Lezione 1 2
Lezione 2 15
Lezione 3 23
Lezioni 4,5,6 40
Lezione 7 (esercizi) 61
Lezioni 8,9 67
Lezione 9 (esercizi) 86
Lezioni 10,11 89
Lezioni 10,11,12 (esercizi) 97
Lezioni 12, 13 119
Lezioni 13,14 127
Lezione 14, 15 (esercizi e teoria) 153
Lezioni 15,16 162
Lezione 17 (esercizi) 178
Lezione 18 186
Lezione 19 (esercizi) 202
Lezioni 20,21 214
Lezione 22 230
Lezione 23 236
Lezioni 24,25 252
Lezioni 26,27 277
Esercitazione finale (flussi su rete) 287
Esercitazione finale (PL) 298
Esercitazione finale (PLI) 311

LEZIONE 1 28 Settembre 2021

Introduzione alla Ricerca Operativa

Maria Grazia Scutellà

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa; Cap. 1)

Obiettivi: risolvere problemi decisionali (di ottimizzazione), in svariati contesti applicativi, sfruttando le loro proprietà matematiche

⇒ link con analisi, geometria, statistica, informatica, ingegneria, economia ...

in Teoria e in pratica

Un semplice problema decisionale

$G = (V_1 \cup V_2, A)$ rete logistica bipartita

- grafo orientato (insieme delle attività di trasporto e dei nodi)
- i nodi sono partizionati in 2 insiemi

V_1: insieme dei pazienti

V_2: insieme dei centri di assistenza

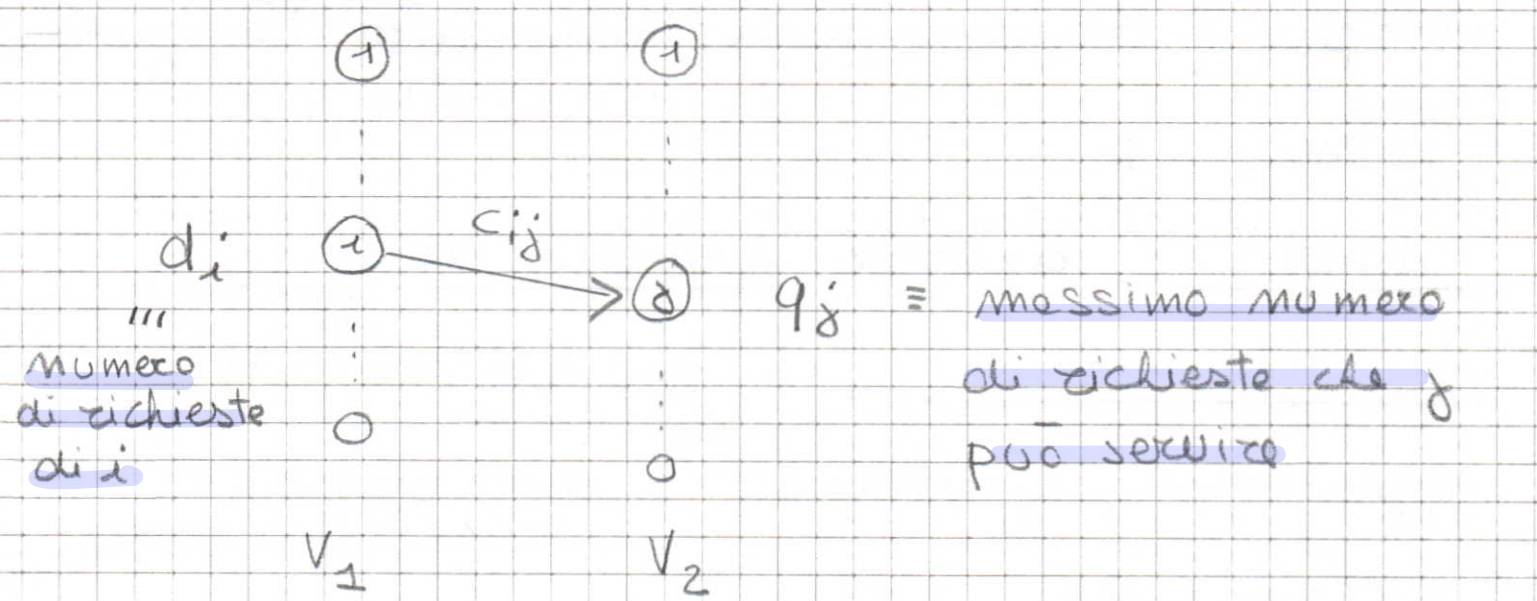
A: insieme dei possibili collegamenti

dati di input:

d_i: domanda del paziente i, $\forall i \in V_1$

q_j: capacità di servizio del centro j, $\forall j \in V_2$

c_{ij}: costo unitario di servizio, $\forall (i,j) \in A$



Problema decisionale: decidere come servire i pazienti in modo da soddisfare la loro domanda e rispettando le capacità dei centri di assistenza (vincoli), con l'obiettivo di minimizzare il costo totale di servizio (funzione obiettivo): problema di ottimizzazione.

Schema di processo decisionale:

1) Individuazione del problema decisionale
2) Analisi della realtà e raccolta dei dati
3) Definizione di un modello matematico *
4) Risoluzione del modello matematico, * mediante un algoritmo risolutivo
5) Analisi dei risultati ottenuti

Cos'è un modello matematico: descrizione del problema mediante strumenti di tipo logico-matematico:

- Teoria dei giochi: l'uomo è introdotto nel modello attraverso i giocatori
- modelli di simulazione: si descrive il comportamento di un sistema mediante relazioni matematiche, e si studia la sua risposta a sollecitazioni simili a quelle reali
- * modelli analitici: il problema è descritto

mediante relazioni matematiche tra variabili (decisionali, modellano le decisioni da prendere); si cercano valori che soddisfano i vincoli e ottimizzano la funzione obiettivo

esempio (cont.)

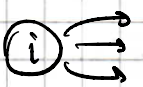
variabili decisionali:

x_{ij} (≥ 0): numero di richieste di i servite da j, $\forall (i,j) \in A$

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

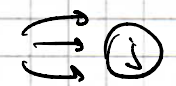
- $\sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = d_i \quad \forall i \in V_1$ (soddisfacimento della domanda del paziente i)

$FS(i)$ = stella uscente di i (FORWARD STAR)



- $\sum_{(i,j)\in BS(j)} x_{ij} \leq q_j \quad \forall j \in V_2$

$BS(j)$ = stella entrante di j (BACKWARD STAR)



↳ si rispettano le capacità dei centri di assistenza

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$

modello analitico

Definizioni e notazione

Problema: domanda generica, solitamente espressa mediante parametri

Istanza di un problema: domanda specifica, dando un valore a ogni parametro

Un problema è solitamente definito specificando:

- F **insieme ammissibile**: insieme delle soluzioni del problema, descritto mediante parametri
- $c: F \to \mathbb{R}$ **funzione obiettivo** (nel caso di problemi di ottimizzazione)

Un **modello analitico generale** per un problema di ottimizzazione:

$$(P): \min_{(\max)} \{ c(x) : x \in F \}$$

- c: parametri
- x: vettore delle variabili decisionali
- F: parametri (soluzioni)

$z(P) = \min_{(\max)} \{c(x) : x \in F\}$ valore ottimo di (P)

$x^* \in F : \quad c(x^*) = z(P)$ soluzione ottima di (P)

È equivalente formulare in forma di minimizzazione o massimizzazione:

$$\min\{c(x) : x \in F\} = -\max\{-c(x) : x \in F\}$$

(i punti di minimo di c coincidono con quelli di massimo di $-c$)

Esempio 1 : Equipartizione

Dato un numero naturale n e un insieme $N = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ di n numeri naturali, trova un sottoinsieme di N tale che la differenza in valore assoluto tra la somma dei numeri nel sottoinsieme e la somma dei numeri nel complemento sia la minore possibile.

- $n, a_1, a_2 \dots a_n$ parametri
- se $n = 4$ e $N = \{7, 3, 4, 6\}$ si ottiene un'istanza del problema

Un modello matematico:

$(EQ): \min \{ c(S) : S \subseteq N \}$, dove

S ↑ variabile del modello

$F = \{ S : S \subseteq \underbrace{\{a_1, a_2, \dots a_n\}}_{N} \}$ insieme delle soluzioni ammissibili

$c(S) = \left| \sum_{a_i \in S} a_i - \sum_{a_i \in N \setminus S} a_i \right|$ funzione obiettivo

Nell'istanza considerata:

$S^* = \{3, 7\}$ è una soluzione ottima

$c(S^*) = |10 - 10| = 0$ valore ottimo

Problema di ottimizzazione discreto: numero finito (o enumerabile) di soluzioni ammissibili.

Esempio 2: Packing

Dato un quadrato di lato unitario e un numero naturale n, determina il massimo raggio di n cerchi identici inscritti e non intersecanti.

- n : parametro

Un modello matematico:

variabili decisionali:

r : raggio

$x_i, y_i, i = 1, \dots n$: coordinate dei centri dei cerchi

$$(CP) \qquad \max r$$

circle packing

$$\begin{cases} r \le x_i \le 1 - r & i = 1, \dots n \\ r \le y_i \le 1 - r & \text{" "} \end{cases}$$

i cerchi devono essere inscritti nel quadrato

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq 2r \qquad i = 1, \dots n$$

i cerchi non devono intersecarsi $\qquad j = i+1, \dots n$

Problema di ottimizzazione continua

Esiti di risoluzione di un modello di ottimizzazione

Dato (P): $\min\{c(x) : x \in F\}$

1) (P) vuoto, ovvero $F = \emptyset$:

per convenzione $z(P) = +\infty$ (valore ottimo di P)

($z(P) = -\infty$ se in forma max)

2) (P) inferiormente illimitato:

se $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in F$ t.c. $c(x) \leq M$.

per convenzione $z(P) = -\infty$

((P) superiormente illimitato, $z(P) = +\infty$ se in forma max)

3) (P) ha valore ottimo finito ($-\infty < z(P) < +\infty$) ed esiste $x^* \in F$: $c(x^*) = z(P)$

↑ soluzione ottima

4) (P) ha valore ottimo finito, ma non ha soluzione ottima, cioè $\nexists\ x \in F : c(x) = z(P)$

esempio $\inf \{x : x > 0\}$

valore ottimo 0, ma nessuna soluzione ottima

Come si risolve un problema di ottimizzazione:

problema → modello matematico → algoritmo (ad hoc oppure tramite solver)

Algoritmo: prende in input un'istanza del modello (P), e restituisce $z(P)$ (e una soluzione ottima, se esiste)

- Problemi
  - Polinomiali
  - NP-Hard
- Algoritmi
  - esatti (determina $z(P)$ per ogni istanza (P))
  - euristici (non garantiscono di individuare una soluzione ottima)

Nel caso di euristiche, come si può valutare la bontà di una soluzione $\bar{x} \in F$ restituita dall'euristica?

Errore assoluto:

$$E_{\bar{x}} = c(\bar{x}) - z(P) \geq 0$$

($c(\bar{x})$: approssimazione superiore di $z(P)$)

(se in forma min)

$(= z(P) - c(\bar{x})$ se in forma max)

Errore relativo (invariante rispetto ai cambiamenti di scala):

$$R_{\bar{x}} = \frac{E_{\bar{x}}}{z(P)}$$

assumendo $z(P) > 0$

Dato $\varepsilon > 0$:

- se $R_{\bar{x}} \leq \varepsilon$, $\bar{x}$ è **ε-ottima**
- se $R_{\bar{x}} \leq \varepsilon$ per ogni istanza, allora l'**algoritmo** è **ε-approssimato**

$z(P)$ non è generalmente noto! Lo si stima risolvendo un'approssimazione di (P): considereremo in particolare i rilassamenti di (P).

Definizione

Dato (P): $\min\{c(x) : x \in F\}$,

$(\bar{P})$: $\min\{\bar{c}(x) : x \in \bar{F}\}$ è

detto un **rilassamento di (P)** se:

i) $F \subseteq \bar{F}$

ii) $\bar{c}(x) \leq c(x) \quad \forall x \in F$ (≥ se in forma max)

Proprietà: $z(\bar{P}) \leq z(P)$, ovvero è una **valutazione inferiore** o **lower bound** di $z(P)$ (valutazione superiore o upper bound se in forma max).

vale perché $F \subseteq \bar{F}$ quindi quando calcolo $z(P)$ faccio il minimo tra meno cose.

Conseguenza:

$$R_{\bar{x}} = \underbrace{\frac{c(\bar{x}) - z(P)}{z(P)}}_{*} \leq \frac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})} \geq *$$

$z(\bar{P}) \leq z(P)$ → si può utilizzare al posto di $z(P)$

Se $\dfrac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})} \leq \varepsilon$, $\bar{x}$ è ε-ottimo

Inoltre:

Teorema: Se $(\bar{P})$ ha soluzione ottima x^*, e se x^* è tale che:

i) $x^* \in F$, ovvero è ammissibile per (P)

ii) $\bar{c}(x^*) = c(x^*)$,

allora x^* è soluzione ottima di (P).

Dim $\quad c(x^*) \leq z(P) \leq c(x^*) \Rightarrow z(P) = c(x^*)$

$$\bar{c}(x^*) = z(\bar{P}) \leq z(P) \leq c(x^*) = \bar{c}(x^*)$$

□

Ovvero, in tal caso, risolvendo il rilassamento si risolve il modello originario.

LEZIONE 2 — 29 Settembre 2021

Introduzione alla Programmazione Lineare

Marco Gaviano Scutellà

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 1.2.1, 2.1)

Programmazione Lineare (PL): problemi di ottimizzazione caratterizzati da:

1) la funzione obiettivo $c(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare, $c(x) = c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

   c: vettore dei costi
   x: vettore delle variabili decisionali

2) l'insieme ammissibile F è definito da un insieme finito di vincoli lineari del tipo

$$a^T x = \beta \qquad a^T x \leq \beta \qquad a^T x \geq \beta$$

$a \in \mathbb{R}^n$: vettore dei coefficienti
$\beta \in \mathbb{R}$: termine noto

- PL è polinomiale
- Esistono codici commerciali e open-source molto efficienti

Pianificazione della produzione

PINTEL produce due linee di microprocessori:

1) PINTIUM
   - prezzo di vendita unitario: 500 $
   - massimo numero da immettere sul mercato / settimana: 400.000

2) COLORON
   - 200 $
   - 700.000

Impianto di produzione: al più 3000 wafer/settimana

Un singolo wafer può produrre:

- 300 PINTIUM, con resa media del 50%

oppure

- 500 COLORON, " " " " 60%

Problema di ottimizzazione: determinare quanti PINTIUM e quanti COLORON produrre a settimana, rispettando i vincoli di produzione e massimizzando il ricavo totale.

Un modello matematico

variabili decisionali:

x_P: numero di PINTIUM / settimana (immessi sul mercato)

x_C: " " COLORON / settimana

$$\underbrace{\text{Max}}_{\text{si deve massimizzare il ricavo totale}} \quad \underbrace{500}_{\text{costo P.}}\, x_P + \underbrace{200}_{\text{costo C.}}\, x_C$$

funzione obiettivo lineare

$$x_P \leq 600.000$$

$$x_C \leq 700.000$$

$$(*)\quad 2x_P + x_C \leq 900.000$$

vincoli lineari (5)

$$x_P, x_C \geq 0 \quad (*)$$

variabili decisionali di supporto:

w_P: numero wafer per PINTIUM / settimana

w_C: " " " COLORON / settimana

$$w_P + w_C \leq 3000$$

$$x_P = w_P \cdot 300 \cdot (0,5) = 150\, w_P \iff \boxed{w_P = \frac{x_P}{150}}$$

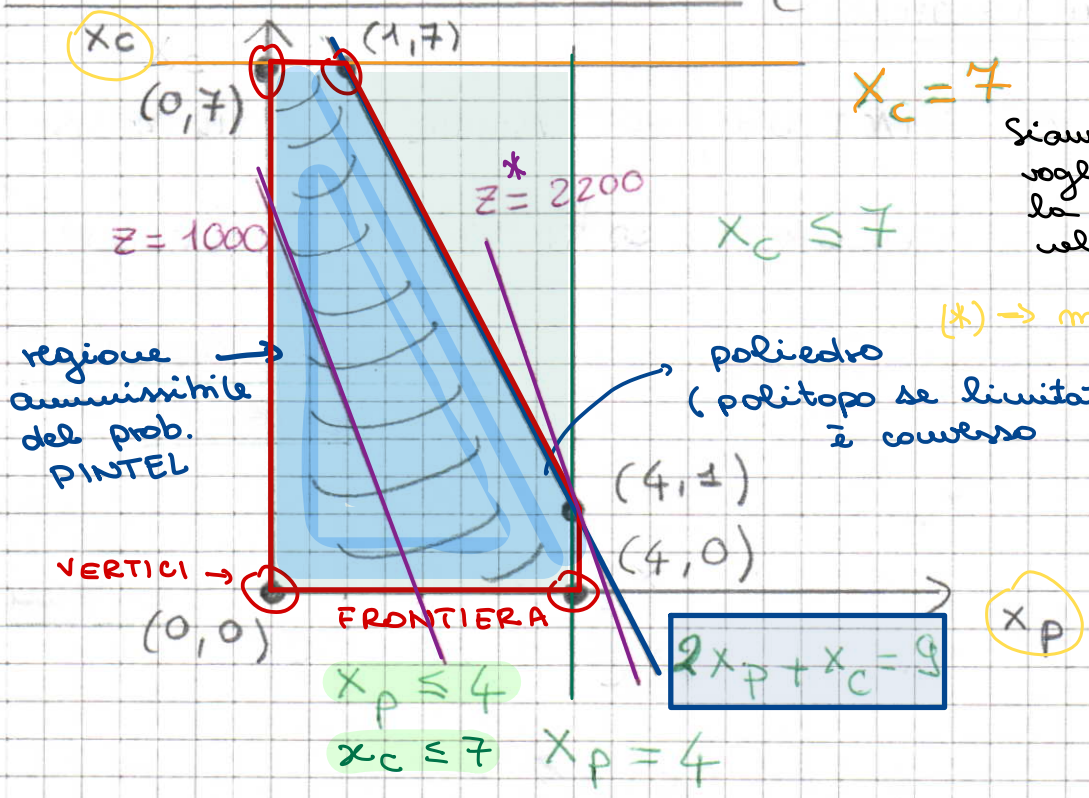
$$x_C = w_C \cdot 500 \cdot (0,6) = 300\, w_C \iff \boxed{w_C = \frac{x_C}{300}}$$

Sostituendo in $w_P + w_C \leq 3000$:

$$\frac{x_P}{150} + \frac{x_C}{300} = \frac{2x_P + x_C}{300} \leq 3000 \quad \text{ovvero}$$

$$(*)\quad 2x_P + x_C \leq 900.000$$

Rappresentazione geometrica dell'insieme ammissibile di PINTEL (scalando gli assi di 100.000)



Siamo in $\mathbb{R}^2$ quindi vogliamo rappresentare la regione ammissibile nel piano

(*) → mi restringo al 1° quad.

- Ogni retta (iperpiano) associato a un vincolo divide il piano in due semispazi chiusi:

  es $x_p = 4$ divide in $\{(x_p, x_c) : x_p \leq 4\}$

  $\{(x_p, x_c) : x_p \geq 4\}$

- La regione ammissibile è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi: poliedro, insieme convesso (politopo se limitato) → proprietà particolari

- Le rette associate ai vincoli ($x_p = 0$, $x_c = 0$, $x_p = 4$, $x_c = 7$, $2x_p + x_c = 9$) definiscono la frontiera, e individuano facce e vertici

  es (0,7) vertice — faccia — (1,7) vertice

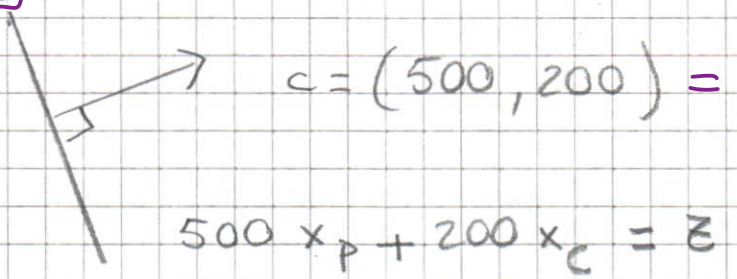
Proprietà: se l'insieme delle soluzioni ottime di un PL è non vuoto, almeno una soluzione ottima corrisponde a un vertice del poliedro; se un punto interno a una faccia è soluzione ottima, tutti i punti della faccia sono soluzioni ottime.

PINTEL: risoluzione per via grafica

FASCIO DI RETTE $500\,x_p + 200\,x_c = z$ F. OBIETTIVO

consideriamo $z = 1000$ e $z^* = 2200$ (per esempio)

Al crescere di z, le rette traslano nella direzione di $c = (500, 200)$, gradiente della funzione obiettivo



Risoluzione per via grafica: traslare il più possibile nella direzione di c (→ gradiente fun. obiettivo), finché l'intersezione della retta con la regione ammissibile è non vuota

Per PINTEL: $z^* = 2200$ (→ massimo ricavo ammissibile); l'intersezione è il solo punto (4, 1), vertice del poliedro

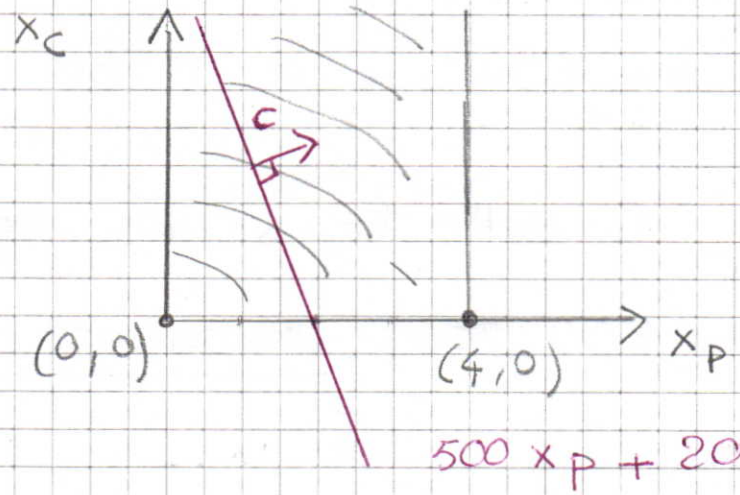
(unica soluzione ottima di PINTEL)

In PINTEL: regione ammissibile limitata e non vuota: soluzione ottima in un vertice del poliedro

Altri possibili esiti di risoluzione:

1) regione ammissibile non limitata

es rimuovendo dal modello di PINTEL il secondo e il terzo vincolo



la retta interseca sempre la regione ammissibile

$z \to +\infty$: problema superiormente illimitato (per modello in forma max)

2) regione ammissibile vuota

es

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 10$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 \geq 12$

incompatibile

Dimostreremo le proprietà di PL in modo rigoroso, riconducendoci alla forma standard

$$\max \{ c^T x : Ax \leq b \}$$

↳ matrice che definisce i vincoli

$x \in \mathbb{R}^n$: vettore delle variabili

$c \in \mathbb{R}^n$: " dei costi

A : matrice reale $m \times n$ (ipotesi: $m \geq n$) ← contiene i coef. dei vincoli

$b \in \mathbb{R}^m$: vettore dei termini noti

esempio (PINTEL)

$$\max \; 500 x_1 + 200 x_2$$

$$\begin{aligned}
1 x_1 \quad &0 \quad &&\leq 4 \\
0 \quad &1 x_2 \quad &&\leq 7 \\
2 x_1 \; &+ 1 x_2 \quad &&\leq 9 \\
-1 x_1 \quad &0 \quad &&\leq 0 \\
0 \quad &-1 x_2 \quad &&\leq 0
\end{aligned}$$

portiamo tutti i vincoli con $\leq$

$$x = [x_1, x_2]^T$$

$$c^T = [500, 200]$$

$$c^T x = 500 x_1 + 200 x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un qualsiasi problema di PL può essere ricondotto a $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ grazie alle seguenti trasformazioni sintattiche:

1) $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$

3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i$

4) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$

($a_{ij} x_j$: variabili strutturali; s_i: variabile di scarto)

5) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$

6) x_i non vincolato in segno $\equiv \begin{cases} x_i = x_i^+ - x_i^- \\ x_i^+, x_i^- \geq 0 \end{cases}$

esempio

$$\min -2x_1 + 3x_2 \qquad -\max 2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 &\leq 0 \end{aligned} \equiv \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -2x_1 - x_2 &\leq -3 \\ x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

LEZIONE 3 — 30 Settembre 2021

Geometria della PL

Maria Grazia Scutellà

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Ricerca Operativa, Pappalardo e Passacantando, Pisa University Press, Seconda edizione, 2012: Cap. 2)

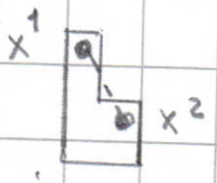
Def Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se comunque si scelgano $x^1, x^2 \in K$ si ha

$$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

es



insieme convesso



insieme non convesso

Def Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice **combinazione convessa** di $x^1, \dots x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\lambda_1, \dots \lambda_m$ tali che

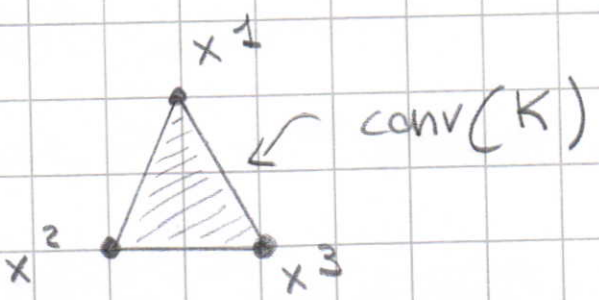
$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \in [0,1] \; i = 1, \dots m, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

La combinazione convessa è **propria** se $0 < \lambda_i < 1$ per ogni i

Def L'**involucro convesso** di un insieme K, $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K

Si può dimostrare che conv(K) è il più piccolo (nel senso di inclusione) insieme convesso che contiene K; un insieme convesso coincide quindi con il suo inviluppo convesso.

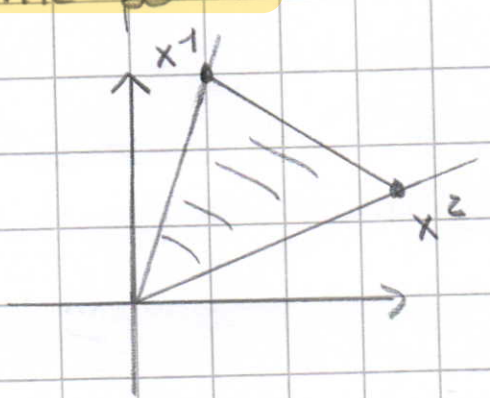
es $K = \{x^1, x^2, x^3\}$



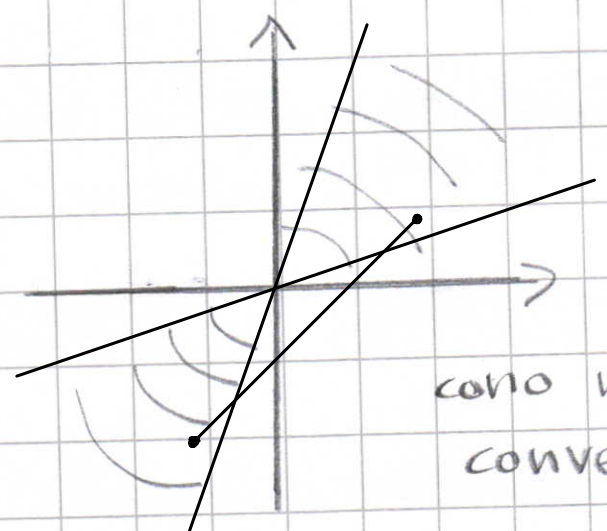
Def Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice **cono** se per ogni $x \in K$ e per ogni $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$

Ovvero: se K contiene x diverso dall'origine, allora contiene tutta la semiretta uscente dall'origine passante per x

es



cono convesso



cono non convesso

Def Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice **combinazione conica** di $x^1, \dots x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\lambda_1, \dots \lambda_m$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \quad , \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots m$$

La combinazione conica è propria se $\lambda_i > 0$, $i = 1, m$

Def: L'involucro conico di un insieme K, cono(K), è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K

Si può dimostrare che:

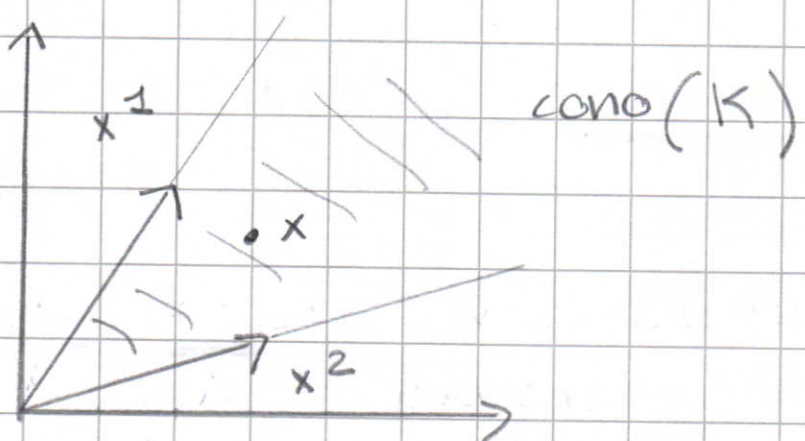
1) cono(K) è il più piccolo (nel senso di inclusione) cono convesso contenente K

2) un insieme è un cono convesso se e solo se coincide con il suo involucro conico

esempio $K = \{x^1, x^2\}$ con $x^1 = (2,3)$ e $x^2 = (3,1)$

$x = (3, \frac{13}{6})$ è combinazione conica di x^1 e x^2:

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda_1} x^1 + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\lambda_2} x^2$$



Poliedri

Un **semispazio chiuso in $\mathbb{R}^n$** può essere descritto algebricamente come l'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare in n variabili:

$$a^T x \leq \beta \quad , \quad a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$$

Def Un **poliedro di $\mathbb{R}^n$** è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$

Ogni poliedro P è quindi rappresentabile come:

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$$

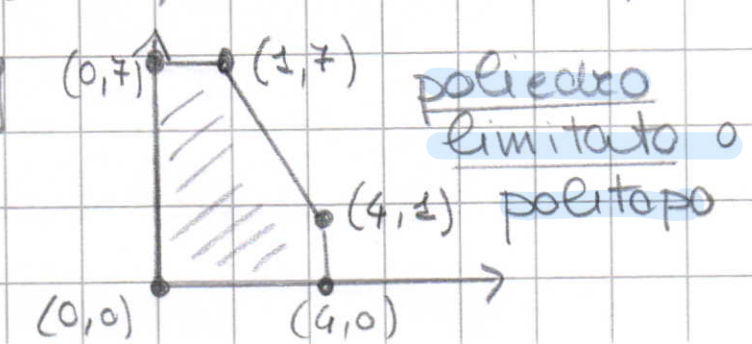
Rappresentazione per facce

A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$

Proprietà: P è un insieme convesso perché intersezione di semispazi chiusi, che sono insiemi convessi

esempio PINTEL

$$P_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 4, x_2 \leq 7, 2x_1 + x_2 \leq 9, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0 \}$$

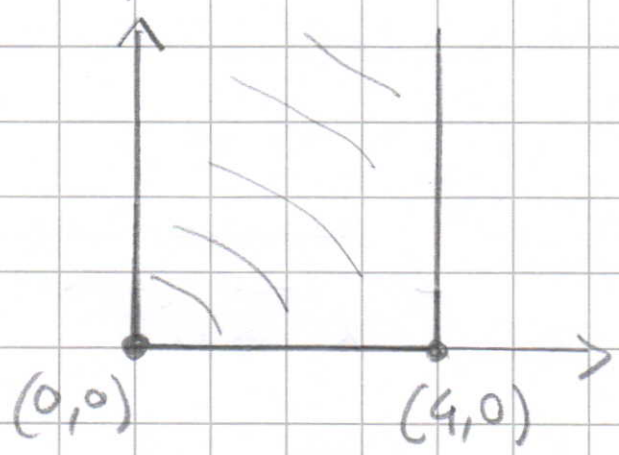


poliedro limitato o politopo

Rimuovendo il secondo e il terzo vincolo

↳ rilassamento

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 4, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0\}$$



poliedro non limitato

Un poliedro che è anche cono è detto cono poliedrico:

Proposizione: Se P è un cono poliedrico allora esiste una matrice Q tale che

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\} \qquad (\text{e viceversa} \Leftrightarrow)$$

Dim Poiché P è un poliedro è esprimibile come $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq q\}$ (rappresentazione per facce). Mostriamo che

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq q\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$$

$\supseteq$: P è un cono e quindi contiene l'origine, ossia $0 = Q0 \leq q$; quindi se $Qx \leq 0$, allora $Qx \leq q$

$\subseteq$: se $Qx \leq q$, ovvero $x \in P$, allora anche $\lambda x \in P$ per ogni $\lambda > 0$.

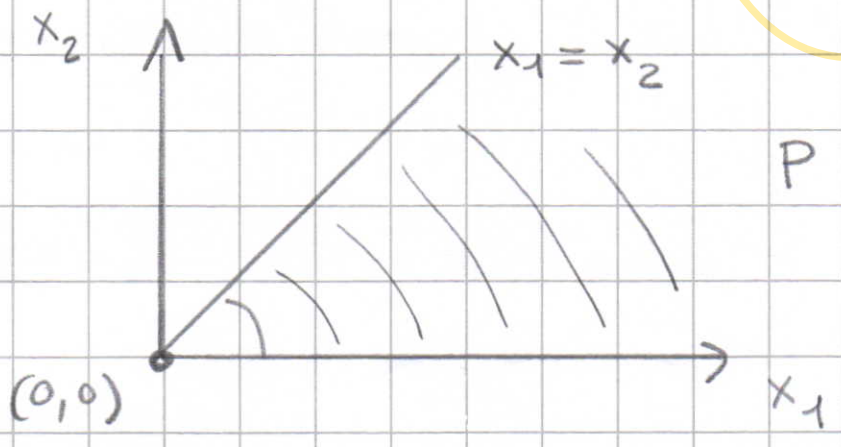
Ovvero deve valere $Qx \leq q$ per ogni $\lambda > 0$, ovvero

$$Qx \leq \frac{q}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0$$

e quindi $Qx \leq 0$ □

Rappresentazione per facce

esempio $P = \{ x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_1 + x_2 \leq 0 \}$ è un cono poliedrico



Def: Un **vertice di un poliedro** è un punto del poliedro che **non** può essere espresso come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro. L'insieme dei vertici di un poliedro P è denotato con **vert(P)**.

Def: Una **direzione di recessione** per un poliedro P è un vettore d tale che

$$x + \lambda d \in P, \quad \forall x \in P, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Quindi: d è **direzione di recessione** se P contiene tutte le semirette di direzione d uscenti da punti di P; l'insieme delle direzioni di recessione di P è denotato con $rec(P)$.

OSS 1: $0 \in rec(P)$

OSS 2: se P è limitato, allora $rec(P) = \{0\}$

$rec(P)$ è un cono poliedrico:

Teorema: Dato $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, allora

$$rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$$

No dim

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \Rightarrow rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$

$d : Ad \leq 0$

$A(x + \lambda d) = Ax + \lambda Ad \leq Ax \leq b$

$d \in rec(P) \Rightarrow x + \lambda d \in P \ \forall \lambda \ \forall x$

$\Downarrow$

$A(x + \lambda d) \leq b$

$Ax + \lambda Ad \leq b$

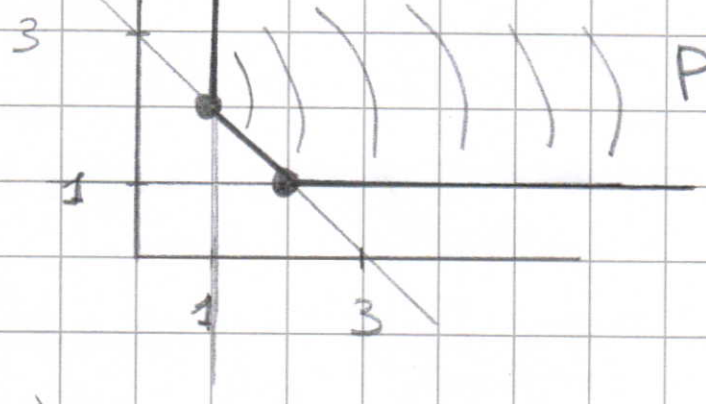
$Ad \overset{\Downarrow}{\leq} \frac{b - Ax}{\lambda} \overset{\Downarrow}{\geq} 0 \ \forall \lambda > 0$

$\Downarrow$

$Ad \leq 0$

Esempio

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq -1, -x_2 \leq -1, -x_1 - x_2 \leq -3\}$$



$$rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_1 - x_2 \leq 0\} = \mathbb{R}^2_+$$

Def Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}^n$,

$$A+B=\{a+b : a\in A,\ b\in B\}$$

Risultato di supporto:

Proposizione Dato un poliedro P, si ha che

$$P+rec(P)=P$$

No dim $P+rec(P)=\{x+d : x\in P,\ d\in rec(P)\}=\{x+d\in P\}=P$

($x+\lambda d\in P\ \forall x\in P\ \forall \lambda\geq 0$)

Def Una **direzione di linealità** per un poliedro P è un vettore d tale che

$$d\in rec(P),\ -d\in rec(P)$$

Ovvero P contiene tutte le **rette** di direzione d passanti per punti di P. L'insieme delle direzioni di linealità di P è denotato con $lineal(P)$.

$lineal(P)$ è un sottospazio vettoriale:

Teorema Dato $P=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\leq b\}$, allora

$$lineal(P)=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=0\}.$$

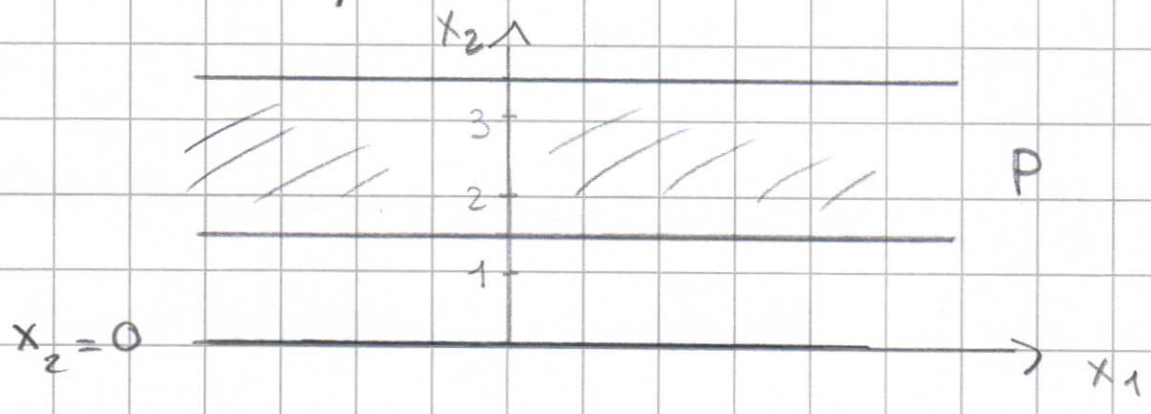
Dim

$$\text{lineal}(P) = \text{rec}(P) \cap (-\text{rec}(P)) \overset{\text{Teorema precedente}}{=}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0, Ax \geq 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}. \quad \square$$

esempio $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_2 \leq 7, -2x_2 \leq -3\}$



$\text{lineal}(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, ovvero la retta $x_2 = 0$

Caratterizzazione geometrica dei poliedri

Lemma L'inviluppo conico di un insieme finito di punti $\{e^1, \dots e^p\}$ è un cono poliedrico, cioè esiste una matrice Q tale che

$$\text{cono}(e^1, \dots, e^p) = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}.$$

↑ generatori del cono

No dim

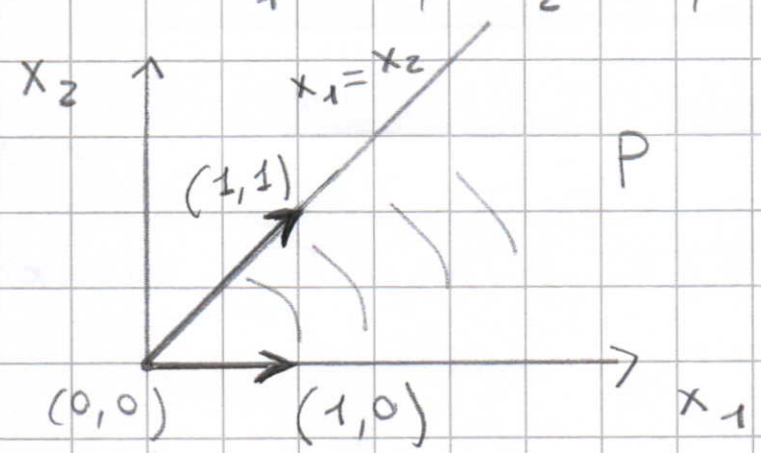
Viceversa:

Lemma Un cono poliedrico $P=\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ è l'involucro conico di un insieme finito di suoi punti.

No dim

esempio (cont.)

$$P=\{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_1+x_2 \leq 0\}$$



$$P = \text{cono}(\{(1,0),(1,1)\})$$

Rappresentazione mediante generatori

esempio: l'involucro conico del disco unitario (cono gelato infinito) è un cono convesso non poliedrico.

Decomposizione di poliedri

Teorema (Rappresentazione dei poliedri)

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro $\iff$ esistono un sottoinsieme finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ di P e un insieme finito $E = \{e^1, \dots, e^p\}$, eventualmente vuoti, tali che

$$P = \text{conv}(V) + \underbrace{\text{cono}(E)}_{\text{finito, quindi cono poliedrico}}$$

No dim

Si può dimostrare che $\text{cono}(E) = \text{rec}(P)$, ovvero:

Teorema: P è un poliedro se e solo se esiste un sottoinsieme finito V di P tale che

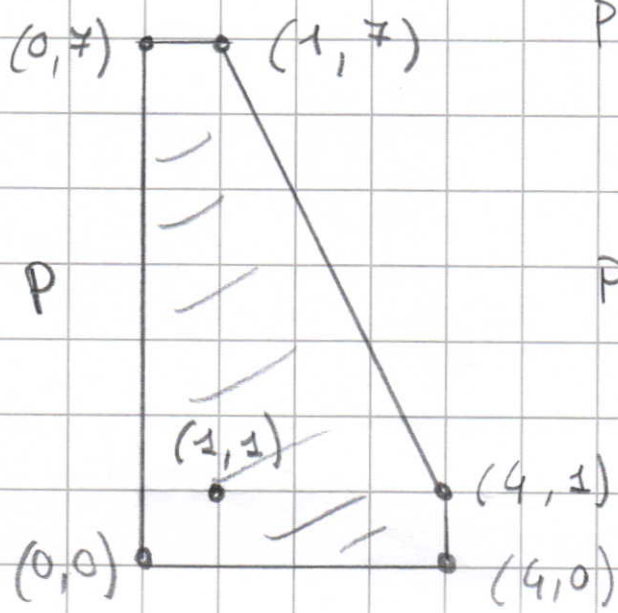
$$P = \text{conv}(V) + \text{rec}(P)$$

poligono in $\mathbb{R}^n$ ← politopo; $\text{rec}(P)$: cono poliedrico

No dim

NB. Questa rappresentazione non è unica.

esempio1 PINTEL



Rappresentazione per facce

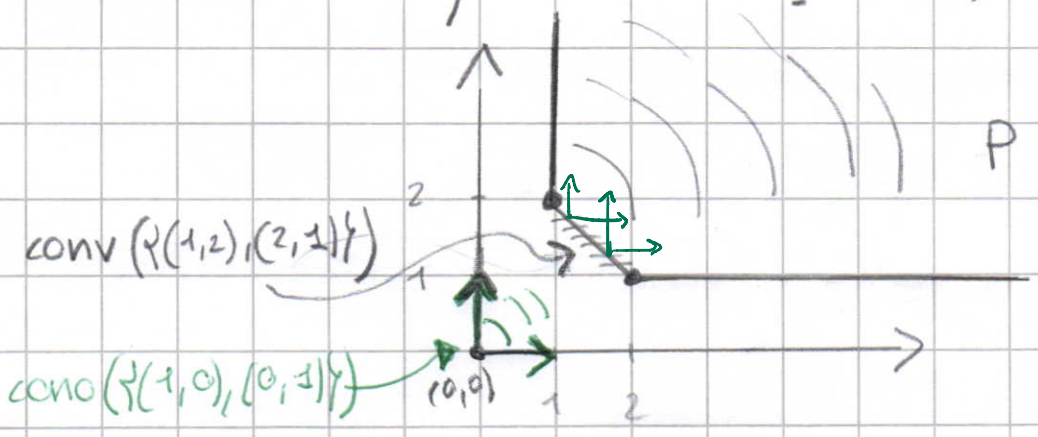
$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le 4,\ x_2 \le 7,\ 2x_1 + x_2 \le 9,\ -x_1 \le 0,\ -x_2 \le 0\}$$

$$P = \text{conv}(\{(0,0),(4,0),(4,1),(1,7),(0,7)\})$$

$$= \text{conv}(\{(0,0),(4,0),(4,1),(1,7),(0,7),(1,1)\})$$

Rappresentazione per punti

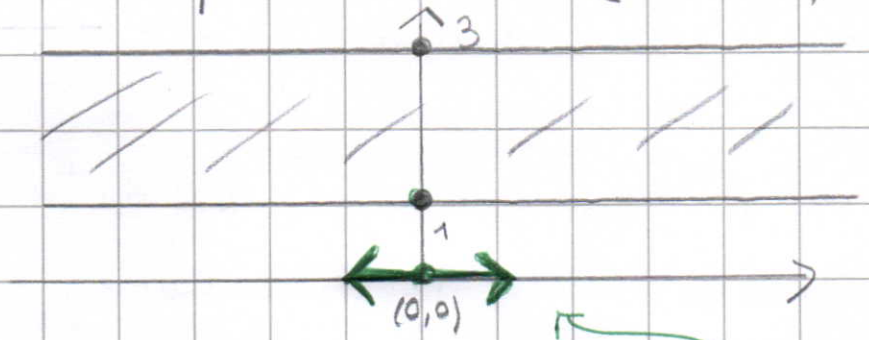
esempio 2 $P = \{ x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq -1, -x_2 \leq -1, -x_1 - x_2 \leq -3 \}$



$A + B = \{a + b\}$

$$P = \text{conv}(\{(1,2),(2,1)\}) + \text{cono}(\{(1,0),(0,1)\})$$

esempio 3 $P = \{ x \in \mathbb{R}^2 : -x_2 \leq -1, \; x_2 \leq 3 \}$



$$P = \text{conv}(\{(0,1),(0,3)\}) + \text{cono}(\{(1,0),(-1,0)\})$$

↑ non sono vertici di P !

Se P non contiene rette?

Teorema Se P è un poliedro con $\text{lineal}(P) = \{0\}$, allora

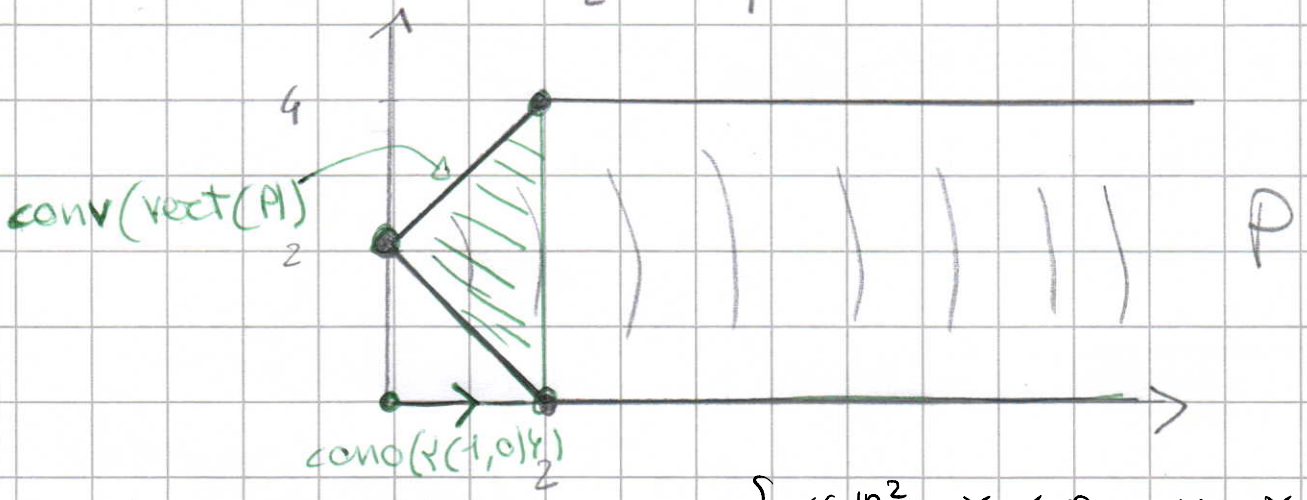
$$\boxed{P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P))}$$

Rappresentazione per punti e generatori

No dim

esempio

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \le 4,\ -x_1 - x_2 \le -2,\ -x_1 + x_2 \le 2,\ -x_2 \le 0 \}$$



$$\text{lineal}(P) = \{0\}$$

$$\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \le 0,\ -x_1 - x_2 \le 0,\ -x_1 + x_2 \le 0,\ -x_2 \le 0 \}$$

$$P = \underbrace{\text{conv}(\{(0,2),(2,0),(2,4)\})}_{\text{vert}(P)} + \underbrace{\text{cono}(\{(1,0)\})}_{\text{rec}(P)}$$

Corollario (del Teorema precedente): Per ogni poliedro non vuoto P si ha

$$\text{vert}(P) \neq \emptyset \iff \text{lineal}(P) = \{0\}$$

Dim

$\Rightarrow$ Sia $\bar{x}$ vertice di P. Se per assurdo $\text{lineal}(P) \neq \{0\}$, allora esiste $d \in \text{lineal}(P)$, $d \neq 0$. Quindi $\bar{x} + d \in P$ e $\bar{x} - d \in P$. Inoltre

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + d) + \frac{1}{2}(\bar{x} - d)$$

↓ per def. di direz. di rec.

contraddicendo l'ipotesi che $\bar{x}$ sia vertice di P

$\Leftarrow$: Se $\text{lineal}(P) = \{0\}$, allora

$P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P)$:

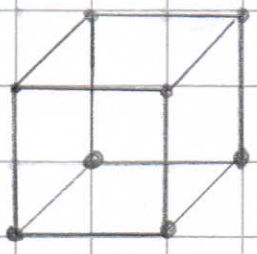
- o $\text{vert}(P) \neq \emptyset$, e quindi ho la tesi.
- oppure $P = \text{rec}(P)$, e in tal caso l'origine è un vertice di P □

Osservazioni:

1) dal punto di vista computazionale, si utilizza la rappresentazione per facce di un poliedro (↘ algebrica)

2) (→ rapp. geometrica) il numero di vertici e generatori può essere esponenziale rispetto alla dimensione del problema di PL (quindi non è trattabile)

$n = 3$



$2n = 6$ facce

$2^n = 8$ vertici

3) utilizzeremo il Teorema di decomposizione di poliedri per dimostrare che, se un problema di PL ha soluzione ottima, allora almeno un vertice del poliedro che rappresenta le sue soluzioni ammissibili è soluzione ottima.

* $vert(P) = \emptyset \Rightarrow P = rec(P) \Rightarrow P$ è un cono (poliedrico).

Se O non fosse vertice, allora sarebbe una combinazione propria di el. di P, allora P conterrebbe un segmento che passa per l'origine, ma essendo un cono allora dovrebbe contenere tutta la retta su cui giace il segmento, assurdo perché sto supponendo $lineal(P) = \{0\}$.

Teorema (Fondamentale della PL):

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un poliedro non vuoto tale che $\text{lineal}(P) = \{0\}$. Siano $v^1, \dots, v^m$ i vertici di P, e siano $e^1, \dots, e^p$ tali che

$$P = \text{conv}(\{v^1, \dots, v^m\}) + \text{cono}(\{e^1, \dots e^p\})$$

Si consideri il problema di PL:

$$(\mathcal{P}): \max\{c^T x : \underbrace{Ax \leq b}_{x \in P}\}$$

Allora $\mathcal{P}$ ha ottimo finito se e solo se $c^T e^j \leq 0$, $j = 1, \dots p$. In tal caso esiste $k \in \{1, \dots m\}$ tale che il vertice v^k è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$.

Dim Per il Teo. di Rappresentazione di poliedri: se $x \in P$ allora $x = \sum \lambda_i v^i + \sum \gamma_j e^j$

$(\mathcal{P}): \max\{c^T x : Ax \leq b\}$ può essere riformulato come

$$\max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c^T v^i) + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j (c^T e^j)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\gamma_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, p$$

Rappresentazione per punti e generatori

(P) ha ottimo finito se e solo se $c^T e^j \leq 0$, $j = 1, \dots, p$: se esistesse $j \in \{1, \dots, p\}$ tale che $c^T e^j > 0$, facendo crescere γ_j ($\gamma_j \to +\infty$) il valore ottimo tenderebbe a $+\infty$.

↳ i λ_i non possono tendere a $+\infty$ perché $\sum \lambda_i = 1$

Viceversa se ~~Si consideri allora~~ $c^T e^j \leq 0$, $j = 1, \dots, p$, sia x una qualsiasi soluzione ammissibile, ovvero $x \in P$:

$$c^T x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c^T v^i) + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \underbrace{(c^T e^j)}_{\leq 0} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c^T v^i) \leq c^T v^k \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big) = c^T v^k,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

dove v^k è un vertice tale che $c^T v^k = \max\{c^T v^i : i = 1, \dots m\}$. Ovvero, in tal caso, il problema ha ottimo finito ed esiste un vertice che è soluzione ottima di (P). □

Corollario $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ è superiormente illimitato se e solo se esiste una direzione di recessione e^j del poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ tale che $c^T e^j > 0$: **direzione di crescita illimitata**

LEZIONE 4, 5, 6 — 5, 6, 7 ottobre 2021

Teoria della Dualità

Maria Grazia Scutellà

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: par. 2.2)

esempio: un problema di dieta

Un dietologo consiglia due tipi di alimenti, A e B, e il seguente fabbisogno minimo giornaliero di carboidrati, proteine e vitamine:

	A	B	fabb. minimo giornaliero
carboidrati	5	7	8
proteine	4	2	15
vitamine	2	1	3
costo unitario	1200	750	

Problema di ottimizzazione: si determini una dieta di costo minimo che rispetti i requisiti sul fabbisogno minimo giornaliero.

Un modello matematico

Variabili decisionali:

x_1: unità di alimento di tipo A acquistato

x_2: " " " " " B "

→ min $1200 x_1 + 750 x_2$

unità carboidrati	$5 x_1 + 7 x_2$	$\geq$	8	PL
" proteine	$4 x_1 + 2 x_2$	$\geq$	15	
" vitamine	$2 x_1 + x_2$	$\geq$	3	
	x_1 , x_2	$\geq$	0	

problema associato: venditore di pillole

Un venditore vuole immettere sul mercato pillole di carboidrati, proteine e vitamine. Vuole determinare i prezzi di vendita, massimizzando il ricavo, in modo che i prezzi siano competitivi, ovvero per il cliente non sia svantaggioso acquistare pillole anziché direttamente A e B.

Un modello matematico

Variabili decisionali: un'unità

y_1: prezzo vendita una pillola di carboidrati

y_2: " " " " " proteine

y_3: " " " " " vitamine

$$\max \; 8y_1 + 15y_2 + 3y_3$$

$$\text{PL} \quad \begin{cases} 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1200 \\ 7y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 750 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Legame sintattico tra i due problemi di PL:

	dieta → x_1	x_2		max
pillole ↓ y_1	5	7	$\geq$	8
y_2	4	2		15
y_3	2	1		3
	$\leq$	$\leq$		
min	1200	750		

Legame semantico tra i due problemi di PL:

sia (x_1, x_2) una dieta ammissibile

sia (y_1, y_2, y_3) un setting di prezzi ammissibili

$$(5y_1 + 4y_2 + 2y_3)\, x_1 \overset{\leq}{\to} 1200\, x_1 \quad \text{→ non cambia il verso della disuguaglianza}$$

$$(7y_1 + 2y_2 + y_3)\, x_2 \overset{\leq}{\to} 750\, x_2$$

Sommando membro a membro:

$$(5y_1 + 4y_2 + 2y_3)x_1 + (7y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 \leq 1200x_1 + 750x_2$$

Riordinando i termini:

$$(5x_1 + 7x_2)y_1 + (4x_1 + 2x_2)y_2 + (2x_1 + x_2)y_3 \leq$$

≥ 8 → vincoli del prob. della dieta ≥ 15 ≥ 3 $\qquad 1200x_1 + 750x_2$

si ricava:

$$8y_1 + 15y_2 + 3y_3 \leq 1200x_1 + 750x_2$$

ricavo del venditore — costo della dieta

Ovvero: comunque si fissino prezzi ammissibili, il ricavo del venditore è minore o uguale del costo di una qualsiasi dieta ammissibile.

valutazione inferiore valore ottimo problema della dieta ↙ ↘ valutazione superiore valore ottimo problema venditore di pillole

In generale:

Def Dato un problema di PL nella forma

$$\max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$ primale

ad esso è associato il problema di PL

$$\min\{y^T b : y^T A \geq c^T,\ y \geq 0\}$$ duale

coppia simmetrica di problemi duali

Teorema: Il duale del duale è il primale.

