuota, restituendo la soluzione ottima $x = [1, 1, 1, 0, 0]$, di valore $z = 30$.

Un possibile piano di taglio è dato dalla disuguaglianza $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$. Si tratta infatti di una disuguaglianza valida, ovvero di una disuguaglianza soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato: gli oggetti 1, 2, 3 e 4, infatti, non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino. Inoltre, è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema: infatti, $1 + 1 + 1 + 1/3 > 3$.