Dim

Si consideri il problema duale:

$$\min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} \overset{\min(x) = -\max(-x)}{=}$$

$$= -\max\{-y^T b : -y^T A \leq -c^T, y \geq 0\} =$$

applico l'operatore trasposto

$$= -\max\{(-b)^T y : (-A^T) y \leq -c, y \geq 0\}$$

Applicando la definizione di problema duale:

$$-\min\{x^T(-c) : x^T(-A^T) \geq (-b)^T, x \geq 0\} =$$

$$= \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$ ovvero il primale. □

Considereremo la seguente coppia:

(P) $\max c^T x$ con: $Ax \leq b$

(D) $\min y^T b$ con: $y^T A = c^T$, $y \geq 0$

Coppia asimmetrica di problemi duali

- Equivalente alla definizione precedente (pag 54 Appunti OR)

Corrispondenza primali - duali

↘ si possono dimostrare a partire dalla def. di coppie (a)simmetrica

max	min
c	b
b	c
$A_i x \leq b_i$	$y_i \geq 0$
$A_i x \geq b_i$	$y_i \leq 0$
$A_i x = b_i$	$y_i \gtreqless 0$ → non è vincolata in segno
$x_j \geq 0$	$y A^j \geq c_j$
$x_j \leq 0$	$y A^j \leq c_j$
$x_j \gtreqless 0$	$y A^j = c_j$
↙ x	↘ y
una per ogni colonna di A	una per ogni riga di A

→ il numero di variabili del duale è = al n° dei vincoli del primale, esclusi i vincoli di segno

esempio

DUALE →

$$\min 2x_1 + 3x_2 \qquad \max 2y_1 + 3y_2 + y_3$$

y_1	$x_1 - x_2 \geq 2$	$y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 2$
y_2	$2x_1 + x_2 \leq 3$	$-y_1 + y_2 - y_3 = 3$
y_3	$4x_1 - x_2 = 1$	$y_1 \geq 0$
	$x_1 \geq 0$	$y_2 \leq 0$
	$(x_2 \gtreqless 0)$	$(y_3 \gtreqless 0)$

Teorema debole della dualità

Consideriamo la coppia asimmetrica di problemi duali:

$$(P) \quad \max c^T x \qquad (D) \quad \min y^T b$$
$$A x \leq b \qquad\qquad y^T A = c^T$$
$$y \geq 0$$

Teorema (debole della dualità): Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per (P) e $\bar{y}$ è una soluzione ammissibile per (D), allora

$$c^T \bar{x} \leq \bar{y}^T b$$

Dim

- $\bar{y}^T A = c^T \Rightarrow c^T \bar{x} = (\bar{y}^T A)\bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} \leq \bar{y}^T b$
- $A\bar{x} \leq b, \ \bar{y} \geq 0 \Rightarrow \bar{y}^T (A\bar{x}) \leq \bar{y}^T b$

□

Corollario 1: Se (P) è superiormente illimitato, allora (D) è vuoto; viceversa, se (D) è inferiormente illimitato, allora (P) è vuoto.

Corollario 2: Se (P) e (D) sono non vuoti:

a pag 18 si dim. che vale l'=

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} \overset{=}{} \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}$$

Corollario 3: Se $\bar{x}$ è soluzione ammissibile per (P), $\bar{y}$ è soluzione ammissibile per (D) e $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$, allora $\bar{x}$ è soluzione ottima per (P) e $\bar{y}$ è soluzione ottima per (D).

$$c^T\bar{x} \leq z(P) \leq z(D) \leq \bar{y}^T b$$

$$\Rightarrow c^T\bar{x} = z(P) = z(D) = \bar{y}^T b$$

↳ < **certificato di ottimalità** >

esempio (PINTEL)

coppie asimmetrica

$$(P)\ \max\ 500x_1 + 200x_2 \qquad (D)\ \min\ 4y_1 + 7y_2 + 9y_3$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 9 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 + 2y_3 - y_4 &= 500 \\ y_2 + y_3 - y_5 &= 200 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\bar{x} = (4, 1)$ soluzione ottima di (P) → lezione 2

$c^T\bar{x} = 2200$

$\bar{y} = (100, 0, 200, 0, 0)$ soluzione ammissibile per (D)

$\bar{y}^T b = 2200 = c^T\bar{x}$

Segue che:

1) $\bar{x} = (4, 1)$ soluzione ottima di PINTEL

2) $\bar{y} = (100, 0, 200, 0, 0)$ soluzione ottima per il suo duale

Certificato algebrico di ottimalità

($\bar{x}$ certifica per $\bar{y}$, $\bar{y}$ certifica per $\bar{x}$).

Dati: coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max c^T x \quad Ax \leq b \qquad (D) \quad \min y^T b \quad y^T A = c^T \quad y \geq 0$$

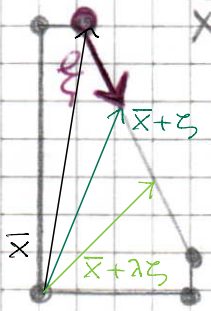
e assumendo (P) non vuoto, come determinare una soluzione ottima di (P), se esiste.

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P)

Def $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una **direzione ammissibile per $\bar{x}$** se esiste $\bar{\lambda} > 0$ tale che

$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \xi$ è ammissibile per (P) $\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$

esempio (PINTEL)



$\bar{x} = (1, 7)$

ζ è una direzione ammissibile per $\bar{x}$.

Algebricamente: $\zeta \in \mathbb{R}^n$ è una direzione ammissibile per $\bar{x}$ se e solo se

$A\bar{x}(\lambda) \leq b \quad \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, ovvero

$A_i \bar{x}(\lambda) \leq b_i$ " , $i = 1, \dots m$, ovvero

$A_i (\bar{x} + \lambda \zeta) \leq b_i$ " " ovvero

$A_i \bar{x} + \lambda A_i \zeta \leq b_i$ " "

Def: L'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è l'insieme dei vincoli soddisfatti in forma di uguaglianza.

Sia $I(\bar{x}) = \{ i \in \{1, \dots, m\} : A_i \bar{x} = b_i \}$

↳ insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$

Osservazioni:

1) se $i \in I(\bar{x})$:

$A_i \bar{x} + \lambda A_i \zeta = b_i + \lambda A_i \zeta \leq b_i$, quindi

$A_i \bar{x} + \lambda A_i \zeta \leq b_i$ se e solo se $A_i \zeta \leq 0$

2) se $i \notin I(\bar{x})$: (vincolo non attivo in $\bar{x}$)

$\underbrace{A_i \bar{x}}_{b_i} + \lambda A_i \xi \leq b_i$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, purché si scelga λ sufficientemente piccolo

Segue:

Proprietà (caratterizzazione algebrica delle direzioni ammissibili): $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una direzione ammissibile per $\bar{x}$ se e solo se $A_i \xi \leq 0$ ↓ osservazione 1

$\forall i \in I(\bar{x})$, ovvero

$$A_{I(\bar{x})} \xi \leq 0$$

dove $A_{I(\bar{x})}$ è la sottomatrice di A formata dalle sole righe di coefficienti corrispondenti ai vincoli attivi.

Quindi, l'insieme delle direzioni ammissibili per $\bar{x}$ è il cono poliedrico

$$C(\bar{x}) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : A_{I(\bar{x})} \xi \leq 0 \}$$

esempio (PINTEL)

$$\max \quad 500 x_1 + 200 x_2$$

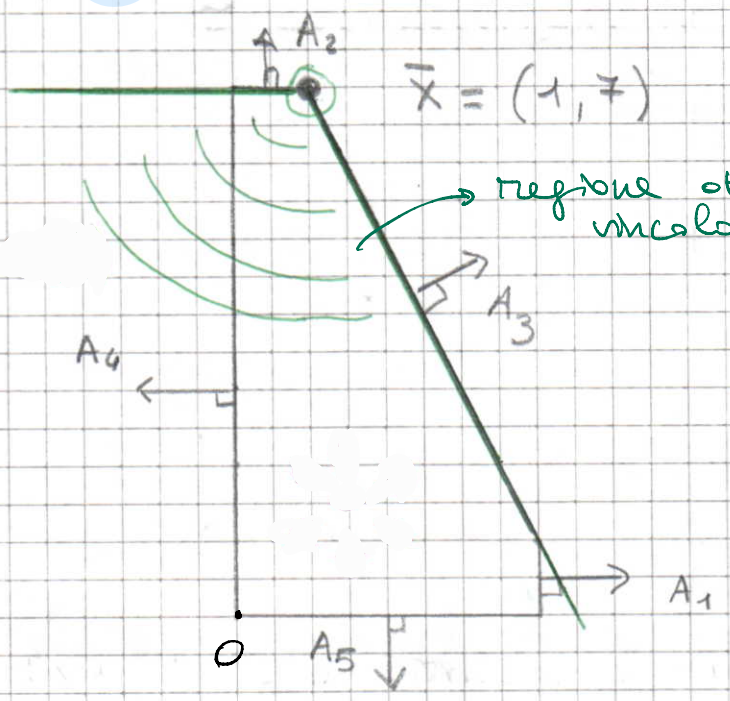
$$A_1 \quad x_1 \leq 6$$

$$A_2 \quad x_2 \leq 7$$

$$A_3 \quad 2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$A_4 \quad -x_1 \leq 0$$

$$A_5 \quad -x_2 \leq 0$$



$\bar{x} = (1, 7)$ $\quad I(\bar{x}) = \{2, 3\}$ ← vincoli attivi

→ regione ottenuta rimuovendo il 1°, 4°, 5° vincolo (rilassamento)

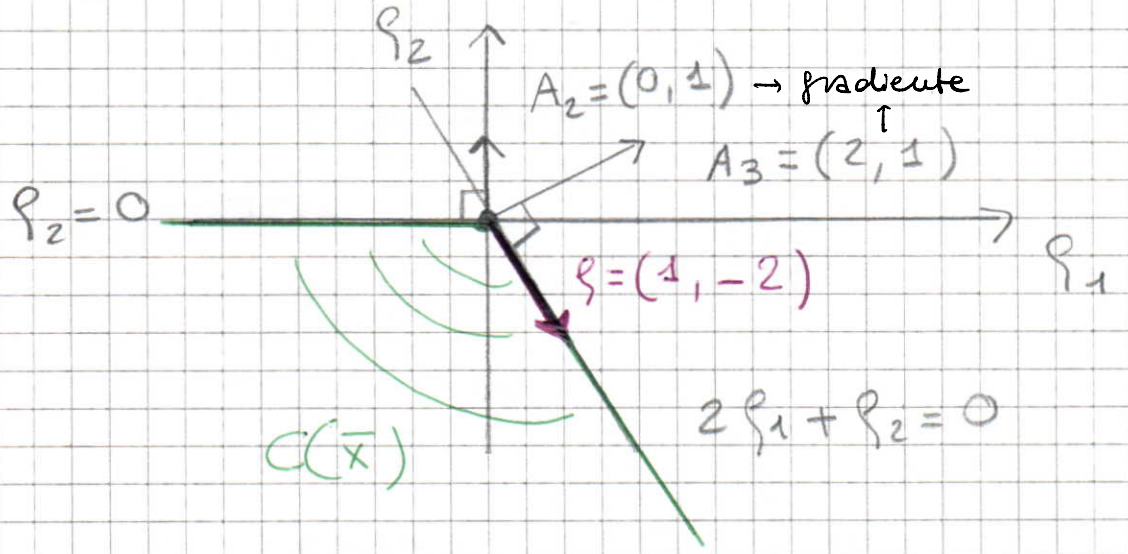
$$A_{I(\bar{x})} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{I(\bar{x})} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ 2\rho_1 + \rho_2 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$C(\bar{x}) = \{(\rho_1, \rho_2) : A_{I(\bar{x})} \rho \leq 0\} = \Downarrow$$

$$= \{(\rho_1, \rho_2) : \rho_2 \leq 0, \; 2\rho_1 + \rho_2 \leq 0\}$$

NB. Traslando il cono $C(\bar{x})$ in modo che l'origine, da $(0,0)$, diventi $\bar{x}$, si osserva che $C(\bar{x})$ va a coincidere con la regione ammissibile del rilassamento (solo il 2° e 3° vincolo).

Geometricamente:



OSS: se $\bar{x}$ è interno al poliedro, si ha $I(\bar{x})=\emptyset$ e $C(\bar{x})=\mathbb{R}^n$: ogni direzione è ammissibile per $\bar{x}$.

Def Una **direzione** $\rho \in \mathbb{R}^n$ è **di crescita per** $\bar{x}$ se $\boxed{c^T\bar{x}(\lambda)=c^T\bar{x}+\lambda c^T\rho > c^T\bar{x}}$ per un opportuno $\lambda > 0$.

Segue:

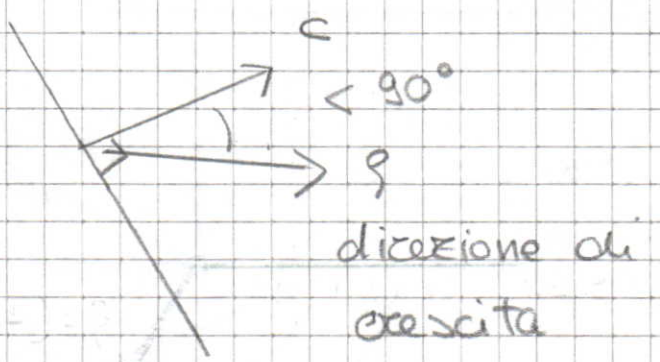
Proprietà (**caratterizzazione algebrica delle direzioni di crescita**): $\rho \in \mathbb{R}^n$ è una **direzione di crescita se e solo se**

$$\boxed{c^T\rho > 0} \qquad (\text{NB. } \lambda > 0)$$

OSS: **non** dipende da $\bar{x}$

Geometricamente: (PINTEL)

$c = (500, 200)$



→ per due vettori nel piano vale:

$a \cdot b = a^t b = |a| \, |b| \cos\theta$

↓ con il Teorema del coseno

quindi le direzioni di crescita sono tutti e soli gli ξ che formano con c un angolo $< 90°$ ($\cos > 0$)

OSS:

1) Se $c = 0$, non esistono direzioni di crescita (ogni soluzione ammissibile è ottima per (P)).

2) Se $c \neq 0$?

Lemma: Sia (P) non vuoto e $c \neq 0$. Una soluzione ammissibile $\bar{x}$ è ottima per (P) se e solo se non esistono direzioni ammissibili per $\bar{x}$ che siano anche direzioni di crescita

Dim

⇒ Sia $\bar{x}$ ottima: se esistesse una direzione ξ ammissibile per (P) che sia anche di crescita, spostandosi di un opportuno λ lungo ξ otterrei una soluzione ammissibile di costo maggiore,

contro l'ipotesi che $\bar{x}$ sia ottima

$\Leftarrow$ Non esistono direzioni ammissibili e di crescita per $\bar{x}$.

Supponiamo per assurdo che $\bar{x}$ non sia ottima.

Allora esiste x' ammissibile per (P) tale che

$$c^T x' > c^T \bar{x} \quad \text{ovvero} \quad c^T \underbrace{(x' - \bar{x})}_{\| \rho} > 0$$

Consideriamo la direzione $\rho = (x' - \bar{x})$:

1) ρ è di crescita in quanto $c^T \rho > 0$

2) ρ è ammissibile per $\bar{x}$:

$$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \rho = \bar{x} + \lambda(x' - \bar{x}) = \lambda x' + (1-\lambda)\bar{x}$$

$\bar{x}(\lambda)$ appartiene al poliedro che definisce la regione ammissibile di (P) $\forall \lambda \in [0,1]$, essendo un insieme convesso (poliedro $\Rightarrow$ convesso). Segue che $\bar{x}$ è soluzione ottima per (P). $\square$

↳ perché è assurdo che non lo sia

OSS: Se $c \neq 0$, $\bar{x}$ interno al poliedro non può essere soluzione ottima di (P) in quanto $\rho = c$ è ammissibile per $\bar{x}$ e anche di crescita: $c^T c = \|c\|_2^2 > 0$ ($c \neq 0$)

↳ $I(\bar{x}) = \emptyset$ e $C(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$ (pag 13) (52) quindi $c \in C(\bar{x})$

Il lemma precedente può essere riformulato algebricamente:

Lemma (rif.): Sia (P) non vuoto e $c \neq 0$. Una soluzione $\bar{x}$ ammissibile è ottima per (P) se e solo se il sistema

$$\begin{cases} A_{I(\bar{x})}\, \eta \leq 0 & \rightarrow \text{dice che } \eta \in C(\bar{x}) \\ c^T \eta > 0 & \rightarrow \text{dice che } \eta \text{ è di crescita} \end{cases}$$

non ha soluzioni.

esempio (PINTEL)

$\bar{x} = (1,7)$ ammissibile per PINTEL

Consideriamo $\eta^T = [1 \quad -2]$:

1) η è ammissibile per $\bar{x}$:

$$A_{I(\bar{x})}\, \eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

(A_2: riga 1; A_3: riga 2)

2) η è di crescita:

$$c^T \eta = [500 \quad 200] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 100 > 0$$

quindi $\bar{x} = (1,7)$ non è soluzione ottima di PINTEL.

Come rafforzare il legame con il problema duale

Lemma (di Farkas) (1902): data una matrice reale A $m \times n$ e dato un vettore $c \in \mathbb{R}^n$, i due sistemi

$$(S_P): \begin{cases} A\xi \leq 0 \\ c^T\xi > 0 \end{cases} \qquad (S_D): \begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

sono mutuamente esclusivi, ovvero esattamente uno dei due ha soluzione.

No dim

Per semplificare la trattazione, denotiamo $I(\bar{x}) = I$

$$(PR): \begin{cases} A_I\xi \leq 0 \\ c^T\xi > 0 \end{cases} \qquad (DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

Primale Ristretto — Duale Ristretto (ai soli vincoli attivi)

Dal lemma di Farkas: (e sfruttando la riformulazione del Lemma (pag. 16))

Corollario: Sia (P) non vuoto e $c \neq 0$. Una soluzione ammissibile $\bar{x}$ è ottima per (P) se e solo se (DR) ha soluzione.

Teorema (forte della dualità): Se (P) e (D) non vuoti, allora

$$\max\{c^T x : Ax \le b\} = \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \ge 0\}$$

segue dal Teorema debole della dualità ↑

Dim

OSS: Poiché (D) non vuota per ipotesi, (P) non può essere superiormente illimitato. Non essendo vuoto per ipotesi, allora (P) ha ottimo finito.

↳ (lez. 1) (P) può essere vuoto, sup. ill., ottimo finito

è in forma di max ↓

1) $c = 0$

- $\max\{0^T x : Ax \le b\} = 0$
- $y = 0$ è soluzione ammissibile per (D), con $y^T b = 0$

da un corollario[3] del Teorema debole di dualità, 0 è il valore ottimo sia di (P) che di (D).

2) $c \neq 0$

$\max\{c^T x : Ax \le b\}$ ↑

Sia $\bar{x}$ una soluzione ottima di (P) e sia I l'insieme degli indici attivi in $\bar{x}$ ($I \neq \emptyset$ in quanto $c \neq 0$).

$c \neq 0$, $\bar{x}$ soluz. ottima $\Rightarrow$ (pag. 15)[55] $\bar{x}$ non è interno al poliedro $\Rightarrow I \neq \emptyset$

Per il Corollario precedente, (DR) ha soluzione, sia $\bar{y}_I$ una soluzione di (DR):

$$\begin{cases} \bar{y}_I^T A_I \overset{*}{=} c^T \\ \bar{y}_I \overset{*}{\geq} 0 \end{cases}$$

Complementare di I

Completiamo $\bar{y}_I$ con uno 0 per ogni componente in $\bar{I}$, sia $\bar{y}^T = [\bar{y}_I \;\; 0]$: → metto gli 0 nelle posizioni $i \in \{1,\dots,m\} \setminus I$

1) $\bar{y}$ è ammissibile per (D):

$$\bar{y}^T A = \bar{y}_I^T A_I = c^T$$

$\bar{y} \geq 0$ in quanto $\bar{y}_I \overset{*}{\geq} 0$

2) $\bar{y}^T b = \bar{y}_I^T b_I = \bar{y}_I^T \underbrace{(A_I \bar{x})}_{\text{perché si è ristretti a } I} = \underbrace{(\bar{y}_I^T A_I)}_{\overset{*}{=} c^T} \bar{x} = c^T \bar{x}$

(1) $= b_I$

Da un corollario[3] del Teorema debole della dualità segue che $\bar{y}$ è ottima per (D).

Quindi vale che:

$$\max\{c^t x : Ax \leq b\} = c^t \bar{x} = \bar{y}^t b = \min\{y^t b : y^t A = c^t, \; y \geq 0\}$$

$\bar{x}$ ottima per (P) — $\bar{y}$ ottima per (D)

Teorema: Se (P) ha ottimo finito, allora anche (D) ha ottimo finito, e viceversa.

↳ noi non lo dim.

Dim

Poiché (P) è non vuota, (D) non può essere (pag 7) inferiormente illimitata. Supponiamo per assurdo (D) vuota:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$ non ha soluzioni

Per il lemma di Farkas, il sistema:

$$\begin{cases} A\bar{\xi} \leq 0 \\ c^T\bar{\xi} > 0 \end{cases}$$ ha soluzione, sia $\bar{\xi}$ soluzione.

Si ha:

1) $c^T\bar{\xi} > 0$, ovvero $\bar{\xi}$ direzione di crescita

2) $A(x + \lambda\bar{\xi}) = Ax + \lambda \underbrace{A\bar{\xi}}_{\leq 0} \leq Ax \leq b$ (ipotesi)

$\forall x$ ammissibile per (P), $\forall \lambda \geq 0$, ovvero

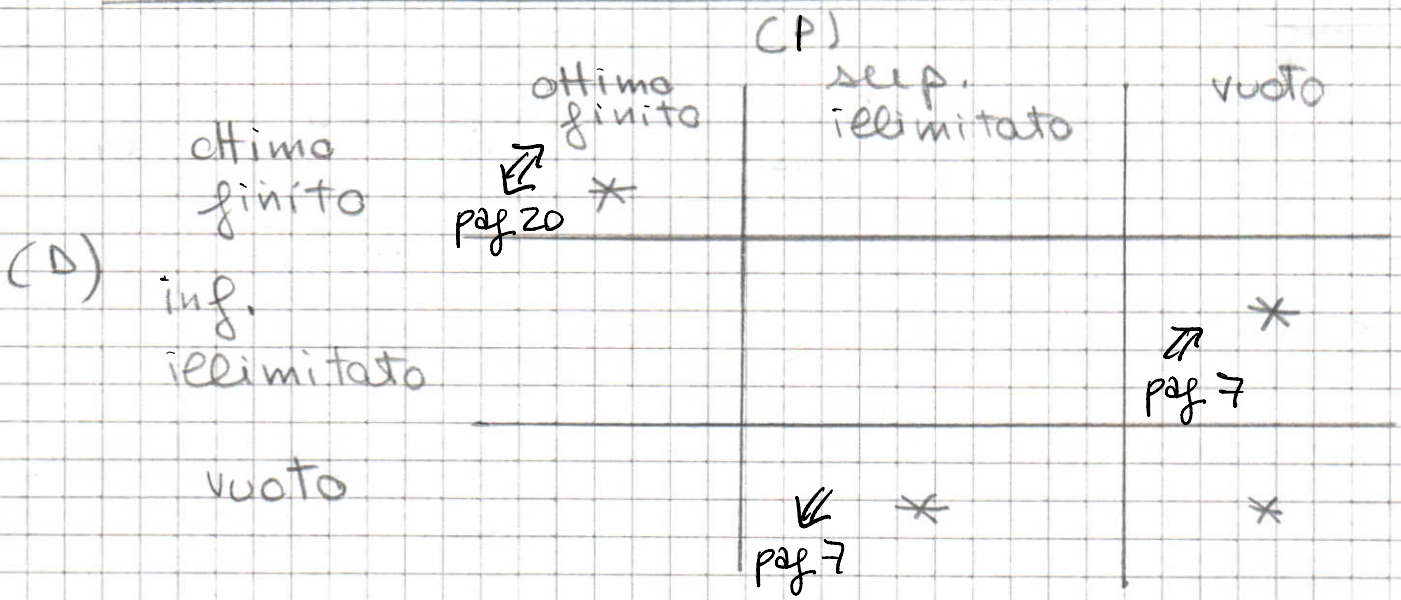
$\bar{\xi}$ direzione ammissibile ($\forall x$ ammissibile per (P)) (di recessione)

Segue che $\bar{\xi}$ è una direzione di crescita illimitata, pag 17 lezione 3 (39)

e quindi (P) superiormente illimitato, contro l'ipotesi. ↳ Corollario pag 17 lezione 3

Allora l'unico esito possibile è che (D) ha ottimo finito. □

Legame semantico tra (P) e (D):



Esempio di (P) e (D) vuoti:

(P) $\max\ x_1 + 2x_2$

$$-x_1 - x_2 \leq -1$$

$x_1 + x_2 \geq 1$ ↔ incompatibili

$$x_1 + x_2 \leq -1$$

$$x_1 \leq 0$$

vuoto

(D) $\min\ -y_1 - y_2$

$$-y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$-y_1 + y_2 = 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

vuoto

$\begin{cases} -y_1 + y_2 \leq 1 \\ -y_1 + y_2 = 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$ non ha soluzioni

↳ equivalentemente posso introdurre un'altra variabile y_3

NB. Data la coppia di problemi duali (P) e (D) si può verificare uno solo dei casi *, le altre combinazioni non si possono mai verificare!

LEZIONE 7 — 12 ottobre 2021

① (P) $\max\ 2x_1 + x_2$

$1\quad x_1 \le 5$

$2\quad x_2 \le 5$

$3\quad x_1 + x_2 \le 10$

$4\quad -x_1 - x_2 \le -5$

(D) $\min\ 5y_1 + 5y_2 + 10y_3 - 5y_4$

$y_1 + y_3 - y_4 = 2$

$y_2 + y_3 - y_4 = 1$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

Si consideri $\bar{x} = (5,5)$, ammissibile per (P): è soluzione ottima?

$I(\bar{x}) = \{1,2,3,4\}$ (= I) $\quad \bar{I}(\bar{x}) = \{4\}$ → complementare di I, escludo il vincolo 4

Si consideri (PR), che caratterizza l'insieme delle direzioni ammissibili per $\bar{x}$ che sono anche di crescita:

η è ammissibile per $\bar{x}$

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(PR): \begin{cases} A_I \eta \le 0 \\ c^T \eta > 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \eta_1 \le 0 \\ \eta_2 \le 0 \\ \eta_1 + \eta_2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow A_I \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \le 0$$

η è di crescita

$2\eta_1 + \eta_2 > 0$ → cond. iniz.

ha soluzione?

È facile verificare che (PR) non ha soluzione:

$$\eta_1 \le 0,\ \eta_2 \le 0 \Rightarrow 2\eta_1 + \eta_2 \le 0$$

Quindi $\bar{x} = (5,5)$ è soluzione ottima di (P)

↳ Lemma (riformulato) pag. 16 Lezioni 4,5,6

Per il Lemma di Farkas, la soluzione (DR):

$$(DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} y_1 + y_3 = 2 \\ y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

(DR) ha infinite soluzioni:

ponendo $y_3 = \lambda$

si ricava $y_1 = (2 - \lambda)$

$y_2 = (1 - \lambda)$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

Quindi $y_I(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda)$ è soluzione di (DR) $\forall \lambda \in [0, 1]$

completiamo con uno 0 per ogni componente in $\bar{I}$

(1) $y(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda, 0)$ è ammissibile per (D) $\forall \lambda \in [0, 1]$ $(y(\lambda)^t A = c^t, \ y(\lambda) \geq 0)$.

(2) $y(\lambda)^t b = \sum_{i=1}^{4} y_i(\lambda) b_i = 5(2 - \lambda) + 5(1 - \lambda) + 10\lambda =$

$= 15 = 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = c^t \bar{x}$

si ha che $y(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda, 0), \ \forall \lambda \in [0, 1]$,

è soluzione ottima di (D).

già visto nella Linea del Teo forte della dualità

Corollario (3) pag. 8 lezioni 4, 5, 6

② Si consideri

$$\max \quad x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -x_1 - 2x_2 &\leq -4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Utilizzando il lemma di Farkas verificare se $\bar{x} = (2,1)$ sia soluzione ottima. In caso negativo, determinare una direzione ammissibile per $\bar{x}$ che sia anche di crescita.

$\bar{x} = (2,1)$ soluzione ammissibile ✓

$I = I(\bar{x}) = \{2, 3, 4\}$

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Per il lemma di Farkas, $\bar{x}$ è soluzione ottima se e solo se (PR) non ha soluzione se e solo se (DR) ha soluzione.

$$(PR): \begin{cases} A_I \rho \leq 0 \\ c^T \rho > 0 \end{cases} \qquad (DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

$$(PR): \begin{cases} \rho_1 + \rho_2 \leq 0 \\ -\rho_1 - 2\rho_2 \leq 0 \\ 2\rho_1 + \rho_2 \leq 0 \\ \rho_2 > 0 \end{cases} \qquad (DR): \begin{cases} y_2 - y_3 + 2y_4 = 0 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 = 1 \\ y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

dove $y_I^T = [\, y_2 \;\; y_3 \;\; y_4 \,]$

Verifica algebrica di ottimalità

In (DR):

$y_2 = y_3 - 2y_4$ (prima equazione)

$\hookrightarrow (y_3 - 2y_4) - 2y_3 + y_4 = -y_3 - y_4 = 1$ (seconda equazione)

incompatibile con $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$

Quindi: (DR) non ha soluzioni $\Rightarrow \bar{x} = (2, 1)$ non è soluzione ottima.

Per il lemma di Farkas, (PR) ha soluzione, ovvero esistono direzioni ammissibili per $\bar{x}$ che sono anche di crescita.

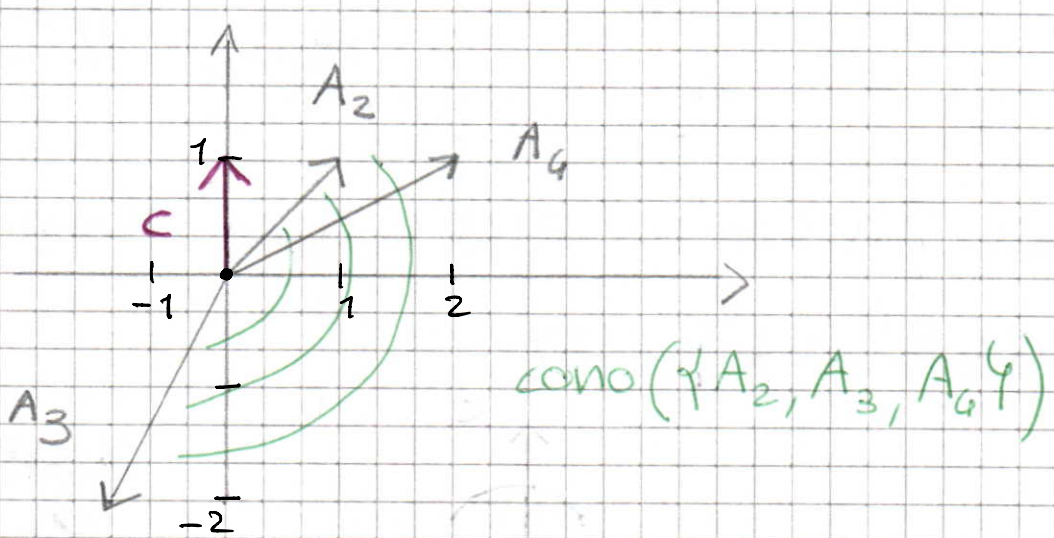
Verifica geometrica di ottimalità

$$(DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4 = c^T \\ y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

(DR) ha soluzione se e solo se

$c \in \text{cono}(\{A_2, A_3, A_4\})$

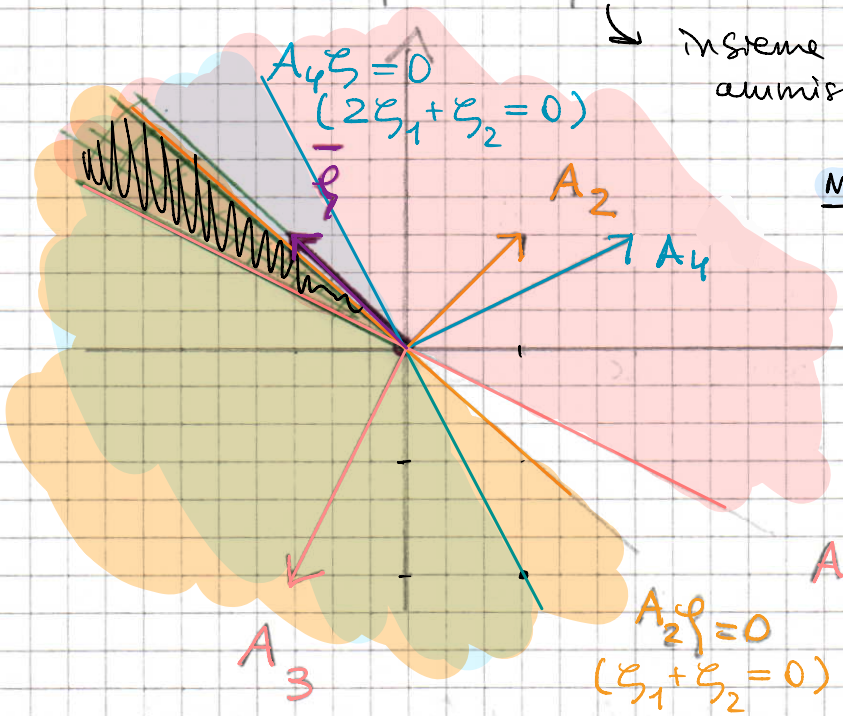


$c \notin \text{cono}(\{A_2, A_3, A_4\})$: (DR) non ha soluzione.

$$(PR): \begin{cases} A_I \rho \leq 0 \\ c^T \rho > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 \rho \leq 0 \\ A_3 \rho \leq 0 \\ A_4 \rho \leq 0 \\ c^T \rho > 0 \end{cases}$$

$\{\xi \in \mathbb{R}^2 : A_I \xi \leq 0\}$ cono poliedrico

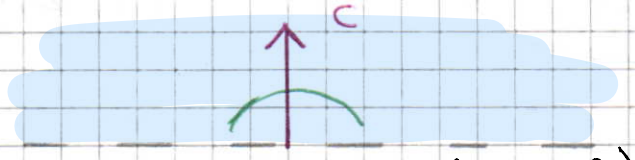
↳ insieme delle direzioni ammissibili per $\bar{x}$



NB. $A_i \perp$ retta $A_i\xi = 0$ perché è il gradiente. La regione ammissibile $(A_i\xi \leq 0)$ è quella opposta a dove punta A_i

cono poliedrico delle direzioni ammissibili per $\bar{x}$.

$\{\xi \in \mathbb{R}^2 : c^T\xi > 0\}$ → insieme delle direzioni di crescita



direzioni di crescita

(gli ξ che formano con c un angolo $< 90°$)

l'intersezione delle due regioni è $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : A_I \xi \leq 0\}$

(direzioni ammissibili per $\bar{x}$ che sono anche di crescita)

esempio $\bar{\xi} = (-1, 1)$ ammissibile e di crescita

Interpretazione geometrica del lemma di Farkas

LEZIONE 8, 9 — 13, 14 ottobre 2021

Algoritmo del Simplesso Primale

Maria Grazia Scutellà

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 2)

(P) $\max c^T x$, $Ax \leq b$ — (D) $\min y^T b$, $y^T A = c^T$, $y \geq 0$

(matrice dei vincoli $(n \times n)$; coppia asimmetrica → non invert.)

1) $\boxed{\text{rango}(A) < n}$: il sistema lineare $Ax = 0$ ammette infinite soluzioni non nulle; ciascuna è direzione di linealità di $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ (vedi Teorema pag. (30) 8 lez. 3)

Per un corollario dimostrato (→ pag 13 lez. 3) (un poliedro P non vuoto ha vertici se e solo se $\text{lineal}(P) = \{0\}$), segue che $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ non ha vertici.

2) $\boxed{\text{rango}(A) = n}$ (→ invertibile) : l'unica soluzione di $Ax = 0$ è la soluzione nulla, ovvero l'unica direzione di linealità del poliedro primale è 0.

Segue che $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ha vertici.

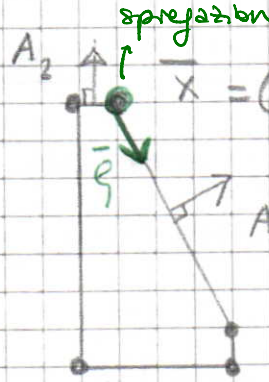
Caratterizzazione algebrica dei vertici

esempio (PINTEL)

spiegazione pag. 8 (74)

$$\max\ 500x_1 + 200x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\le 6 \\ x_2 &\le 7 \\ 2x_1 + x_2 &\le 9 \\ -x_1 &\le 0 \\ -x_2 &\le 0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} a_1 = 0 \\ \| \\ a_2 = 0 \end{matrix}$$

$I(\bar{x}) = \{2, 3\} = I$ $\qquad A_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad 2 \times 2$ ha rango 2

$\bar{x} = (1,7)$ è l'unica soluzione del sistema

$$A_I x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = b_I \qquad \begin{cases} x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

quadrata e di rango 2, quindi invertibile, detta matrice di base.

ovvero

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

soluzione di base primale

$$\| \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ A matrice $m \times n$

In generale: nel caso $\text{rango}(A) = n$, A contiene una sottomatrice quadrata $n \times n$ invertibile.

Definizione: una **base** è un insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$, tale che la sottomatrice A_B, ottenuta da A estraendo le righe A_i, $i \in B$, sia invertibile, cioè $\det(A_B) \neq 0$.
A_B è detta **matrice di base**. (A_B invertibile ⇒ quadrata)

$N = \{1, \dots, m\} \setminus B$: **indici fuori base**

$$A = \left[\frac{A_B}{A_N}\right] \qquad b = \left[\frac{b_B}{b_N}\right]$$

↓
le righe di A possono essere riordinate così

Definizioni:

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è una **soluzione di base primale**

$\bar{x}$ è:

ammissibile se $A_i \bar{x} \leq b_i \quad \forall i \in N$

non ammissibile se $\exists\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i$

non degenere se $A_i \bar{x} \neq b_i \quad \forall i \in N$

degenere se $\exists\, i \in N : A_i \bar{x} = b_i$

Teorema Si consideri un poliedro nella forma $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Allora

$\bar{x}$ è un vertice del poliedro $\iff$ $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile

Dim: (da Pappalardo, Passacantando, "Ricerca Operativa", pag. 58)

($\Rightarrow$) supponiamo $\bar{x}$ vertice, e sia

$I = I(\bar{x}) = \{i : A_i \bar{x} = b_i\}$.

Supponiamo per assurdo che $\text{rango}(A_I) < n$:

allora esiste $d \neq 0$ tale che $A_I d = 0$. Definiamo:

$$z = \bar{x} + \lambda d, \quad w = \bar{x} - \lambda d$$

con $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo. Si ha $z \neq w$,

e inoltre z e w appartengono al poliedro, infatti:

- $$A_i z = A_i(\bar{x} + \lambda d) \begin{cases} = A_i \bar{x} = b_i & \text{se } i \in I \\ < b_i & \text{se } i \notin I \end{cases}$$
- idem per w.

Pertanto $\bar{x} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} w$, assurdo perché per ipotesi $\bar{x}$ è vertice.

($\Leftarrow$) supponiamo $\bar{x}$ soluzione di base ammissibile relativa a B: $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$, $A_N \bar{x} \leq b_N$

Supponiamo per assurdo $\bar{x}$ non sia un vertice: allora esistono z e w punti del poliedro, $z \neq w$, tali che $\bar{x} = \lambda z + (1-\lambda) w$, $0 < \lambda < 1$.

$\forall i \in B$ si ha:

$b_i = A_i \bar{x} = \lambda A_i z + (1-\lambda) A_i w$

($\bar{x} = A_B^{-1} b_B$; $A_i z \leq b_i$ e $A_i w \leq b_i$ perché z, w p.ti del poliedro)

quindi ** si deve avere $A_i z = A_i w = b_i$, $\forall i \in B$,

ovvero $A_B z = A_B w = b_B$, ovvero

$$z = w = A_B^{-1} b_B = \bar{x}$$

assurdo per l'ipotesi $z \neq w$. □

esempio $\bar{x} = (1, 7)$ $I = \{2, 3\} = B$ base,

$A_I = A_B$ matrice di base

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ rappresentazione univoca

soluzione di base primale ammissibile (ovvero vertice) non degenere (in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) significa che ci sono 2 rette (n iperpiani) che lo definiscono)

↳ perché $I = \{i : A_i \bar{x} = b_i\}$

---

* Se dimostro che $\text{rango}(A_I) = n$ ho la tesi. Infatti in tal caso I base e, per def. di I, $\bar{x} = A_I^{-1} b_I$

cioè: $\bar{x}$ è soluz. di base primale ammissibile ($\bar{x} \in$ poliedro).

** Se fosse $A_i z$ e/o $A_i w < b_i$: $b_i = A_i \bar{x} < \lambda b_i + (1-\lambda) b_i = b_i$ ↯.

Consideriamo la soluzione di base primale ammissibile $\bar{x} = (1, 7)$, e i sistemi:

$$(PR): \begin{cases} A_I \rho \leq 0 \\ c^T \rho > 0 \end{cases} \qquad (DR): \begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$$

Poiché $I = B$: → siamo in un caso particolare

$$(P_B): \begin{cases} A_B \rho \leq 0 \\ c^T \rho > 0 \end{cases} \qquad (D_B): \begin{cases} y_B^T A_B = c^T \\ y_B \geq 0 \end{cases}$$

Sistemi ristretti di base

$\bar{x} = (1, 7)$ è una soluzione ottima se e solo se → lez. 4,5,6

(P_B) non ha soluzione se e solo se (D_B) ha soluzione, vale solo se $I = B$ (forse...)

L'unica soluzione candidata a risolvere (D_B) è $\boxed{\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}}$; risolve (D_B) se e solo se $\bar{y}_B \geq 0$.

nell'esempio $\bar{x} = (1, 7)$ $I = B = \{2, 3\}$

$$(P_B): \begin{cases} \rho_2 \leq 0 \\ 2\rho_1 + \rho_2 \leq 0 \\ 500\rho_1 + 200\rho_2 > 0 \end{cases} \qquad (D_B): \begin{cases} 2y_3 = 500 \\ y_2 + y_3 = 200 \\ y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = [500 \;\; 200] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-50 \;\; 250]$$

Poiché $\bar{y}_2 < 0$, (D_B) non ha soluzioni, quindi per il Lemma di Farkas ha soluzione (P_B):

$B(j)$ indica la posizione dell'indice j in B (equivalentemente: indice in quale riga di A_B si trova A_j)

considerando $\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(2)} = -A_B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$

↳ NB. Bisogna "fidarsi" di questa scelta

u_j è l'j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$

Si ha:

$$A_I \bar{\xi} = A_B \bar{\xi} = A_B(-A_B^{-1}) u_{B(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T \bar{\xi} = [500 \;\; 200] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{50}_{-\bar{y}_2} > 0$$

$\rightarrow A_I \bar{\xi} \leq 0$

Ovvero $\bar{\xi}$ è direzione ammissibile per $\bar{x} = (1,7)$ e pure direzione di crescita: soluzione di (P_B)

↳ $c^t \bar{\xi} > 0$

geometricamente:

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \bar{\xi} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A_2 \bar{\xi} = -1 \\ A_3 \bar{\xi} = 0 \end{cases}$$

A_B

$\bar{\xi}$ appartiene alla retta associata al terzo vincolo, e "tende ad allontanare" dalla retta associata al secondo.

Infatti: $A_3 \bar{\xi} = 0$ significa che $\bar{\xi}$ è ortogonale a A_3.
A_3 è il gradiente della retta del 3° vincolo,
quindi $\bar{\xi}$ è lungo tale retta

Visto che $\bar{\xi}$ è ammissibile, lungo la retta del 3° vincolo ci si sposta verso (4,1), perché altrimenti si uscirebbe dal poligono (disegno pag 2)
in effetti $A_2 \bar{\xi} = -1$ significa che l'angolo tra i due vettori è $> 90°$.

L'algoritmo del Simplesso Primale si sposta il più possibile lungo $\bar{\xi}$ (migliora il valore della fuz. obiettivo), fino al vertice adiacente $(4,1)$, e ripete il test di ottimalità:

$\bar{x} = (4,1)$, $I = B = \{1,3\}$ vertice non degenere

$$(P_B): \begin{cases} \xi_1 \leq 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \leq 0 \\ 500\xi_1 + 200\xi_2 > 0 \end{cases} \qquad (D_B): \begin{cases} y_1 + 2y_3 = 500 \\ y_3 = 200 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = [100 \quad 200]$ (IV: 0, 0) soluzione di (D_B)

STOP:

$\bar{x} = (4,1)$ soluzione ottima per (P)

$\bar{y} = (100, 0, 200, 0, 0)$ soluzione ottima per (D) ↘ $[\bar{y}_B^t \; 0]$ (pag. 19 lez. 4,5,6) (58)

Definizioni: data una base B,

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T A_B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

è una soluzione di base duale

È:

ammissibile se $\bar{y}^t A = c^t$ è soddisfatta, $\bar{y}_i \geq 0 \quad \forall i \in B$

non ammissibile se $\exists i \in B : \bar{y}_i < 0$

non degenere se $\bar{y}_i \neq 0 \quad \forall i \in B$

degenere se $\exists i \in B : \bar{y}_i = 0$

Si può dimostrare: (non lo dimostreremo)

Teorema

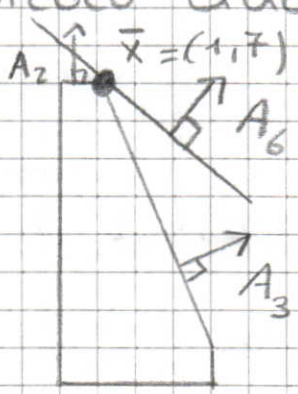
$\bar{y}$ è una **soluzione di base duale ammissibile** $\Leftrightarrow$ $\bar{y}$ è un **vertice del poliedro duale**

Come si comporta l'algoritmo nel caso di un vertice degenere?

esempio (PINTEL)

aggiungiamo il vincolo ridondante

$x_1 + x_2 \leq 8$



$\bar{x} = (1,7)$ è ora un vertice degenere $(B = \{2,3\})$

$I = \{2,3,6\}$ $\quad A_I = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rango}(A_I) = 2$

Poiché $|I| > 2$, a $\bar{x}$ possono corrispondere più basi, e quindi più matrici di base:

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad A_{B_2} = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_6 \end{bmatrix} \quad A_{B_3} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_6 \end{bmatrix}$$

↳ $\bar{x} = A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = A_{B_2}^{-1} b_{B_2} = A_{B_3}^{-1} b_{B_3}$ rappresentazione non univoca

In caso di degenerazione, se (D_B) ha soluzione ($\bar{y}_B = c^t A_B^{-1} \geq 0$), allora (DR) ha soluzione: $\bar{x}$ soluzione ottima.

↳ basta mettere a zero tutte le variabili corrispondenti a $I \setminus B$ (notazione: $[\bar{y}_B \; 0]$)

Altrimenti (Farkas), ovvero (P_B) ha soluzione, ciò non implica che (PR) abbia soluzione; ↳ ci sono alcuni vincoli in più

l'algoritmo fa variare $B \subseteq I$, B base.

Ciò, $\exists B \subseteq I$ (P_B) ha sol. $\not\Rightarrow$ $\bar{x}$ non ottimo, perché non è detto che (PR) abbia sol. Altre sì fa vedere $B \subseteq I$ e, se $\exists B \subseteq I$ (D_B) ha sol., allora (P_B) non ha sol., allora (PR) non ha sol., allora è ottimo.

Lemma: un vertice $\bar{x}$ è soluzione ottima per (P) se e solo se $\exists B \subseteq I(\bar{x})$, B base, tale che

$$(D_B): \begin{cases} y_B^T A_B = c^T \\ y_B \geq 0 \end{cases}$$ ha soluzione,

ovvero se e solo se $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} \geq 0$.

In tal caso $\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \quad 0]$ è soluzione ottima di (D)

Algoritmo del Simplesso Primale: schema

↓ perché si muove nello spazio delle soluz. ammissibili del primale

$$(P)\quad \max c^T x \qquad Ax \leq b$$

$$(D)\quad \min y^T b \qquad y^T A = c^T \qquad y \geq 0$$

↓ non vuoto ↓ coppia asimmetrica

Sia B base iniziale e $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ soluzione di base primale ammissibile, ovvero un vertice del poliedro primale: in input

↳ Teorema pag 4

Tipica iterazione

$$(P_B): \begin{cases} A_B \rho \leq 0 \\ c^T \rho > 0 \end{cases} \qquad (D_B): \begin{cases} y_B^T A_B = c^T \\ y_B \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$ unica soluzione candidata a risolvere (D_B)

1) se $\bar{y}_B \geq 0$: $\bar{y}_B$ risolve (D_B) e quindi

(DR) : $\bar{x}$ è soluzione ottima per (P) e

$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \quad 0] = [c^T A_B^{-1} \quad 0]$ è soluzione ottima per (D) STOP

$$\bar{y}_i = \begin{cases} c^T (A_B^{-1})^i & i \in B \\ 0 & i \notin B \end{cases}$$

2) se $\bar{y}_B \neq 0$: $\exists\, h \in B$ tale che

$\bar{y}_h \overset{*}{=} c^T A_B^{-1} u_{B(h)} < 0$

$\rightarrow$ (colonna B(h)-esima di A_B^{-1})

Sia $\bar{\rho} = -A_B^{-1} u_{B(h)}$, si ha:

- $c^T \bar{\rho} = -c^T A_B^{-1} u_{B(h)} \overset{*}{=} -\bar{y}_h > 0$

  ovvero $\bar{\rho}$ è direzione di crescita

- $A_B \bar{\rho} = -u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \overset{*}{\leq} 0$ ← posizione indice h in B (B(h))

Conseguenze

2.1) se $\bar{x}$ è non degenere, ovvero $\bar{I} = B$:

$A_B \bar{\rho} = A_{\bar{I}} \bar{\rho} \overset{*}{\leq} 0$

ovvero $\bar{\rho}$ è una direzione ammissibile per $\bar{x}$
(e di crescita, come dim. prima)

2.2) se $\bar{x}$ è degenere, ovvero $B \subset \bar{I}$:

$A_B \bar{\rho} \leq 0 \not\Rightarrow A_{\bar{I}} \bar{\rho} \leq 0$

potrebbe esistere $i \in \bar{I} \setminus B$ tale che $A_i \bar{\rho} > 0$: in tal caso $\bar{\rho}$ non è una direzione ammissibile per $\bar{x}$.

↓

Sia nel caso 2.1 che nel caso 2.2, l'algoritmo calcola il **massimo passo di spostamento lungo** $\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(k)}$:

$$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \bar{\xi}$$

→ si cerca il max λ che mantenga l'ammissibilità (cioè t. che si resti nel poliedro)

- **se** $i \in B$: $A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \bar{\xi} \leq A_i \bar{x} = b_i$ (↓ $i \in B$)

  $A_i \bar{\xi} \leq 0$ (*)

  soddisfatto $\forall \lambda \geq 0$

- **se** $i \in N$:

  - **se** $A_i \bar{\xi} \leq 0$: (ripeto il ragionamento del caso $i \in B$)

    $A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \bar{\xi} \leq A_i \bar{x} \leq b_i$

    $\bar{x}$ è ammissibile

    $A_i \bar{\xi} \leq 0$

    soddisfatto $\forall \lambda \geq 0$

  - **se** $A_i \bar{\xi} > 0$:

    $A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \bar{\xi} \leq b_i$ se e solo se

    $$\lambda \leq \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}}$$

massimo passo di spostamento lungo $\bar{\xi}$:

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min \left\{ \dfrac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}} : i \in N,\ A_i \bar{\xi} > 0 \right\} & (\text{se } \exists\, i \in N \text{ tale che } A_i \bar{\xi} > 0) \\ +\infty \quad (\text{altrimenti}) \end{cases}$$

↓ ci si può spostare quanto si vuole

Osservazioni:

1) se $A_i \bar{\eta} \leq 0 \ \forall i \in N$, ovvero $A_N \bar{\eta} \leq 0$:

$\bar{\lambda} = +\infty$, ovvero (P) è superiormente illimitato e di conseguenza (D) è vuoto → paf. 7 lez. 4, 5, 6

l'algoritmo si ferma

2) se $A_N \bar{\eta} \not\leq 0$: $\bar{\lambda} \geq 0$ e finito ($\min\{\dots\}$).

2.1) se $\bar{\lambda} > 0$, allora $\bar{\eta}$ è una direzione ammissibile per $\bar{x}$: l'algoritmo si sposta in $\bar{x}(\bar{\lambda}) = \bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\eta}$ (nuovo vertice) e cambia base:

$\bar{\lambda}$ è per def. il max passo di spostamento lungo $\bar{\eta}$

lo dimostreremo

$$B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$$

h: indice che aveva fatto fallire il test perché $\bar{y}_h < 0$

k: indice diventato attivo dopo lo spostamento

M: poiché h non è + attivo dopo lo spostamento: $A_B \zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\alpha(h) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, cioè $A_{h\eta} \zeta < 0$, cioè ci allontaniamo.

2.2) se $\bar{\lambda} = 0$, allora $\bar{\eta}$ non è una direzione ammissibile per $\bar{x}$

→ nella def. di direz. ammissibile si chiede $\bar{\lambda} > 0$

oss: solo se $\bar{x}$ è degenere: $\exists\, k \in I \setminus B$ tale che $A_k \bar{\eta} > 0$, e $\bar{\lambda} = \frac{0}{A_k \bar{\eta}} = 0$

→ si è visto al p.to 2.2 a pag 13

perché l'indice è attivo

l'algoritmo non cambia vertice ($\bar{\lambda} = 0$) ma cambia base: $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$

cambio di base degenere

→ quello che aveva fatto fallire il test

Formalmente:

Algoritmo Simplesso Primale $(A, b, c, B, \bar{x}, \bar{y}, \text{stato})$

input: A, b, c, B (base di partenza) — output: $\bar{x}, \bar{y}$, stato (parametro che indica l'esito: ottimo finito, sup. illimitato)

begin

stato = " "; (stringa vuota)

repeat

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$; $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$; $\bar{y}_N^T = 0$;

if $\bar{y}_B \geq 0$ **then** stato = "ottimo"

else **begin**

$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\}$;

$\bar{\rho} = -A_B^{-1} u_{B(h)}$; → direzione di crescita

if $A_N \bar{\rho} \leq 0$ **then** stato = "Pieillimitato"

Regola anticiclo di Bland

else

begin

$\bar{\lambda} = \min\left\{ \dfrac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\rho}} : i \in N, A_i \bar{\rho} > 0 \right\}$ = $\bar{\lambda}_i$

$K = \text{argmin}\{\bar{\lambda}_i : i \in N, A_i \bar{\rho} > 0\}$;

restituisce il minimo tra gli indici i per cui esiste $\bar{\lambda}_i$

$B = B \setminus \{h\} \cup \{K\}$

end

end

until stato ≠ " "

end

La regola anticiclo di Bland garantisce (si può dim.) che ogni base venga visitata al più una volta. Poiché il numero delle basi è finito, ciò assicura la terminazione dell'algoritmo.

(quando ci si un cambio di base degenere ci si il rischio che l'algoritmo non finisca, questa regola toglie il problema)

Teorema: Sia $k \in N$ tale che $\bar{\lambda} = \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\eta}}$.

Allora:

1) $B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ è una base

2) $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\eta}$ è una soluzione di base primale ammissibile, ovvero un vertice, rispetto a B'

Dim:

1) • i vettori A_i, $i \in B \setminus \{h\}$, sono linearmente indipendenti in quanto B è una base.

• A_k è linearmente indipendente rispetto a A_i, $i \in B \setminus \{h\}$:

– poiché $A_i \bar{\eta} = 0 \ \forall i \in B \setminus \{h\}$ (→ $A_B \bar{\eta} = -u_{B(h)}$ → $B(h)$ (?)), $\bar{\eta}$ è ortogonale al sottospazio generato dai vettori A_i, $i \in B \setminus \{h\}$.

No, pensaci, B è un insieme di indici di riga, $B(h)$ è il numero di riga che corrisponde a A_h in A_B e basta

- poiché $A_k \bar{\xi} > 0$ ($k \in N$, $A_k \bar{\xi} > 0$ in quanto per ipotesi $\bar{\lambda} = \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\xi}}$), A_k non appartiene a tale sottospazio -

Segue che A_k non è esprimibile come combinazione lineare dei vettori A_i, $i \in B \setminus \{h\}$.

$B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ è quindi una base, e $A_{B'}$ è una matrice di base.

2) Dimostriamo che

$$A_{B'}(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = b_{B'}$$

ovvero che $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ è una soluzione di base primale rispetto a B' ($\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi} = A_{B'}^{-1} b_{B'}$)

- $A_k(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = A_k\bar{x} + \bar{\lambda} A_k \bar{\xi} =$

$= A_k\bar{x} + \left(\frac{b_k - A_k\bar{x}}{A_k\bar{\xi}}\right) A_k\bar{\xi} = b_k$ OK

- $i \in B \setminus \{h\}$:

$A_i(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = A_i\bar{x} + \bar{\lambda} A_i\bar{\xi} = A_i\bar{x} = b_i$ OK

($\bar{x} = A_B^{-1} b_B$; $A_i\bar{\xi} = 0$ → $A_B\bar{\xi} = -u_{B(h)}$)

Poiché $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\ell}$ è una soluzione ammissibile per (P) (per definizione di $\bar{\lambda}$) segue che $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\ell}$ è un vertice del poliedro primale avente B' come base. □

(*) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $\quad \Delta = ad - bc$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} ad-bc & ab-ab \\ cd-cd & ad-bc \end{pmatrix} = I$$

LEZIONE 9 — 14 ottobre 2021

Esercitazione P.L.

M. G. Scutellà
Università di Pisa

1) Primale (algebrico)

$$\max \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned}
1 \quad & -x_2 \le 0 \\
2 \quad & -x_1 - x_2 \le 1 \\
3 \quad & -x_1 \le 1 \\
4 \quad & -x_1 + x_2 \le 5 \\
5 \quad & x_2 \le 4
\end{aligned}$$

e data $B = \{2, 3\}$

schema di svolgimento:
- base
- matrice di base e inverso
- coppia di sol. di base
- indice uscente (h)
- dir. crescita ($\bar{\xi}$)
- passo di spost. ($\bar{\lambda}$)
- indice entrante (k)

giustif. le risposte

Discutere degenerazione primale e duale

$$\Delta = -(-1)(-1) = -1$$

$$-1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

1) $B = \{2, 3\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \to A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N^T = 0$$

$\bar{y}_1 = -2$ non ≥ 0

$$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sol. di base duale non ammissibile non degenere

$$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 2 \to B(h) = 1$$

$$\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sol. di base primale ammissibile degenere: $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$

$$J = \{i \in N : A_i \bar{\xi} > 0\} = \{4, 5\}$$

$$\bar{\lambda}_i = \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\rho}} \qquad \bar{\lambda}_4 = \bar{\lambda}_5 = 4$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\bar{\lambda}_i : i \in J\} = \min\{4, 4\} = 4$$

$$K = \min\{i \in J : \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_i\} = \min\{4, 5\} = 4$$

regola anticiclo di Bland

2) $B = \{2, 3\} \setminus \{2\}^h \cup \{4\}^k = \{3, 4\}$ $\quad I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sol. di base degenere

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N^T = 0$$

sol. di base duale non ammissibile non degenere

$$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad h = 3 \qquad B(h) = 1$$

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_N \bar{\rho} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$J = \{5\} \qquad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_5 = 0$$

cambio di base degenere

3) $B = \{3, 4\} \setminus \{3\} \cup \{5\} = \{4, 5\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

degenere

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{y}_N^T = 0$$

$$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

sol. di base duale non ammissibile non degenere

$k = 4 \qquad B(k) = 1$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_N \bar{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{STOP}$$

Poiché $A_N \bar{\xi} \leq 0$, il problema primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il suo duale è vuoto.

Condizioni degli scarti complementari

Maria Grazia Scutellà

Corso di Laurea in Matematica, Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 2.2.4)

$$(P)\ \max c^T x \qquad (D)\ \min y^T b$$
$$Ax \leq b \qquad y^T A = c^T$$
$$y \geq 0$$

↳ coppia asimmetrica ↲

Per i teoremi debole e forte della dualità: $\bar{x}$ soluzione ammissibile per (P) e $\bar{y}$ soluzione ammissibile per (D) sono ottime se e solo se $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$.

Osserviamo che la sequenza di equivalenze:

$$\boxed{c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \iff \bar{y}^T A \bar{x} = \bar{y}^T b \iff \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0}$$

vale a prescindere dell'ammissibilità di $\bar{x}$ e $\bar{y}$, purché $\bar{y}^T A = c^T$

Definizione: $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{y}^t A = c^T$ è una coppia di soluzioni complementari se $\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0$

Segue:

Teorema (degli scarti complementari): $\bar{x}$ soluzione ammissibile per (P) e $\bar{y}$ soluzione ammissibile per (D) sono ottime se e solo se

$$\boxed{\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0}$$

condizioni degli scarti complementari (S.C.)

Poiché $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0$,

se $\bar{x}$ ammissibile per (P) e $\bar{y}$ ammissibile per (D), le condizioni degli S.C. possono essere espresse equivalentemente:

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

≥ 0 → poiché sono ammissibili; ≥ 0

Questa è una condizione sufficiente, infatti la somma di termini nulli è zero. È anche necessaria perche l'ammissibilità implica che yi >=0, Ai $\bar{x}$<=0 per ogni i

Ovvero:

- $\bar{y}_i > 0 \Rightarrow A_i\bar{x} = b_i$ ovvero l'i.mo vincolo deve essere attivo in $\bar{x}$ ($i \in I(\bar{x})$)
- $A_i\bar{x} < b_i \Rightarrow \bar{y}_i = 0$

$i = 1, \dots, m$

Proposizione: Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P). Allora $\bar{x}$ è ottima se e solo se $\exists \bar{y}$, soluzione ammissibile per (D), tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ è una coppia di soluzioni complementari.

Dim:

($\Leftarrow$) Dal Teorema degli scarti complementari

($\Rightarrow$) Supponiamo che $\bar{x}$ sia ottima per (P). Allora (D) ha ottima finita, e sia $\bar{y}$ una sua soluzione ottima. Per il Teorema forte della dualità, $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$. Poiché $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$, segue che $(\bar{x}, \bar{y})$ è una coppia di soluzioni complementari. □

OSS: se $\bar{x}$ ammissibile per (P) e $\bar{y}$ per (D), le condizioni degli s.c. implicano

$$\bar{y}_i = 0 \quad \forall i \notin I(\bar{x}) = I$$

Poiché $\bar{y}^T A = c^T$, ciò implica $\bar{y}_I^T A_I = c^T$, con $\bar{y}_I \geq 0$. Ovvero $\bar{y}_I$ deve essere soluzione di (DR): $\begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$

Ritroviamo: $\bar{x}$ è ottima per (P) se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}_I$ di (DR), come già dimostrato.

Proposizione: Sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per (D). $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste $\bar{x}$, soluzione ammissibile per (P), tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ è una coppia di soluzioni complementari.

No dim

Proprietà: Data una base B e una matrice di base A_B, le soluzioni di base

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B, \quad \bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ \bar{y}_N^T] = [c^T A_B^{-1} \ 0]$$

soddisfano le condizioni degli s.c.

Dim:

$$\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = [c^T A_B^{-1} \ 0] \begin{bmatrix} b_B - A_B \bar{x} \\ b_N - A_N \bar{x} \end{bmatrix} = 0$$

($b_B - A_B \bar{x} = 0$ perché gli indici sono attivi)

□

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e $\bar{y}^T = [c^T A_B^{-1} \ 0]$ vengono pertanto chiamate soluzioni di base complementari

Algoritmo del Simplesso Duale

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 2.3.2)

$$(P)\ \max c^T x \quad Ax \leq b \qquad (D)\ \min y^T b \quad y^T A = c^T \quad y \geq 0$$

Si tratta dell'algoritmo del Simplesso Primale applicato a (D), riscritto in forma primale.

Le operazioni fanno riferimento al poliedro primale

Schema dell'algoritmo

Input: B base duale ammissibile, A_B

Tipica iterazione:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$$

$$\bar{y}^T = [\, y_B^T \ \ 0 \,], \text{ dove } y_B^T = c^T A_B^{-1} \geq 0$$

(vertice del poliedro duale, ovvero soluzione di base duale ammissibile)

se $A_x \bar{x} \leq b_x$, $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile: STOP

- $\bar{x}$ soluzione ottima di (P)
- $\bar{y}$ soluzione ottima di (D)

altrimenti $\exists\, k \in N$ tale che $A_k \bar{x} > b_k$.

L'algoritmo determina una **direzione di decrescita**:

$$d = \begin{bmatrix} -\eta_B \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{posizione indici in base} \\ \leftarrow\ i = k \\ \leftarrow\ i \in N,\ i \neq k \end{matrix}$$

dove $\boxed{\eta_B = A_k A_B^{-1}}$

Proprietà: d è una direzione di decrescita per $\bar{y}$.

Dim.:

Consideriamo

$$\bar{y}(\theta) = \bar{y} + \theta d = \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -\eta_B \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \leftarrow k = \begin{bmatrix} \bar{y}_B - \theta \eta_B \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(D) $\min y^t b$

$$\bar{y}^T(\theta) b = [\bar{y}_B - \theta \eta_B]^T b_B + \theta b_k = \bar{y}_B^T b_B +$$

$$+ \theta (b_k - \eta_B^T b_B) = \bar{y}^T b + \theta (b_k - A_k A_B^{-1} b_B) =$$

$\bar{y}^T b$: perché le componenti in N sono nulle; $A_B^{-1} b_B = \bar{x}$

$$= \bar{y}^T b + \theta (b_k - A_k \bar{x}) \leq \bar{y}^T b \quad (\forall \theta > 0).$$

$b_k - A_k \bar{x} < 0$ per come si è scelto k

□

Calcola quindi il **massimo passo di spostamento lungo d:**

1) $\bar{y}^T(\theta)A = \left[\bar{y}_B - \theta\eta_B\right]^T A_B + \theta A_K =$

$= \bar{y}_B^T A_B - \theta\eta_B^T A_B + \theta A_K = \bar{y}_B^T A_B - \theta A_K A_B^{-1} A_B +$

$+ \theta A_K = \bar{y}_B^T A_B - \theta A_K + \theta A_K = c^T \quad (\forall\theta)$

$\downarrow$

$\bar{y}_B^t = c^t A_B^{-1}$

2) $\bar{y}(\theta) \geq 0 : \begin{cases} \theta \geq 0 \\ \bar{y}_B - \theta\eta_B \geq 0 \end{cases}$ → in posizione K

Osservazioni:

1) **se $\eta_B \leq 0$** : $\bar{y}_B - \theta\eta_B \geq 0 \quad \forall\theta \geq 0$,

ovvero d è una direzione di decrescita illimitata

STOP: (D) è inferiormente illimitato e quindi (P) è vuoto.

2) **altrimenti** : $\exists\, j \in B$ tale che $\eta_j > 0$

$i \in B$ tale che $\eta_i \leq 0$: $\bar{y}_i - \theta\eta_i \geq 0 \quad \forall\theta \geq 0$

$i \in B$ tale che $\eta_i > 0$: $\bar{y}_i - \theta\eta_i \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \dfrac{\bar{y}_i}{\eta_i}$

massimo passo di spostamento lungo d:

$$\bar{\theta} = \min\left\{\frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B,\ \eta_i > 0\right\}$$

criterio del minimo rapporto

Formalmente:

Algoritmo Simplesso Duale ($\underbrace{A, b, c, B}_{\text{input}}, \overbrace{\bar{x}, \bar{y}, \text{stato}}^{\text{output}}$)

begin

stato = " ";

repeat

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$; $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$; $\bar{y}_N^T = 0$;

if $A_N \bar{x} \leq b_N$ **then** stato = "ottimo"

else

begin

$K = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\}$;

$\eta_B = A_K A_B^{-1}$;

if $\eta_B \leq 0$ **then** stato = "Pvuoto"

else

begin

$h = \text{argmin}\left\{\frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B, \eta_i > 0\right\}$;

$B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$

end

end

until stato ≠ " "

end

Regole anticiclo di Bland

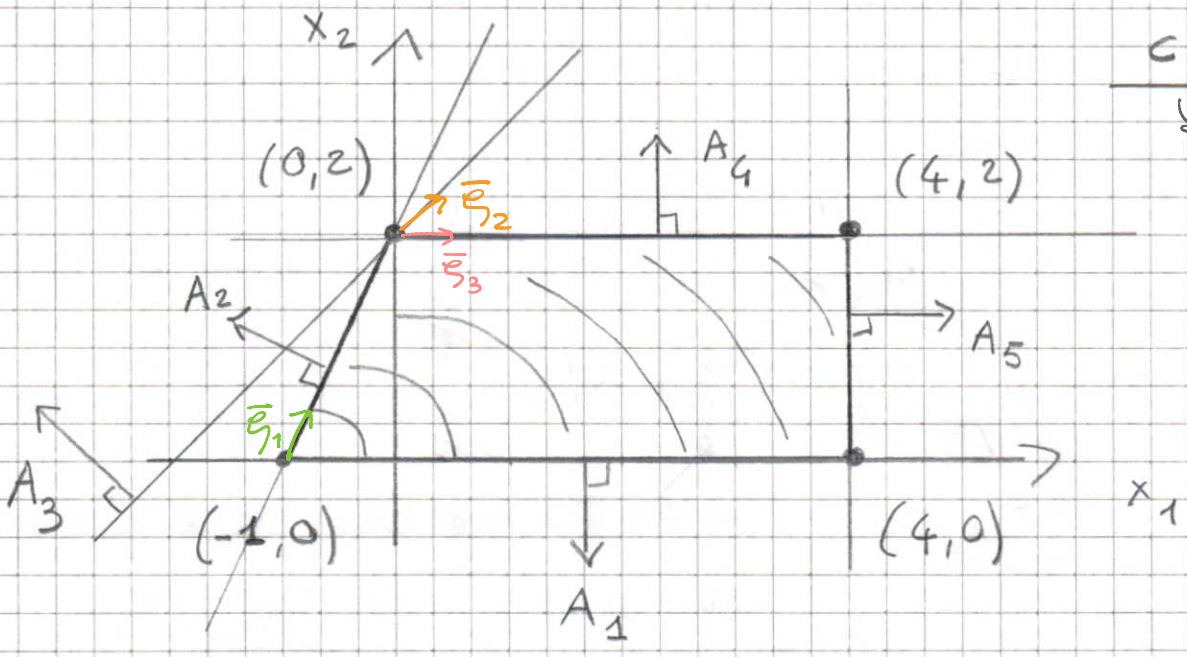
LEZIONI 10, 11, 12 — 19, 20, 21 ottobre 2021 — M. Scutellà

Corso "Ricerca Operativa"

Università di Pisa

Esercitazione PL

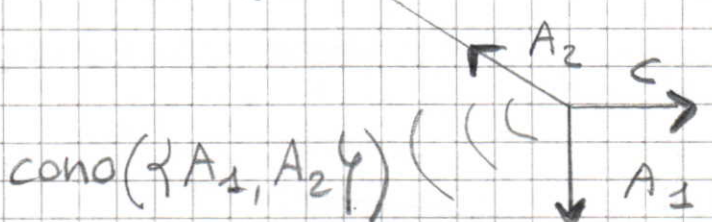
(1) Simplesso Primale (geometrico)



it 1) $B = \{1, 2\}$, $\bar{x}_1 = (-1, 0)$ $(= A_B^{-1} b_B)$ → l'algoritmo inizia da qui

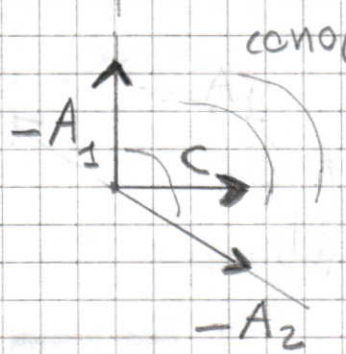
soluzione di base primale ammissibile non degenere

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} \quad \longleftrightarrow \quad \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 = c^T$$



$c \notin \text{cono}(\{A_1, A_2\})$

ma:



combinazioni coniche (coefficienti non negativi)

$c \in \text{cono}(\{-A_1, -A_2\})$

$\Rightarrow \bar{y}_1 < 0, \ \bar{y}_2 < 0$

$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ 0]$: soluzione di base duale non ammissibile non degenere

$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 1$

l'algoritmo tende ad allontanarsi dal vincolo h-esimo (qui h=1)

$\bar{\rho}_1 = -A_B^{-1} \underbrace{u_{B(1)}}_{\text{[1 0]}}$ ovvero $\begin{cases} A_1 \bar{\rho}_1 = -1 \\ A_2 \bar{\rho}_2 = 0 \end{cases}$ ↳ sono ortogonali

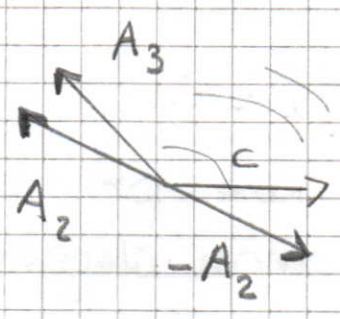
$\bar{\rho}_1$ in figura.

$A_i \bar{\rho}_1 > 0$ perché l'angolo tra i due è $< 90°$

$K = \min\{3, 4\} = 3$ regola anticiclo di Bland

it 2) $B = \{1,2\} \setminus \{1\} \cup \{3\} = \{2,3\}$ (1 = h, 3 = K)

$\bar{x}_2 = (0,2)$: soluzione di base primale ammissibile degenere



$(\bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3 = c^t)$

$c \in \text{cono}(\{-A_2, A_3\})$:

$\bar{y}_2 < 0, \ \bar{y}_3 > 0$

$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ 0]$: soluzione di base duale non ammissibile non degenere

$h = 2$

$\bar{\rho}_2 = -A_B^{-1} \underbrace{u_{B(2)}}_{\text{[1 0]}}$ ovvero $\begin{cases} A_2 \bar{\rho}_2 = -1 \\ A_3 \bar{\rho}_2 = 0 \end{cases}$

si esce dal poliedro ↑

$\bar{\rho}_2$ in figura : direzione di crescita non ammissibile per $\bar{x}_2$, $\bar{\lambda} = 0$ cambio di base degenere

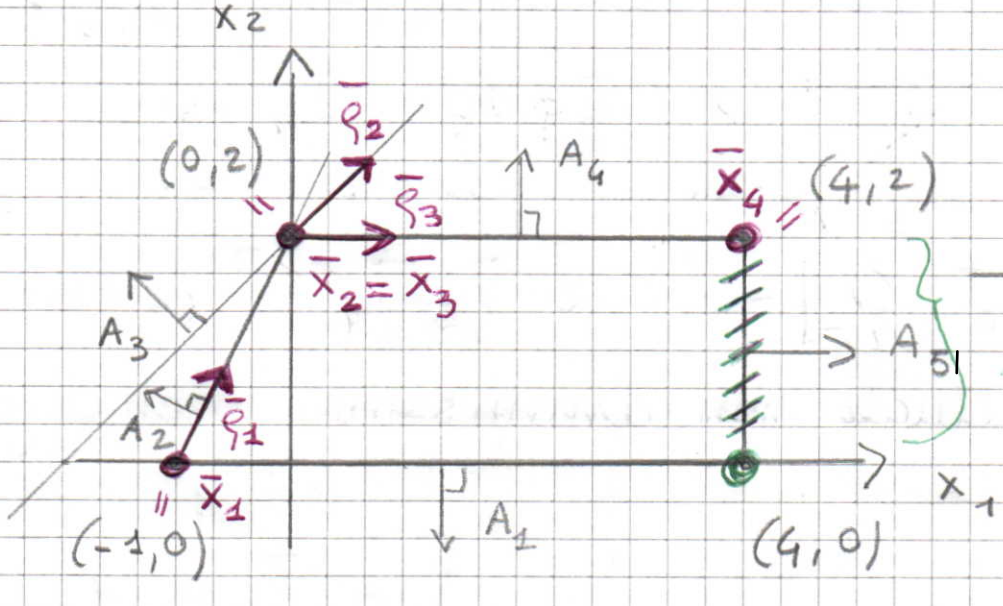
$K = 4$ attivo ma non in base

it 3) $B = \{2,3\} \setminus \{2\} \cup \{4\} = \{3,4\}$

$\quad\quad\quad

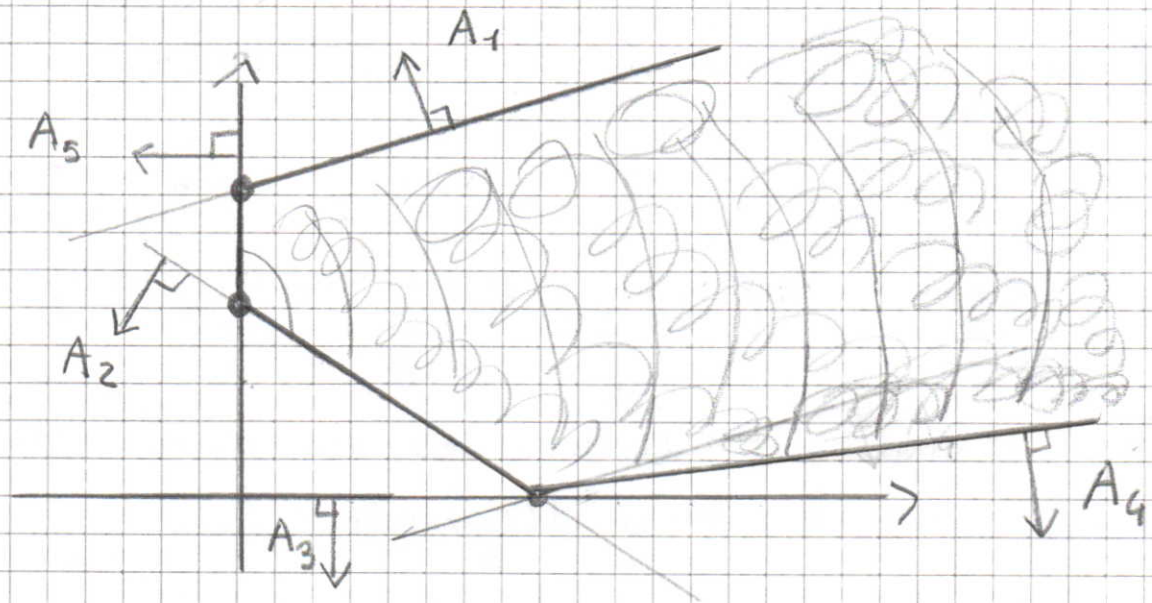
STOP: $\bar{x}_4$ soluzione ottima primale,

$\bar{y}^T = [0\ 0\ 0\ 0\ \bar{y}_5]$ soluzione ottima duale



NB. 2 vertici sono ottimi (4,2) e (4,0)

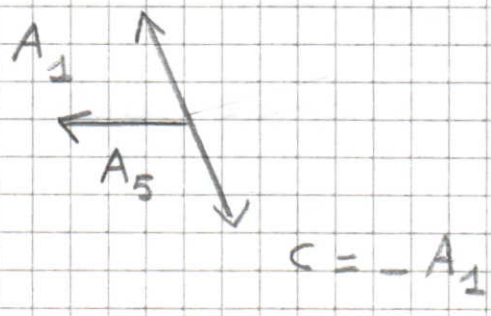
② Simplesso Primale (geometrico)



$c = -A_1$

$B = \{1, 5\}$

it 1) $B = \{1, 5\}$ $\bar{x}_1$ in figura: soluzione di base primale ammissibile non degenere



$c = -A_1$:

$\bar{y}_1 = -1$, $\bar{y}_5 = 0$

$y^T = [-1\ 0\ 0\ 0\ 0]$: soluzione di base duale non ammissibile degenere

$h = 1$

$\bar{\xi}_1 = -A_B^{-1} u_{B(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ovvero $\begin{cases} A_1 \bar{\xi}_1 = -1 \\ A_5 \bar{\xi}_1 = 0 \end{cases}$

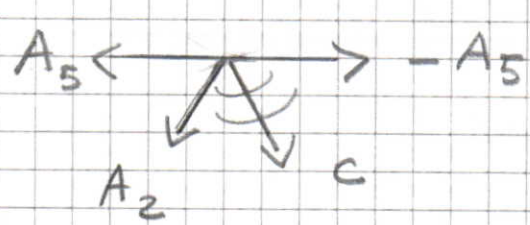
$\bar{\xi}_1$ in figura

$K = 2$

it 2) $B = \{1, 5\} - \{1\} \cup \{2\} = \{2, 5\}$

h K

$\bar{x}_2$ in figura: soluzione di base primale ammissibile non degenere



$c \in \text{cono}(\{A_2, -A_5\})$:

$\bar{y}_2 > 0$, $\bar{y}_5 < 0$

$\bar{y}^T = [0\ \bar{y}_2\ 0\ 0\ \bar{y}_5]$: soluzione di base duale non ammissibile non degenere

$h = 5$

$\bar{\rho}_2 = A_B^{-1} u_{B(5)}$ ovvero $\begin{cases} A_2 \bar{\rho}_2 = 0 \\ A_5 \bar{\rho}_2 = -1 \end{cases}$ in figura

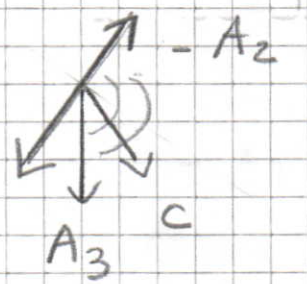
$u_{B(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$K = \min\{3, 4\} = 3$ regola anticiclo di Bland

it 3) $B = \{2, 5\} \setminus \{5\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$

(h = 5, K = 3)

$\bar{x}_3$ in figura : soluzione di base primale ammissibile degenere



$c \in \text{cono}(\{-A_2, A_3\})$:

$\bar{y}_2 < 0$, $\bar{y}_3 > 0$ $\quad h = 2$

$\bar{y}^T = [0 \ \bar{y}_2 \ \bar{y}_3 \ 0 \ 0]$ soluzione di base duale non ammissibile non degenere

$\bar{\rho}_3 = -A_B^{-1} u_{B(2)}$ ovvero $\begin{cases} A_2 \bar{\rho}_3 = -1 \\ A_3 \bar{\rho}_3 = 0 \end{cases}$

$u_{B(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

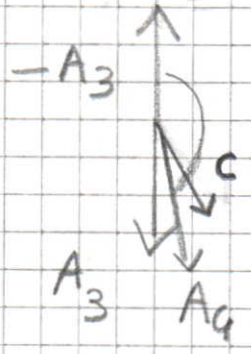
$\bar{\rho}_3$ in figura : direzione di crescita non ammissibile per $\bar{x}_3$, $\bar{\lambda} = 0$ <u>cambio di base degenere</u>

$K = 4$ attivo ma non in base

it 4) $B = \{2,3\} \rightarrow \{2\} \cup \{4\} = \{3,4\}$

h $\quad$ k

$\bar{x}_4 = \bar{x}_3$



$c \in \text{cono}(\{-A_3, A_4\})$:

$\bar{y}_3 < 0$, $\bar{y}_4 > 0$

$\bar{y}^T = [0 \; 0 \; \bar{y}_3 \; \bar{y}_4 \; 0]$: soluzione di base duale non ammissibile non degenere

$h = 3$

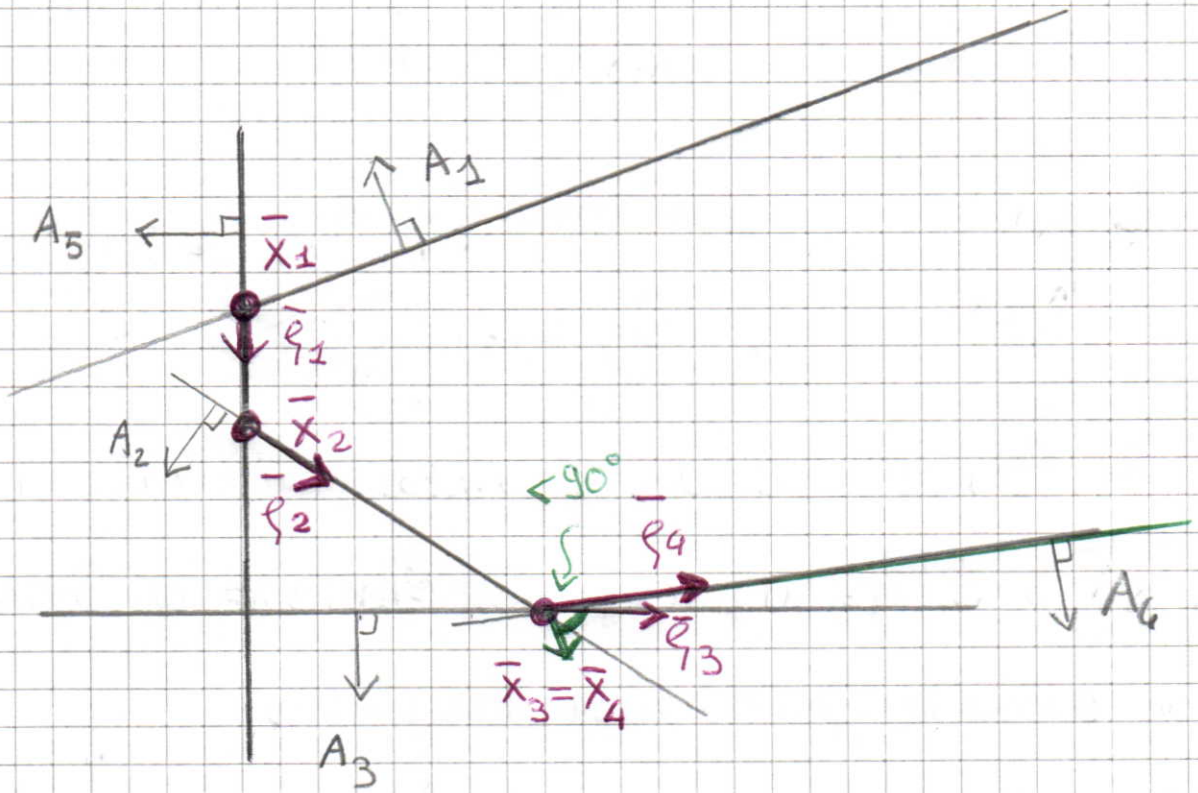
$\bar{\rho}_4 = -A_B^{-1} u_{B(3)}$ $\quad$ ovvero $\quad \begin{cases} A_3 \bar{\rho}_4 = -1 \\ A_4 \bar{\rho}_4 = 0 \end{cases}$

$[d]$

$\bar{\rho}_4$ in figura: direzione di crescita illimitata $(\bar{\lambda} = +\infty)$

STOP: primale superiormente illimitato

duale vuoto



$\bar{\rho}_4$ è direzione di recessione per il poliedro primale

$c^T \bar{\rho}_4 > 0$: direzione di crescita

Esercitazione condizioni S.C.

M.G. Scutellà
Corso "Ricerca Operativa"
Università di Pisa

1

$$(P)\ \max\ x_1 + 2x_2 \qquad (D)\ \min\ 5y_1 + 4y_2 + 3y_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 &\le 4 \\ x_2 &\le 3 \\ -x_1 &\le 0 \\ -x_2 &\le 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 + y_2 - y_4 &= 1 \\ y_1 + y_3 - y_5 &= 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\bar{x} = (2,3)$ soluzione ammissibile per (P)

è ottima?

Condizioni degli scarti complementari:

$\bar{x}_1 < 4 \Rightarrow y_2 = 0 \quad (A_2\bar{x} = 2 < b_2 = 4)$

$-\bar{x}_1 < 0 \Rightarrow y_4 = 0$

$-\bar{x}_2 < 0 \Rightarrow y_5 = 0$

$\left(\begin{array}{l} I(\bar{x}) = \{1,3\} \\ \overline{I}(\bar{x}) = \{2,4,5\} \end{array}\right)$

Ovvero: una soluzione duale in S.C. con $\bar{x}$ deve avere forma $(y_1, 0, y_3, 0, 0)$.

$\bar{x}$ è ottima per (P) se e solo se esiste una soluzione duale ammissibile della forma $(y_1, 0, y_3, 0, 0)$, ovvero:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_3 = 2 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases}$$ Duale Ristretto (DR)

se e solo se (DR) ha soluzione.

(DR) ha un'unica soluzione: $\bar{y}_1 = \bar{y}_3 = 1$

Quindi $\bar{x}$ è ottima per (P), e $\bar{y} = (1, 0, 1, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D).

↳ lo sappiamo grazie alla teoria sugli scarti complementari

Se $c^T = [3 \quad -1]$:

$$(DR) \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_1 + y_3 = -1 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases}$$ non ha soluzione

Quindi $\bar{x}$ non è soluzione ottima per (P).

② (P) $\max -2x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} -x_2 &\leq 0 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 3 \end{aligned}$$

(D) $\min \; 2y_2 + y_3 + 4y_4 + 3y_5$

$$\begin{aligned} -2y_2 - y_3 + y_4 + y_5 &= -2 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &= -1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilizzando le condizioni degli s.c., verificare se $\bar{x} = (-1, 0)$ sia ottima per (P). In caso affermativo, determinare l'insieme di tutte le soluzioni duali

ottime.

$\bar{x} = (-1, 0)$ è ammissibile per (P).

$I = I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$

Una soluzione duale in s.c. con $\bar{x}$ deve avere forma $(y_1, y_2, y_3, 0, 0)$.

$\bar{x}$ è ottima per (P) se e solo se esiste una soluzione duale ammissibile della forma $(y_1, y_2, y_3, 0, 0)$; ovvero se e solo se (DR) ha soluzione:

$$(DR): \begin{cases} -2y_2 - y_3 = -2 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 = -1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Posto $y_3 = \alpha$:

$y_2 = \frac{2-\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ (dalla prima equazione)

$y_1 = 1 + (1 - \frac{\alpha}{2}) + 2\alpha = 2 + \frac{3}{2}\alpha$ (dalla seconda equazione)

Il sistema di equazioni ammette quindi infinite soluzioni della forma $(2 + \frac{3}{2}\alpha, 1 - \frac{\alpha}{2}, \alpha)$:

$y_2 = 2 + \frac{3}{2}\alpha \geq 0 \iff \alpha \geq -\frac{4}{3}$

$y_1 = 1 - \frac{\alpha}{2} \geq 0 \iff \alpha \leq 2$

$y_3 = \alpha \geq 0$

Quindi (DR) ammette infinite soluzioni:

$$\left(2+\frac{3}{2}\alpha,\ 1-\frac{\alpha}{2},\ \alpha\right) \quad \forall \alpha \in [0,2]$$

Segue che (D) ha infinite soluzioni ottime:

$$\left\{\left(2+\frac{3}{2}\alpha,\ 1-\frac{\alpha}{2},\ \alpha,\ 0,\ 0\right) : 0 \le \alpha \le 2\right\}.$$

Tale insieme costituisce l'insieme di tutte e solo le soluzioni ottime di (D).

3

(D) $\min\ 2y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4$

si parte dal duale

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 - y_4 &= 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Utilizzando le condizioni degli s.c., verificare se $\bar{y} = (0,0,1,0)$ sia ottimo. In caso affermativo si individuino gli insiemi di tutte le soluzioni ottime, sia primali che duali.

$\bar{y} = (0,0,1,0)$ è ammissibile per (D)

$\bar{y}$ è ottimo se e solo se esiste $\bar{x}$ ammissibile per (P) tale che $\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1,\dots,4$

$$(P) \quad \max \; x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$-x_2 \leq 1$$

il 3° vincolo deve essere attivo

$\bar{y}_3 > 0 \Rightarrow b_3 - A_3 \bar{x} = 0$ ovvero $x_1 + 2x_2 = 4$

in qualsiasi soluzione primale complementare a $\bar{y}$.

Posto $x_2 = \alpha$, l'equazione ha infinite soluzioni della forma $(4 - 2\alpha, \alpha)$. Affinché $(4-2\alpha, \alpha)$ sia ammissibile per (P):

$$4 - 2\alpha + \alpha = 4 - \alpha \leq 2 \Leftrightarrow \alpha \geq 2$$
$$4 - 2\alpha - \alpha = 4 - 3\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$
$$-\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq -1$$

ovvero $\forall \alpha \geq 2$.

Quindi:

1) $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ è ottima per (D)
2) $\forall (4 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \geq 2$ sono tutte e sole le soluzioni ottime di (P).

Esistono altre soluzioni ottime di (D)?

Fissiamo ad esempio $\alpha = 2$: $\bar{x} = (0, 2)$ è soluzione ottima di (P), $I = I(\bar{x}) = \{1, 3\}$

Una soluzione duale in s.c. con $\bar{x}$ deve quindi avere forma $(y_1, 0, y_3, 0)$.

Considero:

$$(DR): \begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ y_1 + 2y_3 = 2 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

(DR) ammette l'unica soluzione $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_3 = 1$.

Quindi $(0, 0, 1, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D).

Esercitazione Simplesso Duale

M. Gentile
Corso "Ricerca Operativa"
Università di Pisa

(1) Simplesso Duale (algebrico)

$$\max \; x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\leq 1 \end{aligned}$$

$B = \{2, 3\}$

it 1) $B = \{2, 3\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N^T = 0$$

$$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$K = \min \{ i \in N : A_i \bar{x} > b_i \} = \min \{1, 5\} = 1$

regola anticiclo di Bland

$$\pi_B^T = A_K A_B^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\bar{\theta} = \min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B,\ \eta_i > 0 \right\} = \min\{1, 1\} = 1$

$h = \min\{ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} \} = \min\{2, 3\} = 2$ regola anticiclo di Bland

$B = \{2, 3\} \setminus \overset{h}{\{2\}} \cup \overset{k}{\{1\}} = \{1, 3\}$

it 2) $B = \{1, 3\}$

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{y}_N^T = 0$

$\bar{y}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $K = 4$

$\eta_B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \end{bmatrix} \not\leq 0$ quindi non è una direzione di decresc. illimitata

$\bar{\theta} = \frac{\bar{y}_3}{\eta_3} = 0,\ h = 3$ cambio di base degenere

$B = \{1, 3\} \setminus \overset{h}{\{3\}} \cup \overset{k}{\{4\}} = \{1, 4\}$ (l'algoritmo non si sposta)

it 3) $B = \{1, 4\}$

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$

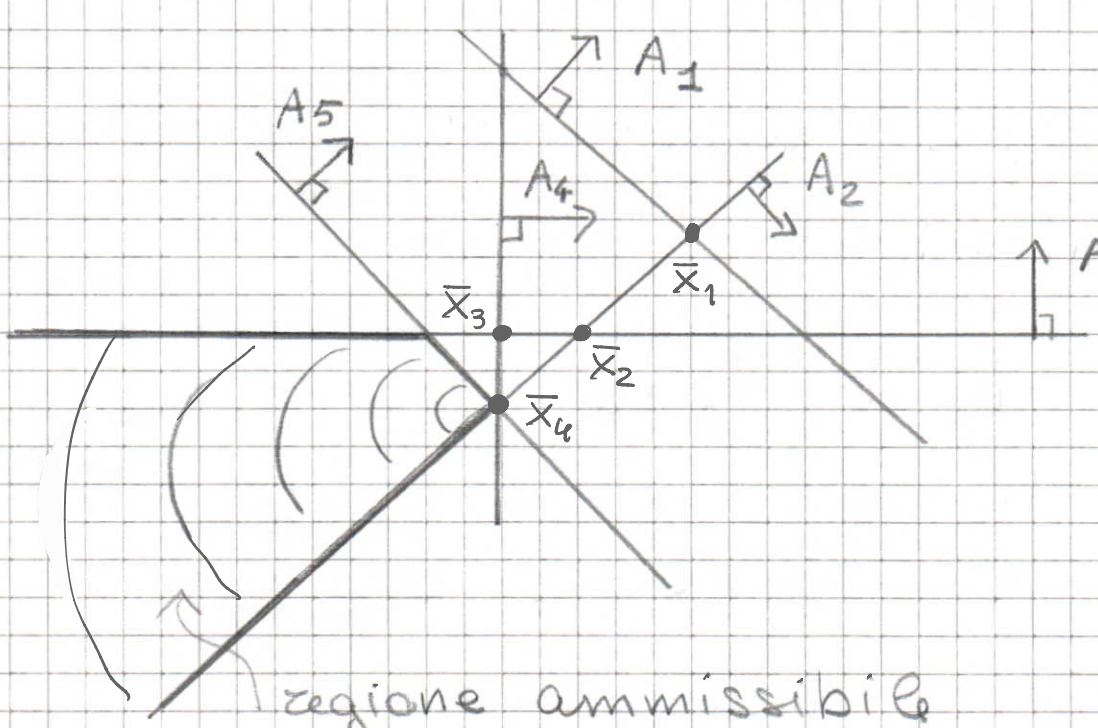
$\bar{y}^T = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ → è lo stesso dell'it. 2

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ STOP

$\bar{x} = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ è soluzione ottima primale

$\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0)$ è soluzione ottima duale.

② Simplesso Duale (geometrico)



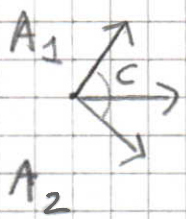
c
(c // A4)

B = {1, 2}

regione ammissibile primale (ottenuta intersecando i 5 semispazi chiusi associati ai vincoli)

it 1) $\bar{x}_1$ è l'intersezione del 1° e 2° vincolo : soluzione di base primale

non ammissibile non degenere
↳ fuori dalla regione ammissibile



$\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_2 > 0$

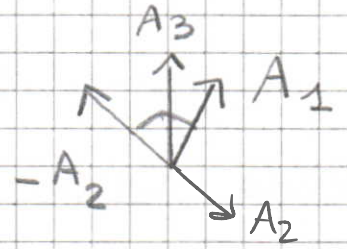
soluzione di base duale ammissibile
non degenere
↳ l'algoritmo mantiene l'ammissibilità

$c \in \text{cono}\{A_1, A_2\}$

$K = \min\{i \in N : A_i \bar{x}_1 > b_i\} = \min\{3, 6, 5\} = 3$

regola anticiclo di Beand

$\eta_B^T = A_K A_B^{-1} = A_3 A_B^{-1}$, ovvero $A_3 = \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2$



$A_3 \in \text{cono}(\{A_1, -A_2\})$:

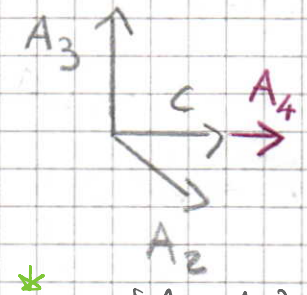
$\eta_1 > 0, \eta_2 < 0$ caso semplice

$h = 1$

$B = \{1,2\} \setminus \{\overset{h}{1}\} \cup \{\overset{K}{3}\} = \{2,3\}$

$\bar{\theta} = \min\left\{\frac{\bar{y}_i}{\eta_i}, i \in B, \eta_i > 0\right\} = \frac{\bar{y}_1}{\eta_1}$ (solo η_1 è > 0)

it 2) $\bar{x}_2$ è l'intersezione del 2° e 3° vincolo: soluzione di base primale non ammissibile non degenere



$\bar{y}_2 > 0, \bar{y}_3 > 0$

soluzione di base duale ammissibile non degenere

$c \in \text{cono}\{A_2, A_3\}$

$K = \min\{6, 5\} = 4$ regola anticiclo di Beand

η_B: $A_4 \in \text{cono}(\{A_2, A_3\})$:

$\eta_2 > 0, \eta_3 > 0$ → caso critico (perché non abbiamo gli strumenti per calcolare $\bar{\theta}$)

h ? $c^T = \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3$

$A_4 = \eta_2 A_2 + \eta_3 A_3$

poiché $c \parallel A_4$: $\bar{y}_2 = \alpha \eta_2$, $\bar{y}_3 = \alpha \eta_3$ per $\alpha > 0$

Quindi:

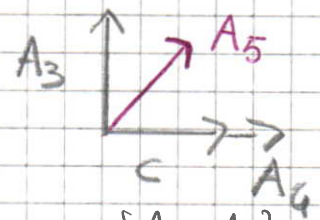
$$\bar{\theta} = \min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B, \eta_i > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{\bar{y}_2}{\eta_2}, \frac{\bar{y}_3}{\eta_3} \right\} =$$

$$= \frac{\bar{y}_2}{\eta_2} = \frac{\bar{y}_3}{\eta_3} = \alpha$$

di conseguenza $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland

$$B = \{2,3\} \setminus \{2\} \cup \{4\} = \{3,4\}$$

it 3) $\bar{x}_3$ è l'intersezione del 3° e 4° vincolo; soluzione di base primale non ammissibile non degenere



$c \in \text{cono}\{A_3, A_4\}$

$$\bar{y}_3 = 0 \quad , \quad \bar{y}_4 > 0$$

soluzione di base duale ammissibile degenere

$K = 5$

η_B: $A_5 \in \text{cono}(\{A_3, A_4\})$:

$\eta_3 > 0$, $\eta_4 > 0$ → caso critico

h? $\bar{\theta} = \min\left\{ \frac{\bar{y}_3}{\eta_3} = 0, \frac{\bar{y}_4}{\eta_4} \right\} = \min\{0, \frac{\bar{y}_4}{\eta_4}\} = 0$ (è > 0)

di conseguenza $h = 3$

cambio di base degenere

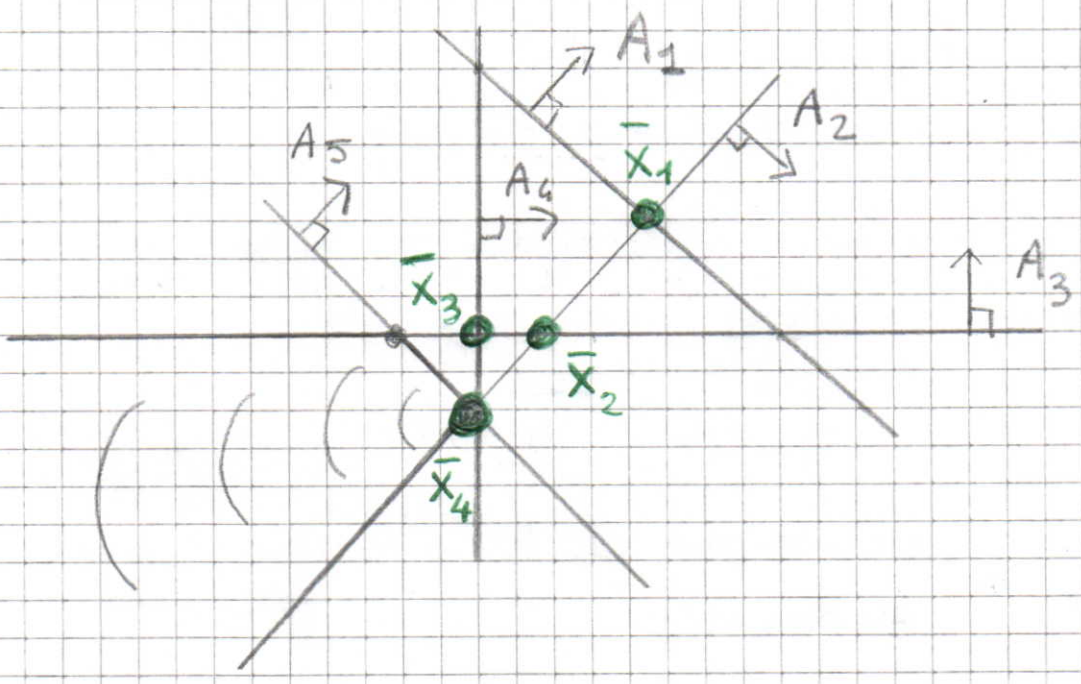
$$B = \{3,4\} \setminus \{3\} \cup \{5\} = \{4,5\}$$

it 4) $B = \{4, 5\}$ $\bar{x}_4$ è l'intersezione del 4° e 5° vincolo : soluzione di base primale ammissibile degenere

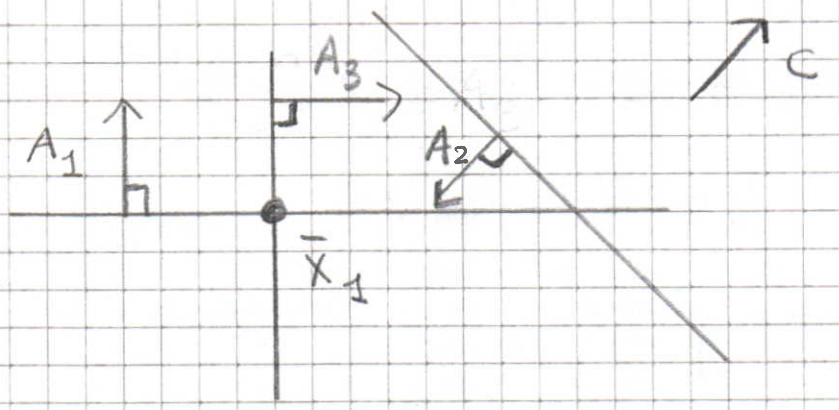
$\bar{y}$ non cambia $(\bar{\theta} = 0)$ è della forma $(0, 0, 0, y_4, 0)$

STOP: $\bar{x}_4$ soluzione ottima primale

$\bar{y}$ soluzione ottima duale

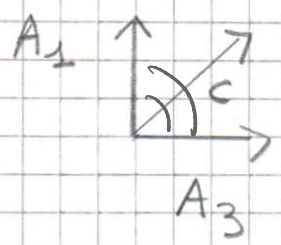


3



regione primale vuota

$B = \{1, 3\}$ $\bar{x}_1$ in figura

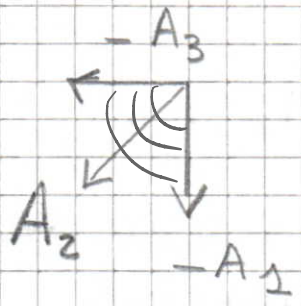


$\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_3 > 0$

$c \in \text{cono}\{A_1, A_3\}$

$K = 2$ unico vincolo violato

η_B :



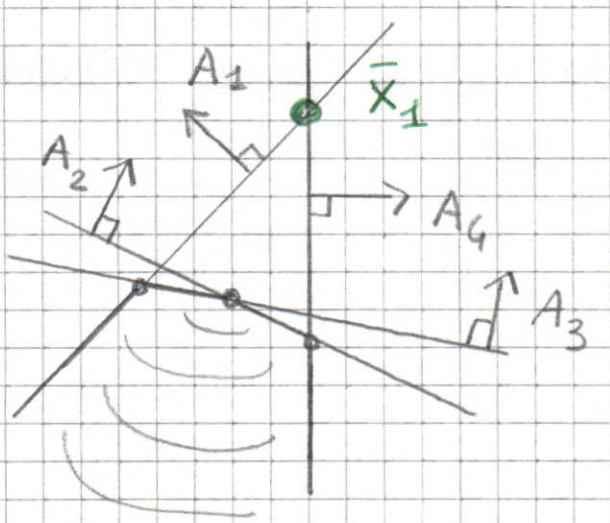
$A_2 \in \text{cono}(\{-A_1, -A_3\})$:

$\eta_1 < 0$, $\eta_3 < 0$,

ovvero $\eta_B \leq 0$

STOP : ie duale è inferiormente illimitato e di conseguenza ie primale è vuoto.

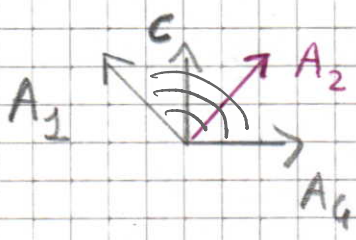
④



↑ c

$B = \{1, 4\}$

it 1) $B = \{1, 4\}$ $\bar{x}_1$ in figura



$\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_4 > 0$

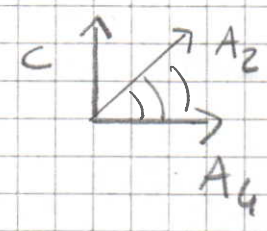
$c \in \text{cono}\{A_1, A_4\}$

$K = \min\{2, 3\} = 2$

η_B: $A_2 \in \text{cono}(\{A_1, A_4\})$:

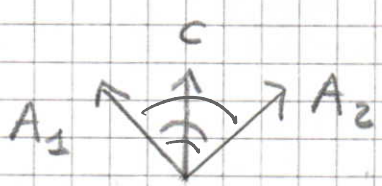
$\eta_1 > 0$, $\eta_4 > 0$ → caso critico

h? se $h = 1$, $B = \{2, 4\}$



$c \notin \text{cono}(\{A_2, A_4\})$:
soluzione di base duale non ammissibile

se $h = 4$, $B = \{1, 2\}$



$c \in \text{cono}(\{A_1, A_2\})$:
soluzione di base duale ammissibile

quindi $h = 4$.

LEZIONI 12, 13

21, 26 ottobre 2021

Problemi di flusso su rete

Maria Grazia Scutellà

Corso "Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica

Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 3)

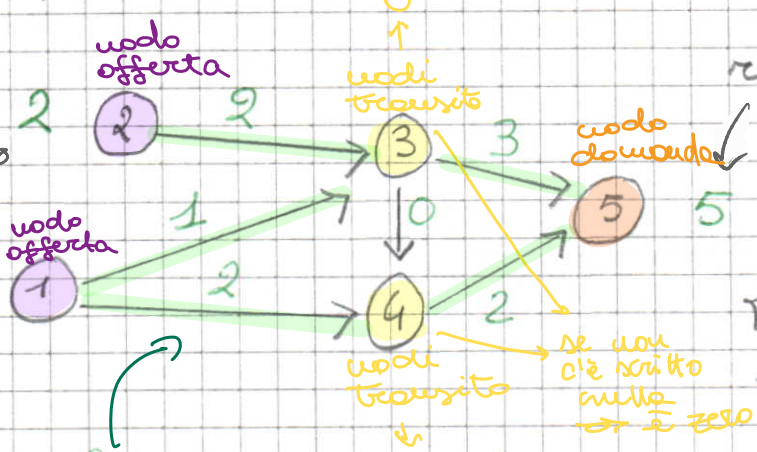
- **Problemi di ottimizzazione su reti di flusso**

Un esempio di flusso su rete

Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato
(N: insieme dei nodi; A: insieme dei collegamenti → archi)

$|N| = n$, $|A| = m$

G:



richiesta (deve ricevere 5 messaggi)

$n = 5$

$m = 6$

$\{1, 2\}$: nodi offerta origine

$\{5\}$: nodi domanda destinazione

gli altri sono: nodi di transito

offerta
(2 deve mandare 2 messaggi, 1 deve mandarne 3)

flusso su rete
(la strategia disegnata è ammissibile)

Come formulare l'invio di una certa tipologia di bene (≡ flusso) dai nodi origine ai nodi destinazione lungo una rete?

Dobbiamo introdurre variabili decisionali

Esempio di modello di flusso su rete:

Variabili decisionali (di flusso):

x_{ij}: quantità di bene (flusso) inviata lungo (i,j), $\forall (i,j) \in A$

Vincoli di bilancio:

come convenzione si scrive:
(q.tà che entra) − (q.tà che esce)

sorgente

nodo 1: $[-x_{13} - x_{14} = -3]$

nodo 2: $x_{23} + x_{14} = 3$ $\quad [-x_{23} = -2]$

nodo 3: $x_{23} + x_{13} - x_{34} - x_{35} = 2$

nodo 4: $x_{14} + x_{34} - x_{45} = 0$

nodo 5: $x_{35} + x_{45} = 5$

Vincoli di non negatività:

$$x_{23}, x_{13}, \dots, x_{45} \geq 0$$

In generale:

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, siano:

1) $b_i \in \mathbb{R}$ bilancio del nodo i, $\forall i \in N$

Per convenzione:

- $b_i < 0$ se i è un nodo origine (sorgente)
- $b_i > 0$ se i è un nodo destinazione (pozzo)
- $b_i = 0$ se i è un nodo di transito

fink

2) $u_{ij} \geq 0$ — info relativa agli archi — capacità (superiore) di (i,j), $\forall (i,j) \in A$

q.tà max. inviabile

3) $c_{ij} \in \mathbb{R}$ — costo unitario di invio lungo (i,j), $\forall (i,j) \in A$

Voglio una strategia che mi faccia spendere il minimo possibile

Il problema di flusso (strategia di invio) di costo minimo consiste nel decidere come inviare le beni lungo la rete di flusso, a costo minimo, rispettando i bilanci dei nodi e le capacità dei collegamenti.

Un modello matematico:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad \forall i \in N$$

qtà totale che arriva a i

qtà tot che esce da i

PL!

vincoli di bilancio o di conservazione del flusso

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

l_{ij} no

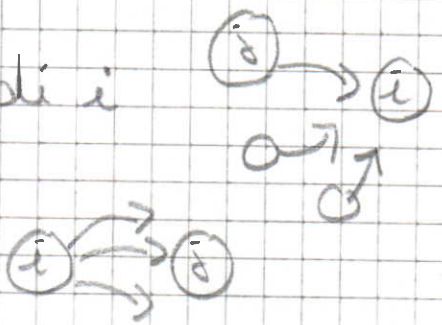
qtà inviata → limitata

vincoli di capacità

dove:

BS(i): Backward Star di i

FS(i): Forward Star di i



In forma compatta:

$$\min \; c^T x$$

$$E x = b$$

$$0 \leq x \leq u$$

con $c = [c_{ij}]$ vettore dei costi

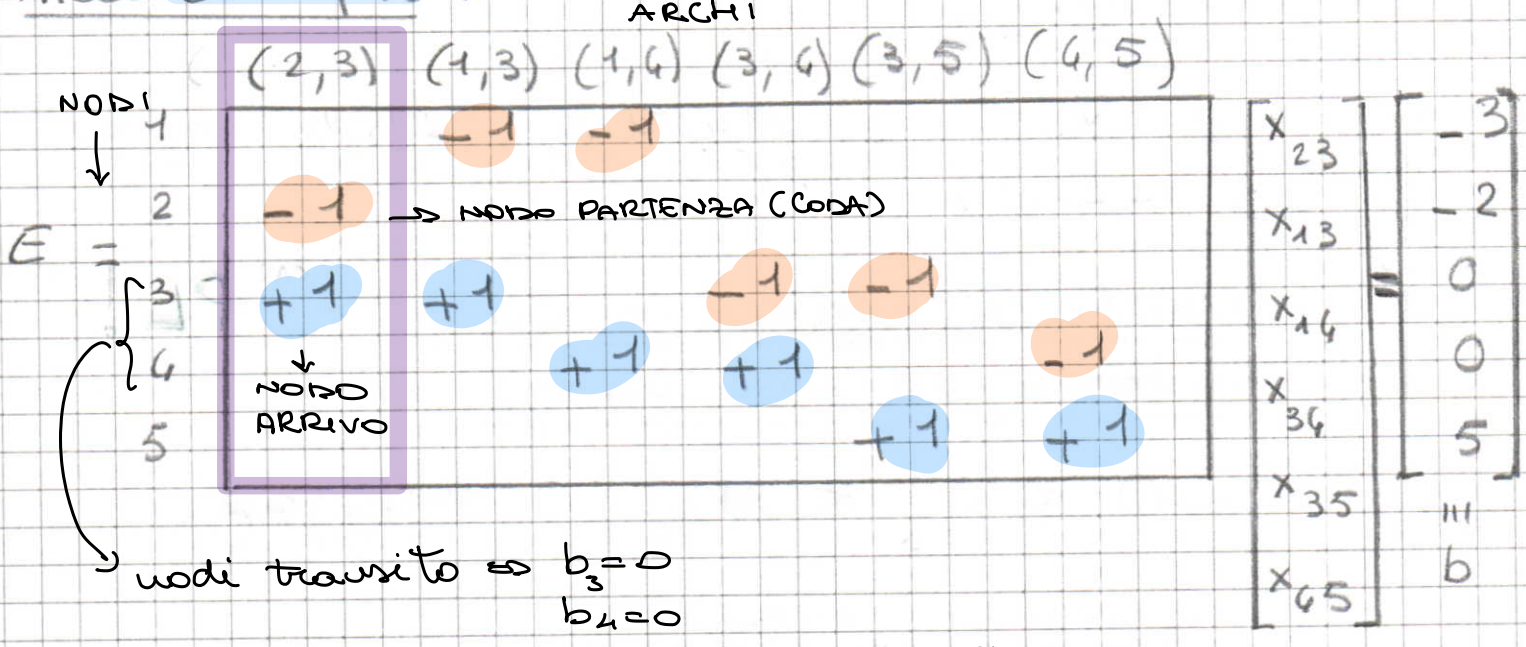
$b = [b_i]$ vettore dei bilanci

$u = [u_{ij}]$ vettore delle capacità

$x = [x_{ij}]$ vettore delle variabili di flusso

E : matrice di incidenza della rete

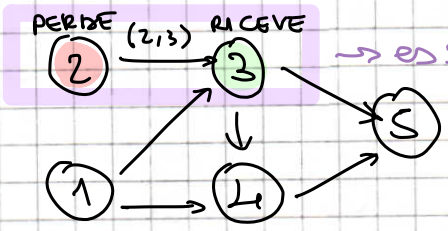
nell'esempio:



TANTE RIGHE QUANTI SONO I NODI DEL GRAFO

TANTE COLONNE QUANTI SONO GLI ARCHI DEL GRAFO

OGNI COLONNA CODIFICA L'ARCO



Siano: $D = \{ i \in N : b_i > 0 \}$ insieme dei nodi destinazione

$O = \{ i \in N : b_i < 0 \}$ insieme dei nodi origine

Condizione necessaria di ammissibilità:

$$\sum_{i \in D} b_i = - \sum_{i \in O} b_i$$

se non vale il modello non ha sol. ammissibili

offerta totale = richiesta totale

Cammini, cicli e alberi (Appendice B)

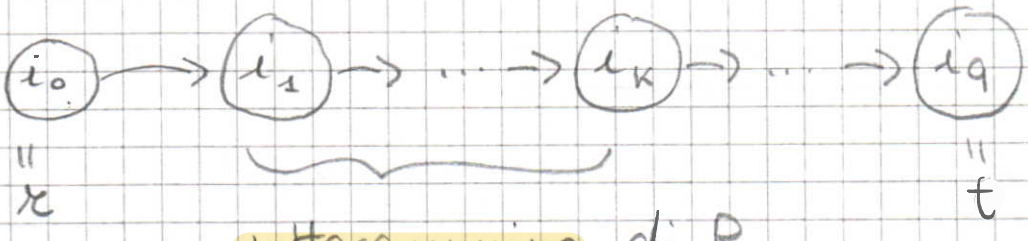
Definizione: dato un grafo orientato $G = (N, A)$, un **cammino** P da $r \in N$ a $t \in N$ è una sequenza di nodi

$$P = (\underbrace{i_0}_{=r}, i_1, \dots \underbrace{i_q}_{=t})$$

Pb cortocammino → Cammini minimi; Pb flusso massimo

tali che $(i_{k-1}, i_k) \in A$, $k = 1, \dots, q$

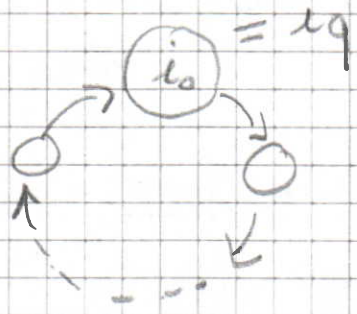
esempio



sottocammino di P

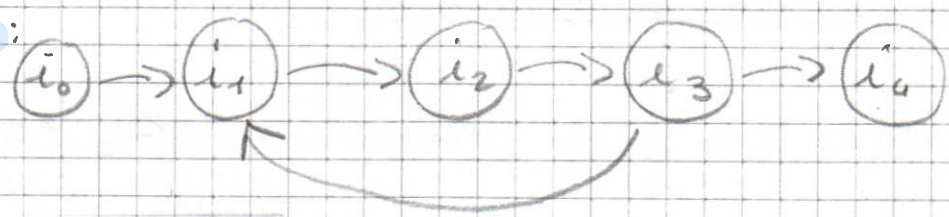
Nota: considereremo solo cammini orientati

Definizione: un cammino è un ciclo (orientato) se $i_0 = i_q$.



Definizione: un cammino (o un ciclo) è semplice se non contiene ripetizioni di nodi.

esempio:



non è semplice (contiene un ciclo)

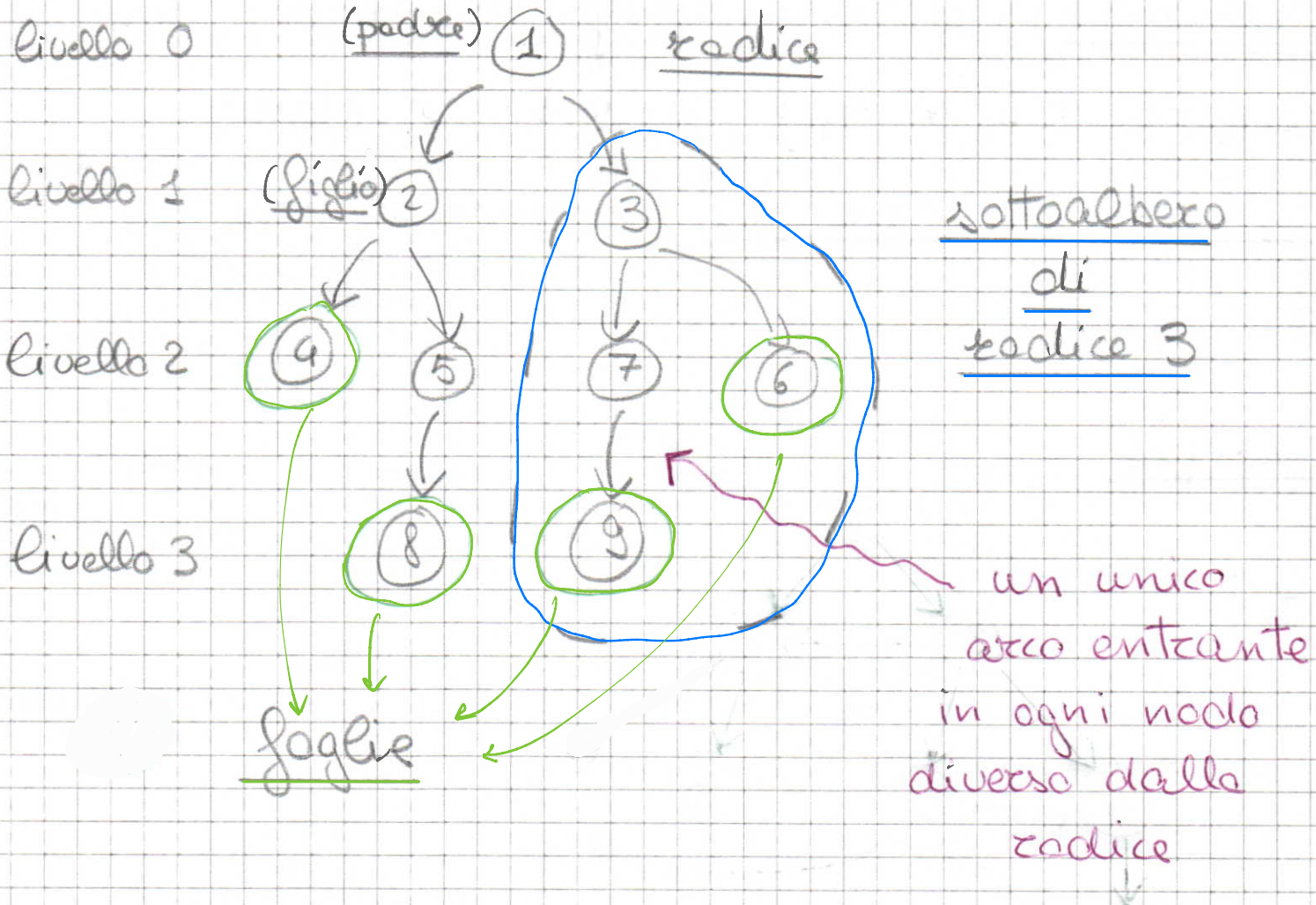
Definizione: un albero è un grafo connesso e privo di cicli.

Segue che, se $T = (N, A)$ è un albero e $|N| = n$, allora $|A| = n - 1$ → deve essere connesso ma senza cicli

Definizioni equivalenti: un albero è un grafo connesso tale che $|A| = n - 1$; un albero è un grafo privo di cicli (≡ aciclico) tale che $|A| = n - 1$.

Definizione: un **albero** è **radicato** quando un suo nodo è selezionato come nodo radice, e **orientato** se i suoi archi sono orientati dal padre al figlio.

esempio



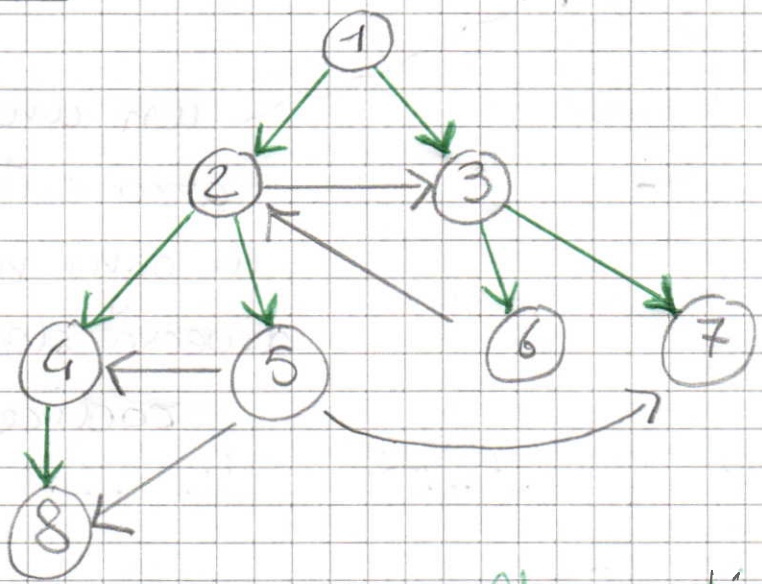
Proprietà: in un albero radicato e orientato esiste un unico cammino dalla radice a ogni nodo dell'albero, e la sua lunghezza (≡ numero di archi) è uguale al livello del nodo nell'albero.

Definizione: dato un grafo $G=(N,A)$, un albero $T=(N,A_T)$, $A_T \subseteq A$, è detto albero di copertura (spanning Tree) di G.

↳ include tutti i nodi del grafo G

esempio

G:



albero di copertura di G

Il problema dei cammini minimi

Maria Grazia Scutellà
Ricerca Operativa, Corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 3.2)

Caso speciale del problema di flusso di costo minimo:

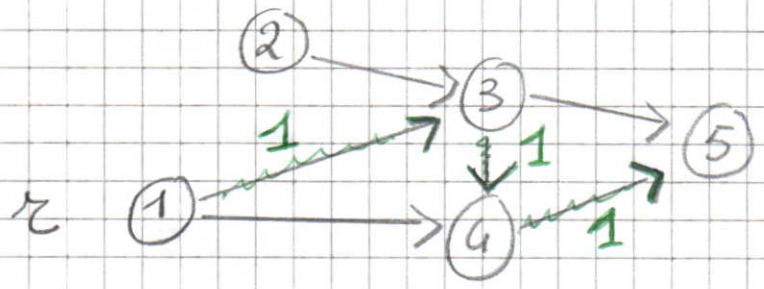
$|O| = |D| = 1$: $O = \{r\}$, $D = \{t\}$ (nodi origine; nodi destinazione)

$c_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall (i,j) \in A$

$u_{ij} = +\infty \quad \forall (i,j) \in A$ (non capacitato)

$b_r = -1$, $b_t = 1$, ovvero r invia a t un'unità di flusso.

esempio



L'unità di flusso viene inviata lungo un cammino (orientato) da r a t: il problema consiste quindi nel determinare un cammino

da r a t di costo minimo (cammino minimo)

Modello matematico (caso speciale del modello di PL per il problema di flusso di costo minimo)

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = r \\ +1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

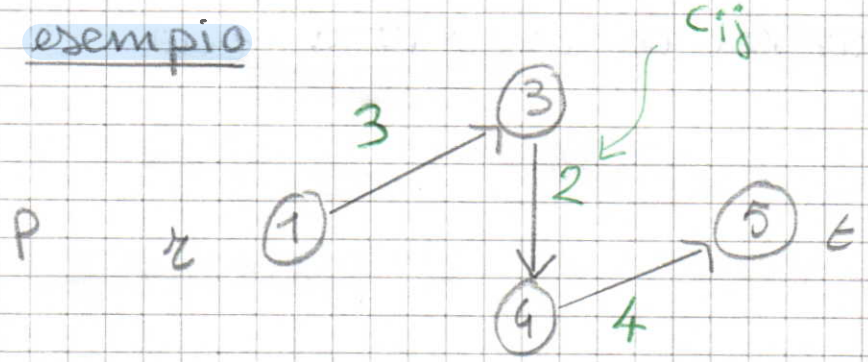
Studieremo le proprietà del problema direttamente in termini di grafo (derivano dalla teoria della PL)

Definizioni:

1) dato un cammino P, $C(P) = \sum_{(i,j)\in P} c_{ij}$ è detto costo di P (abuso di notazione)

2) $\mathcal{P}_{rt}$ è l'insieme dei cammini da r a t in G

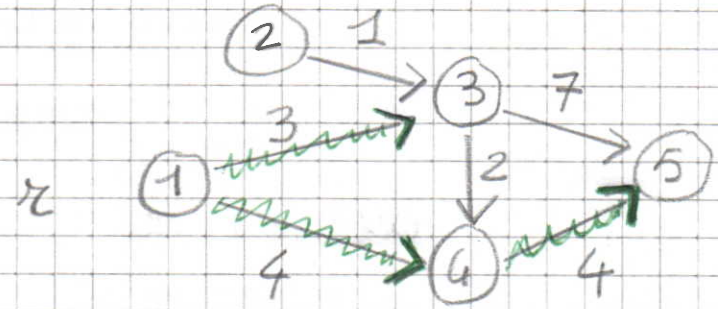
esempio



Problema del cammino minimo: dati r e t, Trova $P \in \mathcal{P}_{rt}$ che sia di costo minimo.

Problema dell'albero dei cammini minimi: dato $G=(N,A)$ e dato r, trova un cammino di costo minimo da r a i, $\forall i \neq r$.

esempio



Albero dei cammini minimi di radice 1: albero di copertura radicato in r e orientato

Osservazione 1: poiché $(1,4,5)$ è un cammino minimo da 1 a 5, si ha che $(1,4)$ è un cammino minimo da $(1,4)$

proprietà di concatenazione

Osservazione 2: gli alberi di copertura radicati in r e orientati sono le **soluzioni di base ammissibili** del modello di PL precedente.

(no dim)

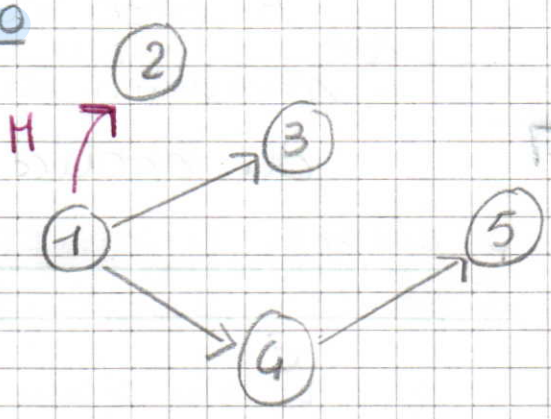
NB. Un grafo connesso non tiene conto dell'orientazione degli archi, uno fortemente connesso sì

Assunzioni:

1) G è "**fortemente connesso**", ovvero in G esiste un cammino orientato da r a i, $\forall i \neq r$; se non esiste, basta aggiungere un arco fittizio $(r,i) \notin A$ di costo $M \geq (n-1)c_{max} + 1$.

c_{max}: massimo costo in G

esempio

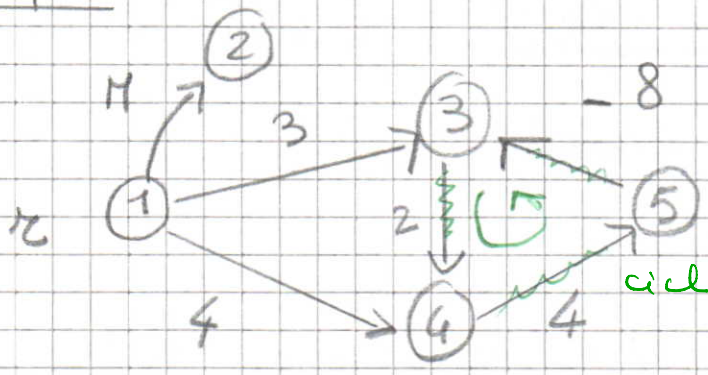


albero di copertura!

2) in G non esistono cicli orientati di costo negativo (**cicli negativi**).

Se esistesse un ciclo negativo? ↘

esempio

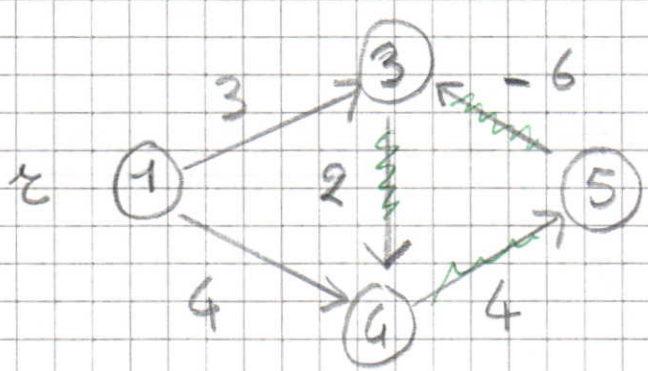


$c((3,4,5)) = -2$ ← costo negativo

ciclo orientato

Per individuare un cammino minimo da 1 a 3 (4 e 5), conviene visitare il ciclo infinite volte: problema dei cammini minimi inferiormente illimitato!

Nell'ipotesi che G non contenga cicli negativi (si può verificare in tempo polinomiale), ogni cammino minimo è privo di cicli, ovvero semplice, ovvero formato da al più $(n-1)$ archi.



ciclo nullo: gli algoritmi risolutivi non li considerano

(percorrerlo non ha alcuna influenza)

Visita di un grafo (Appendice B.3)

$G = (N, A)$ grafo orientato

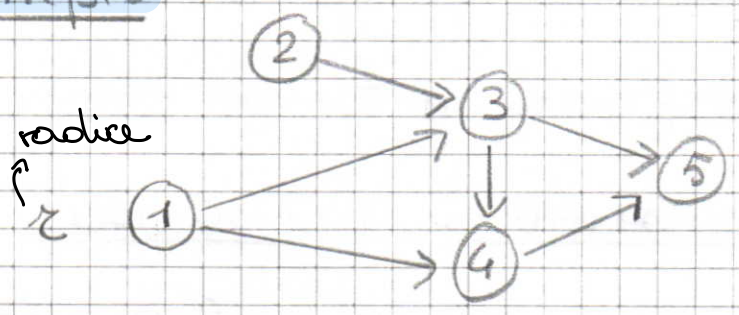
$r \in N$ nodo radice

problema: determina l'insieme di nodi raggiungibili da r in G mediante un cammino orientato, restituendo:

$T_r = (N_r, A_r)$ **albero della visita**

con $N_r \subseteq N$, $A_r \subseteq A$

esempio:



Inizializzazione

$Q = \{r\} = \{1\}$ → è di supporto

insieme dei nodi candidati

$p(1) = nil$ (significa che 1 non ha predecessore perché è di partenza)

$p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0$ **predecessori**

Iterazioni

1) $i = 1$, $Q = \phi$

FS(1): $(1,3)$: $p(3) = 1$
$(1,4)$: $p(4) = 1$ → 3, 4 non erano ancora stati aggiunti

$Q = \{3, 4\}$

2) $i = 3$, $Q = \{4\}$

FS(3): $(3,4)$: — → 4 era già stato aggiunto
$(3,5)$: $p(5) = 3$

$Q = \{4, 5\}$

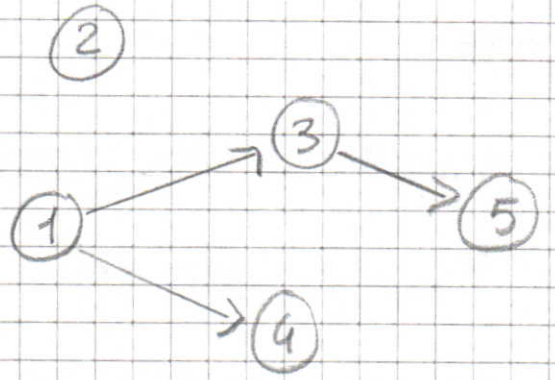
3) $i = 4$, $Q = \{5\}$

FS(4): $(4,5)$: —

$Q = \{5\}$

4) $i = 5$, $Q = \phi$ STOP ($FS(5) = \phi$)

T_2 :



definito tramite i predecessori

Osservazione: $p(2) = 0$ segnala che non esiste nessun cammino orientato da 1 a 2 in G.

Formalmente: PSEUDOCODICE

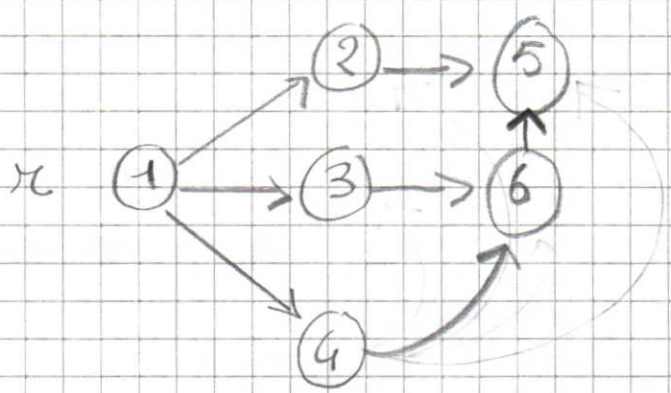
```
Procedure Visita ( G, r, P )
                   ↑  ↓  ↓
                 grafo  nodo di partenza  output (albero, se ne fornisce l'insieme dei predecessori)
begin
for i = 1 to n do P(i) = 0;
P(r) = nil;
Q = {r};
repeat
i = SELECT(Q); Q = Q - {i};        (se ne seleziona uno)
for each (i,j) ∈ FS(i) do
    if P(j) = 0 then begin
                     P(j) = i;
                     Q = Q ∪ {j}
                     end
until Q = ∅
end
```

Complessità in tempo: $O(m)$, se SELECT richiede tempo costante

Correttezza: non dipende da ordine di esame degli archi in $FS(i)$, per ogni i visitato, e neppure dal criterio di selezione in SELECT.

Implementazioni diverse, tuttavia, possono individuare cammini con proprietà diverse.

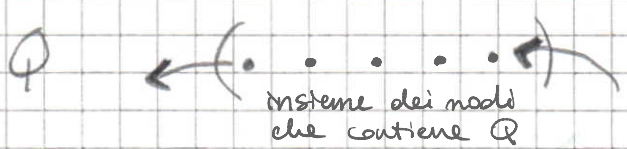
esempio: Voglio individuare i nodi raggiungibili da 1.



* all'inizio si esamina FS(1) e si aggiungono 2,3,4 poi FS(2) poi FS(3) poi FS(4), ma 6 è già stato aggiunto poi FS(5), che è ∅ e infine FS(6) dopodiché Q=∅

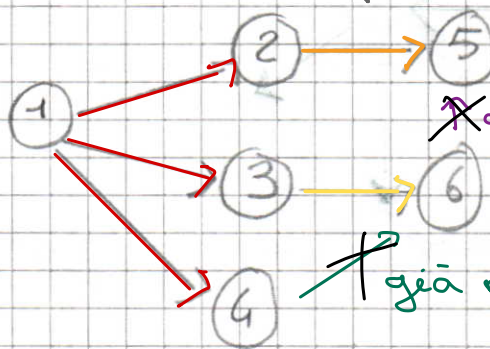
1) Q coda : strategia FIFO = First In First Out

↳ struttura t. che l'elemento selezionato è il primo, quelli aggiunti vanno in fondo



Rispetto l'ordine di arrivo

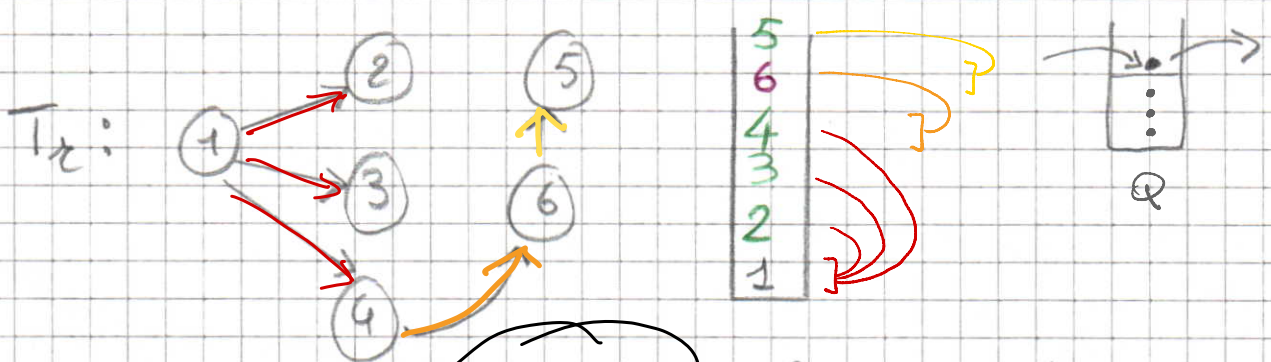
T_r: ↓ albero restitutivo



Q = {1 2 3 4 5 6} *

cammini "corti", nel senso di numero di archi

2) Q stack: strategia LIFO = Last In First Out



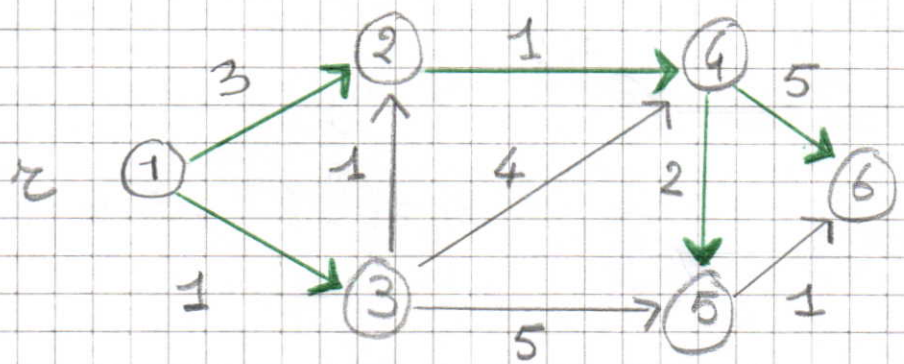
cammini "lunghi" (nodo 5)

Teorema: Se Q è implementata come una coda FIFO, la procedura Visita individua un cammino con il minimo numero di archi da r a i, per ogni i raggiungibile da r.

Ma dim.

Corollario: Se $c_{ij} = 1 \ \forall (i,j) \in A$, il problema dei cammini minimi è risolubile in $O(m)$.

Alberi, etichette e condizioni di ottimo



T è una soluzione ottima?

Calcoliamo il seguente insieme di etichette, eseguendo Visita di T a partire da r:

$d(1) = 0$
$d(2) = d(1) + 3 = 3$
$d(3) = d(1) + 1 = 1$
$d(4) = d(2) + 1 = 4$
$d(5) = d(4) + 2 = 6$
$d(6) = d(4) + 5 = 9$

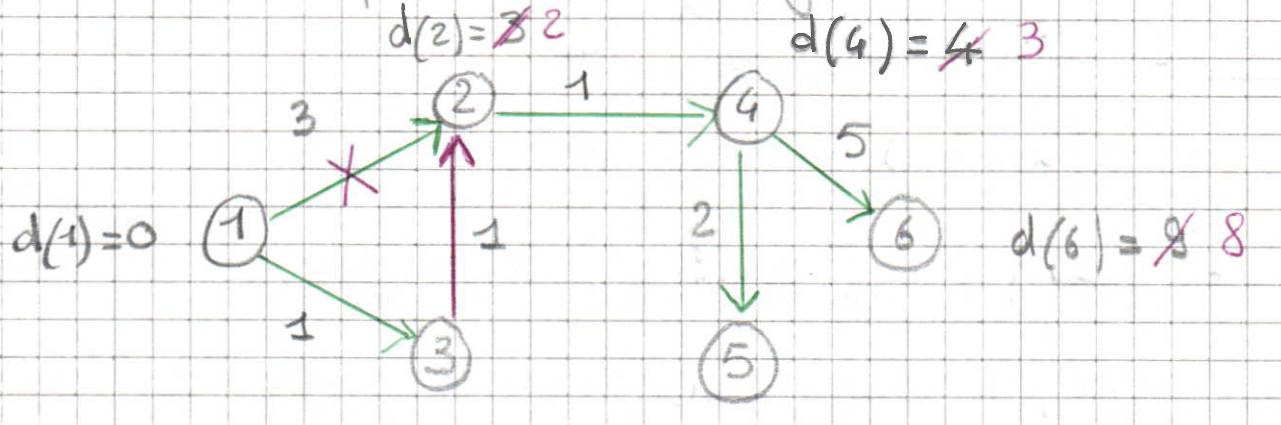
Per costruzione, $d(i)$ è il costo dell'unico cammino in T da r a i, $i = 1, 2, \dots 6$

Proprietà: $d(i) + c_{ij} = d(j)$, $\forall (i,j) \in T$

Consideriamo gli archi non in T, esempio $(3,2)$: $d(3) + c_{32} \leq d(2)$

$d(3) = 1$, $c_{32} = 1$, $d(2) = 3$

quindi T non è un albero dei cammini minimi di radice 1, in quanto il cammino da 1 a 2 può essere migliorato:



le etichette dei nodi nel sottoalbero di radice 2 sono diminuite (di 1)

Quindi: $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$ $\forall (i,j) \in A$ è condizione necessaria per l'ottimalità di T

(se fosse $<$ il cammino sarebbe migliorabile)

Teorema: Dato $G=(N,A)$, sia $T=(N,A_T)$ un albero di copertura radicato in r e orientato, e sia $d(i)$ l'etichetta di i, $\forall i \in N$ (ovvero $d(r)=0$, $d(i)$ costo dell'unico cammino da r a i in T, $\forall i \neq r$). T è un albero dei cammini minimi di radice r se e solo se

$$d(i) + c_{ij} \geq d(j) \quad \forall (i,j) \in A$$

↓

Condizioni di Bellman (dim. dopo il Lemma)

Lemma: Sia $d \in \mathbb{R}^n$ tale che

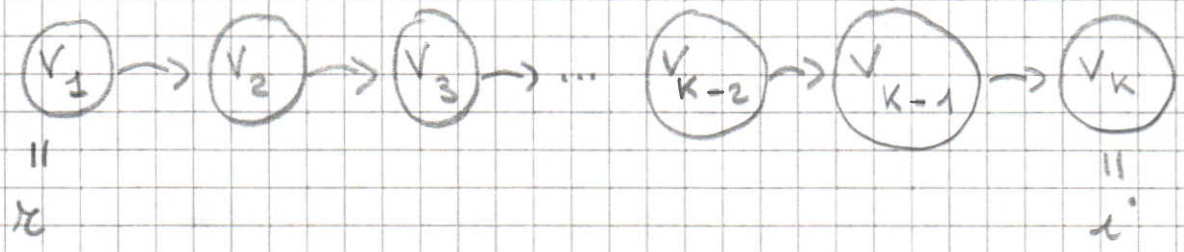
- $d(r) = 0$
- $d(i) + c_{ij} \geq d(j) \quad \forall (i,j) \in A$,

allora $d(i)$ è una valutazione inferiore del costo del cammino minimo da r a i, $\forall i \in N$.

Dim:

$i = r$ caso banale

Sia $i \neq r$, e sia P un cammino in G da r a i:

P: 

Le condizioni di Bellman valgono per ipotesi per ogni arco in A, e quindi anche per gli archi in P:

$$d(v_k) \leq d(v_{k-1}) + c_{v_{k-1}v_k} \quad (v_k = i)$$
$$d(v_{k-1}) \leq d(v_{k-2}) + c_{v_{k-2}v_{k-1}}$$
$$\vdots$$
$$d(v_3) \leq d(v_2) + c_{v_2v_3}$$
$$d(v_2) \leq d(v_1) + c_{v_1v_2} \quad (v_1 = r)$$

Sommando membro a membro:

$$d(i) \leq \underbrace{d(v_1)}_{v_1 = r \;\Rightarrow\; 0} + \underbrace{c_{v_1v_2} + c_{v_2v_3} + \cdots + c_{v_{k-2}v_{k-1}} + c_{v_{k-1}v_k}}_{c(P)}$$

ovvero $d(i) \leq c(P) \quad \forall P$ cammino da r a i. □

Dim. (Teorema)

(pag 11)

$\Rightarrow$: condizione necessaria, già dimostrata

$\Leftarrow$: Sia $d(r) = 0$ e $d(i)$ sia il costo

dell'unico cammino in T da r a i, $\forall i \neq r$.

Supponiamo valgano le condizioni di Bellman.

Per il lemma appena dimostrato, d(i) è minore o uguale del costo del cammino minimo da r a i, $\forall i \in N$.

↳ blu + verde ⇒ è il cammino minimo da r ad i

Poiché d(i) è il costo dell'unico cammino in T da r a i, $\forall i \neq r$, si ha che T è un albero dei cammini minimi di radice r. □

↳ quanto detto vale $\forall i \neq r$

Schema algoritmico SPT

↳ shortest path tree

→ algoritmo per la determinazione di un albero dei cammini minimi

Inizializzazione

T : albero di copertura radicato in r e orientato.

d(i), $\forall i \in N$ etichette → rappresentano il costo dell'unico cammino dell'albero da r ad i

p(i), $\forall i \in N$ predecessori

Tipica iterazione :

si modifica l'albero sostituendo l'arco (p(j), j) con (i, j)

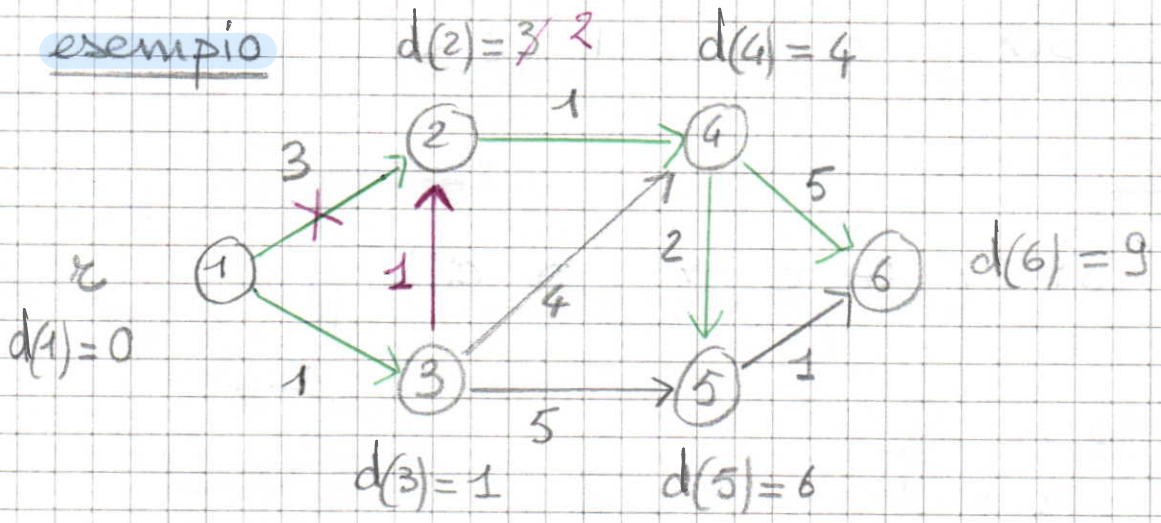
se esiste $(i,j) \in A$ tale che $d(i) + c_{ij} < d(j)$:

- p(j) = i (aggiornamento di T)
- " aggiornamento di d(i), $\forall i \in N$ "

altrimenti STOP : T è ottimo

(sono verificate le condizioni di Bellman).

esempio



T: $p(1) = nil$, $p(2) = 1$, $p(3) = 1$, $p(4) = 2$, $p(5) = 4$, $p(6) = 4$

Poiché $d(3) + 1 < d(2)$:

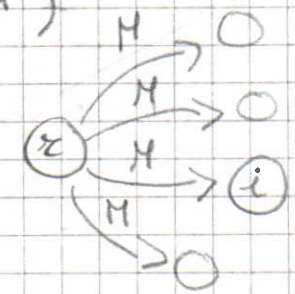
$\quad\quad\quad

di Bellman per gli archi in FS(2)).

* all'inizio l'albero è fatto da archi fittizi aventi costo M molto alto (lo imponiamo noi)

Formalmente:

Procedure SPT(G, c, r, P, d) (P, d: output)



T iniziale

begin
for i = 1 to n do
begin P(i) = r ; d(i) = M end *
P(r) = nil ; d(r) = 0 ; Q = {r} ;

repeat
SELECT i from Q ; Q = Q − {i} ;
for each (i, j) ∈ FS(i) do
if d(i) + cij < d(j) then
begin
d(j) = d(i) + cij ;
P(j) = i ;
if j ∉ Q then Q = Q ∪ {j}
end

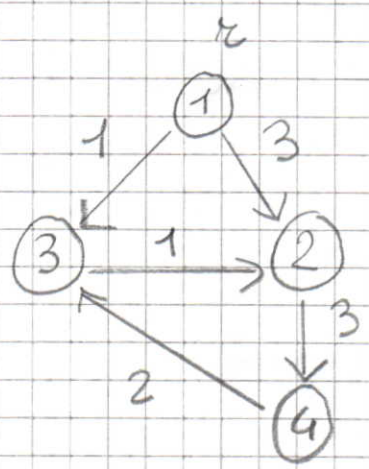
non si specifica come… questo è uno schema algoritmico, non un algoritmo

aggiornamento differito (non si aggiornano subito tutte le etichette)

until Q = ∅
end

Proprietà (correttezza di SPT): Quando Q = ∅, le condizioni di Bellman sono soddisfatte per ogni arco in G. L'ultimo albero determinato è quindi ottimo.

esempio:



Inizializzazione

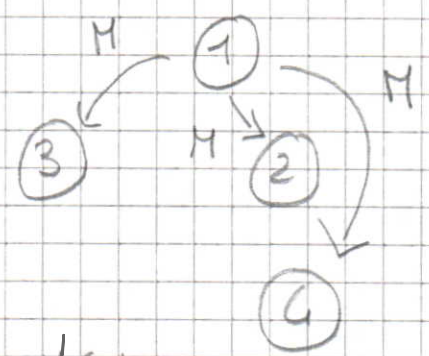
$P(1) = nil$

$P(2) = P(3) = P(4) = 1$

$d(1) = 0$

$d(2) = d(3) = d(4) = M$

$Q = \{1, 2, 3, 4\}$

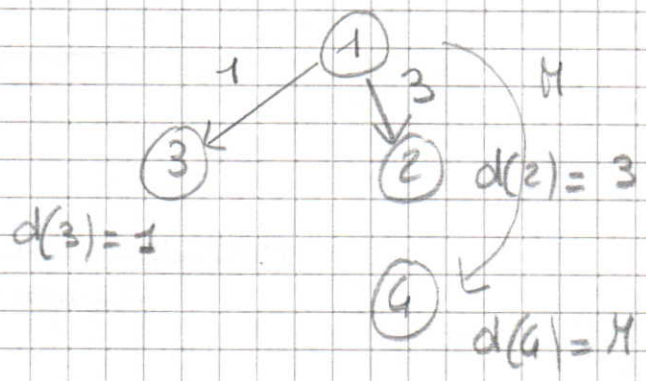


it 1) $i = 1$

FS(1): $(1,2): d(1) + 3 < d(2) : d(2) = 3 = d(1) + c_{12}$ ($d(2) = M$)

$(1,3): d(1) + 1 < d(3) : d(3) = 1 = d(1) + c_{13}$ ($d(3) = M$)

$Q = \{2, 3, 4\}$

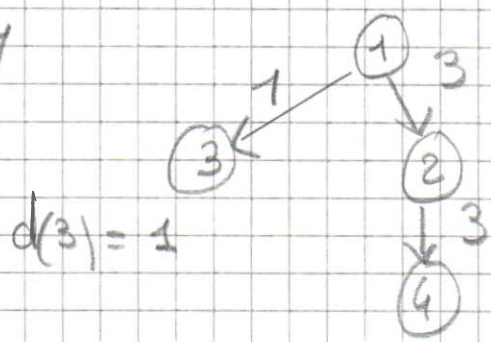


it 2) $i = 2$

FS(2): $(2,4): d(2) + 3 < d(4) : d(4) = 6 = d(2) + c_{24}$ ($d(4) = M$)

$P(4) = 2$

$Q = \{3, 4\}$



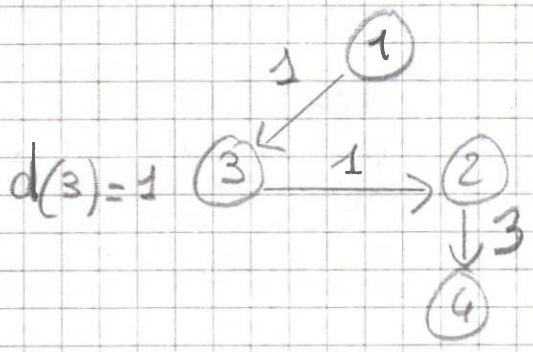
it 3) $i = 3$

$FS(3) : (3,2) : d(3) + 1 < d(2) : d(2) = 2$

$d(3) = 2$ (11) $\quad d(2) = 3$ (11)

$p(2) = 3$

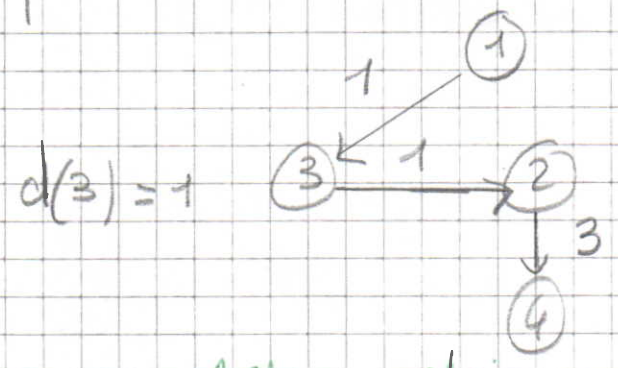
$Q = \{2, 4\}$



it 4) $i = 2$

$FS(2) : (2,4) : \underbrace{d(2)}_{2} + 3 < \underbrace{d(4)}_{6} : d(4) = 5$

$Q = \{4\}$



T non cambia

Albero dei cammini minimi di radice 1

it 5) $i = 4$

$FS(4) : (4,3) : d(4) + 2 > d(3) : -$

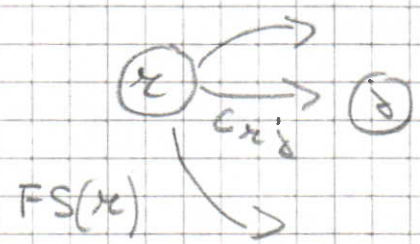
$Q = \emptyset$ STOP

Per dimostrare che

Teorema: A ogni iterazione di SPT, $d(i)$ è il costo di un cammino da r a i in G, oppure $d(i) = M$, $\forall i \in N$

Dim.: Per induzione sul numero delle iterazioni

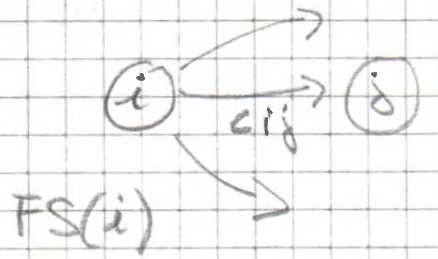
Al termine della prima iterazione.



$d(j) = c_{rj}$ se $(r,j) \in FS(r)$

$d(j) = M$ altrimenti

Passo induttivo Supponiamo che la proprietà sia vera al termine dell'iterazione K, e consideriamo l'iterazione $K+1$.



1) $d(j)$ non migliora: vero per ipotesi induttiva

2) $d(j)$ migliora, ovvero

$$d(j) = d(i) + c_{ij}$$

Per ipotesi induttiva, $d(i)$ è il costo di un cammino, P_i, da r a i in G:



Ovvero $d(j) = d(i) + c_{ij}$ è il costo del cammino ottenuto concatenando P_i e (i,j). La tesi segue. □

Teorema (terminazione SPT): SPT esegue un numero finito di iterazioni.

Dim.: Poiché:

1) poiché per ipotesi G non ha cicli negativi, i cammini individuati da SPT sono semplici; → PAG. 5
2) il numero dei cammini semplici da r a i in G è finito, $\forall i \in N$;
3) un nodo i è inserito in Q solo se $d(i)$ diminuisce;
4) per il Teorema precedente, $d(i)$ è il costo di un cammino da r a i in G (oppure $d(i) = +\infty$);

segue che:

a) $d(i)$ può diminuire solo un numero finito di volte, $\forall i \in N$;
b) un nodo i può essere inserito in Q solo un numero finito di volte,

Dopo un numero finito di iterazioni, quindi, $Q = \emptyset$ e di conseguenza SPT termina. □

SPT : famiglia di algoritmi

(SELECT) → in base a come si seleziona si possono ottenere algoritmi molto diversi

SPT - S

Q è una coda di priorità: si estrae i con minima etichetta

SPT - L

Q è una lista: la selezione di i dipende dalla sua posizione nella lista

Algoritmi a coda di priorità (3.2.4)

(SPT-S = Shortest first)

Teorema (Dijkstra, 1959)

Se $c_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$, SPT-S inserisce in (e quindi estrae da) Q ogni nodo i al più una volta.

Notazione di supporto: sia i_k il nodo estratto da Q all'inizio dell'iterazione k, e $d_k(i)$ l'etichetta di i all'inizio dell'iterazione k, $\forall i \in N$.

Quindi: $i_1 = r$, $d_1(r) = 0$, $d_1(i) = M \ \ i \neq r$

Lemma (di supporto): Se $c_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$:

$$d_{k+1}(i_{k+1}) \geq d_k(i_k) \quad \forall k \geq 1,$$

ovvero la sequenza delle etichette dei nodi estratti da Q in SPT-S è non decrescente.

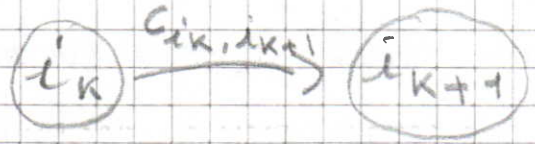
Dim. Per ogni $k \geq 1$ si possono verificare due casi:

1) $d_{k+1}(i_{k+1}) = d_k(i_{k+1})$, ovvero l'etichetta di i_{k+1} non cambia. In tal caso $i_{k+1} \in Q$ all'inizio dell'iterazione k, quindi

$$d_{k+1}(i_{k+1}) = d_k(i_{k+1}) \geq d_k(i_k),$$

essendo i_k un nodo con minima etichetta all'iterazione k. → perché l'algoritmo è SPT-S

2) $d_{k+1}(i_{k+1}) < d_k(i_{k+1})$, ovvero l'etichetta di i_{k+1} è diminuita durante l'iterazione k, quindi grazie a i_k:



(Esiste un arco, di costo c_{i_k,i_k+1}, che violava le condizioni di Bellman)

$$d_{k+1}(i_{k+1}) = d_k(i_k) + c_{i_k, i_{k+1}} \overset{\text{Hp.}}{\geq} 0 \geq d_k(i_k)$$

□

Dim (T. Dijkstra)

Dal lemma precedente, la sequenza delle etichette dei nodi estratti da Q è non decrescente. Poiché un nodo è inserito in Q solo quando la sua etichetta diminuisce, un nodo può essere inserito in Q al più una volta. □

Corollario: Se $c_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$, SPT-S esegue $O(n)$ iterazioni → perché ogni nodo viene esaminato al più una volta

↳ n° di nodi

OSS: SPT-S può essere esponenziale nel caso di costi negativi.

Algoritmo di Dijkstra: Q lista non ordinata → caso più semplice

esempio: Q vettore di puntatore ai nodi

Q:]→[ ]←[

inserzione in Q: $O(1)$ per iterazione

Q: [ ]

ricerca della minima etichetta

estrazione da Q (SELECT): $O(n)$ per iterazione

Se ho un numero di interazioni dell'ordine di n, tutte queste operazioni costano complessivamente O(n^2)

analisi delle stelle uscenti: $O(m)$ → n° di archi

globalmente



condizioni di Bellman: ogni nodo viene esaminato al più una volta (caso di costi >=0), quindi il controllo per gli archi della stella uscente di un nodo è effettuato al più una volta, quindi ogni arco viene controllato al più una volta

Se $c_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$ l'algoritmo esegue $O(n)$ iterazioni, quindi:

? $O(n^2 + m)$, ovvero $O(n^2)$

Il caso pessimo é quello di un grafo completo e in quel caso m~O(n^2)

complessità in tempo dell'algoritmo di Dijkstra

nel caso $c_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$

Algoritmi a selezione su lista (3.2.5)

(SPT-L)

Varie implementazioni di Q:

- coda (strategia FIFO)
- stack (" LIFO)
- ⋮

Algoritmo di Bellman: Q coda

(o Bellman-Ford-Moore)

Q:

- estrazione: $O(1)$
- inserzione: $O(1)$ se non già presente in Q

Proprietà : L'algoritmo di Bellman inserisce ogni nodo in Q al più $n-1$ volte.

quindi c'è comunque una limitazione

No dim

Corollario: Ogni arco è esaminato dall'algoritmo di Bellman al più $n-1$ volte.

Quindi:

- estrazione da Q : $O(1)$ per iterazione
- inserzione in Q : $O(1)$ per iterazione
- analisi delle stelle uscenti : $O(mn)$ globalmente

$O(mn + n^2)$ ovvero $O(mn)$?

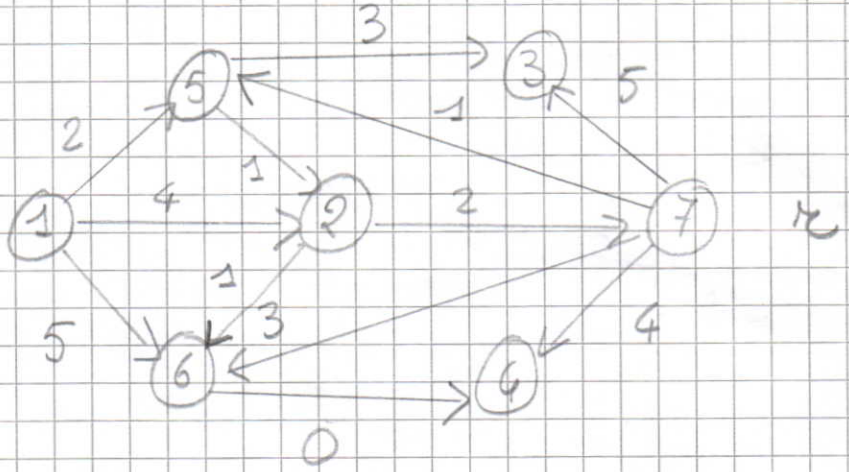
complessità in tempo dell'algoritmo di Bellman

NB. non dipende dal segno dei costi

Osservazione: l'algoritmo di Bellman permette di rilevare la presenza di cicli negativi in G, controllando se un nodo viene inserito in Q almeno n volte.

Esercitazione cammini minimi

1) Albero dei c. min. di radice 7 (I° Verifica 2008)

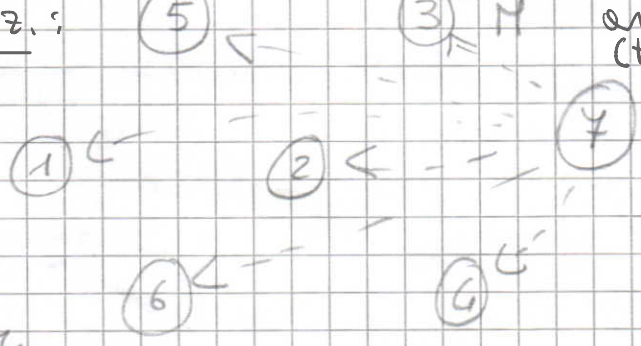


Algoritmo appropriato complessità comp.: Dijkstra ($c_{ij} \geq 0$)

$$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \cdot 5 + 1 = 31$$

un qualsiasi cammino dell'albero è preferibile (M è maggiore di tutti i cammini semplici possibili)

Inizializz.:



$d(7) = 0$

$d(i) = M \quad i = 1, 2, \ldots 6$

$Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ → parto dal nodo radice

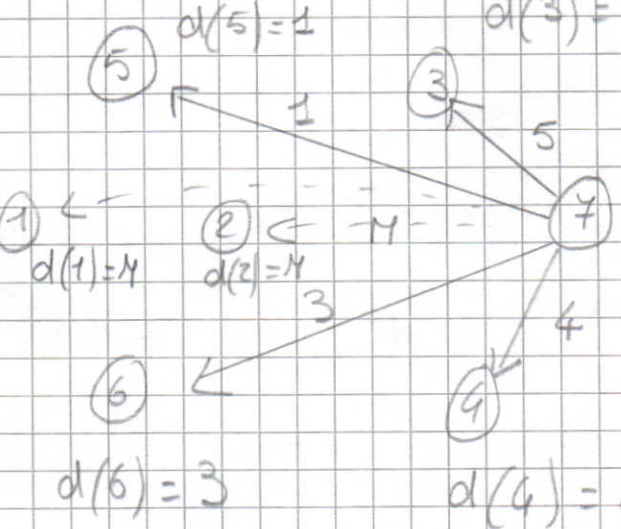
1) $u = 7$

$d(3) := 5$

$d(4) := 4$

$d(5) := 1$

$d(6) := 3$



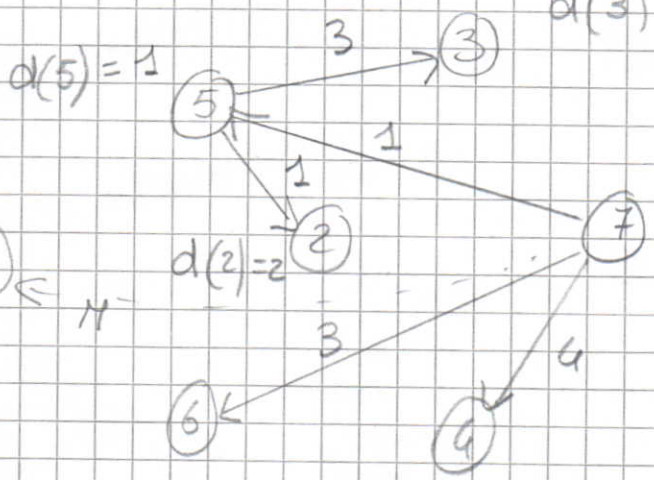
$Q = \{3, 4, 5, 6\}$

2) $u = 5$ modo con minima etichetta

NOTA: ho trovato il cammino minimo da 1 a 5

$(5,3)$: $d(3) := 1 + 3 = 4$

$(5,2)$: $d(2) := 2 \ (= 1+1)$



$d(6) = 3$ $\quad$ $d(4) = 4$

$Q = \{2, 3, 4, 6\}$

3) $u = 2$ modo con minima etichetta

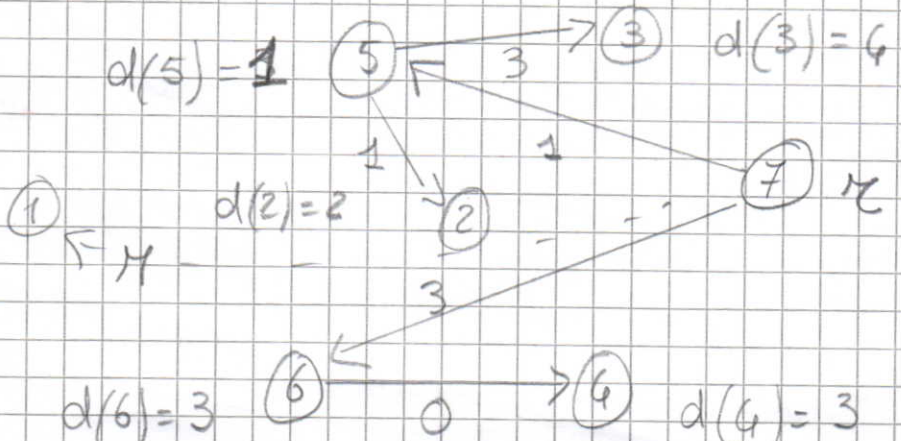
— non migliora nessuna etichetta

$Q = \{3, 4, 6\}$ (il modo radice non è migliorabile, sennò ci sarebbe un ciclo negativo)

4) $u = 6$ modo con min. etichetta

$(6,4)$: $d(4) := d(6) + 0 = 3$

$Q = \{3, 4\}$



Albero dei cammini minimi

5) $u = 4$ $\quad FS(4) = \phi$

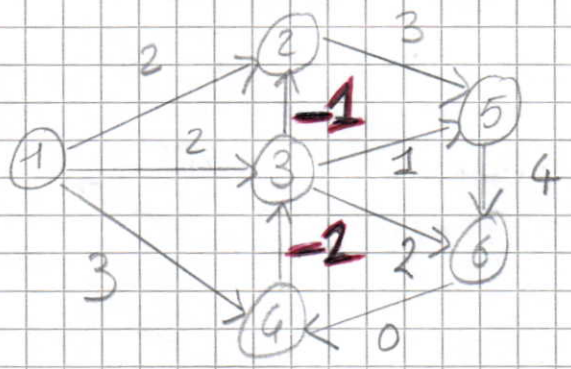
$Q = \{3, 4\}$

6) $u = 3$ $\quad FS(3) = \phi$

$Q = \phi$ STOP

NOTA 6 iterazioni ($< n$); al termine $d(1) = M$, infatti non esiste in G nessun cammino da $x_6 = 7$ al nodo 1

2) Albero dei c.m. di radice 1 13/01/2010



Alg. più appropriato?

SPT.L

(ciclo orientato: (2 5 6 4 3 2))

$M = (n-1) c_{max} + 1 = 5 \cdot 4 + 1 = 21$

Svolgimento (quick) Tabellare:

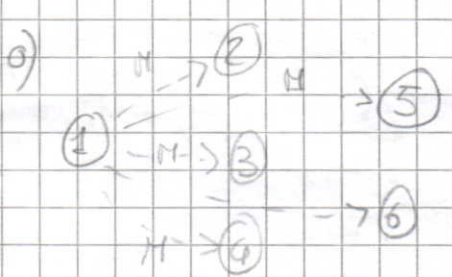
CODA

il predecessore di tutti è la radice (1)

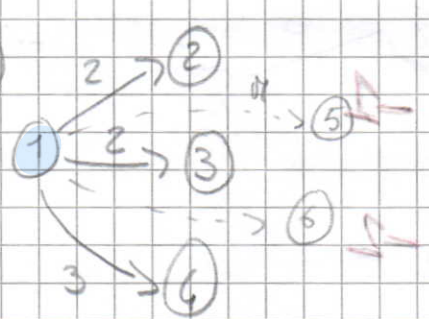
it	u	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	Q
0	/	nil	1	1	1	1	1	0	∞	∞	∞	∞	∞	(1)
1	1	nil	1	1	1	1	1	0	2	2	3	∞	∞	(2 3 4)
2	2	nil	1	1	1	2	1	0	2	2	3	5	∞	(3 4 5)
3	3	nil	3	1	1	3	3	0	1	2	3	3	4	(4 5 2 6)
4	4	nil	3	4	1	3	3	0	1	1	3	3	4	(5 2 6 3)
5	5	—							—					(2 6 3)
6	2	—							—					(6 3)
7	6	—							—					(3)
8	3	nil	3	4	1	3	3	0	0	1	3	2	3	(2 5 6)
9	2	—							—					(5 6)
10	5	—							—					(6)
11	6	—							—					$\emptyset$

la radice non ha predecessore

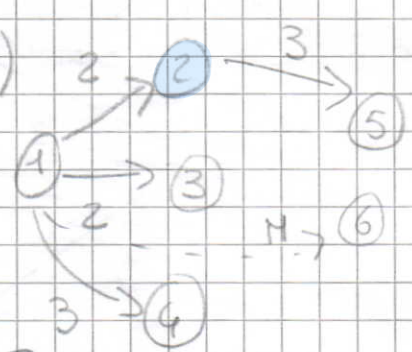
0)



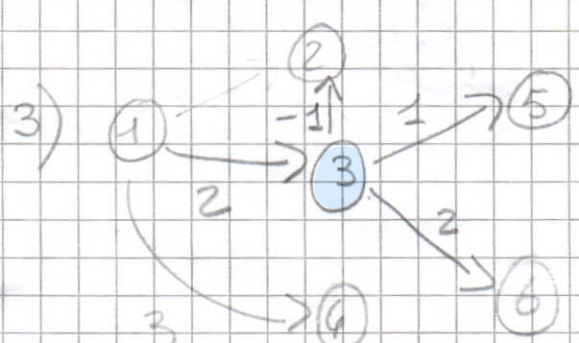
1)



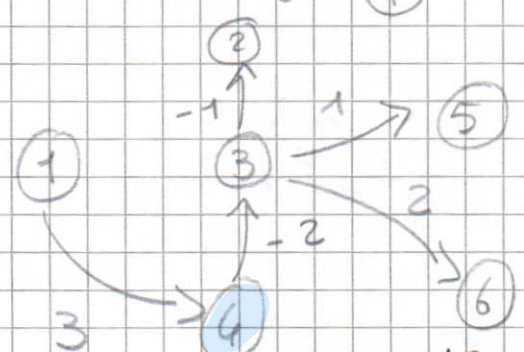
2)



3)



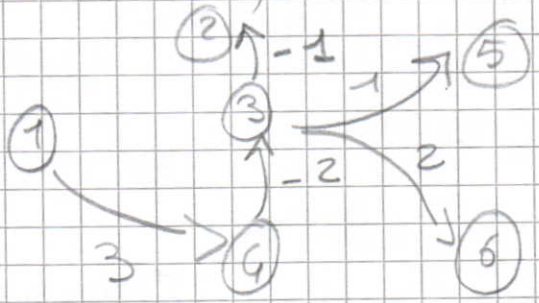
4)



NB: le etichette di 2, 5 e 6 non sono aggiornate

5) invariato 6) invariato

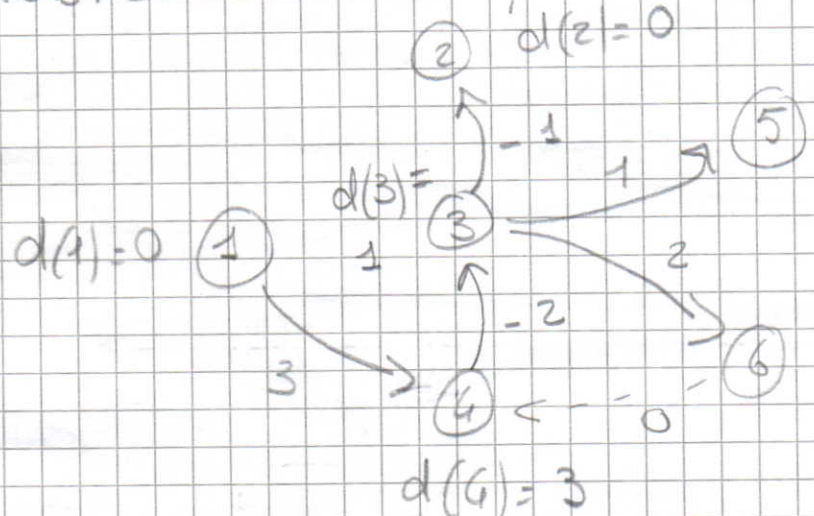
7) invariato 8) propaghiamo l'aggiorn. di d(3)



non cambia l'albero né gli aggiorn. né etich.

9) 10) 11) invariato

Alb. cam. minimi:



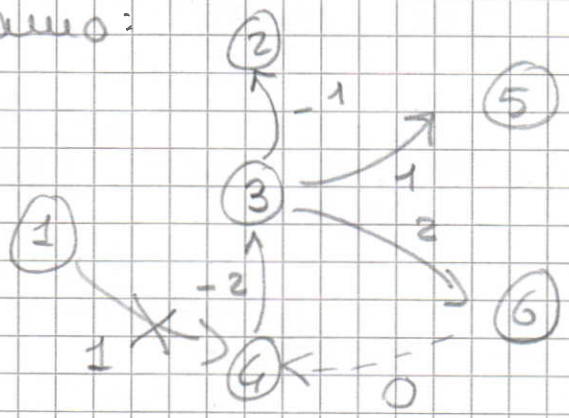
È l'unico albero dei c.m. di radice 1?

$(6,4) \notin T$: $d(6) + 0 = d(4)$ (la c. di Bellman vale come =)

$3 \quad\quad 3$

In tal caso, la sol. ottima potrebbe non essere unica (è sicuramente unica se $d(i) + c_{ij} > d(j) \quad \forall (i,j) \notin T$)

Vediamo:

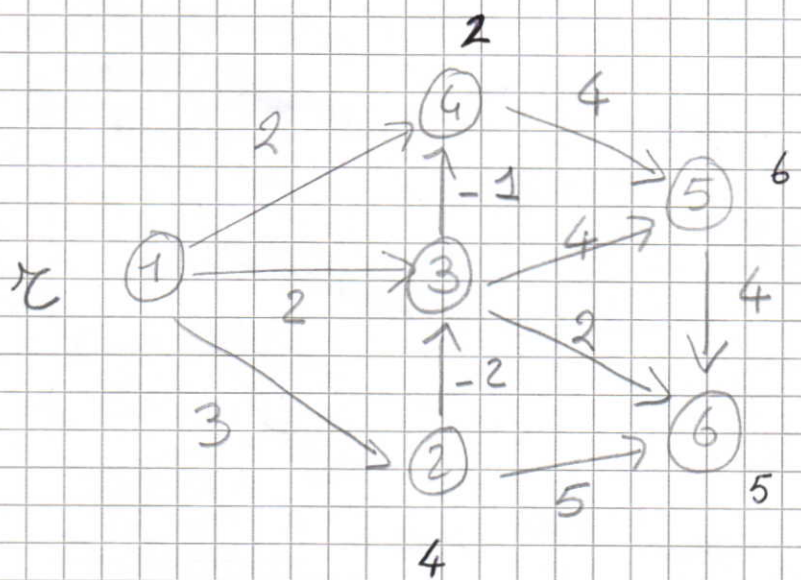


Non si ha un albero, ma una struttura non connessa!

Poiché ogni altro $(i,j) \notin T$ soddisfa le c. di Bellman come $>$, la sol. trovata è l'unico albero dei c. minimi di radice 1.

3.2.6. Cammini minimi su reti acicliche

(es. trasporti)
reti a strati o livelli



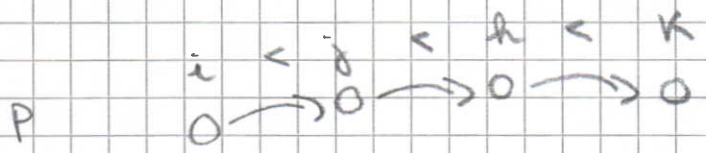
È acyclico = non ha cicli orientati

Proprietà: Un grafo è aciclico sse è possibile numerare i suoi nodi in modo che

$$(i,j) \in A \Rightarrow i < j$$

(grafo ben numerato)

Intuitivamente:



non essendoci cicli, posso numerare in modo crescente i nodi lungo qualsiasi P

Se G è aciclico (e ben numerato), il problema dei c.m. si risolve in $O(m)$? esaminando i nodi in ordine crescente. (non serve Q):

inizializz.: $p(1) = \text{nil} \quad d(1) = 0$

$p(2) = p(3) \ldots = 1 \quad d(2) = d(3) \ldots = +\infty$ (come nel caso generale)

$i = 1$) < controllo la c. di Bellman per $FS(1)$ >

$d(2) := 3$

$d(3) := 2$

$d(4) := 2$

l'etichetta del nodo 2 è già ottima perché per la buona numerazione ho che l'unico arco entrante in 2 proviene da 1

$i = 2$) $d(3) := 1 \quad p(3) := 2$

$d(6) := 8 \quad p(6) := 2$

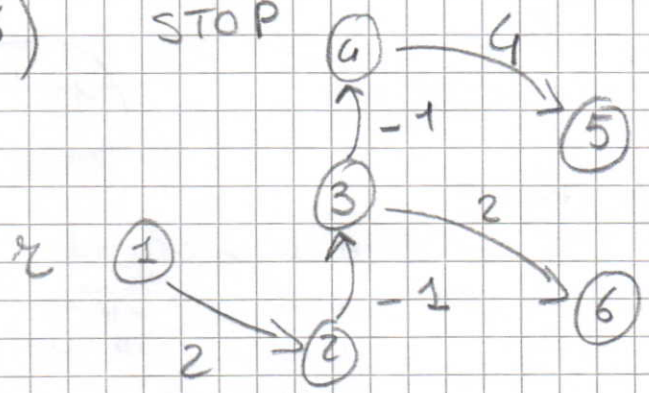
$i = 3$) $d(4) := 0 \quad p(4) := 3$ | $d(6) := 3 \quad p(6) = 3$

$d(5) := 6 \quad p(5) := 3$

$i=4)$ $d(5) := 4$ $p(5) := 4$

$i=5)$ ——

$i=6)$ STOP



$(n-1)$ iterazioni

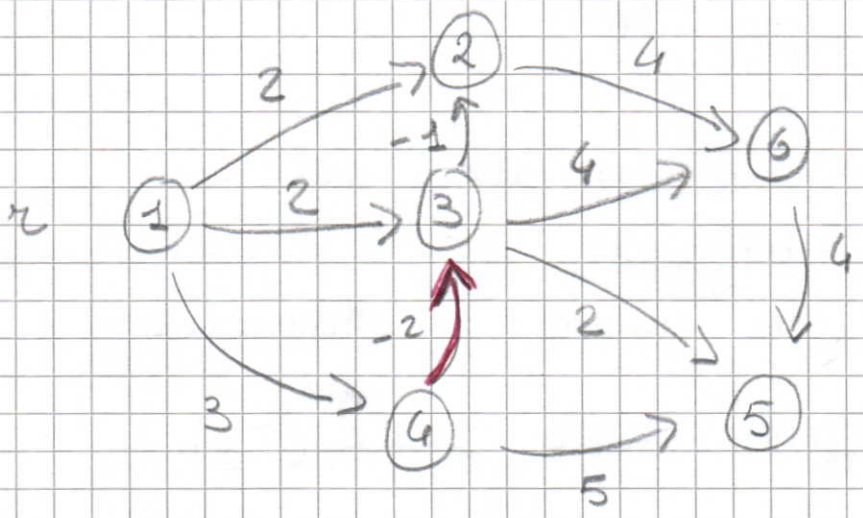
Supponiamo che parta da 1

PROCEDURE SPT_ACYCLIC (G, p, d)

```
begin
  p(1) := nil ; d(1) := 0 ;
  for i := 2 to n do begin p(i) := 1 ;
                           d(i) := M
                     end
  for i := 1 to n - 1 do
    for each (i, j) ∈ FS(i) do
      if d(i) + c_ij < d(j) then
        begin d(j) := d(i) + c_ij ;
              p(j) := i
        end
end
```

SPT_ACYCLIC è presentato per il caso $r = 1$, ma è valido $\forall r \in N$ (basta partire da r).

Se il grafo è aciclico ma non è ben numerato ? → Va trovata una buona numerazione



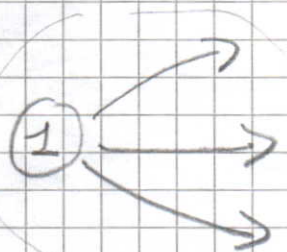
È lo stesso grafo, ma non è ben numerato!

Posso "ben numerarlo" con VISITA, in $O(m)$?

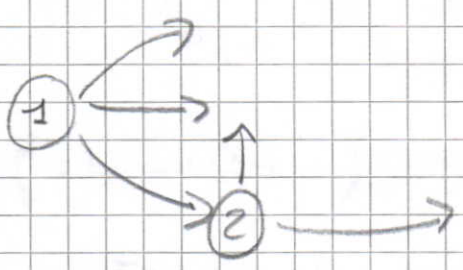
1) se G è aciclico, $\exists$ almeno un nodo i con $BS(i) = \emptyset \Rightarrow i = 1$

Se così non fosse ci sarebbe un ciclo orientato

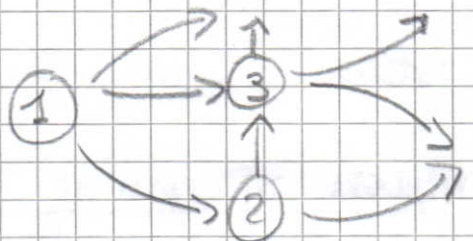
ponpo il nodo con $BS = \emptyset$ pari a 1



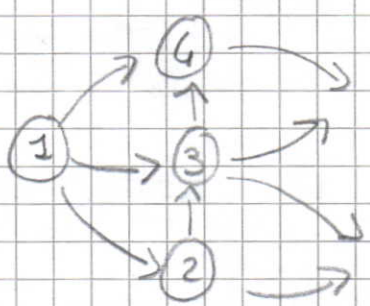
2) $\exists$ almeno un nodo i, nel sottografo ottenuto da G rimuovendo 1, con $BS(i) = \emptyset$ (perché il sottografo è aciclico) $\Rightarrow i = 2$.



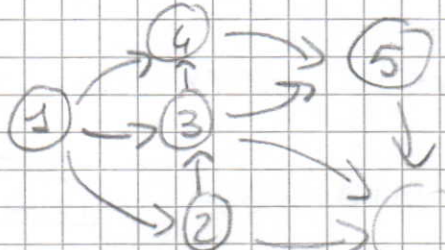
3)



4)



5)



ultimo (6)

lezione 15, 16

Il problema di flusso massimo

Maria Grazia Scutellà

"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica

Università di Pisa

(Ref: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 3.3)

Dati:

$G = (N, A)$: grafo orientato

$s \in N$: nodo sorgente

$t \in N$: nodo destinazione o pozzo

$u_{ij} > 0 \quad \forall (i,j) \in A$: capacità di (i,j)

Il problema di flusso massimo consiste nell'inviare la massima quantità di flusso da s a t in G, rispettando le capacità degli archi.

Modello matematico

Variabili decisionali:

x_{ij} : flusso lungo (i,j), $\forall (i,j) \in A$

v : valore del flusso

$$\max \; v$$

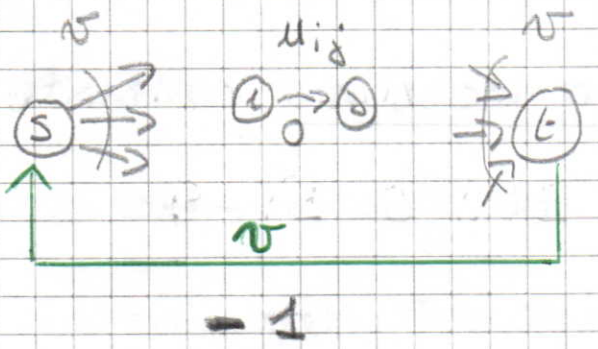
$$\sum_{(j,s)\in BS(s)} x_{js} - \sum_{(s,j)\in FS(s)} x_{sj} = -v$$

$$\sum_{(j,t)\in BS(t)} x_{jt} - \sum_{(t,j)\in FS(t)} x_{tj} = +v$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = 0 \qquad i \neq s, t$$

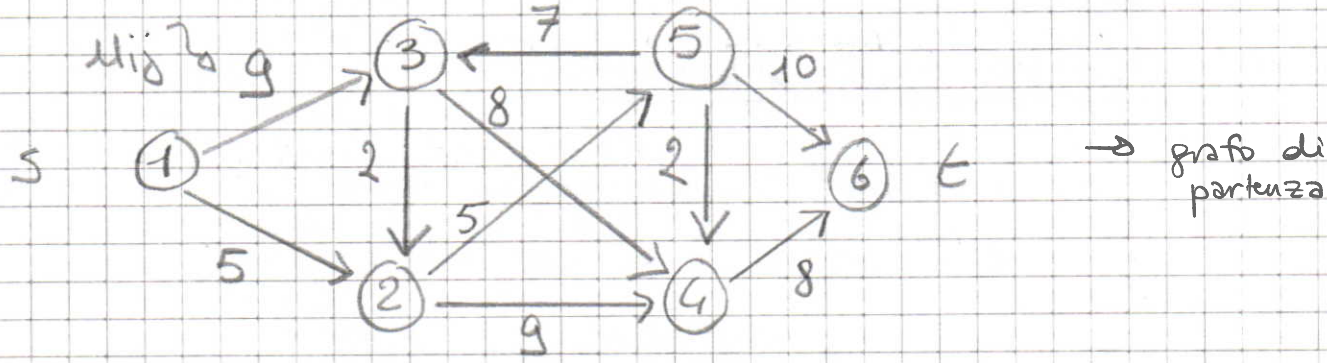
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j)\in A$$

Si tratta di un caso speciale del problema di flusso di costo minimo:



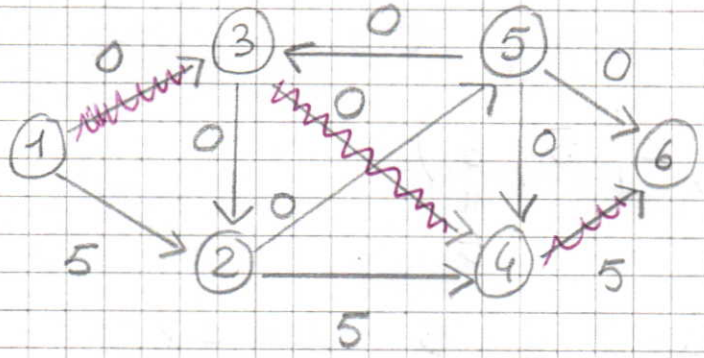
arco di ritorno

Dato un flusso ammissibile x di valore $\bar{v}$, come decidere se x è ottimo, e come migliorarlo se non lo è:



→ grafo di partenza

x:



$v = 5$

↳ flusso ammissibile

Inviamo flusso lungo il cammino:

$$P = (1, 3, 4, 6)$$

($1 = s$, $6 = t$)

quantità di flusso inviabile:

$$\theta(P, x) = \min\{9, 8, 8 - 5\} = 3$$

($u_{ij} - x_{ij}$)

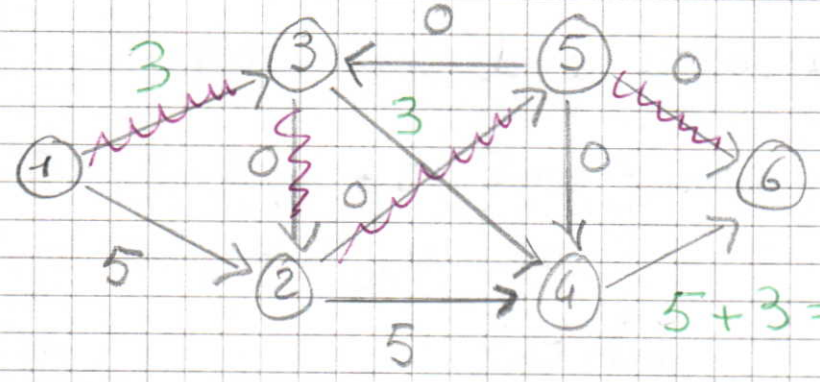
oss: $\theta(P, x) > 0$ in quanto $u_{ij} - x_{ij} > 0$ $\forall (i,j) \in A$, ovvero $x_{ij} < u_{ij}$ $\forall (i,j) \in P$.

archi non saturi

Aggiorniamo x inviando $\theta(P, x)$ unità di flusso lungo P: $x = x(\theta) = x \oplus \theta P$, con $\theta = \theta(P, x) = 3$

↓ operazione di composizione tra x e P

x:



$v = 5 + \underset{\theta}{3} = 8$

Inviamo flusso lungo il cammino:

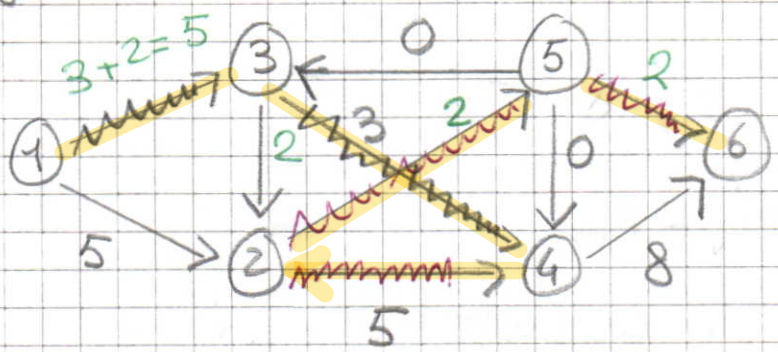
$$P = (1, 3, 2, 5, 6)$$

$1 = s$, $6 = t$

$$\theta = \theta(P, x) = \min\{9-3, 2, 5, 10\} = 2$$

OSS: $\theta(P, x) > 0$ in quanto $x_{ij} < u_{ij}, \forall (i,j) \in P$.

Aggiorniamo x:



$$v = 8 + 2 = 10$$

$2 = \theta$

Inviamo flusso lungo il cammino non orientato: $P = (1, 3, 4, 2, 5, 6)$ in cui

$1 = s$, $6 = t$

$P^+ = \{(1,3), (3,4), (2,5), (5,6)\}$ archi concordi

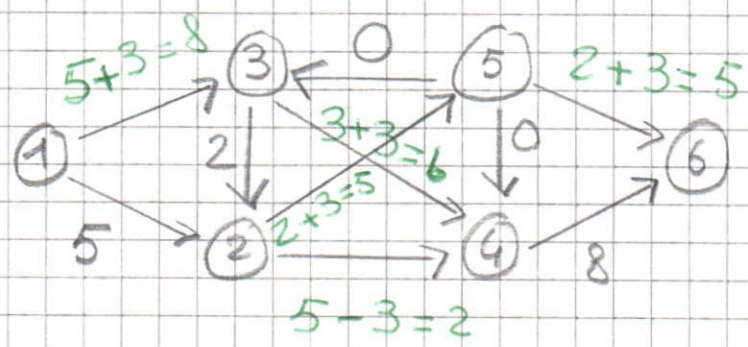
$P^- = \{(2,4)\}$ archi discordi

Lungo gli archi concordi il flusso è incrementato, lungo quelli discordi è decrementato, quindi:

$$\theta(P, x) = \min\{\min\{9-5, 8-3, 5-2, 10-2\}, \min\{5\}\} = 3$$

θ = $\min\{\min\{u_{ij} - x_{ij}\}$ archi concordi, $\min\{x_{ij}\}\}$ archi discordi

Aggiorniamo x:



$v = 10 + 3 = 13$

Definizione: Un cammino P da s a t in G, non necessariamente orientato, è un cammino aumentante se:

(1) $x_{ij} < u_{ij}$ $\forall (i,j) \in P^+$ archi concordi non saturi

(2) $x_{ij} > 0$ $\forall (i,j) \in P^-$ archi discordi non vuoti

Definizione: La capacità di un cammino aumentante P rispetto a un flusso x è:

$$\theta(P,x) = \min\left\{ \min\left\{ u_{ij} - x_{ij} : (i,j) \in P^+ \right\}, \min\left\{ x_{ij} : (i,j) \in P^- \right\} \right\} \quad (>0).$$

Rappresenta la massima quantità di flusso inviabile lungo P senza violare la capacità superiore (u_{ij}) degli archi concordi e la capacità inferiore (0) di quelli discordi.

Come determinare, se esiste, un cammino aumentante rispetto a un flusso x?

$G_x = (N, A_x)$, dove

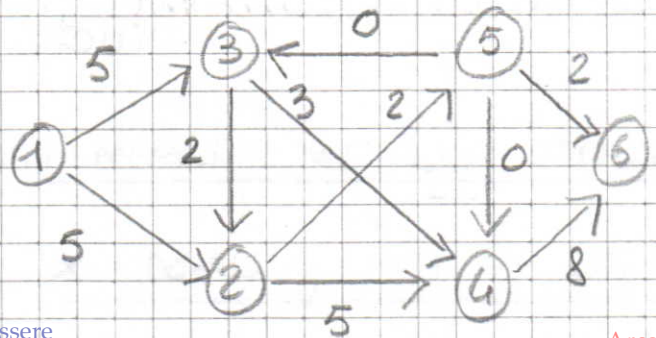
$A_x = \{(i,j) \in A : x_{ij} < u_{ij}\} \cup \{(i,j) : (j,i) \in A, x_{ji} > 0\}$

Grafo residuo rispetto a x

Contiene tutti e soli gli archi utilizzabili in un cammino aumentante rispetto a x, orientati da s a t.

esempio (cont.) penultimo flusso (visto a pag. 4)

x:

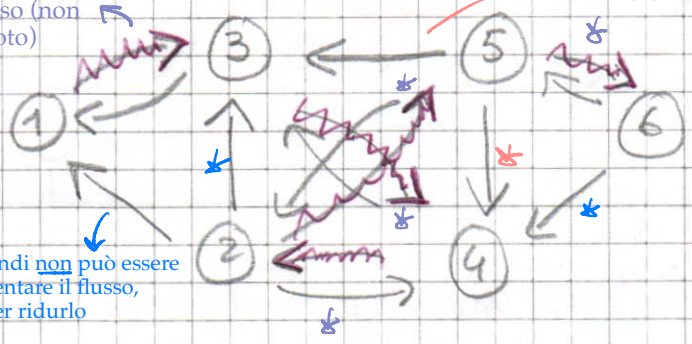


$v = 10$

Arco che può essere usato per incrementare o ridurre il flusso (non saturo, non vuoto)

Arco vuoto quindi può essere usato solo per incrementare il flusso

G_x:



Grafo residuo rispetto a x

Arco è saturo quindi non può essere usato per incrementare il flusso, eventualmente per ridurlo

$P = (\underset{\|}{1}_s, 3, 4, 2, 5, \underset{\|}{6}_t)$ è ora rappresentato in G_x come un cammino orientato da s a t.

Proprietà: I cammini aumentanti da s a t sono in corrispondenza biunivoca con i cammini orientati da s a t in G_x.

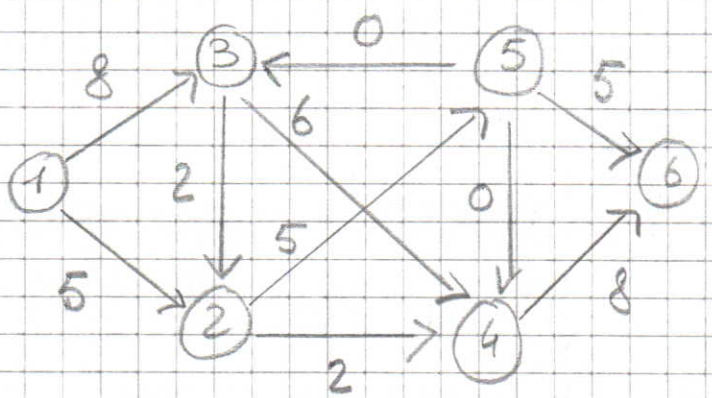
Quindi: determinare se esiste un cammino aumentante da s a t è equivalente a determinare se t è raggiungibile da s in G_x: Visita, in $O(m)$

Condizione necessaria per l'ottimalità di un flusso x: non esistono cammini aumentanti da s a t

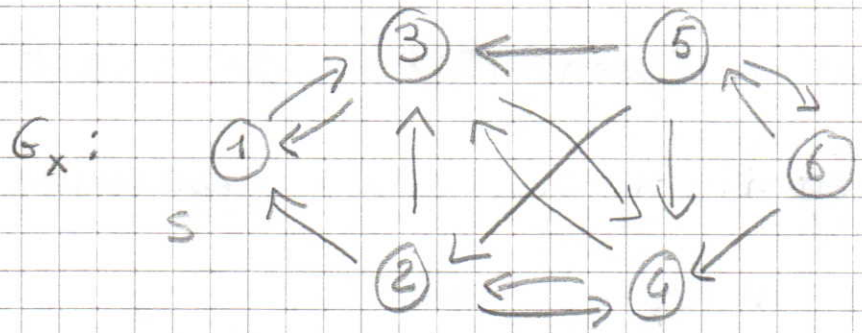
La condizione è pure sufficiente?

esempio

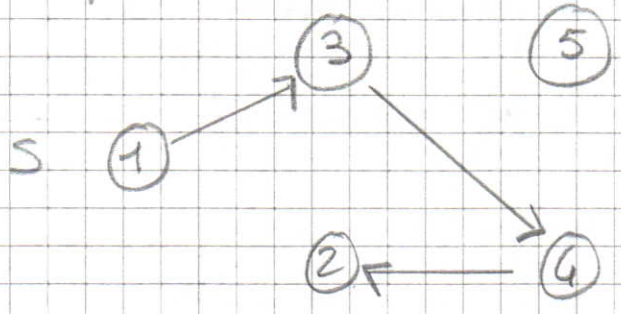
x:



$v = 13$



Eseguo la procedura VISITA a partire da s in G_x:



Albero della visita

t non è raggiungibile da s in G_x, ovvero non esistono cammini aumentanti rispetto a x

Definizione Un **taglio** (N_s, N_t) è una partizione di N ($N_s \cup N_t = N$, $N_s \cap N_t = \emptyset$) tale che $s \in N_s$, $t \in N_t$.

nell'esempio

$N_s = \{ \underset{\|}{1}, 2, 3, 4 \}$ insieme dei nodi raggiungibili da s in G_x
s

$N_t = N \setminus N_s = \{ 5, \underset{\|}{6} \}$ insieme dei nodi non raggiungibili da s in G_x
t

Definizione: Dato un taglio (N_S, N_t):

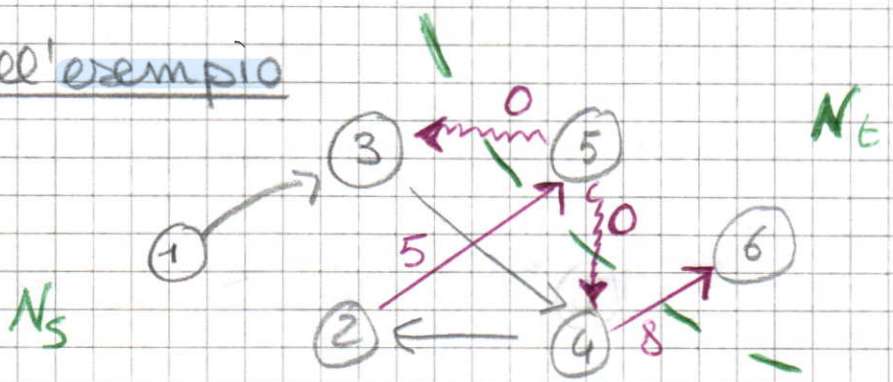
$A^+(N_S, N_t) = \{(i,j) \in A : i \in N_S, j \in N_t\}$

archi diretti del taglio

$A^-(N_S, N_t) = \{(i,j) \in A : i \in N_t, j \in N_S\}$

archi inversi del taglio

nell'esempio



$N_S = \{1,2,3,4\}$ $N_t = \{5,6\}$

$A^+(N_S, N_t) = \{(2,5),(4,6)\}$

$A^-(N_S, N_t) = \{(5,3),(5,4)\}$

Osservazione:

1) $x_{ij} = u_{ij}$ $\forall (i,j) \in A^+(N_S, N_t)$

ovvero tutti gli archi diretti del taglio sono saturi

2) $x_{ij} = 0$ $\forall (i,j) \in A^-(N_S, N_t)$

ovvero tutti gli archi inversi del taglio hanno flusso nullo

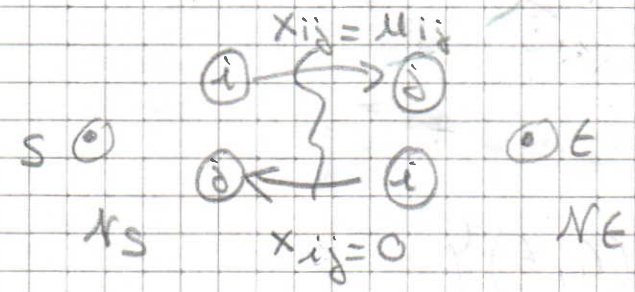
Proprietà: Dato un flusso ammissibile x, se non esistono cammini aumentanti da s a t allora esiste un taglio $(N_S, N_{\bar{t}})$ tale che:

1) $x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A^+(N_S, N_{\bar{t}})$ → archi diretti saturi

2) $x_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in A^-(N_S, N_{\bar{t}})$ → archi inversi hanno flusso nullo

Dim.: Sia N_S l'insieme dei nodi raggiunti da s durante la ricerca di un cammino aumentante in G_x ($s \in N_S$), e $N_{\bar{t}} = N - N_S$ ($t \in N_{\bar{t}}$):

↓ perché per Hp. non ci sono cammini aumentanti



- $\forall (i,j) \in A^+(N_S, N_{\bar{t}})$: $x_{ij} = u_{ij}$ altrimenti j sarebbe raggiungibile da s (ma j sta nel complementare di N_S)
- $\forall (i,j) \in A^-(N_S, N_{\bar{t}})$: $x_{ij} = 0$ altrimenti i sarebbe raggiungibile da s. □

Definizione: Dato un taglio $(N_S, N_{\bar{t}})$ e un flusso ammissibile x:

$$x(N_S, N_{\bar{t}}) = \sum_{(i,j) \in A^+(N_S, N_{\bar{t}})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_S, N_{\bar{t}})} x_{ij}$$

↓ flusso che attraversa il taglio

$$u(N_S, N_{\bar{t}}) = \sum_{(i,j) \in A^+(N_S, N_{\bar{t}})} u_{ij}$$

→ capacità del taglio

Teorema: Per ogni flusso ammissibile x di valore v e per ogni taglio (N_S, N_t):

$$v = x(N_S, N_t) \leq u(N_S, N_t)$$

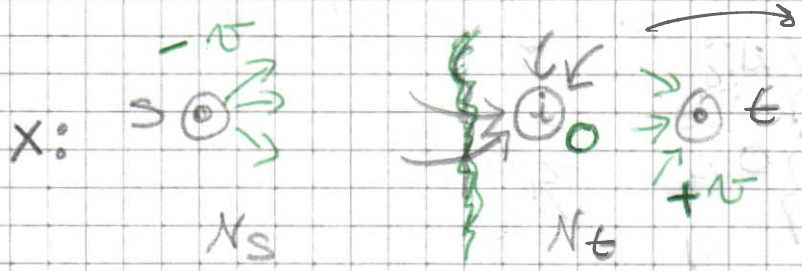
(1) (2)

Dim.

2) $x(N_S, N_t) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{(i,j) \in A^+(N_S,N_t)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_S,N_t)} x_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in A^+(N_S,N_t)} u_{ij} = u(N_S, N_t)$

(u_{ij} sopra il $\leq$; $x_{ij} \geq 0$ sopra il $\leq$)

1)



Considero un nodo a caso, i, in Nt. È un nodo di transito, quindi il bilancio è zero. Per il pozzo, invece, il bilancio è +v

Sommiamo membro a membro i vincoli di conservazione di flusso relativi a $i \in N_t$:

$$\sum_{i \in N_t} \left(\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} \right) = +v$$

in Nt ho nodi transito e il pozzo

(=) → un taglio è una partizione

$$\sum_{i \in N_t} \left(\sum_{\substack{(j,i) \in BS(i): \\ j \in N_S}} x_{ji} + \sum_{\substack{(j,i) \in BS(i): \\ j \in N_t}} x_{ji} - \sum_{\substack{(i,j) \in FS(i): \\ j \in N_t}} x_{ij} - \sum_{\substack{(i,j) \in FS(i): \\ j \in N_S}} x_{ij} \right)$$

(=)

$$\sum_{\substack{(j,i) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_S}} x_{ji} + \cancel{\sum_{\substack{(j,i) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_t}} x_{ji}} - \cancel{\sum_{\substack{(i,j) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_t}} x_{ij}} - \sum_{\substack{(i,j) \in A: \\ i \in N_t, \\ j \in N_S}} x_{ij} = x(N_S, N_t)$$

$A^+(N_S, N_t)$ $A^-(N_S, N_t)$

$\hookrightarrow x(N_S, N_t) = +v$ □

Teorema (Condizioni di ottimalità):

Un flusso ammissibile x è massimo se e solo se non esistono cammini aumentanti.

Dim.

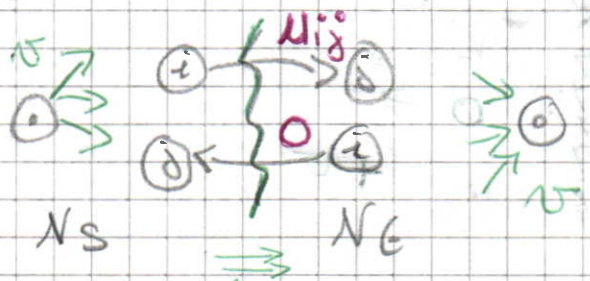
$\Rightarrow$: dimostrato

$\Leftarrow$: Per la proprietà precedente, esiste un taglio $(N_S, N_{\bar{S}})$ tale che:

1) $x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A^+(N_S, N_{\bar{S}})$

2) $x_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in A^-(N_S, N_{\bar{S}})$

x:



Per il teorema precedente:

$$v = x(N_S, N_{\bar{S}}) \overset{\text{vale con l'=}}{=} u(N_S, N_{\bar{S}})$$

Segue che non è possibile spedire altro flusso da s a t, perché la capacità di $(N_S, N_{\bar{S}})$ sarebbe violata, quindi x è un flusso massimo. □

Corollario: Un taglio $(N_S, N_{\bar{S}})$ tale che $x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A^+(N_S, N_{\bar{S}})$ e $x_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in A^-(N_S, N_{\bar{S}})$ è un **taglio di capacità minima** (taglio minimo).

Teorema (Flusso massimo - taglio minimo):

Il valore del massimo flusso da s a t è uguale alla minima capacità dei tagli (N_s, N_t).

Dim

Segue dai risultati precedenti. □

nell'esempio (cont.):

$$v = 13 = x(N_s, N_t) = \underset{\| }{5} + \underset{\| }{8} = u(N_s, N_t)$$
$$u_{25} \quad u_{46}$$

Legame con la teoria della dualità PL

(a regola non lo chiede all'esame)

variabili duali (associate ai vincoli di uguaglianza)

$$\max v$$

$$\pi_i \quad \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ +v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall i \in N$$

* (pag. succ.)

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \equiv \begin{cases} x_{ij} \le u_{ij} & \mu_{ij} \\ x_{ij} \ge 0 & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

variabili di segno, quindi non devo associargli variabili duali

variabili duali

Duale PL:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}\,\mu_{ij}$$

$$\pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \ge 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

$$\pi_t - \pi_s = 1$$ → non è esplicitato il segno di v (nel primale)

$$\mu_{ij} \ge 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema del taglio minimo

NOTA: I vincoli di = sono stati scritti in forma:

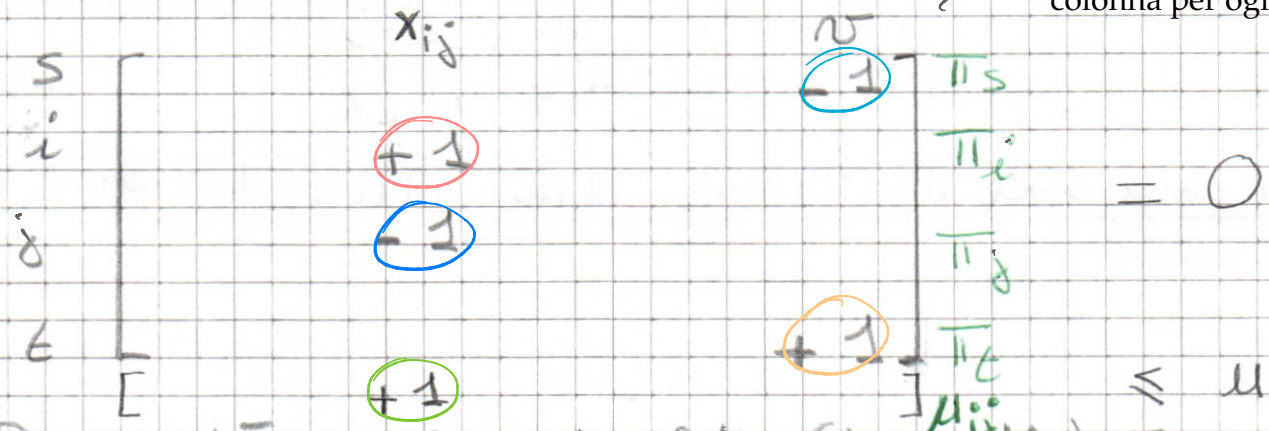
$$\sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} = 0 \quad i \neq s,t$$

$$\sum_{(s,j)\in FS(s)} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in BS(s)} x_{js} - v = 0 \quad i = s$$

$$\sum_{(t,j)\in FS(t)} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in BS(t)} x_{jt} + v = 0 \quad i = t$$

matrice dei vincoli:

Una riga per ogni nodo e una colonna per ogni arco e per v



Proprietà: Ogni taglio (N_s, N_t) è una soluzione ammissibile del problema duale, e il valore della funzione obiettivo duale è $u(N_s, N_t)$.

Dim: Basta porre

$$\Pi_i = \begin{cases} 0 & i \in N_s \\ 1 & i \in N_t \end{cases} \qquad \mu_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in A^+(N_s, N_t) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Il risultato "$v \leq u(N_S, X_\epsilon)$" segue quindi dal Teorema debole della dualità.

Si può inoltre dimostrare che il Teorema "Flusso massimo - taglio minimo" è la specializzazione del Teorema forte della dualità alla coppia di PL in esame.

Schema algoritmico basato su cammini aumentanti

Procedura CAMMINI AUMENTANTI $(G, u, s, t, \underbrace{x, N_S, N_\epsilon}_{\text{output}})$

begin

$x = 0$; * si può iniziare da qualsiasi flusso ammissibile *

while TROVA CAMMINO $(G, u, s, t, x, P, \underbrace{\theta(P,x), N_S, N_\epsilon}_{\text{output}})$ do

AUMENTA FLUSSO (x, P, θ) $\quad x = x \oplus \theta P$

end

Quindi il problema di flusso massimo ha una soluzione intera anche se non si richiede che il flusso lungo ogni arco della rete sia intero

Teorema: Se $u_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \forall (i,j) \in A$, allora CAMMINI AUMENTANTI individua un flusso massimo intero.

Dim.: Ad ogni iterazione $\theta = \theta(P,x)$ è intero positivo e x è un flusso intero.

$\theta(P,x) = \min\{\min\{u_{ij} - x_{ij} : (i,j) \in P^+\}, \min\{x_{ij} : (i,j) \in P^-\}\}$

- È vero alla prima iterazione: $u_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \forall (i,j) \in A$

$x_{ij} = 0, \quad \forall (i,j) \in A$

$x = x \oplus \ominus P$ è quindi intero

- Per induzione, se la proprietà vale all'iterazione k, vale alla $k+1$. Quindi vale per ogni iterazione.

Poiché $\ominus \geq 1$, CAMMINI AUMENTANTI esegue un numero finito di iterazioni e il flusso finale, ovvero il flusso massimo individuato, è intero. □

CAMMINI AUMENTANTI

ne esistono diversi — noi studiamo:

Algoritmo di Edmonds e Karp

→ nello schema algoritmico di CAMMINI AUMENTANTI non si dice come si fa e in base a come si fa si hanno algoritmi diversi

TROVA CAMMINO: si esegue VISITA in G_x, a partire da s, utilizzando un criterio di selezione dei nodi da Q di tipo FIFO, ovvero Q è una coda.

Quindi: ad ogni iterazione (tranne l'ultima) è individuato un cammino aumentante con il minimo numero di archi

Complessità in tempo:

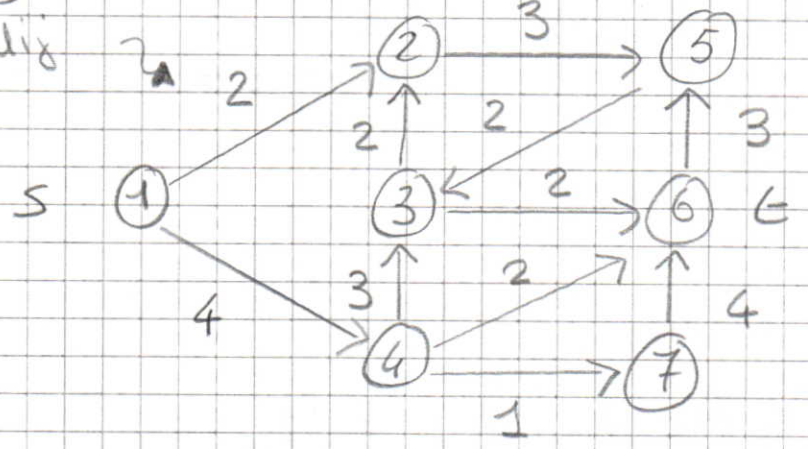
numero iterazioni: $O(mn)$ (nel worst case)
TROVA CAMMINO: $O(m)$ per it. $\Rightarrow O(m^2 n)$?
AUMENTA FLUSSO: $O(n)$ per it.

lezione 17

Esercitazione flusso massimo e cammini minimi

M. Scutellà
"Ricerca Operativa"
Università di Pisa

1)

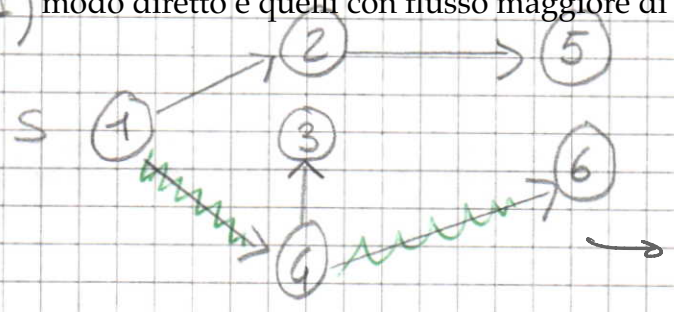


Si determini un flusso massimo da 1 a 6, mediante l'algoritmo di Edmonds e Karp, a partire dal flusso nullo.

VISITA può essere eseguita direttamente in G.

Anziché costruire a ogni iterazione il grafo residuo si può effettuare la visita direttamente su G, usando solo gli archi che possono far parte di un cammino aumentante (cioè gli archi non saturi in modo diretto e quelli con flusso maggiore di 0 in modo inverso)

it 1)



Albero della visita

Si parte dalla sorgente (1), considero gli archi non saturi della stella uscente di 1, ma siccome il flusso è nullo lo sono tutti. Quindi raggiungiamo i nodi 2, 4. Q è una coda, quindi va esaminato 2, considero gli archi non saturi della stella uscente di 2 (5). Ecc.
NB. Mi interrompo quando arrivo al nodo destinazione (6), non occorre arrivare a 7.

$Q = (\underset{\text{"}}{s}\ 2\ 4\ 5\ 3\ 6)$
$\text{"}1$

code

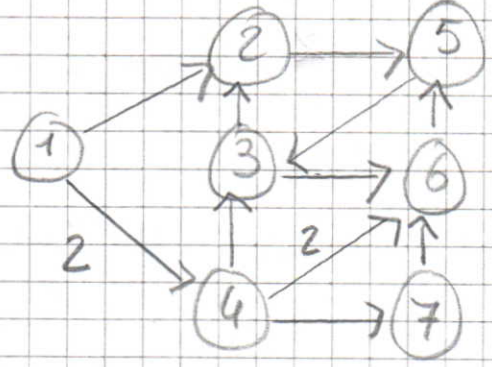
STOP appena raggiunto t

$P = (1, 4, 6)$

$\theta(P, x) = \min\{6, 2\} = 2$

Ho 2 archi concordi

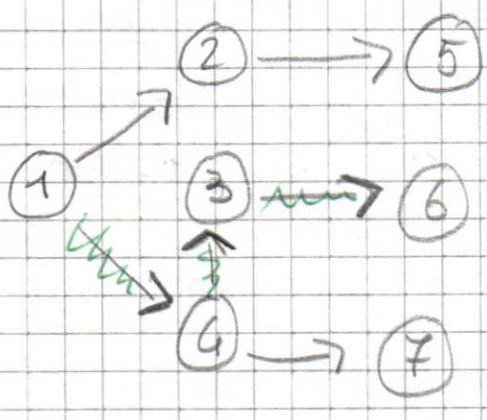
x :
↓
aggiorno il flusso x



$v = 2$

↳ in tutti gli altri archi il flusso è 0

it 2)



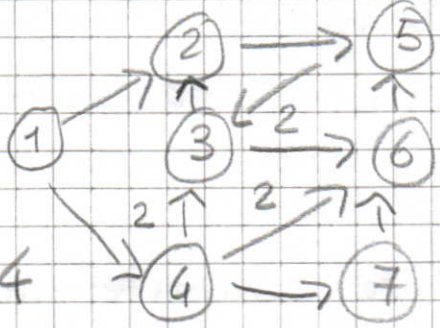
Archi 1,2 e 1,4 sono ancora non saturi. Idem 2,5. Idem 4,3 e 4,7. Invece 4,6 è saturato.

Albero della visita

$Q = (1\ 2\ 4\ 5\ 3\ 7\ 6)$

$P = (1, 4, 3, 6)$ $\quad \delta(P,x) = \min\{4-2, 3, 2\} = 2$

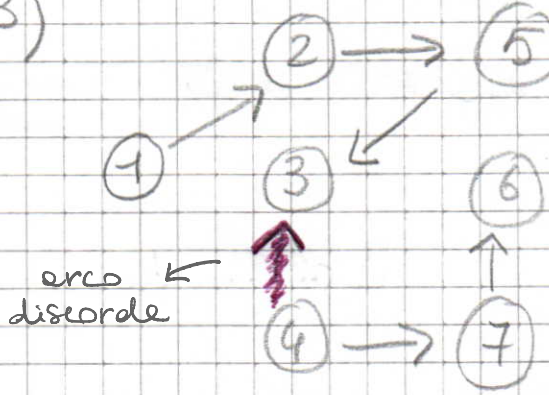
x:



$v = 2 + 2 = 4$

(aggiungo 2 lungo P)

it 3)



Albero della visita

1,4 è saturato. Da 3 non si può raggiungere 2 perché lo si è già raggiunto, inoltre 3,6 è saturato. Consideriamo allora gli archi della stella entrante in 3 a flusso positivo (se esistono): 4,3 va bene. Poi da 4 si ha che 4,6 è saturato, mentre 4,7 va bene. Infine da 7 si può raggiungere 6.

$Q = (1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 7\ 6)$

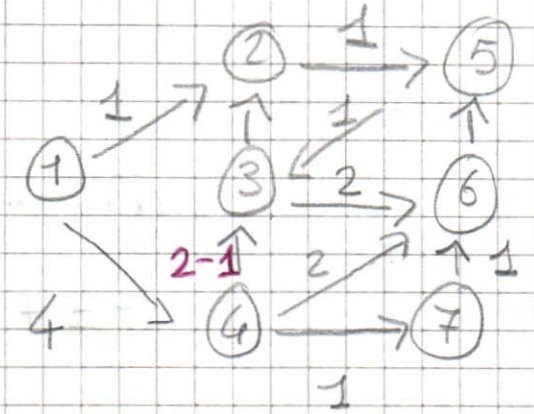
$P = (1, 2, 5, 3, 4, 7, 6)$ $\quad \delta(P,x) = \min\{2, 3, 2, 2, 1, 4\} = 1$

x_{43}

OSS: cammini aumentanti di cardinalità non decrescente (2, 3, 6 archi)

it 1 it 2 it 3

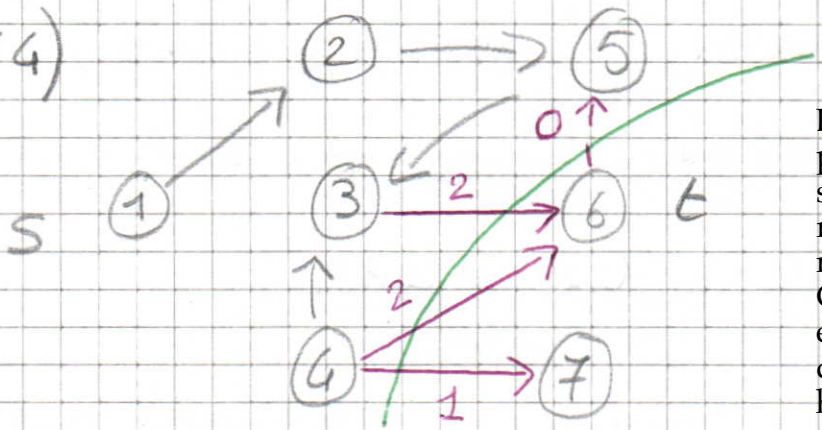
x:



$v = 4 + 1 = 5$

OSS: flusso intero a ogni iterazione

it 4)



Da 4 non si può andare altrove perché considerando gli archi della stessa uscente avrei 3, che ho già raggiunto, 6, ma l'arco è saturo, e 7, ma anche questo arco è saturo. Considerando gli archi della stella entrante con flusso positivo avrei 1, che ho già raggiunto. Dunque non ho raggiunto 6.

STOP: non esistono cammini aumentanti da sat; il flusso x di valore 5 è un flusso massimo.

↓ dell'it. 3

$(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7\})$ taglio di capacità minima

s t

$u(N_s, N_t) = u_{36} + u_{46} + u_{47} = 2 + 2 + 1 = 5 = v$

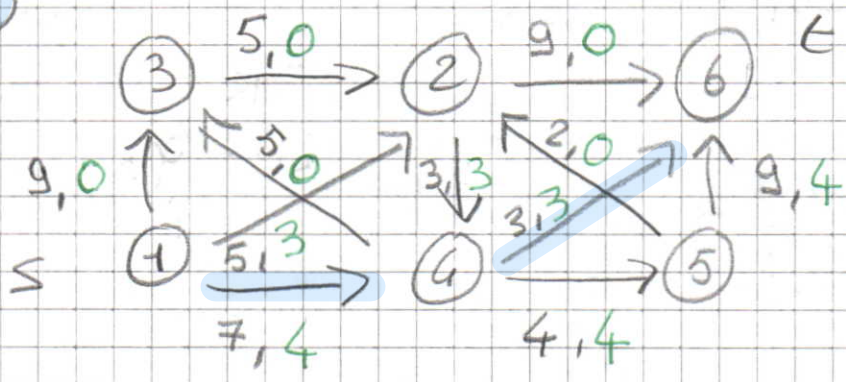
archi diretti del taglio

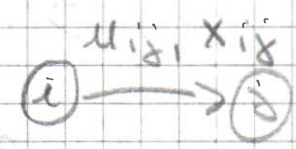
OSS:

1) $x_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A^+(N_s, N_t) = \{(3,6), (4,6), (4,7)\}$

2) $x_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in A^-(N_s, N_t) = \{(6,5)\}$

(2)



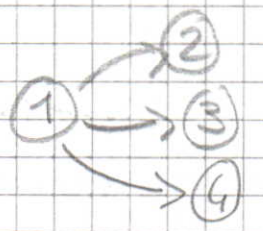


$v = 7$

Si determini un flusso massimo da 1 a 6, mediante l'algoritmo di Edmonds e Karp, a partire dal flusso dato di valore $v = 7$.

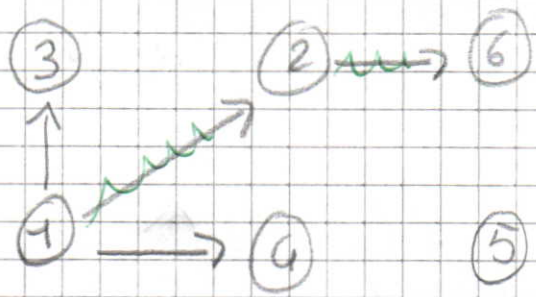
Ordine di visita archi stella uscenti:

es.



ordine crescente modi testo

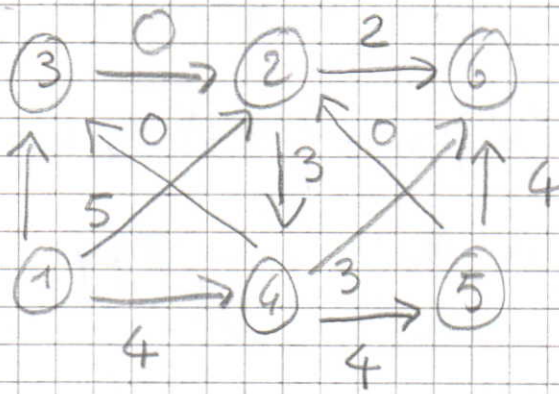
it 1)



Albero della visita

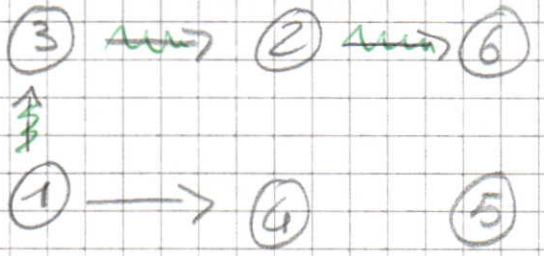
$\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 6)$

$P = (1, 2, 6)$ $\quad \delta(P, x) = \min\{5-3, 9-4\} = 2$



$v = 7 + 2 = 9$

it 2)

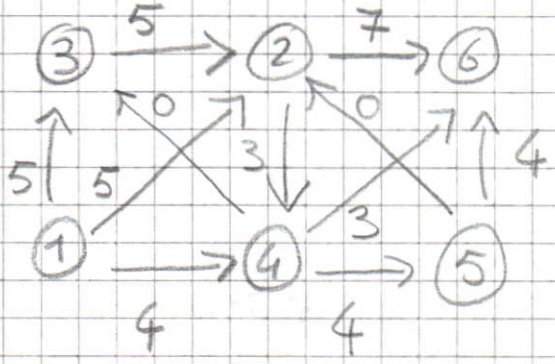


Albero della visita

$Q = (1\ 3\ 4\ 2\ 6)$

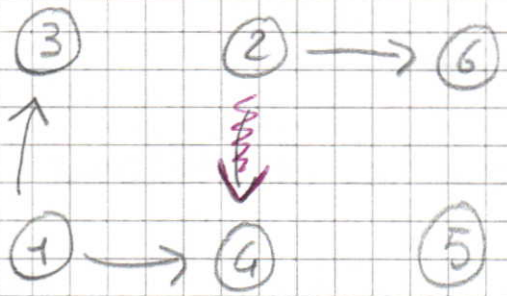
$P = (1, 3, 2, 6)$ $\quad \theta(P,x) = \min\{9, 5, 9-2\cdot 4 = 5\}$

x :



$v = 9 + 5 = 14$

it 3)



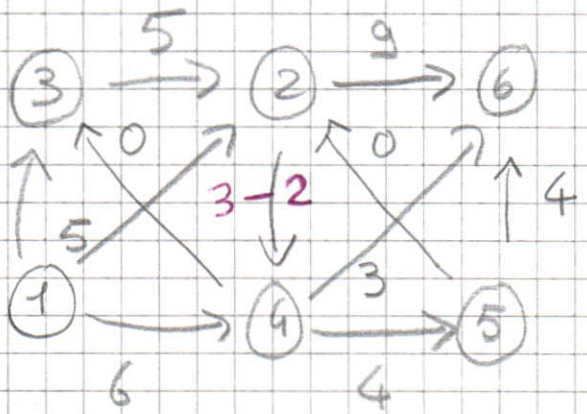
Albero della visita

$Q = (1\ 3\ 4\ 2\ 6)$

$P = (1, 4, 2, 6)$ $\quad \theta(P,x) = \min\{7-4, 3, 9-7\cdot 4 = 2\}$

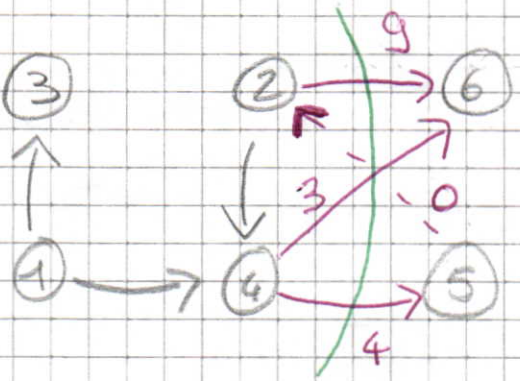
$3 = x_{24}$

x :



$v = 14 + 2 = 16$

it 4)



STOP: x è un flusso massimo, di valore 16, mentre $(N_S, N_{\bar{t}}) = (\{1,2,3,4\}, \{5,6\})$ è un taglio di capacità minima.

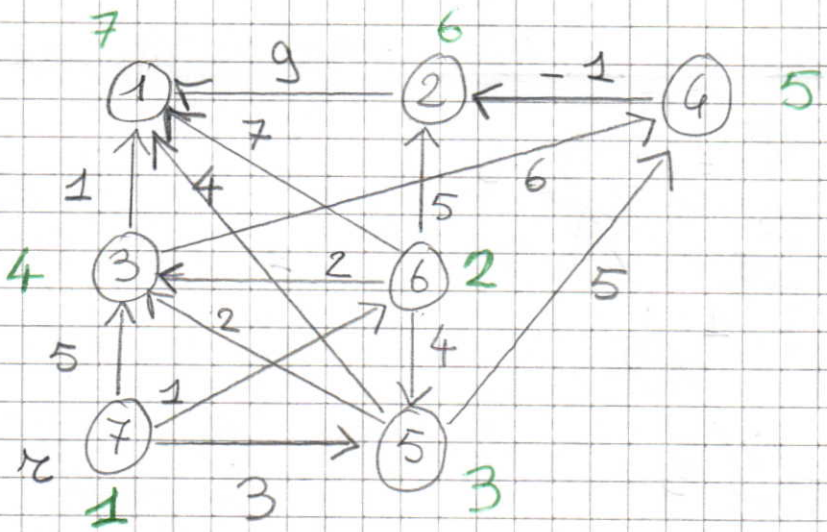
$$u(N_S, N_{\bar{t}}) = u_{26} + u_{45} + u_{46} = 9 + 4 + 3 = 16 = v$$

Come cambierebbero il flusso massimo e il taglio minimo determinati se $u_{26} = 10$? → riottimizzazione

1) Si potrebbe inviare un'unità di flusso lungo $P = (1,4,2,6)$, ottenendo un flusso (massimo) di valore $v = 17$.

2) $(\{1,2,3,4\}, \{5,6\})$ rimarrebbe un taglio minimo, ma l'algoritmo determinerebbe $(\{1,3\}, \{2,4,5,6\})$, anch'esso di capacità 17.

3



Determinare un albero dei cammini minimi di radice 7. Algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo?

→ corretto e ben numerato

* Rinumerando i nodi si dimostra che il grafo è aciclico ($i < j \quad \forall (i,j) \in A$): SPT-Acyclic.

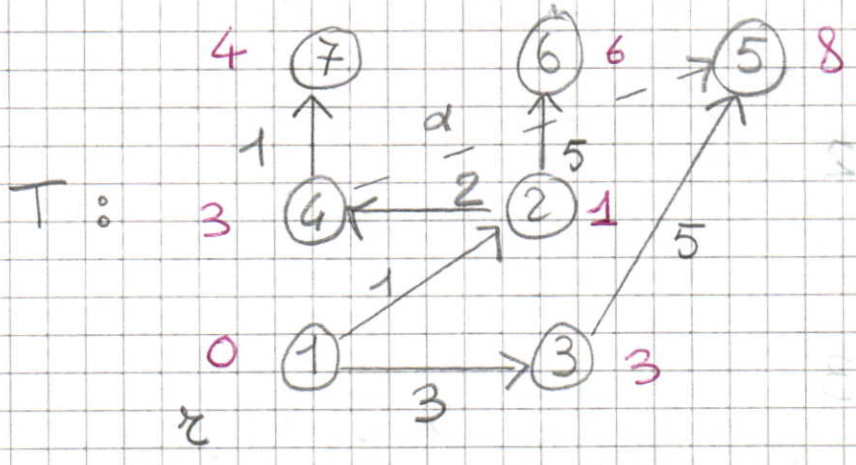
$M = (n-1) c_{max} + 1 = 55$

nuova numerazione

it	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)
0	nil	1	1	1	1	1	1	0	55	55	55	55	55	55
1	nil	1	1	1	1	1	1	0	1	3	5	55	55	55
2	nil	1	1	2	1	2	2	0	1	3	3	55	6	8
3	nil	1	1	2	3	2	3	0	1	3	3	8	6	7
4	nil	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
5	nil	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
6	nil	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4

* Il nodo 7 non ha archi entranti, quindi gli attribuisco il valore 1. Senza considerare gli archi uscenti da questo nodo che ora chiamò 1, noto che il nodo 6 ha a sua volta la proprietà di non avere archi entranti, allora il nodo 6 lo pongo uguale a 2. Ecc.

Albero dei cammini minimi (nuova numerazione):



Si consideri il caso in cui il costo di (3,6) (arco (4,5)) sia un parametro reale α: per quali valori di α T resta un albero dei cammini minimi di radice r (arco 1)?

T resta un albero dei cammini minimi se e solo se valgono le condizioni di Bellman.

Poiché $(4,5) \notin T$, se e solo se

$$d(4) + \alpha \geq d(5) \iff \alpha \geq 5$$

$$3 \qquad\qquad 8$$

Per $\alpha = 5$: (4,5) può sostituire (3,5) in T, che non è quindi l'unico albero ottimo.

Per $\alpha > 5$: ogni arco non in T soddisfa le condizioni di Bellman in forma di disuguaglianza stretta, quindi T è l'unico albero ottimo.

In somma, controllate tutta la FSC(5) (Incidente degli archi esterni a T al nodo 5)

ATTENZIONE !!! Controllare anche FSC(5) nel GRAFO perché se δ troppo piccolo il T dei c.m. potrebbe avere (5,j), cosa che ora non ha (limit. inf. di δ)

Credo che questo sia più corretto: devo 1) controllare BS(5) per capire per quali valori di δ $d(3)+\delta \leq d(i)+c_{i,5}\ \forall i \in BS(5)$. 2) Devo controllare la FSC(5) (Nell'albero, non nel grafo !!!!!) per controllare che $\forall j \in FSC(5)$ nell'albero $d(j) \leq d(i)+c_{i,j}\ \forall i \in BS(j)$ (In 1) mina δ: $d(3)+\delta \leq d(i)+c_{i,5}\ \forall i \in BS(5)$, cioè $\delta \geq c_{3,5}$, ma se $\delta > c_{3,5}$, δ potrebbe non andar bene $\forall j \in FS(5)$ Controllare!!)

NB. Se fosse stato il costo dell'arco 3,5 a essere un parametro delta, allora per vedere quando T resta un albero dei cammini minimi devo procedere come segue: l'etichetta di 5 cambia e diventa d[5]=3+delta (=predecessore nell'albero+delta). Devo controllare le condizioni di bellman per gli archi 4,5 e 5,6 (archi incidenti nel nodo 5, oltre a 3,5). Per 5,6 deve valere che: d[5]+costo(5,6)>=d[6] ecc.

?

Il problema di flusso di costo minimo

- $G = (N, A)$ rete di flusso
- c_{ij}, $\forall (i,j) \in A$ costo di (i,j)
- $u_{ij} > 0$, $\forall (i,j) \in A$ capacità superiore di (i,j)
- b_i, $\forall i \in N$ bilancio del nodo i

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad , i \in N$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad , (i,j) \in A$$

Studiamo condizioni di ottimalità per il problema: dato un flusso ammissibile x, x è ottimo? (ovvero: è di costo minimo?)

Sia $G_x = (N, A_x)$ il grafo residuo rispetto a x, definito come per il problema di flusso massimo:

gli associo questo costo

archi che posso usare per incrementare il flusso (non saturi)

$\forall (i,j) \in A$ t.c. $x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow (i,j) \in A_x \quad c'_{ij} = c_{ij}$

$\forall (i,j) \in A$ t.c. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (j,i) \in A_x \quad c'_{ji} = -c_{ij}$

archi che posso usare per ridurre il flusso

NB: G_x è ora pesato, in quanto ai suoi archi è associato un costo di percorrenza.
(Differenza rispetto al problema di flusso massimo)

Un ciclo aumentante (orientato) è un ciclo in G_x.

La massima quantità di flusso inviabile lungo un ciclo aumentante C è:

$$\theta(C, x) = \min \{ (u_{ij} - x_{ij}) : (i,j) \in C^+, \; x_{ij} : (i,j) \in C^- \}$$

con:

C^+: archi diretti del ciclo (in G)

C^-: archi inversi del ciclo (in G)

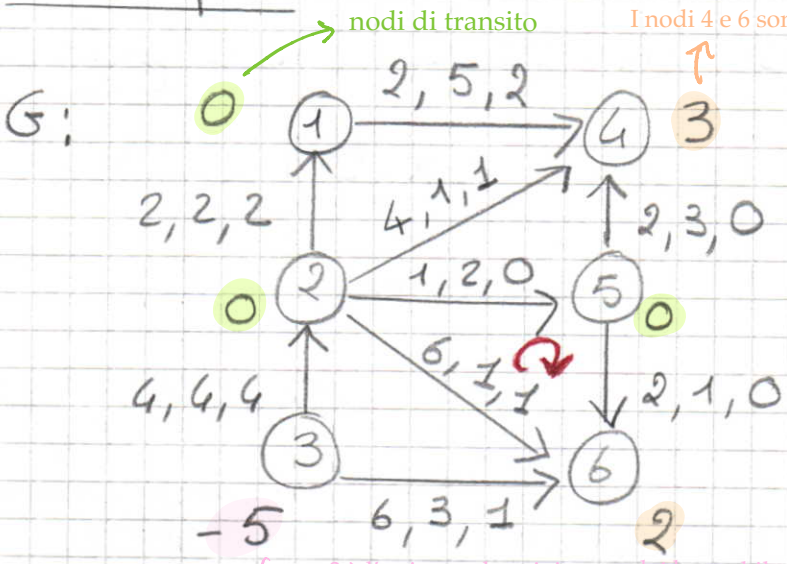
< considerando l'orientamento dato dal verso di percorrenza in G_x >

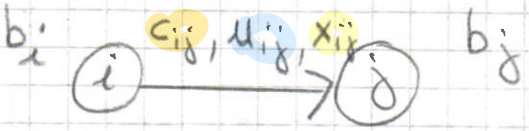
Proprietà: Se x è un flusso ammissibile e C è un ciclo in G_x (ciclo aumentante),

$$x(\theta) = x \oplus \theta C \quad , \quad 0 \le \theta \le \theta(C, x)$$

è ancora un flusso ammissibile □

Esempio

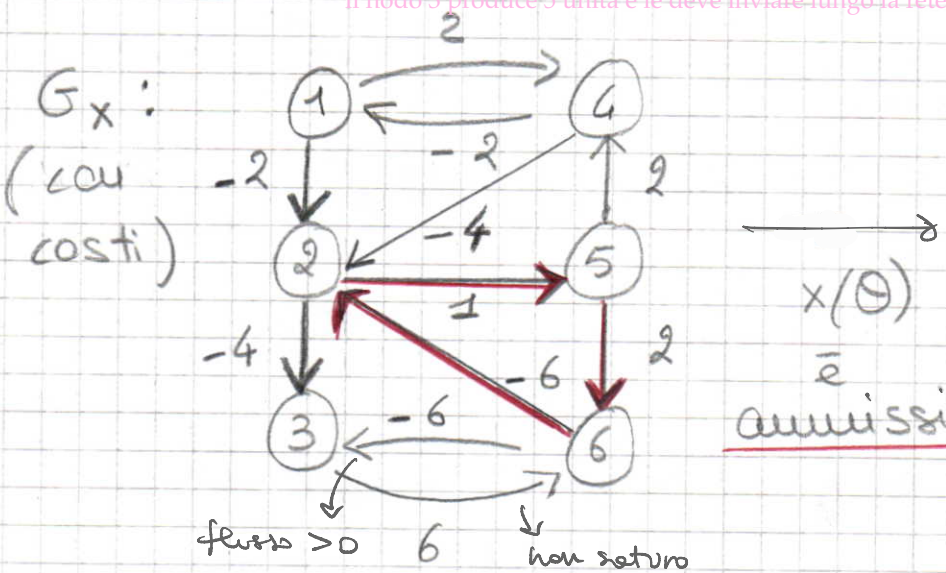




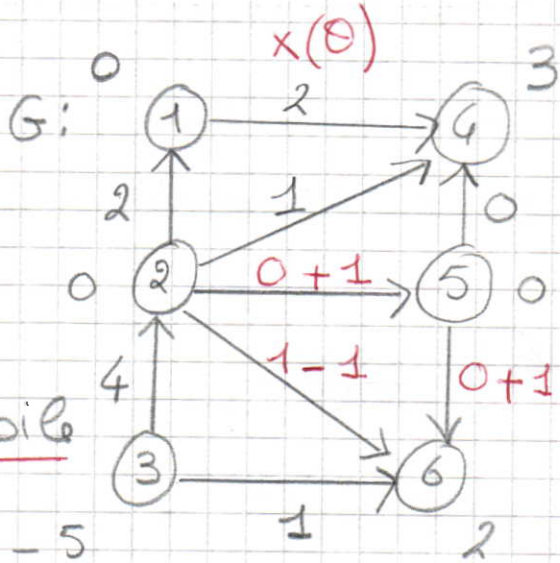
Ad ogni arco i,j associamo il costo unitario, la capacità superiore del collegamento e l'elemento corrispondente del flusso ammissibile x dato

$$cx = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij} = 40$$

è migliorabile?



$x(\theta)$ è ammissibile



ciclo aumentante C (uno dei possibili)

$$\hookrightarrow \theta(C, x) = \min\{\underbrace{2}_{u_{25}-x_{25}}, \underbrace{1}_{u_{56}-x_{56}}, \underbrace{1}_{x_{26}}\} = 1 = \theta$$

Qual è il costo di $x(\theta)$?

Se $c(C) = \sum_{(i,j) \in C^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) C^-} c_{ij}$ è il costo di C

(ovvero è la somma dei costi degli archi in G_x), allora:

moltiplicazione di numeri

$$c^x(\theta) = c(x \oplus \theta C) = c^x + \theta c(C)$$

Quindi: se $c(C) < 0$, ovvero C è un ciclo aumentante negativo, allora $c^x(\theta) < c^x$, e pertanto x non è un flusso di costo minimo.

Condizione necessaria per l'ottimalità di un flusso ammissibile x: non devono esistere cicli aumentanti negativi in G_x

Esempio

$c(C) = -3$, quindi x non è un flusso di costo minimo.

Infatti $c^x(\theta) = c^x + \theta c(C) = 40 + 1(-3) = 37$

La condizione è anche sufficiente?

Serve il seguente risultato:

Teorema di decomposizione di flussi:

Siano x e x' flussi ammissibili in G.

Allora esistono K cicli orientati in G_x, $C_1, C_2, \dots C_K$, con $K \leq m$ (numero di archi della rete), tali che

$$x' = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \theta_2 C_2 \oplus \dots \oplus \theta_K C_K$$

con $0 < \theta_i \leq \theta(C_i, x)$ $\quad i = 1, \dots, K$

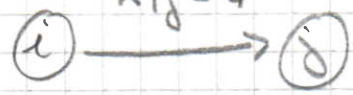
Ovvero: un qualsiasi flusso ammissibile x' è ottenibile da un qualsiasi (altro) flusso ammissibile x inviando flusso lungo al più m cicli orientati rispetto a x.

Dim. (costruttiva) → NO

Sia $A_x^+ = \{(i,j) : x'_{ij} > x_{ij}\}$ $\quad d_x(i,j) = x'_{ij} - x_{ij} > 0$ (capacità)

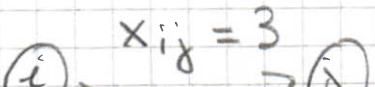
e $A_x^- = \{(j,i) : x'_{ij} < x_{ij}\}$ $\quad d_x(j,i) = x_{ij} - x'_{ij} > 0$

esempio:

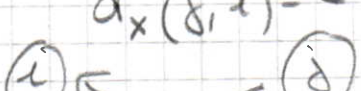
se 

$x'_{ij} = 7$

in A_x^+: 

se 

$x'_{ij} = 2$

in A_x^-: 

(devo togliere un'unità di flusso)

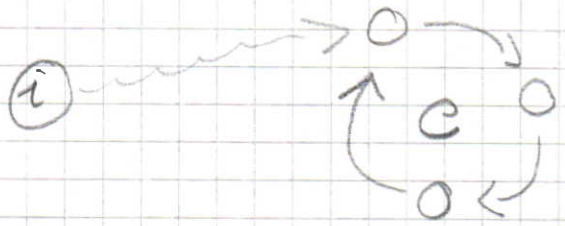
Sia $\bar{G}_x = (N, A_x^+ \cup A_x^-)$: sottografo di G_x

Proprietà: se un nodo in $\bar{G}_x$ ha un arco entrante, deve avere almeno un arco uscente.

Quindi (procedura per correggere x in x'):

- scelgo un nodo i avente almeno un arco uscente in $\bar{G}_x$ (se non ne esistono STOP: $x = x'$)
- visito $\bar{G}_x$ a partire da i fino a visitare un nodo già visitato: ciclo

aumentante rispetto a x (c)



- invio la quantità di flusso
  $\theta = \min\{d_x(i,j) : (i,j) \in c\}$ lungo c
- elimino da $\bar{G}_x$ ogni arco (i,j) tale che $x_{ij} = x'_{ij}$ dopo l'invio (almeno uno)
- aggiorno la capacità $d_x(i,j)$ e itero finché x è stato convertito in x'

? **O(m) invii lungo cicli aumentanti rispetto a x!**

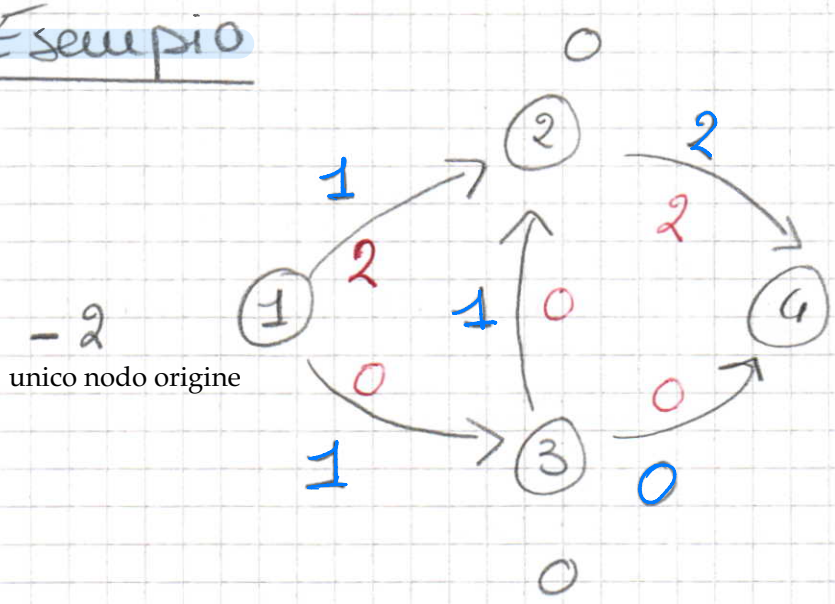
□

→ ovvero ho eliminato ogni arco da $\bar{G}_x$

Esempio

(I costi qui non entrano in gioco)

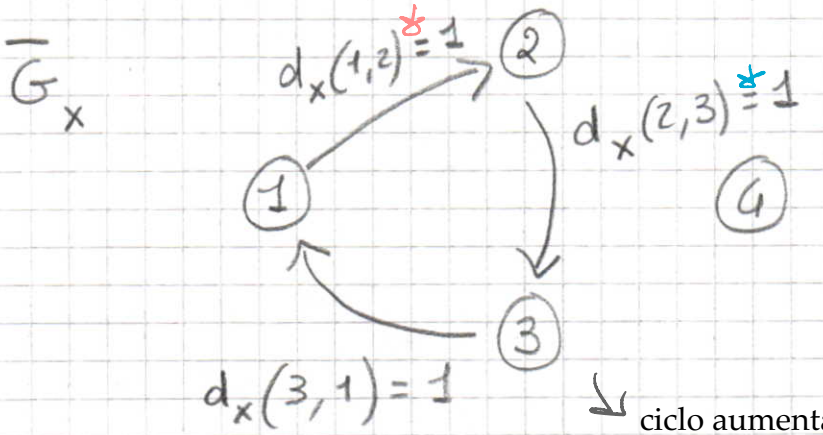
$u_{ij} = 3 \quad \forall (i,j)$



x

x'

Convertiamo x in x':



Per trasformare x in x' vado a considerare gli archi in cui c'è un diverso flusso, quindi tutti tranne 2,4 e 3,4

- differenza tra il flusso di arrivo (quello in x') e quello di partenza (in x)
- arco su cui devo fare un'operazione di riduzione di flusso per trasformare x in x', allora metto un arco orientato in modo inverso e gli associo una quantità pari alla differenza dei flussi

- ciclo aumentante rispetto a x; invio $\theta = \min\{1, 1, 1\} = 1$ lungo C

- così facendo converto x in x': STOP

(rimuovo i 3 archi da $\bar{G}_x$)

Segue il seguente

Teorema: Un flusso ammissibile x è di costo minimo **sse** non esistono cicli aumentanti negativi rispetto a x

Dim.

solo se (già dimostrato)

se (sufficienza): supponiamo non esistano cicli aumentanti negativi rispetto a x. Sia x' un qualsiasi altro flusso ammissibile in G; per il Teorema di decomposizione di flussi

$$x' = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \dots \oplus \theta_K C_K$$

quindi

$$c x' = c x + \underbrace{\theta_1 c(C_1)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{\theta_K c(C_K)}_{\geq 0 \text{ per ipotesi}}$$

Quindi $c x' \geq c x$, cioè x è un flusso di costo minimo. □

Le condizioni di ottimalità suggeriscono il seguente algoritmo:

~~2.6.3~~ Algoritmo basato su cancellazione di cicli

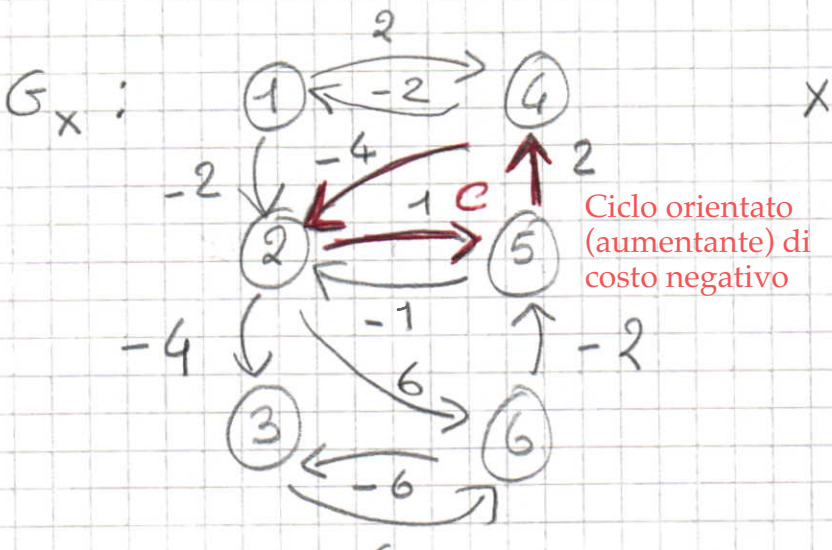
~~pag. 115~~

- Determina, se esiste, un flusso ammissibile
  - x (vedremo che fare nel caso in cui non ci sia fornito, pag. 13)
- Finché esistono cicli negativi:
  - determina un ciclo negativo, C, in G_x
  - sia $\theta = \theta(C, x)$ la massima quantità di flusso inviabile lungo C
  - aggiorna $x \rightsquigarrow x := x \oplus \theta C$

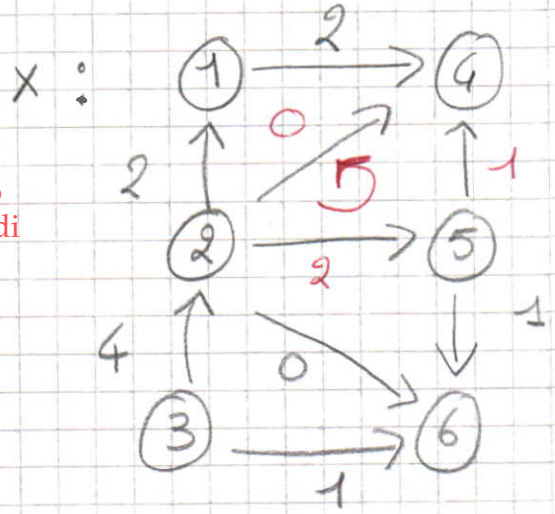
(procedura Cancella-Cicli) ("cancella" C)

~~pag. 116~~

Esempio (cont.)



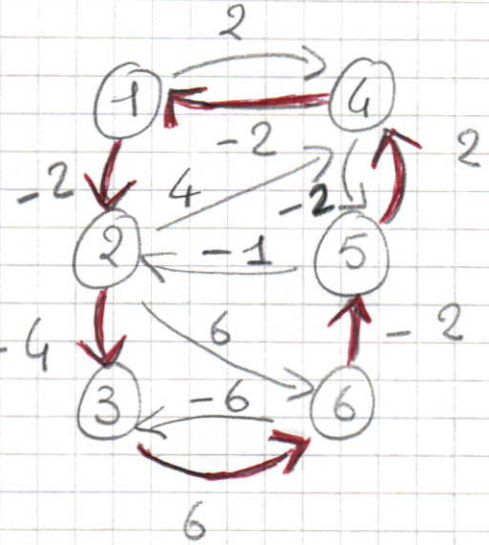
Ciclo orientato (aumentante) di costo negativo



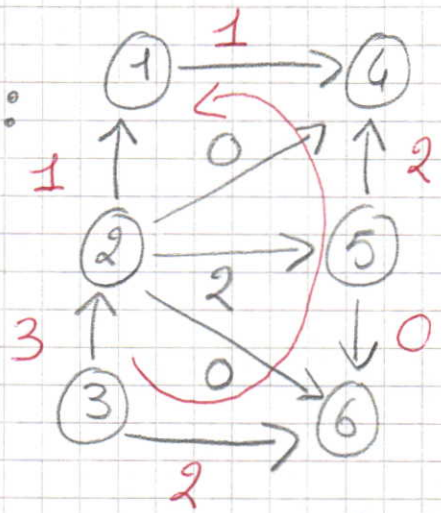
$c(C) = -1$ $\theta = 1$

$cx = 37 + \theta(-1) = 36$

G_x:



x:

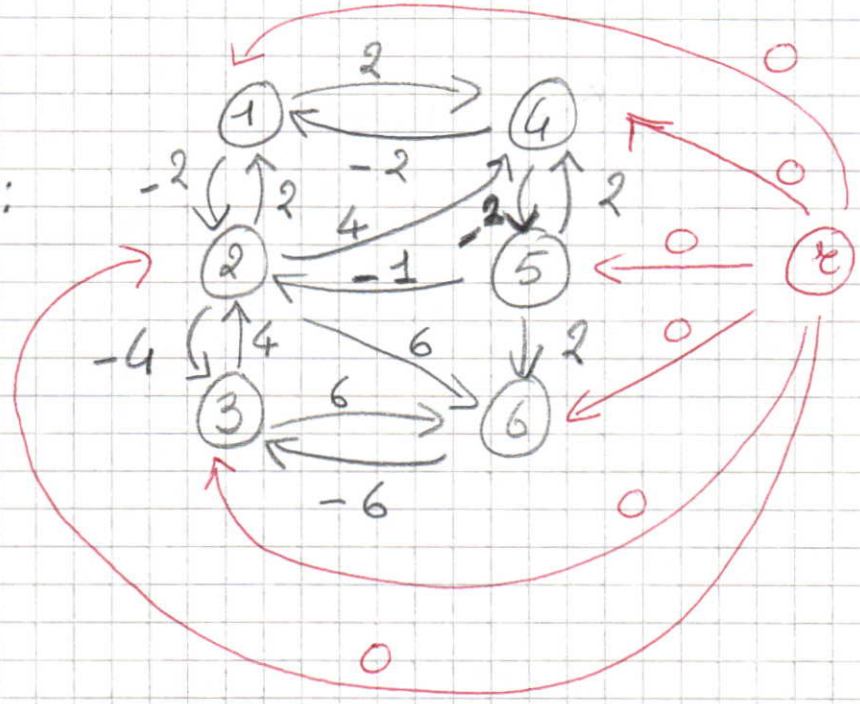


$c(C) = -2 \quad \theta = 1$

$c_x = 36 + \theta(-2) = 34$

Esistono altri cicli negativi in G_x? Come determinarli? algoritmo di Bellman per cammini minimi avente come nodo t l'insieme dei nodi di G:

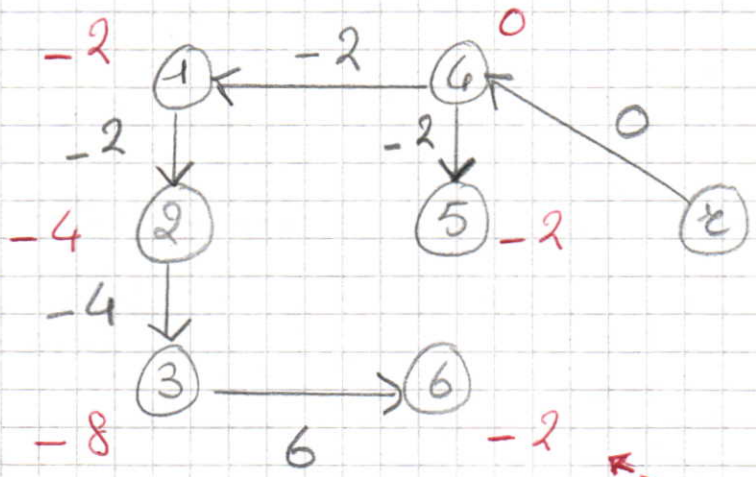
G_x:



Cerchiamo un albero dei cammini minimi di radice r in G_x: esiste sse non esistono cicli negativi in G_x sse l'algoritmo di Bellman aggiorna l'etichetta di ogni nodo al più (n-1) volte:

$Q = (4\ 1\ 2\ 5\ 3\ 6)$ coda

T_r:



etichette di Bellman (ottime)

Poiché le etichette associate ai nodi soddisfano le condizioni di Bellman, T_r è un albero dei cammini minimi di radice r, e quindi non esistono cicli aumentanti di costo negativo: STOP il flusso x di costo $c x = 34$ è un flusso di costo minimo

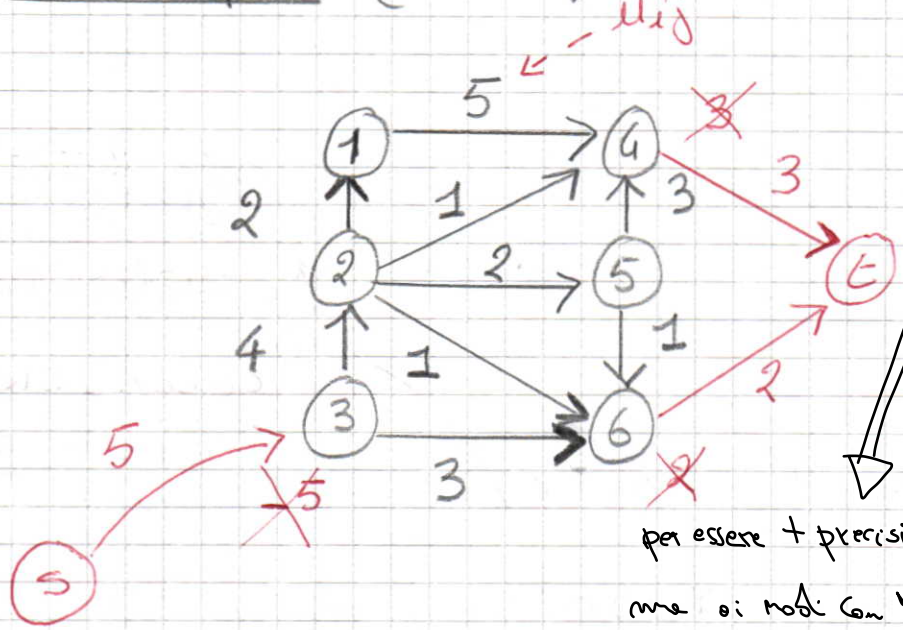
Dettagli implementativi:

1) a livello di svolgimento degli esercizi, i cicli negativi possono essere cercati per ispezione, salvo che all'ultima iterazione

2) i cicli negativi possono essere cercati direttamente in G (come per il problema di flusso massimo)

3) come determinare, se esiste, un flusso ammissibile iniziale? mediante un algoritmo di flusso massimo:

Esempio (cont.)



Aggiungo un nodo sorgente fittizio e uno fittizio destinazione. Li collego nel seguente modo: s lo collego ai nodi origine del grafo e t ai nodi destinazione del grafo. Associo all'arco s,3 una capacità pari a -bilancio(nodo 3). Associo agli archi 4,t e 6,t una capacità pari, rispettivamente, a bilancio(nodo 4) e bilancio(nodo 6).

per essere + precisi, non collegherò a origine e destinazione, ma ai nodi con bilancio $\neq 0$

In G esiste un flusso ammissibile sse il flusso massimo da s a t, nel grafo esteso,

ha valore $v = 5 = \sum_{i \in O} (-b_i) = \sum_{i \in D} b_i$

Se v<5 non esiste un flusso ammissibile, v>5 non si può avere (Ns={s} e Nt il suo complementare è un taglio, quindi 5 non si può inviare)

nodi offerta — nodi domanda

< Esercizio : determinare un flusso massimo da s a t, e verificare che $v = 5$ >

Proprietà (integralità dei flussi) : se u_{ij} è intero $\forall (i,j) \in A$, allora ogni flusso x determinato dall'algoritmo è intero ($\theta = \theta(C, x) \geq 1$ intero ad ogni iterazione)

e b_i intero per ogni nodo i

NO

Complessità computazionale in tempo ($u_{ij} \in \mathbb{Z}^+$)

Sia $\bar{U} = \max \{ u_{ij} : (i,j) \in A \}$

sia $\bar{C} = \max \{ |c_{ij}| : (i,j) \in A \}$

$\forall$ flusso ammissibile x :

$$-m\bar{U}\bar{C} \leq cx \leq m\bar{U}\bar{C}$$

$O(n m^2 \bar{U} \bar{C})$ complessità di CANCELLA_CICLI

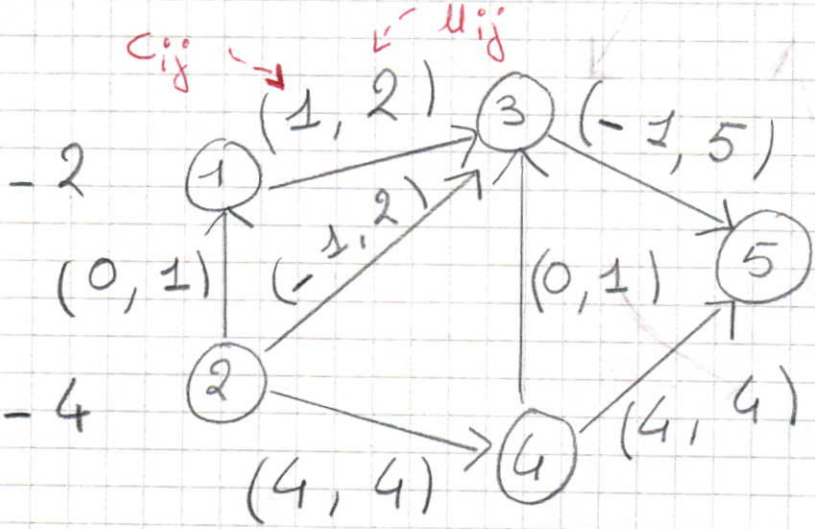
Se $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ $\forall (i,j)$: $c(C) \geq -1$ intero $\forall C$ ciclo negativo

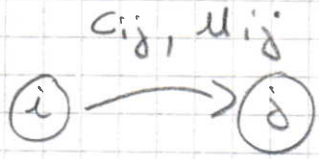
Poiché $\theta \geq 1$ ad ogni iterazione ; il costo della funzione ob. diminuisce di almeno 1 ($\theta c(C)$) ad ogni iterazione :

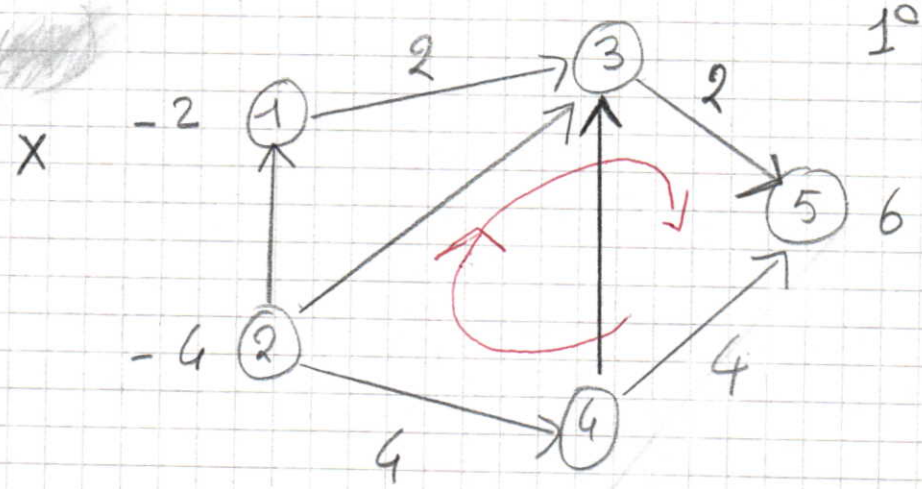
$cx := cx + \theta c(C)$

costo per iterazione : $O(m)$ — # iterazioni : $O(m\bar{U}\bar{C})$ alg. Bellman

Esercitazione Cancella - Cicli



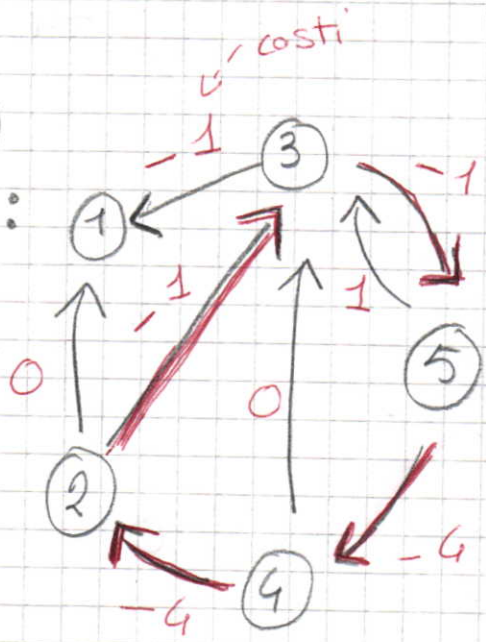




$cx = 32$

1° it)

G_x:

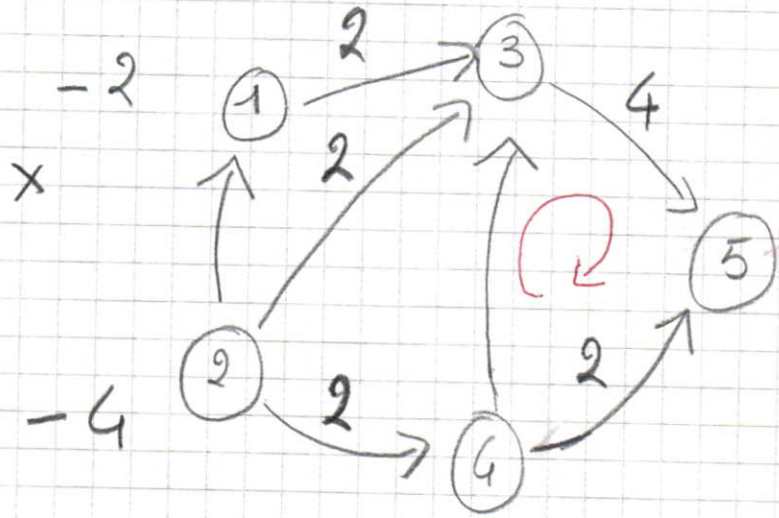


$c(C) = -1-1-4-4$

$= -10$

$\theta(C,x) = \min\{$

$2, 5-2, 4, 4\} = 2$



OSS su integralità flussi

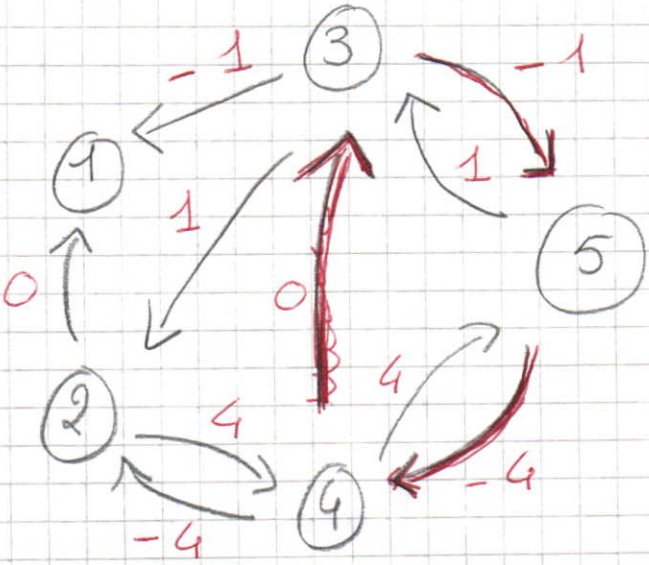
e $\theta(C,x) \geq 1$

e $c(C) \leq -1$

$cx = 32 + \underbrace{2(-10)}_{\theta(C,x)\cdot c(C)}$

$= 32 - 20 = 12$

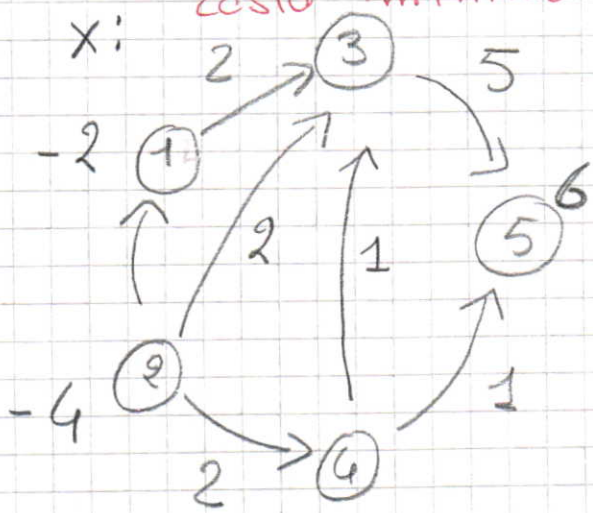
2° it)



G_x:

Flusso di costo minimo

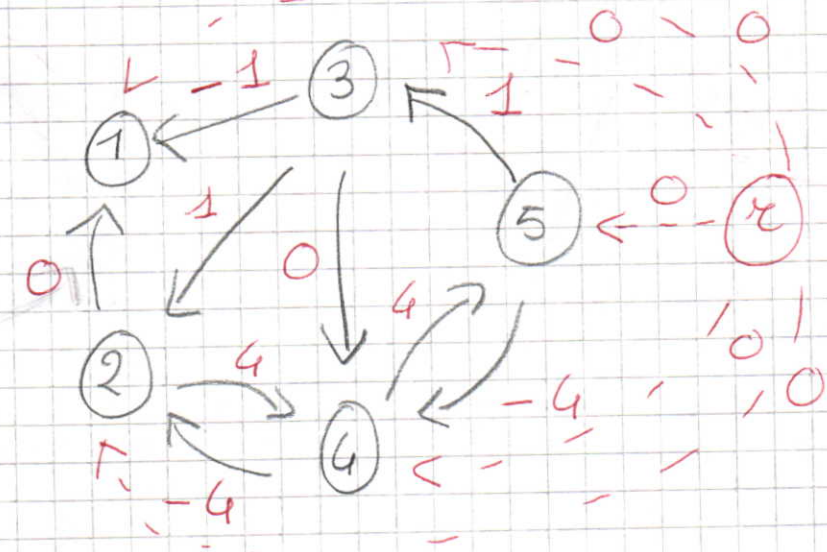
x:



$c(C) = -5 \quad \theta(C,x) = \min\{1,1,2\} = 1$

$c\,x = 12 + 1(-5) = 7$

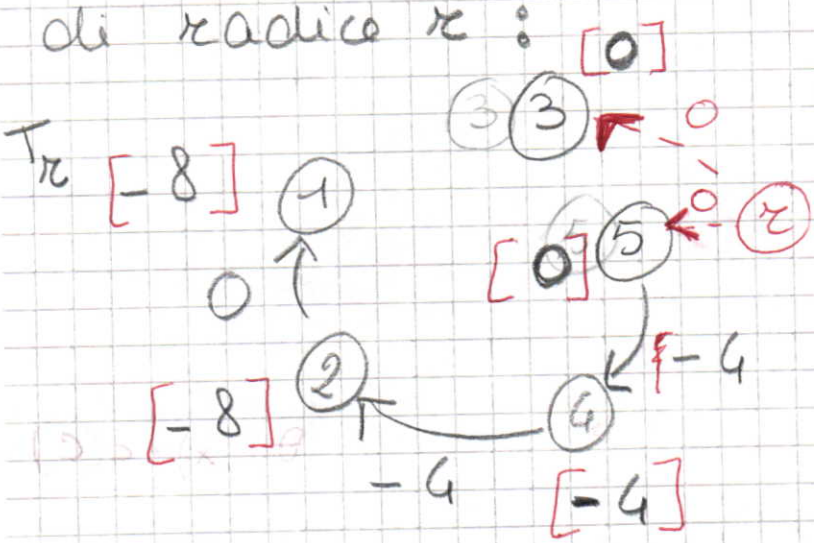
3° it)



G_x:

∃ uno altro ciclo di ammontanti negativi?

Applico l'algoritmo di Bellman per verificare se esiste un albero dei cammini minimi di radice r:



Esiste, ovvero ∄ uno ciclo negativi in G_x

STOP

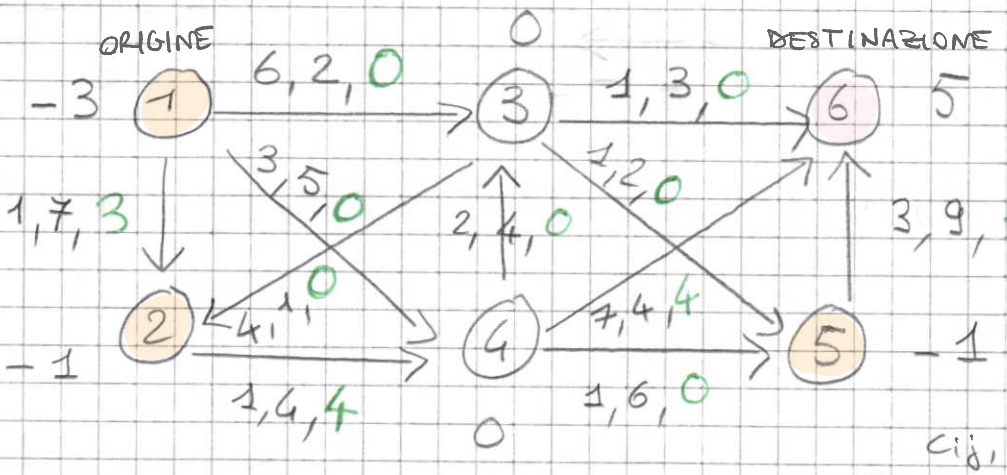
Il flusso di costo minimo costo 7

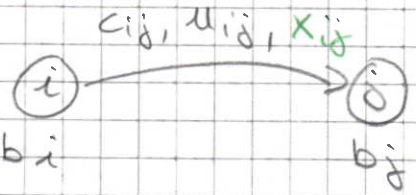
lezione 19

Esercitazione

M.G. Scutellà
"Ricerca Operativa"
Università di Pisa

1

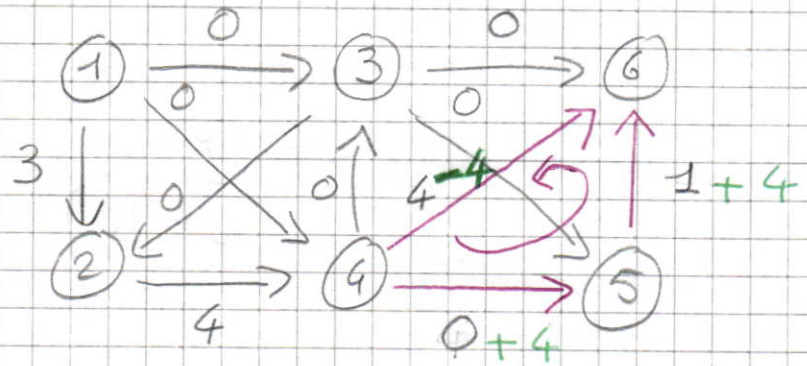




Si risolve il problema di flusso di costo minimo a partire dal flusso x, di costo $cx = 38$

it 1)

x:



Scelgo il ciclo viola, specificando il verso di percorrenza (se lavoro direttamente nel grafo di partenza il ciclo che cerco non è più necessariamente orientato)

$C = (4, 5, 6)$ $\quad \theta = \min\{4, 6, 9-1\} = 4$

($4 = x_{46}$)

$c(C) = -3$ = 1+3-7 = per ogni invio di flusso lungo questo ciclo ho una riduzione del valore del costo pari a 3

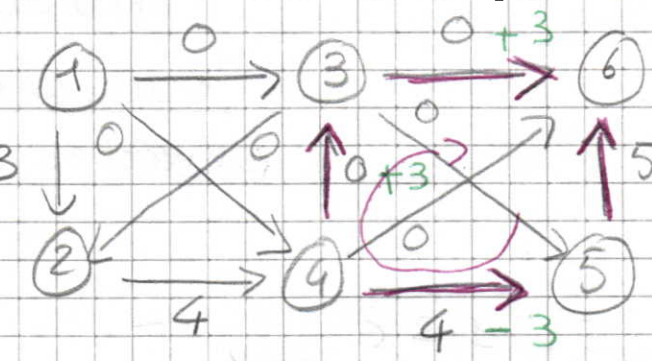
Controllo che il costo sia negativo

massima quantità che posso simultaneamente incrementare lungo gli archi concordi e togliere dagli archi discordi senza violare le capacità superiori (per gli archi concordi) e le capacità inferiori per gli archi discordi

Come faccio a trovare il ciclo? Algoritmicamente si dovrebbe invocare ad ogni interazione l'algoritmo di bellman (permette di rilevare l'eventuale presenza di cicli negativi perché in assenza di cicli negativi l'etichetta di ogni nodo è aggiornata al più n-1 volte, dunque se si supera questa soglia si ha un ciclo negativo). Negli esercizi è impensabile farlo, dunque si procede "per ispezione", cioè a occhio, salvo che per l'ultima iterazione visto che si deve dimostrare che non ce ne sono più davvero.

Aggiorniamo il flusso corrente inviando queste 4 unità

it 2)



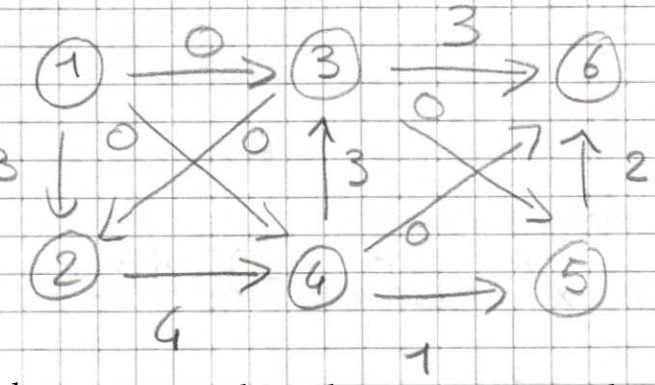
$c(x) = 38 + \theta c(C) = 38 - 12 = 26$

$C = (3, 6, 5, 4)$ $\quad \theta = \min\{4, 3, \underset{\| x_{56}}{5}, \underset{\| x_{45}}{4}\} = 3$

$c(C) = -1$

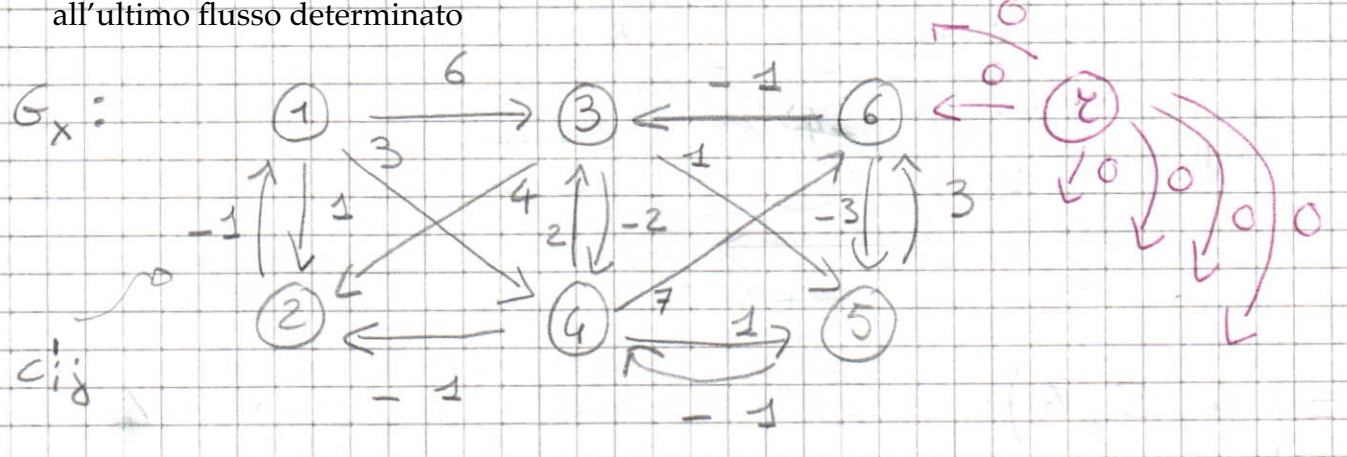
Ciclo non necessariamente orientato di costo negativo e aumentante, trovato per ispezione

it 3)



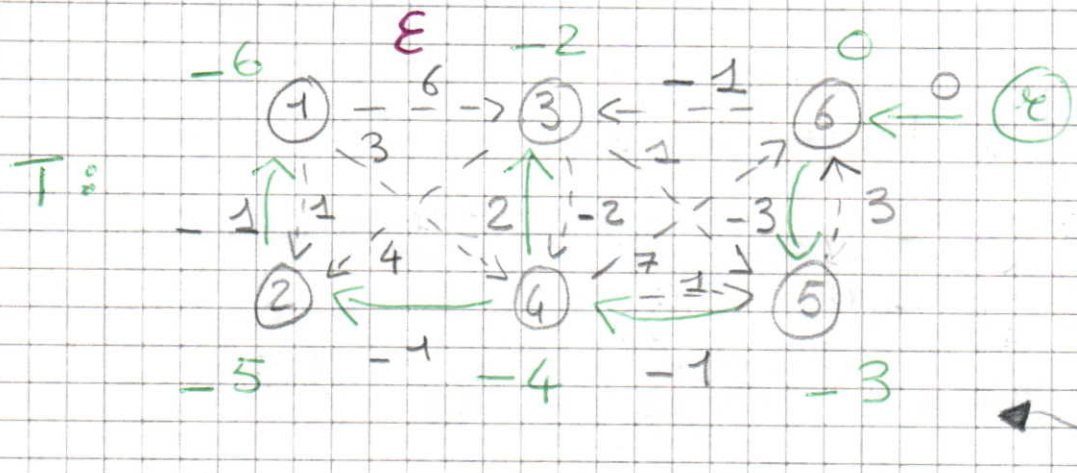
$c(x) = 26 + \theta c(C) = 26 - 3 = 23$

Dimostriamo che non ci sono altri cicli negativi costruendo esplicitamente il grafo residuo rispetto all'ultimo flusso determinato



Cerco un albero dei cammini minimi di radice fittizia r in G_x, utilizzando l'algoritmo di Bellman: Tale albero esiste se e solo se non esistono cicli orientati di costo negativo in G_x, ovvero se e solo se non esistono cicli aumentanti negativi rispetto a x.

Si trova:



Tale albero dei cammini minimi esiste, quindi il flusso x di costo 23 è un flusso di costo minimo.

1) Se $c_{13} = \varepsilon$, per quali valori di ε il flusso x sarebbe ottimo?

1.a) se $d_1 + c_{13} \geq d_3 \Leftrightarrow \varepsilon \geq 4$,

$-6 \quad \varepsilon \quad -2$

allora T continua a essere un albero dei cammini minimi, in quanto le condizioni di Bellman sono soddisfatte: quindi x resta un flusso di costo minimo.

1.b) se $d_1 + c_{13} < d_3$, ovvero $\varepsilon < 4$,

il ciclo aumentante $(1, 3, 6, 2)$ ha costo negativo, quindi x non è più un flusso di costo minimo.

Problema di programmazione lineare

2

$$\min\ 10y_1 + y_2 - 2y_3$$

duale della coppia asimmetrica

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 \qquad\quad - 3y_4 &= -1 \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \qquad\quad &= 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

1) Si verifichi se $\bar{y} = (1, 3, 6, 0)$ sia ottima

2) Si individui l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale (ovvero il primale) della coppia asimmetrica

3) Si individui l'insieme dei vertici ottimi del poliedro primale.

(P) $\max\ -x_1 + x_2$ (D) $\geq$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_2 &\leq -2 \\ -3x_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

sopra indicato

1) $\bar{y} = (1, 3, 6, 0)$ è ammissibile per (D). semplice verifica

$\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste $\bar{x}$, ammissibile per (P), tale che

$$\bar{y}_i (b_i - A_i \bar{x}) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

ovvero $\bar{x}$ e $\bar{y}$ formano una coppia di soluzioni complementari. (Scarti complementari)

$\bar{y}_1 > 0 \Rightarrow 2x_1 + 4x_2 = 10$

$\bar{y}_2 > 0 \Rightarrow -x_1 + x_2 = 1$

$\bar{y}_3 > 0 \Rightarrow -x_2 = -2$ $\quad (\bar{y}_4 = 0 \Rightarrow \text{ok})$

$\bar{x}$ deve essere ammissibile per (P), quindi deve soddisfare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 10 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ -x_2 = -2 \\ -3x_1 \leq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha come unica soluzione $\bar{x} = (1, 2)$, quindi $\bar{y} = (1, 3, 6, 0)$ è soluzione ottima di (D). Inoltre:

2) $\bar{x} = (1, 2)$ è l'unica soluzione ottima di (P), essendo l'unica soluzione primale ammissibile in scarti complementari con $\bar{y}$.

3) $\bar{x} = (1, 2)$ è una soluzione di base primale in quanto

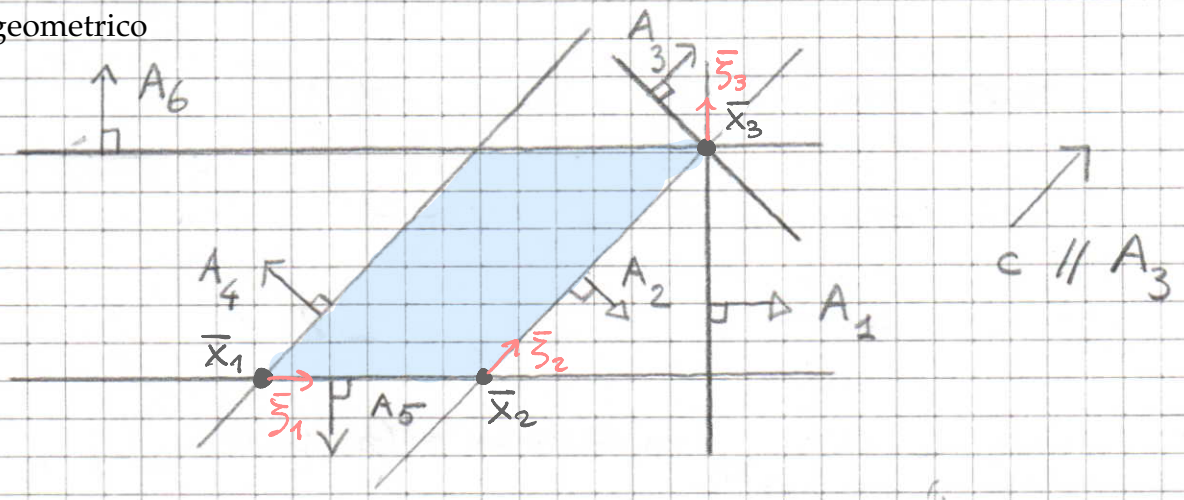
$$A_I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}$$ ha rango 2.

(Il primo, il secondo e il terzo sono vincoli attivi)

Essendo ammissibile, $\bar{x}$ è quindi un vertice del poliedro primale. Dal punto 2) segue che $\bar{x}$ è l'unico vertice ottimo del poliedro primale.

Primale geometrico

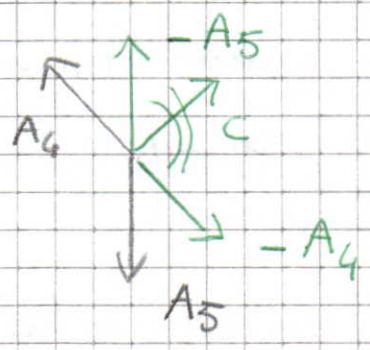
3



Si risolve il problema di PL, per via geometrica, a partire dalla base $B = \{4, 5\}$, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Primale.

it 1) $B = \{4, 5\}$ $\bar{x}_1$ in figura

$\bar{y}_B = c A_B^{-1}$:



$c \in \text{cono}(\{-A_4, -A_5\})$: $\bar{y}_4 < 0$, $\bar{y}_5 < 0$

$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = \min\{4, 5\} = 4$

regola anticiclo di Bland

$\bar{\xi}_1$ → direzione ammissibile (vertice non degenere) di crescita che l'algoritmo userà per provare a spostarsi

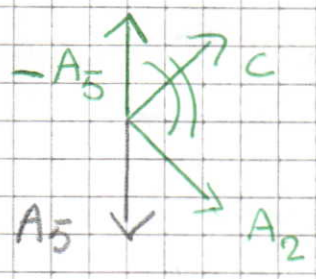
$\bar{\xi}_1$ in figura → $\bar{\xi}_1 = -A_B^{-1} u_{B(h)} = -A_B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} A_4 \bar{\xi}_1 = -1 \rightarrow \text{si allontana dal vincolo 4} \\ A_5 \bar{\xi}_1 = 0 \rightarrow \text{ortogonale al vincolo 5} \end{cases}$

$K = 2$

it 2) $B = \{4, 5\} \setminus \{\overset{h}{4}\} \cup \{\overset{K}{2}\} = \{2, 5\}$

$\bar{x}_2$ in figura

$\bar{y}_B$:



$C \in \text{cono}(\{A_2, -A_5\})$:

$\bar{y}_2 > 0$, $\bar{y}_5 < 0$

$h = 5$

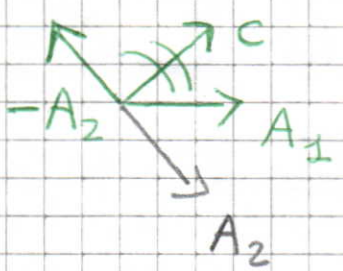
$\bar{f}_2$ in figura

$K = \min\{1, 3, 6\} = 1$ regola anticiclo di Bland

it 3) $B = \{2, 5\} - \{5\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$

$\bar{x}_3$ in figura

$\bar{y}_B$:



$C \in \text{cono}(\{A_1, -A_2\})$:

$\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_2 < 0$

$h = 2$

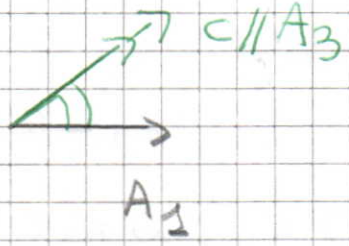
$\bar{f}_3$ in figura : direzione di crescita non ammissibile

$\bar{\lambda} = 0$ cambio di base degenere

$K = \min\{3, 6\} = 3$ regola anticiclo di Bland

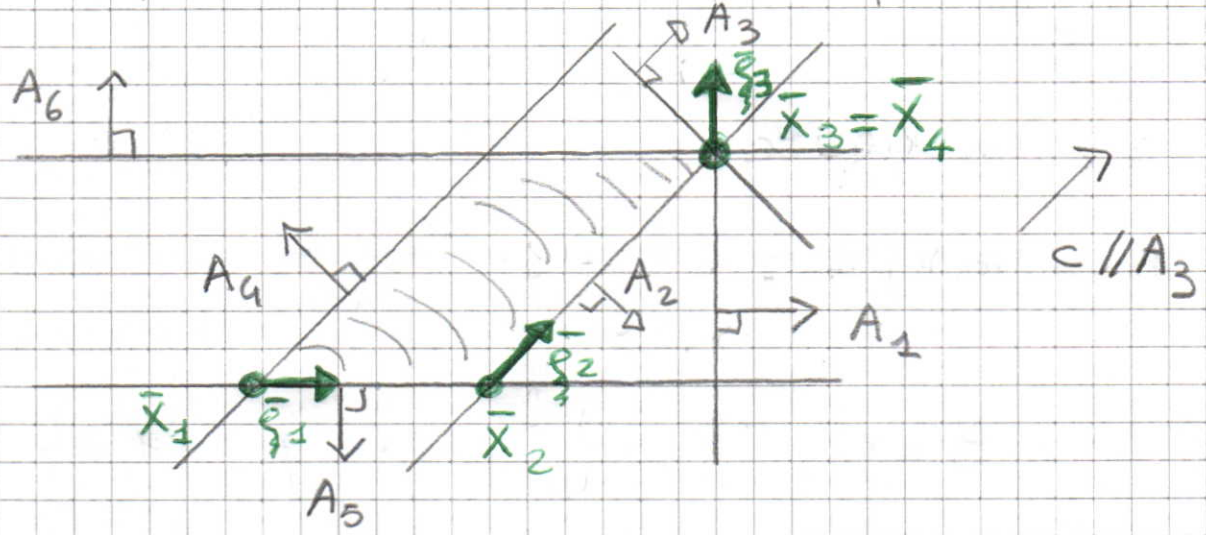
it 4) $B = \{1, 2\} - \{2\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$

$\bar{x}_4 = \bar{x}_3$

$\bar{y}_B$: 

$\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_3 > 0$

STOP: $\bar{x}_4$ soluzione ottima del primale



Si discute l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia primale che duale:

1) la soluzione ottima primale è unica: per via geometrica (poiché c è parallelo ad A3, le eventuali soluzioni ottime alternative si troverebbero lungo la retta A3, ma l'unica intersezione tra la retta e il poliedro del primale è il vertice in questione)

2) la soluzione ottima primale è degenere:

(Se fosse stata non degenere avremmo subito potuto dire che c'è unicità)

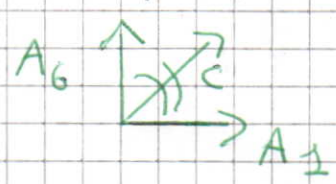
$B = \{1, 3, 4\}$: $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_3 > 0$

base corrente dell'algoritmo

posso dire che è di questa forma

$\bar{y} = (0, 0, \bar{y}_3, 0, 0, 0)$ soluzione ottima duale (di base)

$\tilde{B} = \{1, 6, 4\}$: base alternativa per lo stesso vertice ottimo



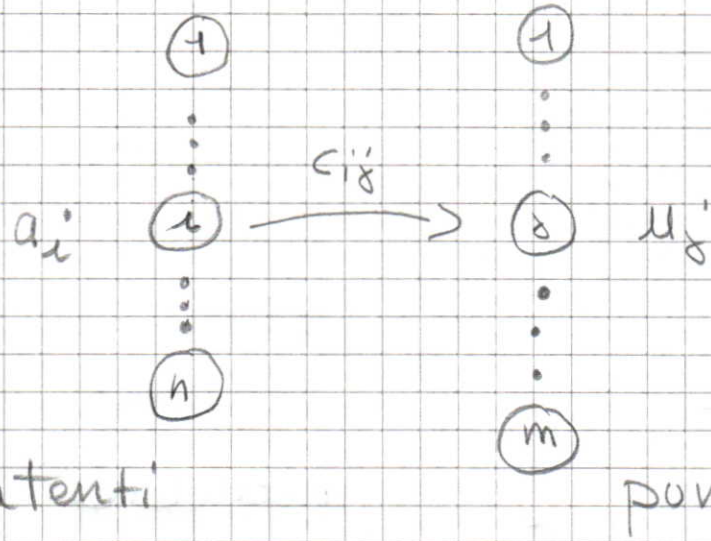
$\tilde{y}_1 > 0$, $\tilde{y}_6 > 0$:

$\tilde{y} = (\tilde{y}_1, 0, 0, 0, 0, \tilde{y}_6) \neq \bar{y}$

soluzione di base duale ottima alternativa a $\bar{y}$.

Pertanto il problema duale ammette più soluzioni ottime.

④ Si considera un sistema wireless di tipo WLAN (≡ Wireless Local Area Networks), con n utenti aventi domande di connessione a_i Kbps, $i = 1, .. n$. Sono presenti m punti d'accesso per soddisfare le domande, con capacità u_j, $j = 1, .. m$.
Sia c_{ij} il costo derivante dall'assegnamento dell'utente i al punto d'accesso j, $i = 1, .. n$, $j = 1, .. m$.



Si vuole:

1) assegnare ogni utente a esattamente un punto d'accesso per soddisfare la sua domanda;
2) rispettare le capacità dei punti d'accesso;
3) rispettare il seguente vincolo d'equilibrio: il rapporto tra la minima domanda totale e la massima domanda totale assegnata ai punti

d'accesso deve essere $\geq \frac{1}{2}$;

minimizzando il costo totale d'assegnamento.

Formulare in termini di PLI.

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se utente } i \text{ assegnato a punto d'accesso } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

vincoli d'assegnamento:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq u_j \qquad j = 1, \dots, m$$

vincoli d'equilibrio:

$$w \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq z \qquad j = 1, \dots, m$$

variabili ausiliarie

$$w \geq \frac{z}{2}$$

w : stima per difetto la minima domanda totale assegnata ai punti d'accesso

z : stima per eccesso la massima domanda totale assegnata ai punti d'accesso

Modello PLI:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq u_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - w \geq 0 \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - z \leq 0 \qquad j = 1, \dots, m$$

$$2w - z \geq 0$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

(5) Si consideri il modello matematico:

$$\min \cdot \| x - y \|_\infty$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w$$

- $w \in \{4, 9, 11\}$
- $w \in \{9, 11\} \Rightarrow x_1 = 0$

non lineare

$$x = (x_1, x_2)$$

$$y = (y_1, y_2)$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$$

dove $\|z\|_\infty = \max_{(z_1, z_2)} \{|z_1|, |z_2|\}$

Riformulazione PLI:

$$\|x-y\|_\infty = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} =$$

$$= \max\{x_1-y_1, y_1-x_1, x_2-y_2, y_2-x_2\}$$

$$\min v$$

$$\begin{cases} x_1 - y_1 \le v \\ y_1 - x_1 \le v \\ x_2 - y_2 \le v \\ y_2 - x_2 \le v \end{cases}$$

vincoli di soglia: linearizzazione di $\|x-y\|_\infty$

v: variabile di soglia

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w$$

$$\begin{cases} w = 4q_1 + 9q_2 + 11q_3 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1, q_2, q_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

linearizzazione per la variabile a valori discreti w

q_1, q_2, q_3: variabili binarie ausiliarie

$$11 - M q_1 \ge x_1$$

linearizzazione di $w \in \{9, 11\} \Rightarrow x_1 = 0$

$\Downarrow$

$q_1 = 0$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0$$

OSS: la variabile w è ridondante, e può essere eliminata dal modello PLI.

lezioni 20-21

Programmazione Lineare Intera: tecniche di modellazione

Maria Maria Scutellà
"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: 1.2)

PL:
massimizzare o minimizzare una funzione lineare ($c^t x$) soggetto a un insieme finito di vincoli lineari

$$\max c^T x \quad (\min)$$
$$Ax \lesseqgtr b \quad (\geq, =)$$

x: variabili quantitative

PLI:
generalizza PL imponendo che tutte le variabili assumono valori interi o, come caso speciale, che siano binarie

$$\max c^T x \quad (\min)$$
$$Ax \lesseqgtr b \quad (\geq, =)$$
$$x \in \{0,1\}^n \text{ oppure } x \in \mathbb{Z}^n$$

(n = numero variabili decisionali)

variabili binarie (booleane, logiche) — variabili intere

Programmazione Lineare Intera Mista: se un sottoinsieme di variabili sono vincolate ad assumere valori interi.

PLI (e PLIM):

- problemi "difficili" (NP-Hard)
  Non esistono algoritmi polinomiali che lo risolvano, cioè nel caso pessimo hanno comportamento esponenziale
- molto potenti dal punto di viste modellistico
  Tramite questa classe di problemi si possono formulare la maggior parte dei problemi reali

1 Variabili logiche

Problema dello zaino binario

$E = \{1, 2, \dots n\}$ insieme di oggetti

a_i : peso oggetto i, $i = 1, \dots n$ $(a_i \in \mathbb{Z}^+, i = 1, \dots, n)$

c_i : costo (beneficio) oggetto i, $i = 1, \dots n$ → tradizionalmente chiamato così, ma è più un beneficio

$(c_i \in \mathbb{Z}^+, i = 1, \dots, n)$

b : capacità dello zaino $(b \in \mathbb{Z}^+)$

Problema: decidere quali oggetti inserire nello zaino rispettando la sua capacità b e massimizzando il beneficio totale. (somma dei c_i degli oggetti che ho inserito)

Assunzioni:

- $a_i \leq b \quad i = 1, \dots, n$
- $b \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$ altrimenti ho una soluzione ottima banale: inserire tutti gli oggetti

Modello PLI

Variabili decisionali:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se inserisco l'oggetto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

(KP) = Knapsack Problem

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$ → massimizzo il beneficio totale

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$ vincolo di zaino (rispetto la capacità)

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$$

(2) Vincoli di semiassegnamento

n: numero cittadini da sottoporre a test sierologico

m: numero centri sanitari disponibili

u_j: capacità del centro j, $j = 1, \dots, m$

c_{ij}: costo sostenuto dal sistema sanitario se il test del cittadino i è effettuato dal centro j, $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$

Problema: decidere come ripartire (assegnare) i cittadini tra i centri rispettando le capacità dei centri e minimizzando il costo totale.

Modello PLI

Variabili decisionali (logiche a due indici):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il cittadino } i \text{ è assegnato al centro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n}$$

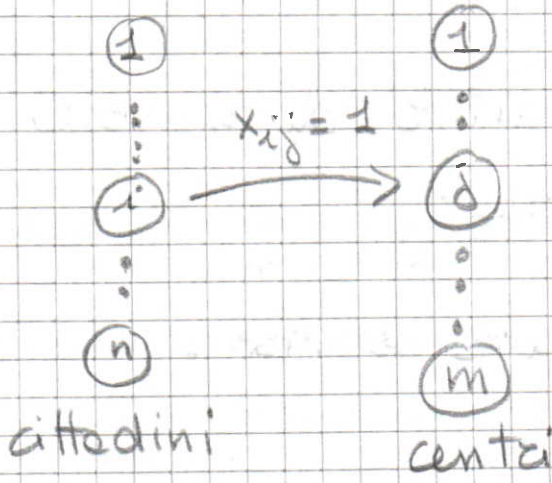
Per ogni cittadino, esattamente una di queste variabili xij dovrà assumere il valore 1, andando a individuare un centro per cittadino

vincoli di semiassegnamento

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \quad j = 1, \dots, m$$ → rispetto la capacità

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

vincoli di semiassegnamento: modellano una corrispondenza univoca tra due insiemi



oss: è fondamentale che $x_{ij} \in \{0,1\}$; rilassando i vincoli di integralità, la soluzione $x_{ij} = \frac{1}{m}$, $i = 1,..n$, $j = 1,..,m$, sarebbe ammissibile ma senza senso.

caso speciale:

$S(i)$: sottoinsieme dei centri abilitati a effettuare il test a i, $i = 1,..,n$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,..,n$$

Se $m = n$, si può voler imporre una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,..,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,..,n$$

vincoli di assegnamento

(non più semiassegnamento)

oss: i vincoli di assegnamento possono essere utilizzati per ordinare n oggetti:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ è in posizione } j \text{ nell'ordinamento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n \qquad j = 1, \dots, n$$

(3) Vincoli di soglia

Per motivi di efficienza, si vuole minimizzare il massimo numero di pazienti nei centri (workload del centro più carico):

$$\min z \qquad \text{variabile di soglia}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq z \qquad j = 1, \dots, m}$$

vincoli di soglia

numero di cittadini associati alla sede j

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, m$$

z è una valutazione superiore (upper bound) del numero di pazienti di ogni centro, e quindi stima per eccesso il massimo numero di pazienti nei centri. Minimizzando z, a livello di soluzione ottima z è il massimo numero di pazienti nei centri, che viene pertanto minimizzato.

In generale:

$a_1, a_2, \dots a_m \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ vettore delle variabili decisionali

$a_1^T x, a_2^T x, \dots a_m^T x$: funzioni lineari

$\min \max \{ a_1^T x, \dots, a_m^T x \}$ $\xrightarrow{PLI}$ $\min u$

$a_1^T x \leq u$

$\vdots$

$a_m^T x \leq u$

< vincoli lineari >

non

< vincoli lineari >

non posso scrivere direttamente questo come funzione obiettivo di un modello di programmazione lineare intera (perché è lineare a tratti)

si può linearizzare

$\max \min \{ a_1^T x, \dots, a_m^T x \}$ $\xrightarrow{PLI}$ $\max \ell$

$a_1^T x \geq \ell$

$\vdots$

$a_m^T x \geq \ell$

< vincoli lineari >

non

< vincoli lineari >

Esempio: ordinamento di lavori su macchine con minimizzazione del tempo di completamento

n: numero di lavori (task) da eseguire (non interrompibili).

d_i: Tempo di elaborazione di i, $i = 1, \dots, n$ → durata del lavoro i

m: numero di macchine (identiche) disponibili per eseguire i lavori

Problema: assegnare i lavori alle macchine in modo da completare tutti i lavori nel minor tempo possibile, ovvero minimizzare il tempo

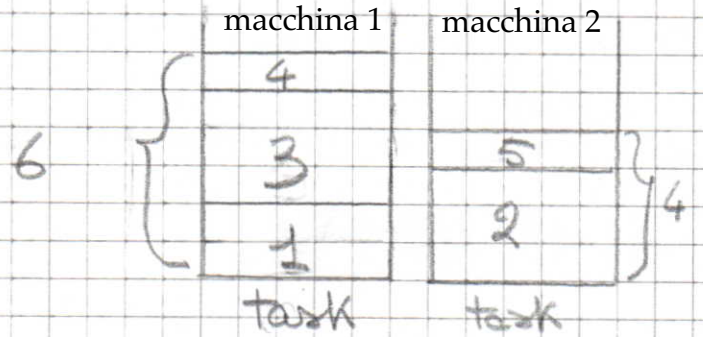
di lavoro della macchina "più carica".

esempio

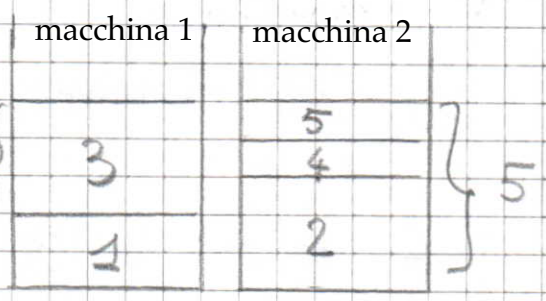
$n = 5 \quad d_1 = 2 \quad d_2 = 3 \quad d_3 = 3 \quad d_4 = 1 \quad d_5 = 1$

$m = 2$

soluzione 1



soluzione 2



valore funzione obiettivo : 6 5

soluzione ottima!

↓

Tutti i lavori sono stati terminati dopo 5 ore, quindi è meglio dell'altra soluzione che ne richiedeva 6. Inoltre è ottima perché le due macchine terminano entrambe dopo 5 ore quindi il lavoro è perfettamente bilanciato e meglio di così non si può fare

Modello PLI

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } i \text{ è assegnato alla macchina } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$

$$\min t$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq t \qquad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

4 Vincoli logici

Vediamo come agire se si ha questo obiettivo

Si vuole minimizzare il numero di centri utilizzati

Modello PLI

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente } i \text{ è assegnato al centro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il centro } j \text{ è utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$j = 1, \dots, m$

$$\min \sum_{j=1}^{m} y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \cdot y_j \qquad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \dots, m$$

vincoli di capacità e puro vincoli logici:

$$y_j = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

OSS: a livello di soluzione ottima, $y_j = 1$ solo se il centro j è utilizzato (almeno un paziente).

(Alternativamente metto i vincoli: xij <= yj per ogni i e j)

5 Relazioni logiche

Le variabili booleane consentono di modellare relazioni logiche, mediante

$x \in \{0,1\}$: $x = 1$ "vero"

$x = 0$ "falso"

Negazione : $y = \neg x$

↓

in PLI : $x, y \in \{0,1\}$

$y = 1 - x$ (ovvero $x + y = 1$)

Implicazione logica : $x \Rightarrow y$

↓

in PLI : $x, y \in \{0,1\}$

$y \geq x$

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

OR : $x \vee y = z$

↓

in PLI : $x, y, z \in \{0,1\}$

$z \geq x$

$z \geq y$

$z \leq x + y$ → per evitare che z=1 quando x=y=0

OR esclusivo : $x \oplus y = z$ (Vale solo una delle due)

↓

in PLI : $x, y, z \in \{0,1\}$

$z \geq x - y$ → Se una tra x e y è 1 allora z=1

$z \geq y - x$

$z \leq x + y$ ← Quando x=y=0 vale z=0

$z \leq 2 - x - y$ → Quando x=y=1 vale z=0

AND : $x \wedge y = z$

↓

in PLI : $x, y, z \in \{0, 1\}$

$$z \leq x$$
$$z \leq y$$
$$z \geq x + y - 1$$

(6) Vincoli di selezione di sottoinsiemi

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ elementi

$F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ tale che $F_j \subseteq N$ $j = 1, \dots, m$

famiglia di sottoinsiemi di N

c_j: costo di selezione di F_j $j = 1, \dots, m$

Problema di copertura: selezionare sottoinsiemi in F, a costo minimo, in modo che ogni elemento di N compaia in almeno un sottoinsieme selezionato.

Introduciamo i parametri:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in F_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$

Modello PLI

Variabili decisionali:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se seleziono } F_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\min \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

Almeno uno dei sottoinsiemi selezionati contiene ognuno degli elementi di N

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

Vincoli di copertura

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, m$$

esempio (vincoli di copertura)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ quartieri

$F_1 = \{1, 2\}$ $F_3 = \{1, 4, 5\}$

$F_2 = \{1, 3, 4\}$ $F_4 = \{2, 3, 5\}$

F_j: aprendo un centro sanitario nella località j, i cittadini dei quartieri in F_j possono raggiungere il centro entro un tempo prefissato (es. 30 minuti)

$$A = [a_{ij}] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vincoli di copertura

Impongono che ogni quartiere sia "coperto" dal

servizio.

Problema di partizione: selezionare sottoinsiemi di F, a costo minimo, in modo che ogni elemento di X compaia in esattamente un sottoinsieme selezionato.

Modello PLI

$$\min \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, m$$

Problema di riempimento (packing): selezionare sottoinsiemi di F in modo che ogni elemento di X compaia in al più un sottoinsieme selezionato.

Modello PLI

$$\max \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, m$$

(7) Variabili a valori discreti

in PLI: $x \geq 0$ $\quad x \leq 0$

$x \in \{0, 1\}$ $\quad x \in \mathbb{Z}$

→ Cose che si possono specificare sulle variabili (in PLI)

$x \in \{20, 30, 80\}$?

→ Può assumere un numero finito di valori? Sì, ma bisogna scriverlo in una forma ammissibile. Per farlo introduciamo le variabili y1, y2, y3

y_1 $\quad y_2$ $\quad y_3$

variabili binarie ausiliarie

$$x = 20y_1 + 30y_2 + 80y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

In generale:

se $x \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

y_1 $\quad y_2$ $\quad y_n$

variabile a valori discreti

in PLI: $x = \sum_{i=1}^{n} v_i y_i$

$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ → una e una sola vale 1

$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$

(8) Minima quantità positiva prefissata

Vale 0 oppure varia con continuità nell'intervallo di estremi l, u

$x \in \{0, [l, u]\}$ con $0 < l < u$

Tipica in problemi di pianificazione della produzione:

x = livello di produzione

- $x = 0$ non si fa produzione
- $x \in [l, u]$ il livello di produzione deve variare in $[l, u]$ (quindi non assume più un numero finito di valori)

in PLI: $l \cdot y \leq x \leq u \cdot y$

$\hookrightarrow y \in \{0, 1\}$ variabile ausiliaria per modellare le decisione relative alla produzione.

- se x=0
- se x tra l, u

(9) Funzioni a carico fisso

$\min f(x)$

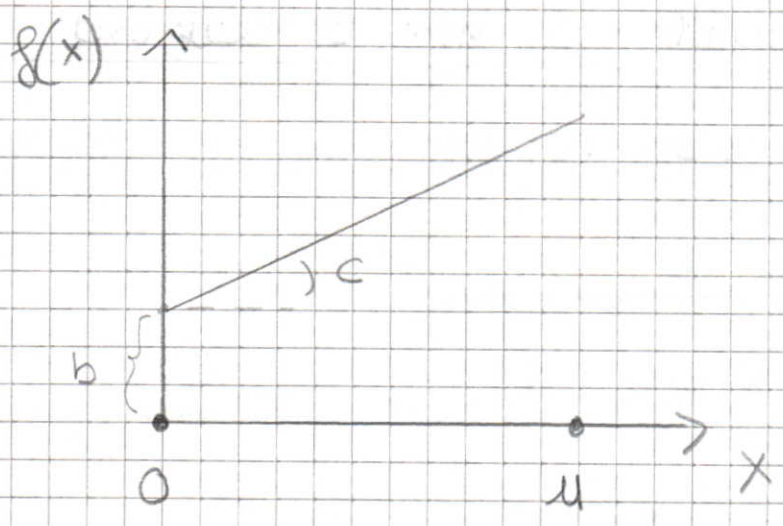
< vincoli lineari > → che non esplicitiamo

dove:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ b + cx & \text{se } 0 < x \leq u \end{cases}$$

funzione a carico fisso

$b > 0, \quad c > 0$



non lineare (lineare a tratti)

Proprie di sistemi di produzione in logistica:

$b > 0$: costo di investimento (setup)

$c > 0$: costo unitario di produzione

x : livello di produzione

Linearizziamo la funzione f:

in PLI : $\min g(x, y) = by + cx$

< vincoli lineari >

* $0 \leq x \leq u \cdot y$

$y \in \{0, 1\}$ variabile binaria ausiliaria

* se x=0 se x tra 0, u

$g(x, y)$ rappresenta una linearizzazione della funzione obiettivo originaria $g(x)$;

$g(x, y)$ è funzione della variabile x e della variabile ausiliaria y:

$y = 0$: modella la non produzione

$y = 1$: modella la decisione di produrre

Legame tra $f(x)$ e $g(x, y)$:

1) $y = 0 \Rightarrow x = 0$: non produzione

$$g(0, 0) = f(0) = 0$$

2) $y = 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq u$: produzione

$$g(x, 1) = b + c\,x$$

OSS: il modello PLI non esclude la soluzione $(x, y) = (0, 1)$, con valore della funzione obiettivo $g(0, 1) = b$;

ovvero $x = 0$ ha due rappresentazioni nel modello PLI: $(0, 0)$ corretta ($x = 0$, $y = 0$)

$(0, 1)$ non desiderata ($x = 0$, $y = 1$)

Tuttavia, poiché $g(0, 1) = b >$ (per ipotesi) $g(0, 0) = 0 = f(0)$, la soluzione indesiderata $(x, y) = (0, 1)$ viene esclusa in fase di minimizzazione di $g(x, y)$.

lez 22

Relazione tra PLI e PL

Maria Grazia Scutellà

"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica

Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 4)

$$(P) \qquad z(P) = \max c^T x \quad Ax \leq b \quad x \in \mathbb{Z}^n$$

→ Forma standard che consideriamo per il primale, in più chiediamo che x sia intera

$F = \{ x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b \}$ insieme ammissibile di (P)

Sia:

$\bar{F} = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$ poliedro definito dai vincoli lineari di (P)

Proprietà: $F \subset \bar{F}$

Il problema:

$$(RC) \qquad z(RC) = \max c^T x \quad Ax \leq b$$

PL

è detto rilassamento continuo (o lineare) di (P).

Proprietà: $z(RC) \geq z(P)$

Ovvero il rilassamento continuo fornisce una valutazione superiore, o upper bound, di $z(P)$.

Proprietà: Sia $\bar{x}$ una soluzione ottima di (RC). Se $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$, allora $\bar{x}$ è ottima per (P).

Ovvero, in taluni casi, il rilassamento continuo permette di risolvere (P).

In generale, se $\bar{x}$ è una soluzione ottima di (RC), né la soluzione in F ottenibile arrotondando $\bar{x}$, né la soluzione in F più vicina a $\bar{x}$ (secondo la norma euclidea) sono soluzioni ottime di (P).

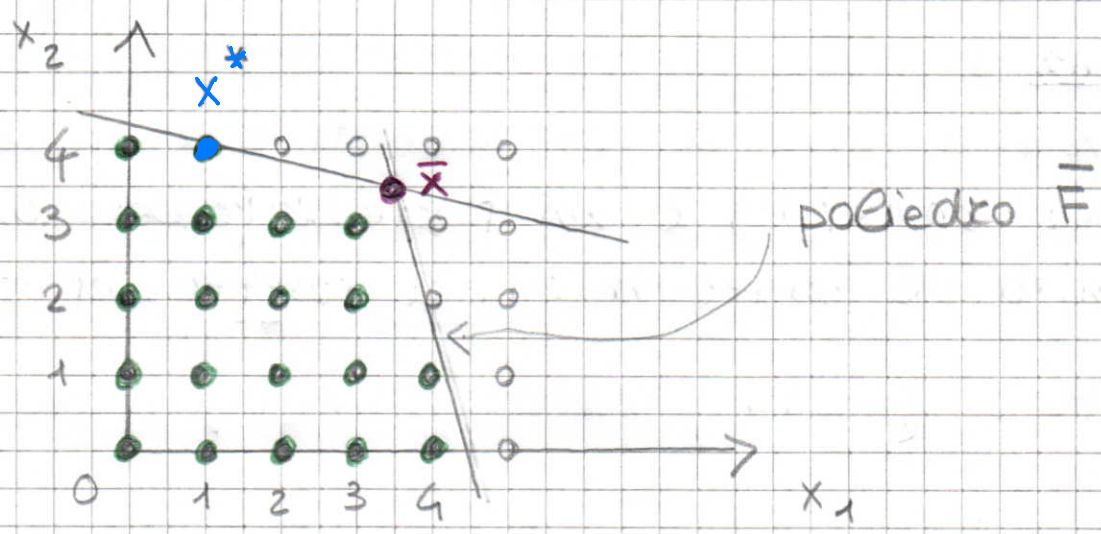
↓

potrebbero sembrare cose sensate e invece no…

esempio

$$(P) \quad \max \; x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 5x_2 \leq 21$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 35$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Consideriamo F e $\bar{F}$.



La soluzione ottima di (P) è $x^* = (1, 4)$
$z(P) = 13$

La soluzione ottima di (RC) è $\bar{x} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$
$z(RC) = 14$

Arrotondando per difetto $\overrightarrow{x^*_1}$ e $\overrightarrow{x^*_2}$ si ha $(3, 3)$, che è anche la più vicina a $\bar{x}$ secondo la norma euclidea: $(3, 3)$ non è ottima per (P) $(z((3,3)) = 12)$.

Sia:

$\text{conv}(F)$ inviluppo convesso di F

Poiché $F \subseteq \text{conv}(F) \subseteq \bar{F}$:

$$(RC) \quad \max_{x \in \bar{F}} c^T x \geq \max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x \geq \max_{x \in F} c^T x \quad (P)$$

$\uparrow$

rilassamento di P:
rilassamento convessificato

Teorema:

1) Se A e b sono a componenti razionali, allora $\text{conv}(F)$ è un poliedro (razionale, cioè definito da disequazioni a coefficienti razionali).

2) Se F è finito, allora $\text{conv}(F)$ è un poliedro.

Dim.:

1) no dim.

2) ovvio □

Inoltre, se valgono le ipotesi del teorema precedente:

Corollario:

1) $$\max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x$$
è un problema di PL

2) $$z(P) = \max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x.$$

Dim:

2) Sia $$z^* = \max_{x \in \text{conv}(F)} c^T x.$$

Si possono distinguere tre casi. → dato che è un problema PL

- Se (P) è vuoto, ovvero $z(P) = -\infty$ → problema di massimo, allora anche $z^* = -\infty$ in quanto $\text{conv}(F) = \emptyset$.

l'involucro convesso dell'insieme vuoto è vuoto

- Se $z^* = +\infty$, allora esiste in $conv(F)$ una direzione di recessione $d \in \mathbb{Z}^n$ tale che $c^T d > 0$.

  dettaglio, assumiamo sia vero

  Scelto un qualunque $x \in F$, si ha che $x + \lambda d \in F$ per ogni $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda > 0$, in quanto $x + \lambda d \in \mathbb{Z}^n$ e $x + \lambda d \in conv(F)$. Quindi anche $z(P) = +\infty$.

- Se z^* è finito, allora $z^* = z(P)$ in quanto l'insieme dei vertici di $conv(F)$ è un sottoinsieme di F. □

  (la soluzione ottima del rilassamento convessificato cade sempre su un vertice, siccome il vertice è intero è anche soluzione ottima del problema originario)

Sembrerebbe che si sia trovato il modo di affrontare un PLI: risolvere il rilassamento convessificato, ma:

Punto critico: In generale è difficile caratterizzare $conv(F)$, e quindi risolvere il problema di PL: $\max c^T x$, $x \in conv(F)$.

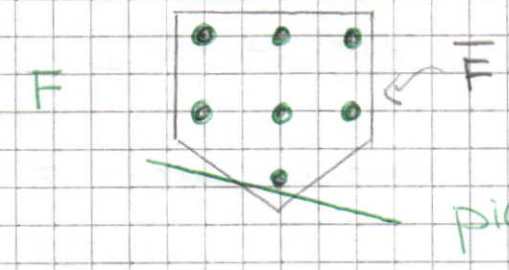
Approcci risolutivi (tra gli altri):

1) per classi specifiche di problemi PLI, cercare di individuare disuguaglianze che caratterizzano $conv(F)$

2) costruire approssimazioni successive di $conv(F)$, individuando poliedri e' uno

contenuto nell'altro, a partire da $\bar{F}$:

algoritmo dei piani di taglio



(senza eliminare i punti d'interesse)

3) esplorare direttamente F in modo efficiente (non esaustivo):

Esploriamo in modo intelligente, non in modo esaustivo

algoritmo di Branch and Bound

Caso speciale: A è totalmente unimodulare, ovvero il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0, 1 oppure -1.

Teorema: Se b è a componenti intere e A è totalmente unimodulare, allora le soluzioni di base di $\bar{F}=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\leq b\}$ sono intere.

Dim: immediata. □

(Poiché le matrici di base sono invertibili, dall'ipotesi segue che hanno det=1 o det=-1)

In caso di ottimo finito,

Corollario: Almeno una soluzione ottima di (RC) è intera, e quindi $z(RC)=z(P)$.

Proprietà: La matrice di incidenza nodi-archi di un grafo orientato è totalmente unimodulare.

lezione 23

Dimostrazioni di ottimalità

Maria Paola Saltelli
"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 4, 5, 6)

$$(P) \qquad z(P) = \max c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$

Data una soluzione ammissibile $\bar{x}$, come verificare se $\bar{x}$ è ottima:

1) $c^T \bar{x} = \underline{z}$ lower bound di $z(P) = \max c^t x \geq c^T \bar{x}$

2) individuando $\bar{z} \geq z(P)$ upper bound di $z(P)$

e mostrando che $\underline{z} = \bar{z}$, ovvero

$$\underline{z} = z(P) = \bar{z}$$

OSS: se $\underline{z} \neq \bar{z}$, $\bar{z} - \underline{z}$ fornisce un gap (di ottimalità) che permette di valutare la bontà di $\bar{x}$.

↳ l'accuratezza

Come determinare lower bound (per problemi di massimizzazione): algoritmi euristici

Ad hoc per lo specifico problema di ottimizzazione da risolvere.

Alcuni esempi

"vorace", algoritmo che ad ogni iterazione prende una decisione e non torna mai indietro su quella decisione

1) **Algoritmo greedy CUD per il problema dello zaino binario**

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n$$

Schema algoritmico:

1) si ordinano gli oggetti in base a un dato criterio: $1, 2, \dots, n$;
2) sia S il sottoinsieme degli oggetti selezionati (inizialmente $S = \emptyset$);
3) si considerano gli oggetti in base all'ordine scelto e, per ogni oggetto h esaminato:
   3.1) se $a_h \leq b - \sum_{i \in S} a_i$ → si può inserire l'oggetto

$\sum_{i \in S} a_i$: capacità residua dello zaino

allora si inserisce h nello zaino: $(x_h = 1)$

$S = S \cup \{h\}$

3.2) se $a_k > b - \sum_{i \in S} a_i$,

allora si scarta l'oggetto k $(x_k = 0)$.

Possibili ordinamenti:

1) per pesi non decrescenti: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

2) per costi non crescenti (benefici): $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$

3) per costi unitari decrescenti (sarebbe non crescenti): $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}$

→ Algoritmo CUD (costi unitari decrescenti)

esempio (algoritmo CUD)

$$\max\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 8 \quad \text{(capacità zaino)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

ordine CUD: 5 3 4 1 6 2 (Oggetti)

Perché i rispettivi $\frac{c_i}{a_i}$: 4 2 $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{5}$ 1 $\frac{2}{3}$

soluzione	capacità residua (dello zaino)
$x_5 = 1$	$7 = 8 - 1$
$x_3 = 1$	$5 = 7 - 2$

soluzione	capacità residue
$x_0 = 1$	$2 = 5 - 3$
$x_1 = 0$	2 → oggetto scartato
$x_6 = 1$	1
$x_2 = 0$	1

soluzione individuata: $\bar{x} = (0,0,1,1,1,1)$ $c^T\bar{x} = 14$

OSS: $\bar{x}$ non è ottima: $\tilde{x} = (1,0,1,0,1,0)$

$c^T\tilde{x} = 15$

2) Algoritmo greedy per il problema del commesso viaggiatore (TSP)

traveling salesman problem

$G = (N, A)$ grafo non orientato completo pesato:

↳ c'è un collegamento tra ogni coppia di nodi

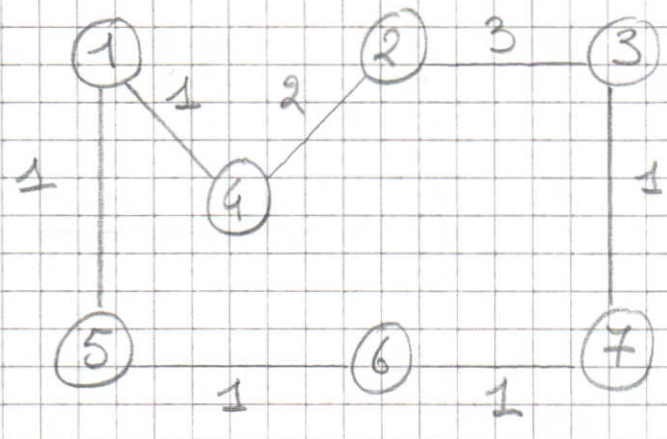
$c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ $\forall (i,j) \in A$ costo di (i,j)

TSP: individua in G un ciclo Hamiltoniano di costo minimo,

↳ ciclo che include tutti i nodi del grafo

↳ somma dei costi degli archi usati nel ciclo

esempio



costo: 10

Formuliamolo in termini di PLI:

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene al ciclo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall (i,j) \in A$

Un modello PLI:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(i,j)\in S(i)} x_{ij} = 2 \qquad \forall i \in N$$

In ogni nodo ci sono 2 archi incidenti (il commesso viaggiatore arriva, visita, riparte)

$$* \sum_{i \in N\setminus Q} \sum_{j \in Q} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall Q \subset N,\ Q \neq \emptyset$$

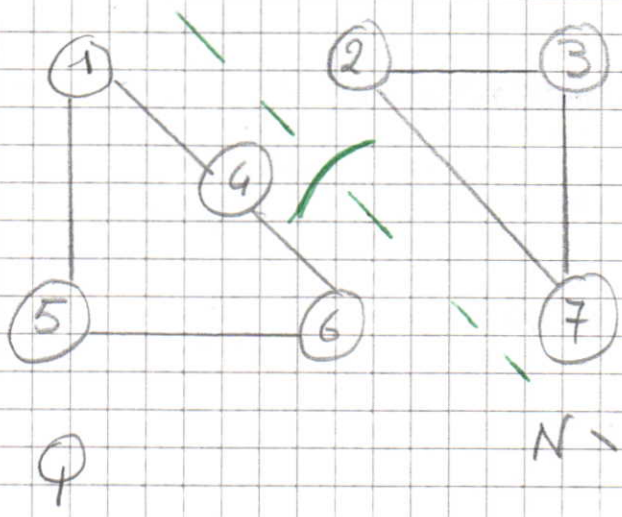
< vincoli di connessione >

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A$$

dove $S(i) = \{(i,j) \in A\}$ stella di i

arco che ha uno degli estremi in i (pensiamoli come strade bidirezionali)

*OSS: i vincoli $\sum_{(i,j)\in S(i)} x_{ij} = 2$ non garantiscono l'ammissibilità:



copertura per cicli

↳ Noi vogliamo una copertura, ma mediante un unico ciclo, non come in questo esempio

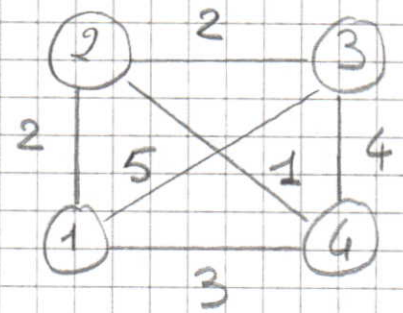
$(N\setminus Q, Q)$: taglio

I vincoli di connessione impongono che ogni taglio sia attraversato da almeno un arco selezionato.

Algoritmo euristico del "vicino più vicino" (nearest neighbour) → algoritmo greedy per TSP

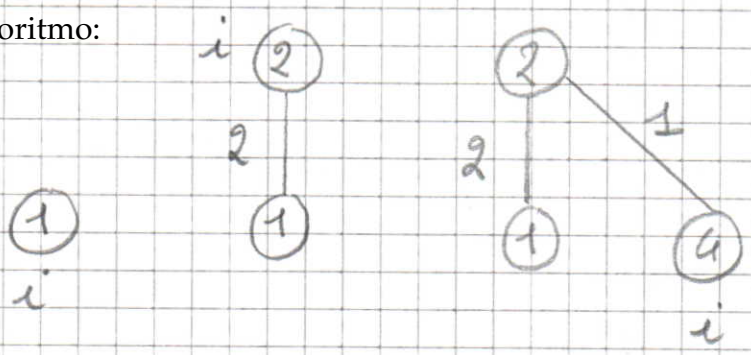
- si parte da un nodo qualsiasi, ad esempio il nodo 1 (nodo corrente)
- ad ogni iterazione si esamina il nodo corrente i; se tutti i nodi sono stati visitati, STOP; altrimenti si considerano gli archi $(i, j) \in A$ con j non visitato, e si visita l'arco di costo minimo, sia (i, h); h diventa il nuovo nodo corrente ($i = h$).

esempio

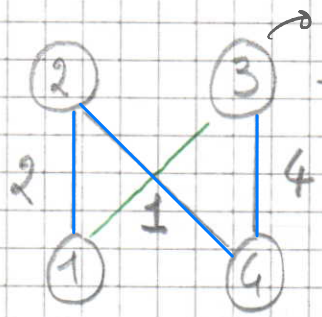


Grafo non orientato completo

Algoritmo:



è l'unico non ancora visitato



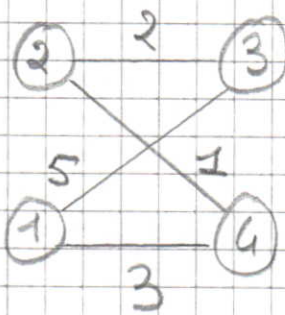
costo: 12

si chiude il ciclo

L'algoritmo si ferma perché ha trovato un cammino hamiltoniano (blu)

tanto so che il grafo è completo, quindi c'è un arco che collega 1 e 3

OSS: non è una soluzione ottima:



costo: 11

sto studiando un problema di minimizzazione!

Come determinare upper bound:

rilassamenti

Dato:

$$(P) \quad z(P) = \max_{x \in F} c(x)$$

allora

$$(\bar{P}) \quad z(\bar{P}) = \max_{x \in \bar{F}} \bar{c}(x)$$

è un rilassamento di (P) se:

1) $F \subseteq \bar{F}$

2) $\bar{c}(x) \geq c(x) \quad \forall x \in F$

Proprietà $z(\bar{P}) \geq z(P)$.

Consideriamo:

$$(P) \quad \max_{Ax \leq b,\ x \in \mathbb{Z}^n} c^T x$$

Alcuni rilassamenti

(1) Rilassamento continuo

(Si trascurano i vincoli di integralità, cioè che x è intero)

$$(RC) \quad \max c^T x \quad Ax \leq b$$

Risoluzione di (RC) per il problema dello zaino binario: variante dell'algoritmo CUD

esempio (cont.)

$$\max \; 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 8$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\dots,6$$

→ al posto di richiedere che xi è binaria

in (RC): $0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1,2,\dots,6$

ordine CUD: 5 3 4 1 6 2 (Pag. 3)

soluzione ottima di (RC) (no dim)		capacità residua
$x_5 = 1$		7
$x_3 = 1$	come in CUD	5
$x_4 = 1$		2
$x_1 = \frac{b - a_5 - a_3 - a_4}{a_1} = \frac{2}{5}$		STOP
$x_6 = 0$		
$x_2 = 0$		

Dato che ora le xi variano con continuità tra 0 e 1, inseriamo nello zaino la frazione per cui lo si può inserire

Si può dim. che è la soluzione ottima: $x^* = (\frac{2}{5}, 0, 1, 1, 1, 0)$ di (RC)

$$c^T x^* = 15 + \frac{4}{5} \geq z(P)$$

Si ottiene:

$$\underline{z} = 14 \leq z(P) \leq 15 + \frac{4}{5} = \bar{z}$$

$\underline{z}$: euristica greedy CUD

$\bar{z}$: valore ottimo di (RC)

Dato che i costi sono interi e le variabili binarie, il valore ottimo è un intero

OSS: $\lfloor 15 + \frac{4}{5} \rfloor = 15$ è un upper bound più accurato

quindi $14 \leq z(P) \leq 15$.

② Rilassamento per eliminazione di vincoli

$$(P) \quad \max c^T x$$
$$A x \leq b \quad \text{"complicanti"}$$
$$E x \leq d \quad \text{"facili"}$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$

cioè se ci fossero solo questi vincoli il problema sarebbe più facilmente risolvibile

$$(RE) \quad \max c^T x$$
$$E x \leq d$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$

è un rilassamento per eliminazione di vincoli di (P)

Esempio 1

Rilassamento per eliminazione di vincoli per il problema del cammino minimo vincolato (CSP)

Constrained shortest path

$G = (N, A)$ grafo orientato

$r \in N$ nodo di partenza

$t \in N$ nodo di arrivo

$c_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i,j) \in A$ costo di (i,j)

$l_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (i,j) \in A$ lunghezza di (i,j)

L soglia

CSP: determino un cammino orientato di costo minimo da r a t in G, considerando solo i cammini di lunghezza totale minore o uguale a L.

(NP - Hard)

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene al cammino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall (i,j) \in A$$

Un modello PLI:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = r \\ +1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall i \in N$$

$$\sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij} \leq L$$

→ Vincolo che mi complica la vita, senza di esso il problema è di cammino minimo non vincolato che si sa risolvere molto efficientemente

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A$$

Rilassamento per eliminazione di vincoli: eliminando $\sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij} \leq L$ si ha un problema di cammino minimo standard da r a t, di efficiente risoluzione

OSS1: poiché CSP è un problema di minimo, il rilassamento fornisce un lower bound di $z(P)$

↳ stima per difetto del valore ottimo

OSS2: se il cammino minimo da r a t soddisfa il vincolo di soglia, tale cammino è ottimo per CSP.

Esempio 2

Rilassamenti per eliminazione di vincoli per TSP (Commesso viaggiatore)

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$G=(N,A)$ non orientato completo

$$\sum_{(i,j)\in S(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{i\in N\setminus Q} \sum_{j\in Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset N, Q \neq \emptyset$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A$$

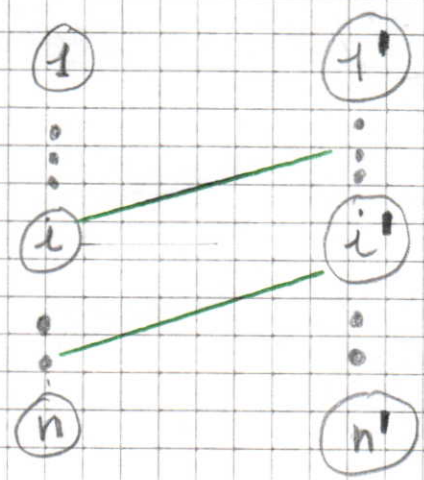
Non è evidente quali siano i vincoli complicanti

① Eliminando

$$\sum_{i\in N\setminus Q} \sum_{j\in Q} x_{ij} \geq 1 \quad \forall Q \subset N, Q \neq \emptyset$$

si ottiene un problema di assegnamento di costo minimo: caso speciale del problema di flusso di costo minimo definito su un grafo bipartito.

Nel caso in esame, il grafo bipartito si ottiene duplicando i nodi in N:



$G'=(N',A')$

N

copia di N

$N' = \{1,2,..,n\} \cup \{1',2',..,n'\}$

N "copia di N"

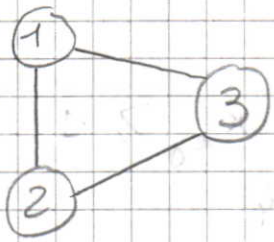
$$A' = \{(i,j') : (i,j) \in S(i) \text{ in } G\}$$

Un **assegnamento** in G' è un sottoinsieme di n archi tali che in ogni nodo in N' incide esattamente **un** arco selezionato.

Proprietà: Un assegnamento in G' corrisponde a selezionare in G due archi incidenti in ogni nodo in N, e viceversa.

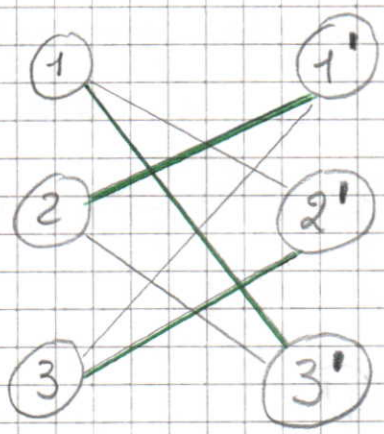
esempio

G:



$S(1) = \{(1,2), (1,3)\}$
$S(2) = \{(2,1), (2,3)\}$
$S(3) = \{(3,1), (3,2)\}$

G':



Copia di N

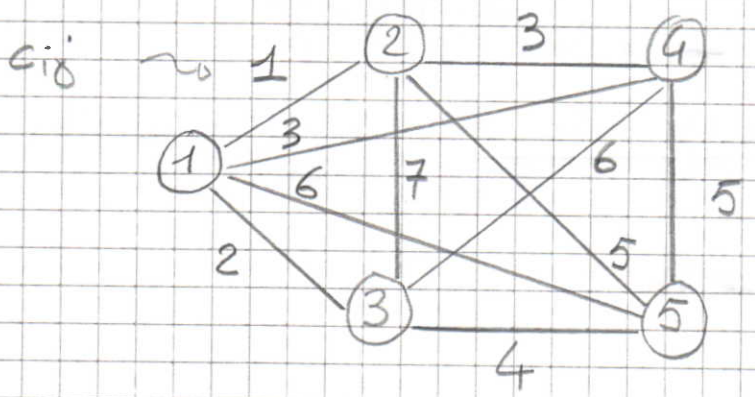
② Eliminando $\sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N$

si ottiene il problema di individuazione di un albero di copertura di costo minimo (MST) in G: struttura che connette tutti i nodi del grafo a costo minimo.

Minimum spanning tree

Algoritmo di Kruskal per MST (algoritmo esatto) → algoritmo greedy

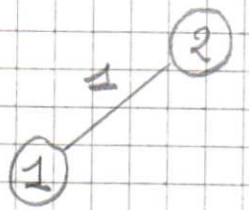
esempio ← Lo presentiamo tramite un esempio



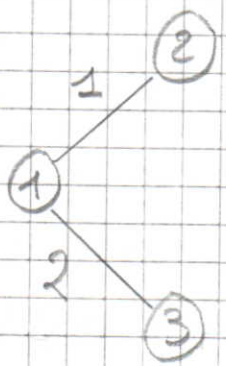
Analizza gli archi in ordine di costo NON decrescente

albero di copertura: sottoinsieme di $(n-1)$ archi privo di cicli

it 1)

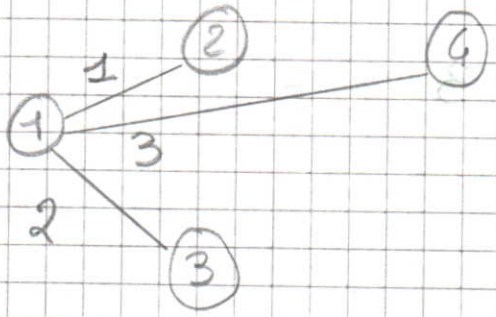


it 2)



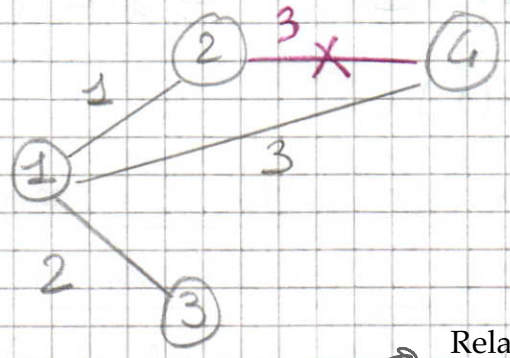
Esame degli archi in ordine di costo non decrescente

it 3)



scartato: crea un ciclo

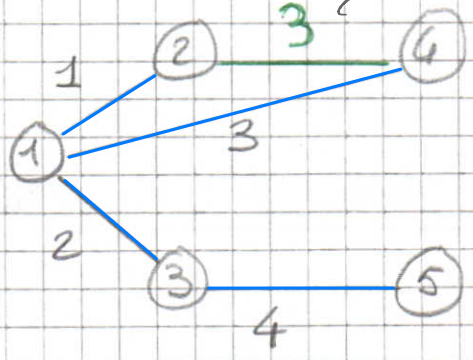
it4)



L'algoritmo non l'aggiunge, nonostante il suo costo, perché la sua aggiunta creerebbe un ciclo e io sto cercando un albero, cioè una struttura priva di cicli

Relativo alle osservazioni successive

it5)



STOP: MST

Quello in blu è un albero di copertura (NB. Sono n-1 archi)

Lower bound

costo: $10 = \underline{z} \leq z(TSP)$

Rafforzamento del lower bound: aggiungendo il vincolo

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} \overset{*}{=} n$$

Posso, cioè, trovare un lower bound maggiore di 10?

con un arco aggiuntivo

si ottiene un altro rilassamento, ovvero il problema dell'1-albero di copertura di costo minimo (MS1T).

* NB. Nel problema originale si vuole trovare un ciclo hamiltoniano, che ha n archi, quindi se aggiungiamo il vincolo che vogliamo selezionare n archi significa che cerchiamo una struttura minimale formata da n archi e non più da n-1. Si aggiunge quello che costa meno tra quelli non ancora selezionati.

Si risolve individuando un albero di copertura di costo minimo (fase 1), e aggiungendo un arco di costo minimo tra quelli non selezionati (fase 2): (2,4) nell'esempio

costo dell'1-albero (MS1T): $10 + 3 = \underline{z} > \underline{z}$

10 = costo di MST

quindi più accurato

lezioni 24, 25

Branch and Bound

Maria Grazia Scutellà
"Ricerca Operativa", corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Appunti di Ricerca Operativa, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa: Cap. 7)

$$(P) \qquad z(P) = \max_{x \in F} c(x)$$

Idea algoritmica: dividere (P) in **sottoproblemi** più piccoli (e più facili da risolvere), risolvere tali sottoproblemi e utilizzare i risultati ottenuti per risolvere (P).

⇓

Approccio "divide et impera"

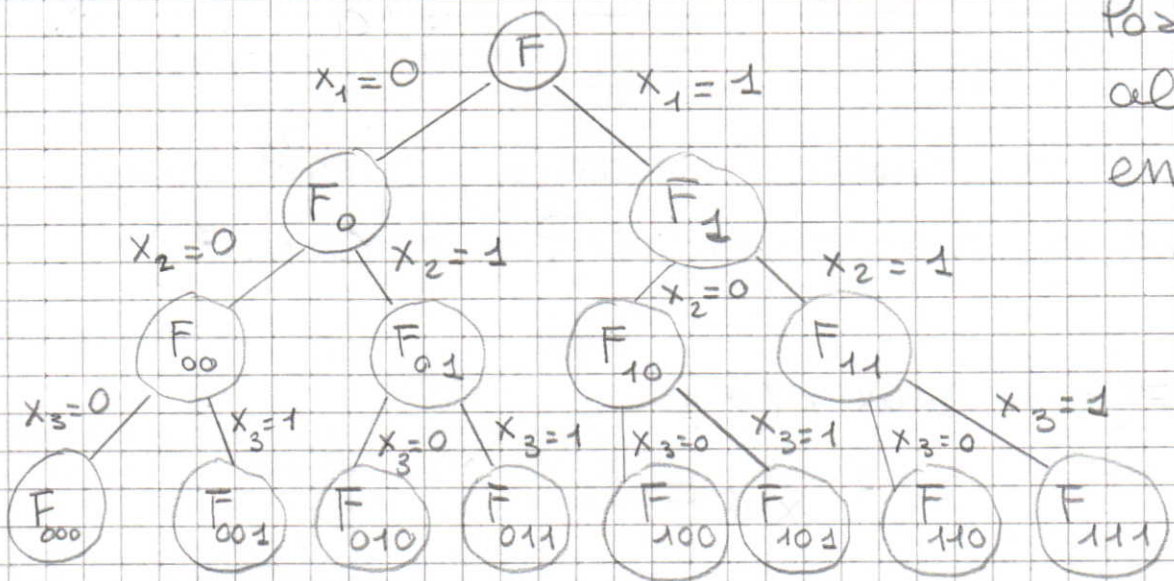
Proposizione: Sia $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_K$ una **decomposizione** di F ($F = \bigcup_{i=1}^{K} F_i$), e sia $z^i = \max\{c(x) : x \in F_i\}$, $i = 1, 2, \dots, K$.

non necessariamente disgiunti

Si ha $z(P) = \max_{i=1,\dots,K} z^i$.

Obiettivo: evitare un'enumerazione esaustiva

esempio $F \subseteq \{0,1\}^3$



Possibile albero di enumerazione completo

Come "potare" l'albero di enumerazione? (**pruning**)

Come effettuare il pruning:

1) utilizzare **lower e upper bound** relativi ai valori ottimi dei **sottoproblemi** derivanti dalla decomposizione (z^i) in modo intelligente;

2) combinare lower e upper bound relativi a z^i, $i = 1, \dots, K$, per derivare **lower e upper bound** relativi a $z(P)$.

Enumerazione implicita

Proposizione: Sia $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_K$ una decomposizione di F, e sia $z^i = \max\{c(x) : x \in F_i\}$, $i = 1, \dots, K$. Sia inoltre $\bar{z}^i$ un upper bound di z^i, e $\underline{z}^i$ sia un lower bound di z^i, $i = 1, \dots K$. Allora:

$$\bar{z} = \max_{i=1,\dots,K} \bar{z}^i$$

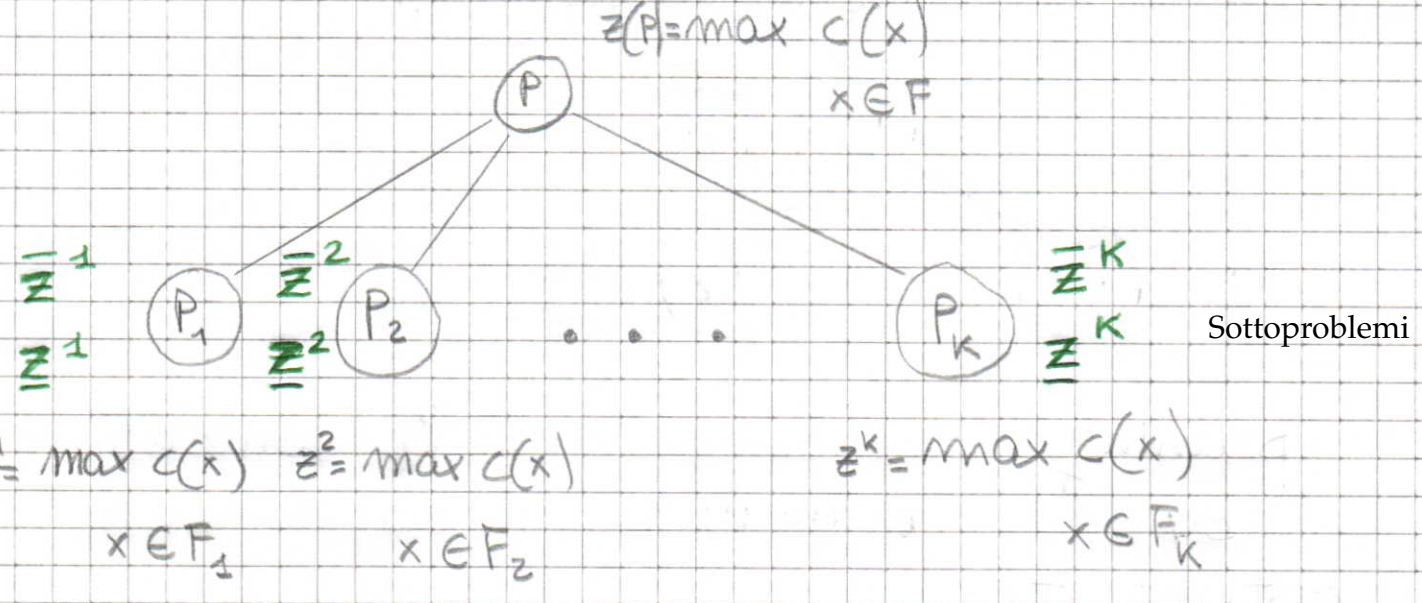
è un upper bound di $z(P)$

e

$$\underline{z} = \max_{i=1,\dots,K} \underline{z}^i$$

è un lower bound di $z(P)$.

Ovvero: bound relativi ai sottoproblemi possono essere combinati per ricavare bound relativi a (P)

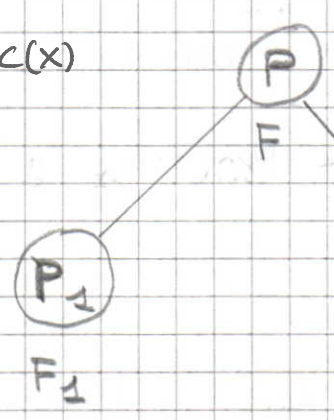


Come utilizzare i bound per evitare un'enumerazione completa

Esempi base

1

$\max_{x \in F} c(x)$



27 upper bound 25 *

13 lower bound 20

Upperbound per P1 20

Lowerbound per P2 20

25

15

$F = F_1 \cup F_2$

P_1: $\max_{x \in F_1} c(x)$

Idem P_2

Per la proposizione precedente:

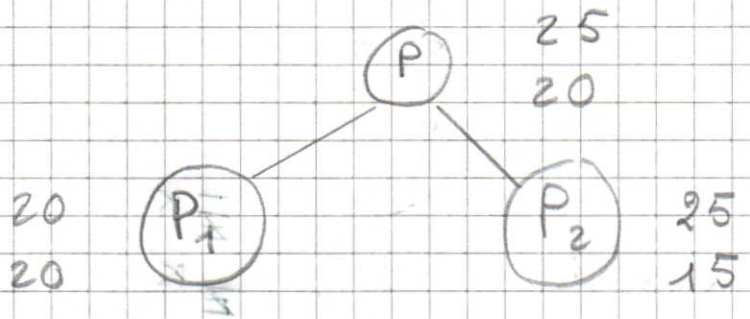
È meglio di 27 perché un upperbound è migliore tanto più è piccolo

* $\bar{z} = \max\{20, 25\} = 25$ è un upper bound di $z(P)$

$\underline{z} = \max\{20, 15\} = 20$ è un lower bound di $z(P)$

È meglio di 13 perché un lowerbound è migliore tanto più è grande

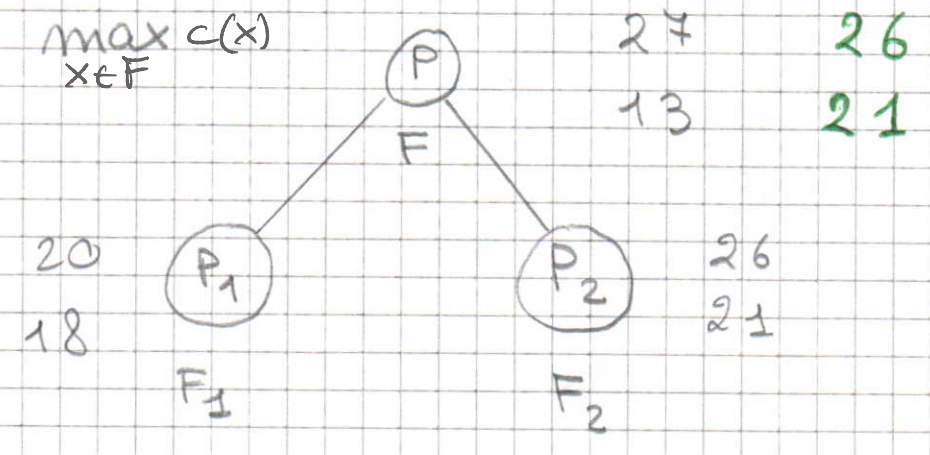
Inoltre: poiché $\underline{z}^1 = \bar{z}^1 = 20$, allora 20 è il valore ottimo di P_1, e quindi P_1 non deve essere ulteriormente decomposto:



pruning by optimality → P1 viene chiuso per ottimalità

Le soluzioni di P_1 vengono enumerate "implicitamente"

2



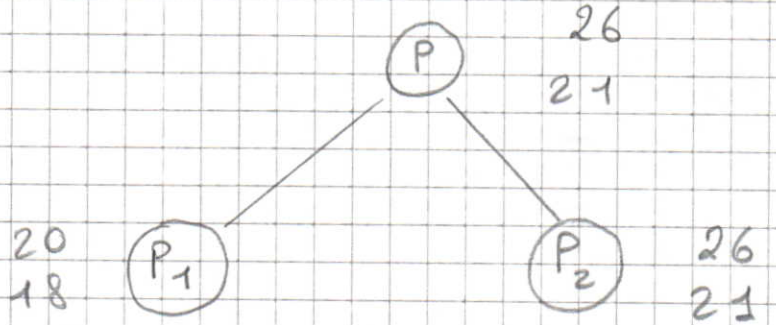
Per la proposizione precedente:

$\bar{z} = \max\{20, 26\} = 26$ è un upper bound di $z(P)$

$\underline{z} = \max\{18, 21\} = 21$ è un lower bound di $z(P)$

<u>Inoltre</u>: poiché $z(P) \geq 21$ e $\bar{z}^1 = 20$,

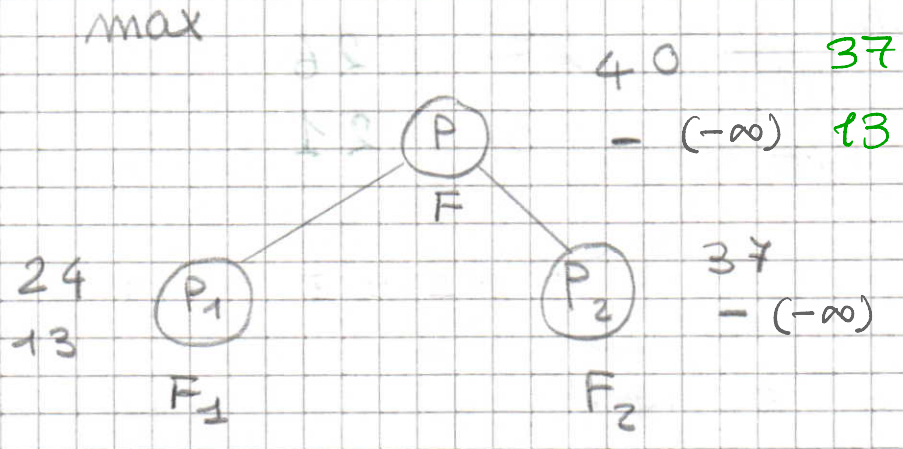
è inutile risolvere P_1: $\bar{z}^1 \leq 21$ (anche se fosse 21 si poterebbe)



Posso considerare implicitamente visitate tutte le soluzioni ammissibili relative a P1

pruning by bound

3 max

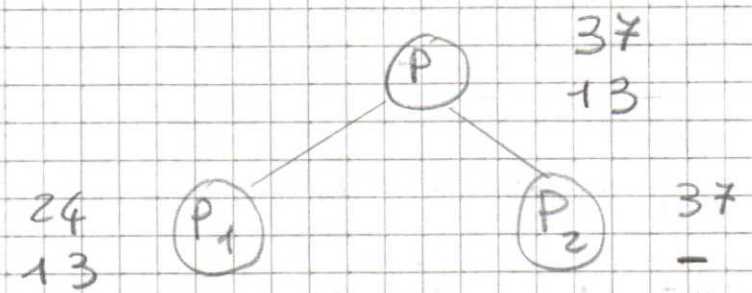


Per la proposizione precedente:

$\bar{z} = \max\{24, 37\} = 37$ è un upper bound di $z(P)$

$\underline{z} = \max\{13, -\infty\} = 13$ è un lower bound di $z(P)$

In questo scenario non si possono trarre altre conclusioni, e occorre decomporre sia P_1 che P_2:



Le regole di pruning consentono quindi di enumerare alcune soluzioni implicitamente, evitando un'enumerazione completa.

Regole di pruning:

1) **pruning by optimality**:

si applica quando un sottoproblema

(P_i) $\quad z^i = \max_{x \in F_i} c(x)$

è stato risolto, ovvero $\underline{z}^i = \overline{z}^i \; (= z^i)$

2) **pruning by bound**:

si applica quando, valutando un sottoproblema, si ha

$\overline{z}^i \leq \underline{z}$ lower bound corrente di $z(P)$

3) **pruning by infeasibility**: (per inammissibilità)

si applica quando si verifica

$F_i = \emptyset$ per un sottoproblema (P_i)

NB. È un caso particolare di 2) perché si è detto che, per convenzione, un problema di max vuoto ha valore ottimo -infty

A partire dalle idee presentate è possibile disegnare uno **schema algoritmico di enumerazione implicita**, **Branch and Bound**.

Branch: Decomponi, ramifica

Bound: Usa opportunamente i bound per evitare una enumerazione esaustiva

Schema algoritmico Branch and Bound

Procedure Branch and Bound (P, z)

NB: $z = z(P)$ valore ottimo

begin

$Q = \{(P)\}$; $z = -\infty$;

struttura di supporto

* Q : insieme nodi attivi (≡ non potati) nell'albero

z : costo della migliore soluzione corrente (incumbent) *

Quindi è il miglior lowerbound per il problema P

repeat

$(P') = \text{NEXT}(Q)$; $Q = Q - \{(P')\}$;

viene discusso nella prossima pag., è un'operazione di scelta del nodo da esaminare

Viene estratto da Q il nodo da valutare (all'inizio sarà la radice)

$\overline{z} = \text{RILASSAMENTO}(P')$;

Cerca un upperbound relativo al nodo che sta esaminando, risolvendo un opportuno rilassamento per il problema P'

if $\overline{z} > z$ **then**

Se così non fosse, cioè vale il <=, siamo nel caso di pruning by bound

begin

Cerca un lowerbound, che in generale per problemi di max si trova tramite delle euristiche

$\underline{z} = \text{EURISTICA}(P')$;

if $\underline{z} > z$ **then** $z = \underline{z}$;

if $\overline{z} > \underline{z}$ **then**

Se così non fosse, cioè coincidono, siamo nel caso di pruning by optimality

$Q = Q \cup \text{BRANCH}(P')$

Decompone opportunamente P' in sottoproblemi, che vengono aggiunti all'insieme dei sottoproblemi da analizzare, cioè all'insieme dei nodi attivi

end

until $Q = \emptyset$

Branch and Bound: componenti chiave

1. **RILASSAMENTO**: restituisce un upper bound (se (P) in forma max) mediante un rilassamento

invertiti se il problema è in forma di min

2. **EURISTICA**: restituisce un lower bound (se (P) in forma max) mediante un'euristica

Caratteristiche desiderate

- (lower e upper) **bound accurati**
- **procedure efficienti** (euristica e rilassamento sono invocate in ogni iterazione, quindi se richiedono molto tempo appesantiscono la risoluzione dell'intero algoritmo)
- RILASSAMENTO e EURISTICA **possibilmente interconnessi**
- uso di tecniche di **riottimizzazione**, se possibile

3. **NEXT**: determina l'ordine di valutazione dei sottoproblemi, e quindi la strategia di visita dell'albero di enumerazione.

Visite in ordine topologico:

larghezza

breadth-first o FIFO (Q è una coda)

depth-first o LIFO (Q è uno stack)

Visite basate su informazione : best-first (estrae da Q il nodo più "promettente")

④ BRANCH: determina come decomporre F (insieme ammissibile del sottoproblema che stiamo valutando)

- proprietà necessarie:

completezza: $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_K$ → cioè l'unione degli Fi è F

- proprietà addizionali:

partizionamento: $F_i \cap F_j = \phi \quad i \neq j$

↓

Per ogni soluzione esaminata, nell'albero di enumerazione esiste un unico cammino dalla radice al nodo corrispondente

bilanciamento: $|F_i| \underset{\text{circa}}{\simeq} |F_j| \quad i \neq j$

↓

Per generare un albero di enumerazione bilanciato; rilevante se si adotta una strategia di visita di tipo depth-first.

pochi figli per nodo: K limitato

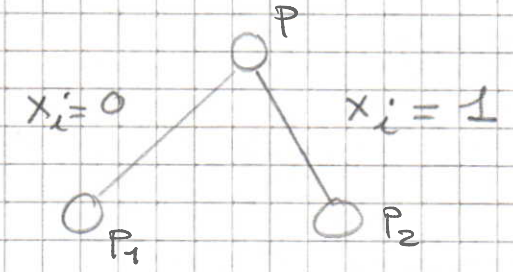
↓

Per limitare il consumo di memoria.

compatibilità con RILASSAMENTO e EURISTICA:

esempio: zaino binario

se



P1 è un problema di zaino binario in cui ho deciso di non considerare l'oggetto i-esimo, quindi ho n-1 oggetti. P2 è un problema di zaino binario in cui ho deciso di mettere l'oggetto i-esimo e quindi ho n-1 oggetti su cui devo ancora decidere

i due sottoproblemi generati sono a loro volta problemi di zaino binario (ridotti); di conseguenza le tecniche di bounding utilizzate per il nodo padre possono essere utilizzate anche per i nodi figli.

In generale non è vero che i sottoproblemi siano della stessa natura del padre!

① Algoritmo Branch and Bound per il problema di zaino binario

$$(P) \quad \max\ 8x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 12$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 5$$

RILASSAMENTO: rilassamento continuo

EURISTICA: euristica greedy CUD

BRANCH: decomposizione binaria, sull'unica variabile frazionaria (non intera) della soluzione ottima del rilassamento continuo. (sarà più chiaro con un esempio)

NEXT : breadth-first, dando priorità al sottoproblema ottenuto fissando la variabile frazionaria a 1 (Q è una coda)

Notazione (in ogni nodo)

x^* : soluzione ottima del rilassamento continuo

$\bar{x}$: soluzione dell'euristica CUD

$\bar{z}$: upper bound al nodo ($\bar{z} = c^T x^*$)

$\underline{z}$: lower bound al nodo ($\underline{z} = c^T \bar{x}$)

Inoltre z : costo della miglior soluzione corrente

Ordine : 1, 2, 3, 4, 5
CUD

{in quanto : $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_3}{a_3} \geq \frac{c_4}{a_4} \geq \frac{c_5}{a_5}$}

Inizializzazione : $Q = \{(P)\}$; $z = -\infty$

(P) : nodo radice

I iterazione: viene estratto l'unico nodo presente in Q, cioè P, è vado a valutare il problema corrispondente a quel nodo, cioè il problema originario, invocando il rilassamento continuo

$x^* = (\underbrace{1, 1, 1}_{4+3+4=11}, \frac{1}{3}, 0)$ $\quad \bar{z} = 19$ ($c^T x^*$)

$\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0)$ $\quad \underline{z} = 18$ ($c^T \bar{x}$)

inserisco gli oggetti (in ordine CUD) integralmente finché possibile, poi metto la parte frazionaria possibile di quell'oggetto che non ci sta integralmente (non si è dimostrato ma si è detto che questa è una soluzione ottima del RC)

Poiché $\underline{z} > z$ $(= -\infty)$, allora $z = 18$

Poiché $\underline{z} < \bar{z}$, BRANCH su x_4

$Q = \{(P_1), (P_2)\}$

Rilassamento e euristica sono interconnessi, infatti avendo x^* so subito chi è $\bar{x}$

(P_1): $x_4 = 1$

$4 + 3 + 3 = 10$ → incrocio il 3° oggetto per $\frac{12-10}{4} = \frac{1}{2}$ → peso del 3°

1° 2° 4°

$x^* = (1, 1, \frac{1}{2}, 1, 0)$ $\quad \bar{z} = 18 + \frac{1}{2}$

$\bar{x} = (1, 1, 0, 1, 1)$ $\quad \underline{z} = 17$

Poiché $\underline{z} < \bar{z}$, BRANCH su x_3

$Q = \{(P_2), (P_3), (P_4)\}$

scaturiscono dal BRANCH su x3

(P_2): $x_4 = 0$

$x^* = (1, 1, 1, 0, \frac{1}{2})$ $\quad \bar{z} = 18 + \frac{1}{2}$

$\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0)$ $\quad \underline{z} = 18$

Poiché $\underline{z} < \bar{z}$, BRANCH su x_5

$Q = \{(P_3), (P_4), (P_5), (P_6)\}$

scaturiscono dal BRANCH su x5

(P_3): $x_4 = 1$, $x_3 = 1$

$x^* = (1, \frac{1}{3}, 1, 1, 0)$ $\quad \bar{z} = 17 + \frac{2}{3}$

Poiché $\bar{z} \leq z = 18$, pruning by bound

$Q = \{(P_4), (P_5), (P_6)\}$

(P_4): $x_4 = 1$, $x_3 = 0$

$x^* = (1, 1, 0, 1, 1)$ $\quad \bar{z} = 17 = \underline{z}$

pruning by optimality (e anche per bound)

in realtà viene prima questo nello schema algoritmico

$Q = \{(P_5), (P_6)\}$

(P_5): $x_4 = 0,\ x_5 = 1$

$x^* = (1, 1, \frac{3}{4}, 0, 1)$ $\quad \bar{z} = 17 + \frac{3}{4}$

Poiché $\bar{z} \leq z = 18$, pruning by bound

$Q = Q \setminus (P_6)$

(P_6): $x_4 = 0,\ x_5 = 0$

$x^* = (1, 1, 1, 0, 0)$ $\quad \bar{z} = 18 = \underline{z}$

pruning by optimality (e bound)

$Q = \phi$ STOP: $x = (1, 1, 1, 0, 0)$, di costo $z = 18$, è una soluzione ottima

Proprietà:

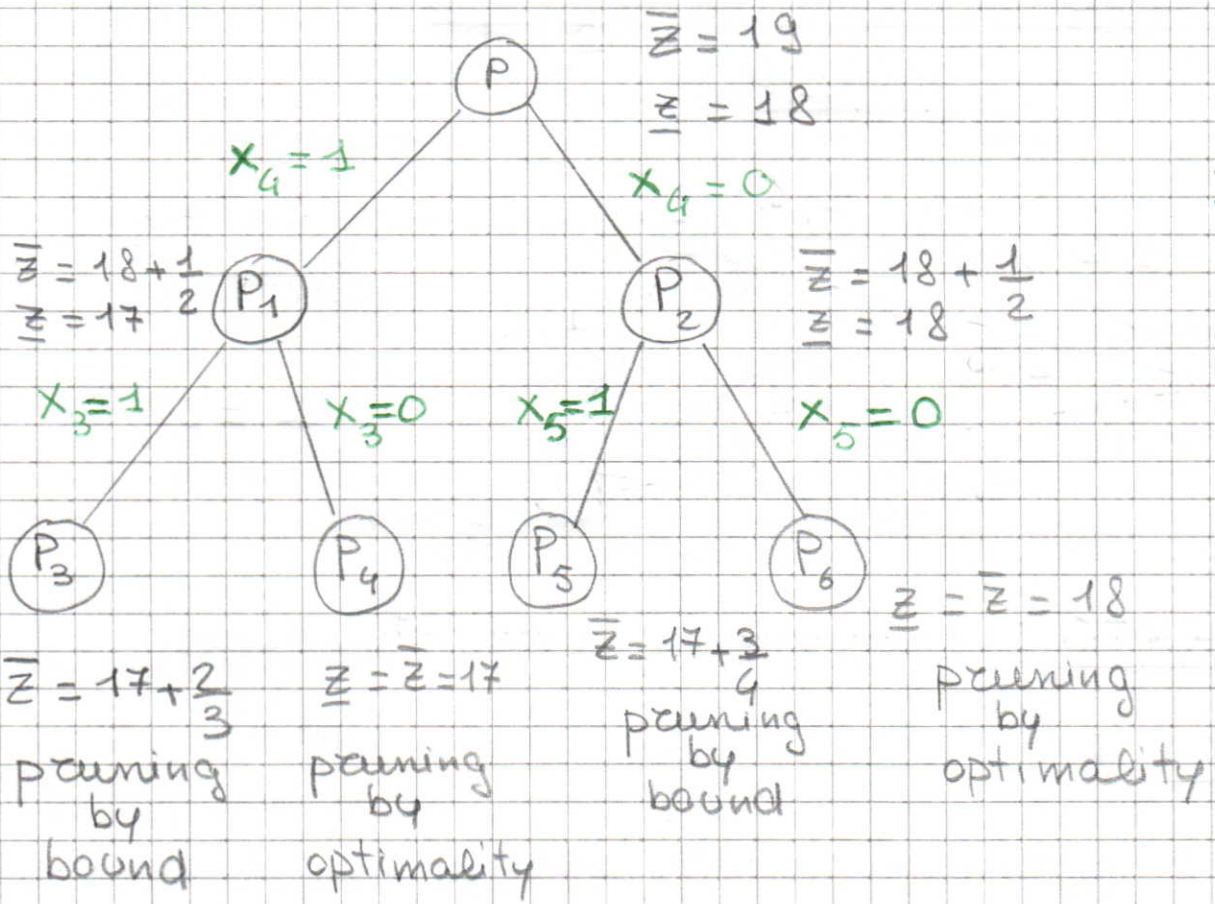
1) BRANCH è una regola di partizionamento

2) RILASSAMENTO e EURISTICA sono interconnessi (si basano entrambi sull'ordine CUD)

3) BRANCH è compatibile con RILASSAMENTO e EURISTICA (ogni sottoproblema è un problema di zaino ridotto)

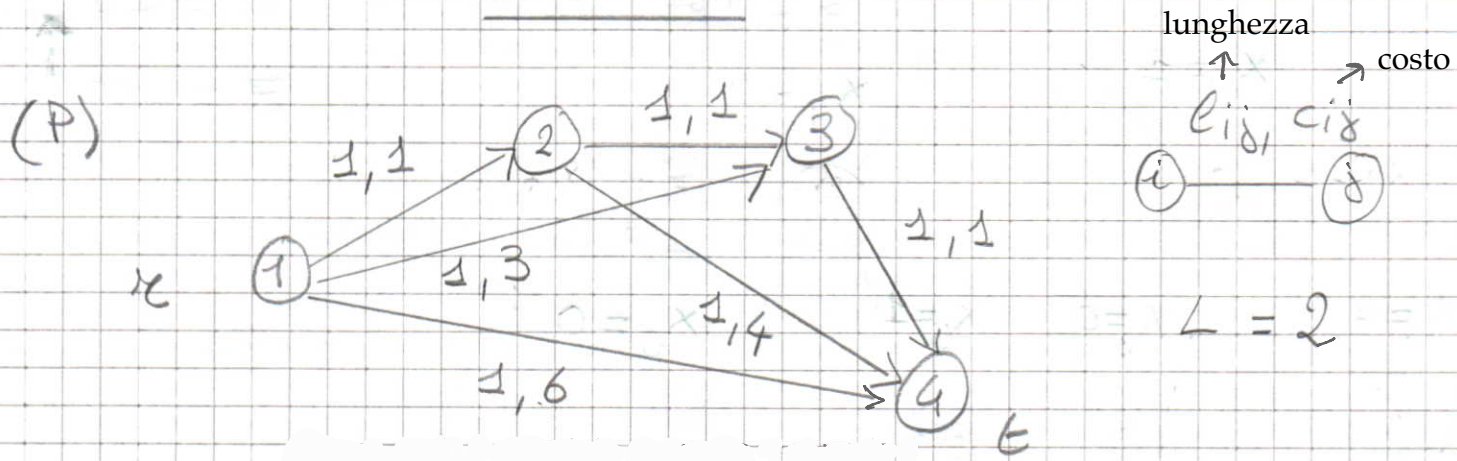
4) La soluzione ottima del rilassamento continuo è "tagliata" dai due sottoproblemi: $\bar{z}$ è non crescente lungo ogni cammino dell'albero.

Albero di enumerazione generato



OSS : Poiché i costi sono interi, per (P_1) e (P_2) si potrebbe considerare l'upper bound $\lfloor 18 + \frac{1}{2} \rfloor = 18$. In tal caso sia (P_1) che (P_2) potrebbero essere chiusi per bound, generando solo i primi due livelli dell'albero di enumerazione.

② Algoritmo Branch and Bound per il problema di cammino minimo vincolato



RILASSAMENTO: cammino minimo standard

EURISTICA: — (non la usiamo, ci si basa sul cammino minimo)

BRANCH: partizionamento basato sul cammino minimo standard (sarà più chiaro con l'esempio)

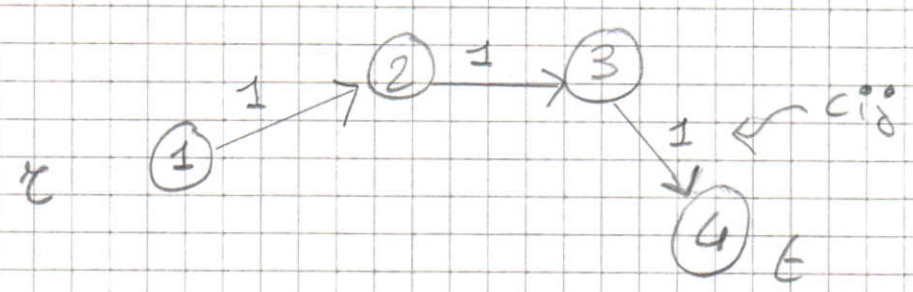
NEXT: breadth-first (FIFO)

Inizializzazione: $Q = \{(P)\}$; $z = +\infty$

↑ problema in versione min

(P): nodo radice

RILASSAMENTO: cammino minimo da r a t



↓

Si può invocare uno degli algoritmi visti, tipo dijksrta o quello per aciclici, ma essendo così piccolo si fa a occhio

P_{rt}

$\underline{z} = 3$ (1+1+1) : lower bound per $z(P)$ → Perché il problema è di minimo!

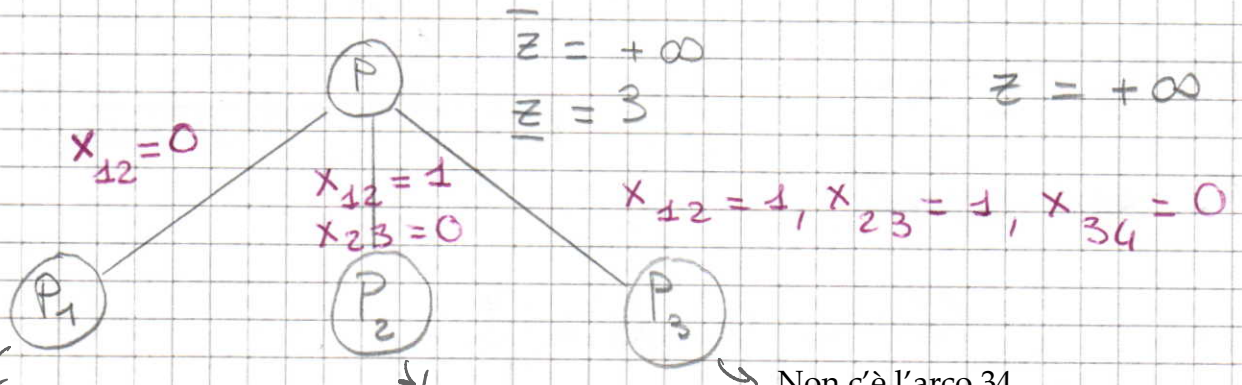
$\overline{z} = +\infty$ →

NB. Non si ha l'euristica, però si deve controllare se è ammissibile. In questo caso il cammino minimo è formato da 3 archi, quindi non lo è (L=2).

Poiché $\underline{z} < \overline{z}$, BRANCH

Regola di branching: poiché $\sum_{(i,j) \in P_{rt}} l_{ij} = 3 > L = 2$,

P_{rt} non è ammissibile per (P), quindi:



Sottoproblema ottenuto da P dicendo che l'arco 12 non è presente

Non c'è l'arco 23

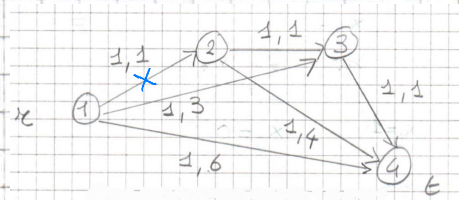
Non c'è l'arco 34

albero di enumerazione corrente

$Q = \{(P_1), (P_2), (P_3)\}$

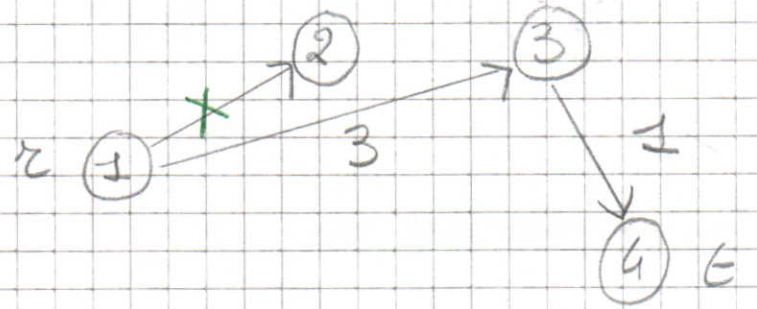
(P_1)

(P_1) è un problema di cammino minimo vincolato in un grafo ridotto, ottenuto cancellando $(1,2)$



È facile vedere, per ispezione a occhio, che il cammino minimo è 134

RILASSAMENTO:



Prt

$\underline{z} = 4$

Poiché $\sum_{(i,j) \in Prt} l_{ij} = 2 = L$, Prt è ammissibile

per (P): $\bar{z} = 4$ (Cioè: posso individuare anche un upperbound)

Poiché $\bar{z} = 4 < z (= +\infty)$, allora $z = 4$

Poiché $\underline{z} = \bar{z}$, <u>pruning by optimality</u>

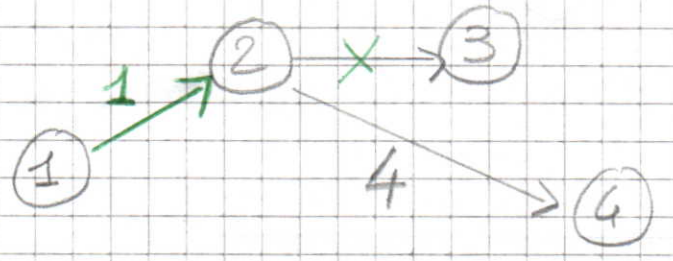
(e per <u>bound</u>)

$Q = \{(P_2), (P_3)\}$

(P_2)

(P_2) è un problema di cammino minimo vincolato in un grafo ottenuto cancellando $(2,3)$, con l'ulteriore vincolo che $(1,2)$ sia il <u>primo</u> arco del cammino

RILASSAMENTO: trovare un cammino minimo da 1 a 4 equivale a trovare un cammino minimo da 2 a 4 nel grafo ridotto



P_{rtt}

$$\bar{z} = 1 + 4 = 5$$

(Poiché $\sum_{(i,j) \in P_{rtt}} l_{ij} = 2 = L$, P_{rtt} è ammissibile:

poiché $\bar{z} = 5 > z = 4$, z non migliore)

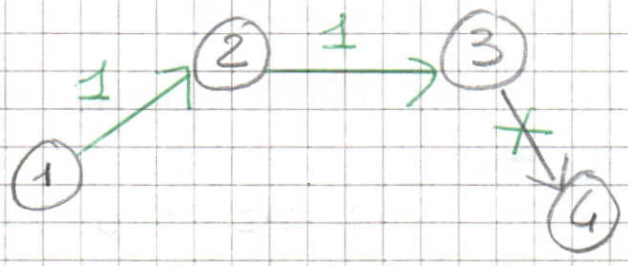
Poiché $\underline{z} = 5 > z = 4$, pruning by bound

$$Q = \{(P_3)\}$$

(P_3)

(P_3) è un problema di cammino minimo vincolato in un grafo ottenuto cancellando $(3,4)$ con l'ulteriore vincolo che il sottocammino iniziale sia $(1,2,3)$

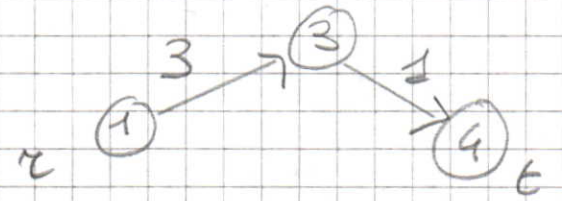
RILASSAMENTO: trovo un cammino minimo da 3 a 4 nel grafo ridotto



non esiste nessun cammino da 3 a 4:

pruning by infeasibility

$Q = \emptyset$, STOP:



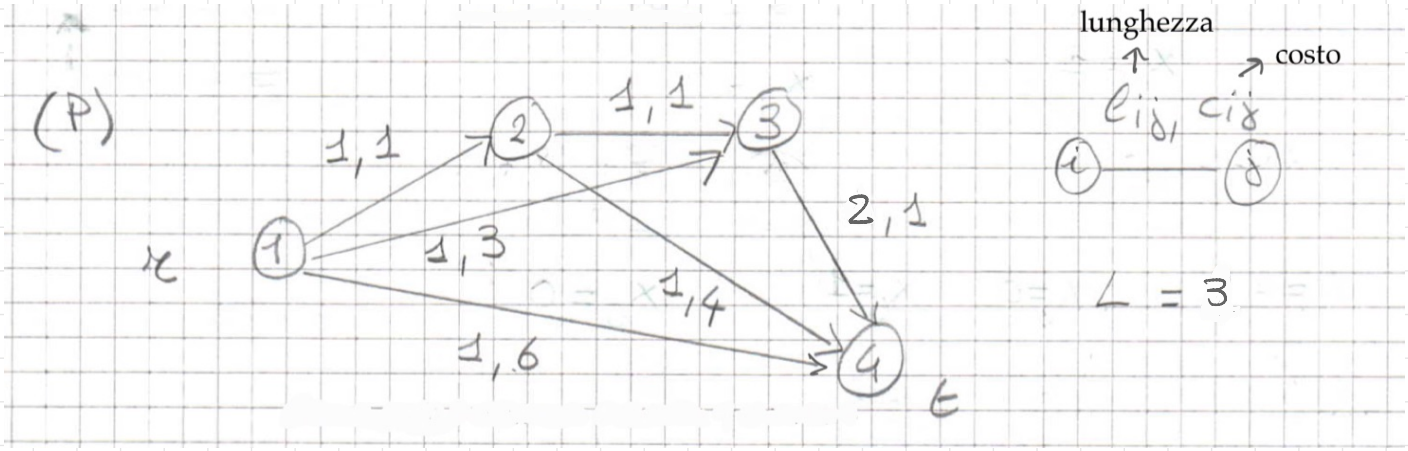
$z = 4$

soluzione ottima per l'istanza in questione

Proprietà:

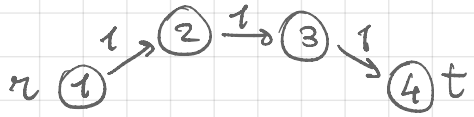
1) BRANCH è una regola di partizionamento
2) BRANCH è compatibile con RILASSAMENTO (ogni sottoproblema è un problema di cammino minimo vincolato)
3) La soluzione ottima del rilassamento è "tagliata" dai sottoproblemi: $\underline{z}$ è non decrescente lungo ogni cammino dell'albero

OSS.: Modifichiamo leggermente l'istanza cosicché il pruning by infeasibility sia più evidente. Cambio la lunghezza dell'arco 3,4 da 1 a 2 e la soglia L=3.



INIZIALIZZAZIONE: Q={(P)}, z=+infty
NODO RADICE (P): RILASSAMENTO per eliminazione di vincoli

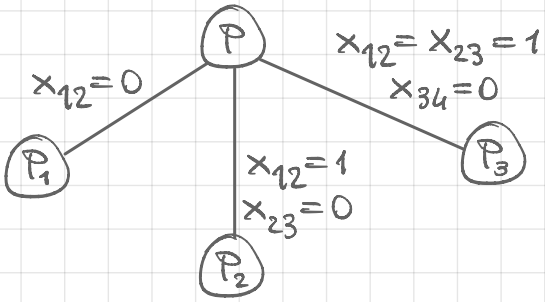
Cammino minimo standard (a occhio):



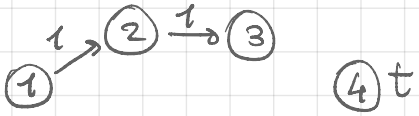
$\bar{z} = 3$ costo del cammino è un lower-bound

$\bar{z} = +\infty$ perché non è un cammino ammissibile

Si è vista una regola di branching che genera un numero opportuno di sottoproblemi in modo tale da escludere che si ripresenti questo tipo di soluzione (che non è ammissibile):

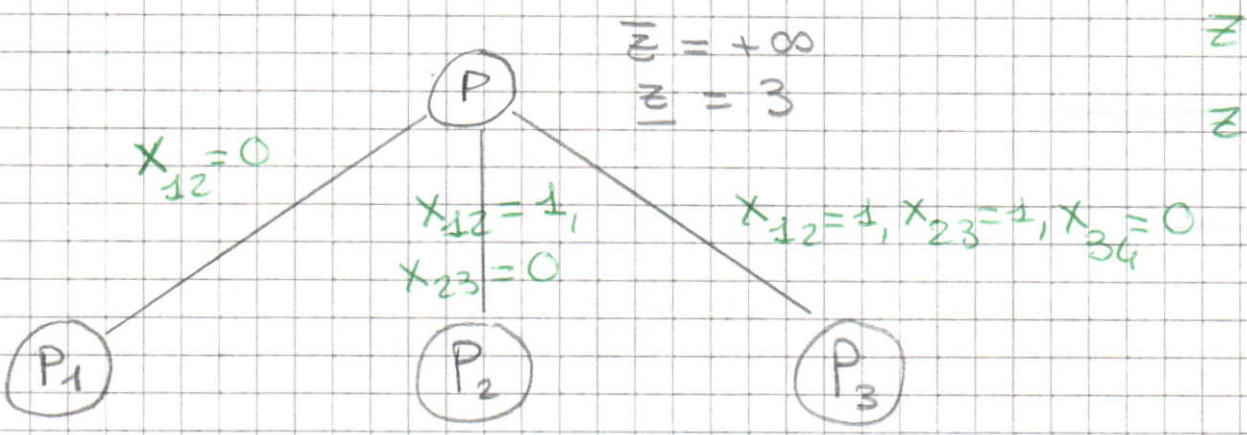


(P_3): RILASSAMENTO: è un problema di cammino minimo vincolato tale che il primo arco è 12 e il secondo 23 e si elimina l'arco 34. È equivalente a risolvere un problema di cammino minimo dalla nuova destinazione (il nodo 3, visto che la parte iniziale del cammino è stata fissata) al nodo 4=t in un grafo che possiamo anche ridurre ulteriormente eliminando tutti gli archi uscenti dal nodo 1 e dal nodo 2 (oltre all'arco 34 come dettato dal branching). Si vede che 4 non è raggiungibile da 3, quindi il rilassamento continuo ha come esito la non ammissibilità, dunque: $\bar{z} = +\infty$



Albero di enumerazione generato

(Per il primo esempio di cammino minimo vincolato)



$z = +\infty$ ↓

$z = 4$

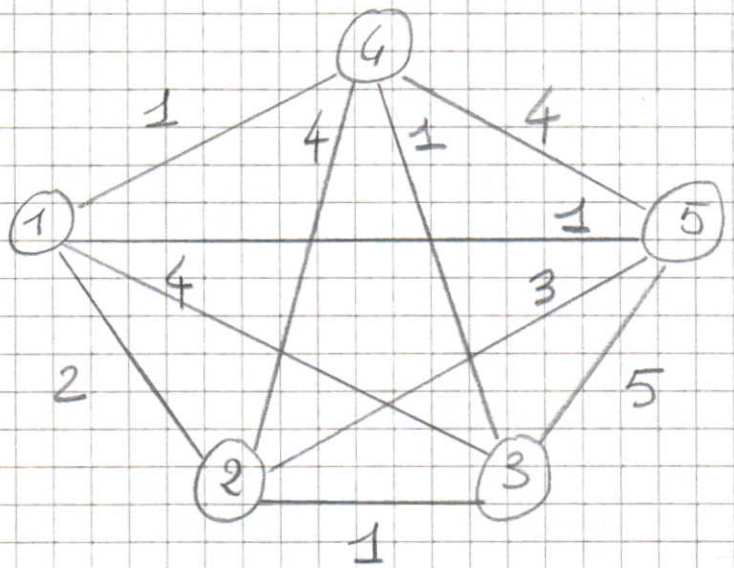
$\underline{z} = \bar{z} = 4$
pruning by optimality

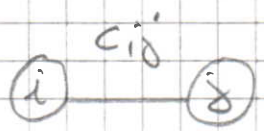
$\underline{z} = 5$
pruning by bound

$\underline{z} = +\infty$
pruning by infeasibility

③ Algoritmo Branch and Bound per il problema del commesso viaggiatore (TSP)

(P)





Grafo non orientato e completo

RILASSAMENTO : 1-albero di copertura di costo minimo

EURISTICA : —

BRANCH : vedi nel seguito

NEXT : breadth-first (FIFO)

Inizializzazione : $Q = \{(P)\}$; $\underline{z} = +\infty$

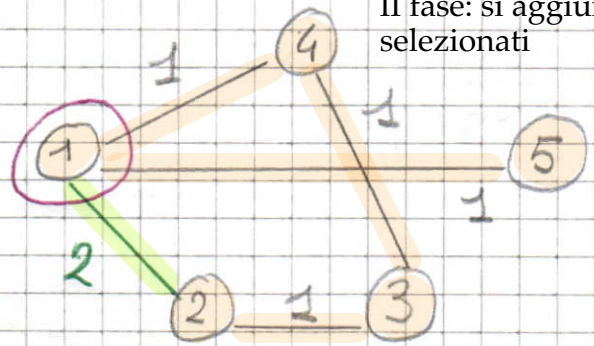
è di minimo

(P)

RILASSAMENTO :

Si cerca un 1-albero di copertura, che si trova in 2 fasi.
I fase: si cerca un albero di copertura (MST-Kruskal): n-1 archi privo di cicli
II fase: si aggiunge un arco di costo minimo tra quelli non selezionati

MST



$\underline{z} = 6$

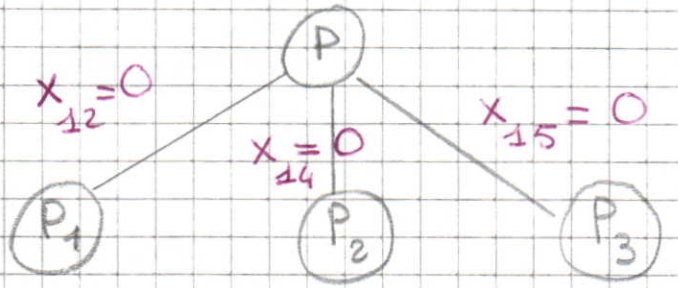
$\overline{z} = +\infty$

Poiché $\underline{z} < \overline{z}$, BRANCH

Posso dire questo perché non è un ciclo hamiltoniano

Regola di branching : poiché in almeno un nodo (1) incidono più di 2 archi, decompongo escludendo, a turno, uno di tali archi

In questa istanza il nodo 1 è tale che vi incidono 3 archi (oltre all'arco 14)



$$Q = \{(P_1), (P_2), (P_3)\}$$

OSS: non è un partizionamento di F

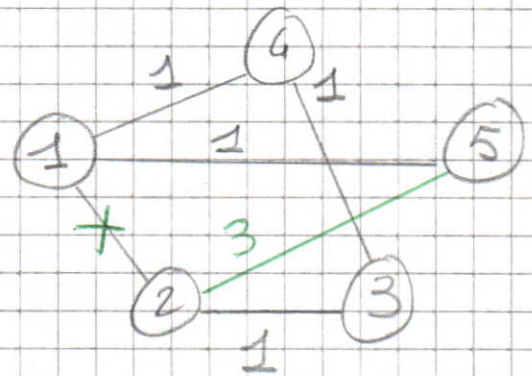
(P_1)

(P_1) è un TSP su un grafo ridotto, ottenuto rimuovendo (1, 2)

↳ arco 12

RILASSAMENTO:

MST



$\underline{z} = 7$

Poiché è un ciclo Hamiltoniano: $\overline{z} = 7$

Poiché $\overline{z} = 7 < z (= +\infty)$: $z = 7$

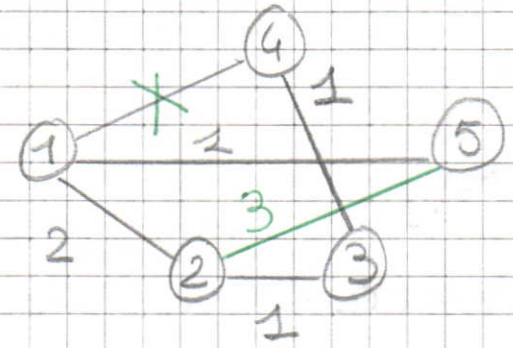
Poiché $\underline{z} = \overline{z} (= 7)$, pruning by optimality

$$Q = \{(P_2), (P_3)\}$$

(P_2)

RILASSAMENTO:

MST



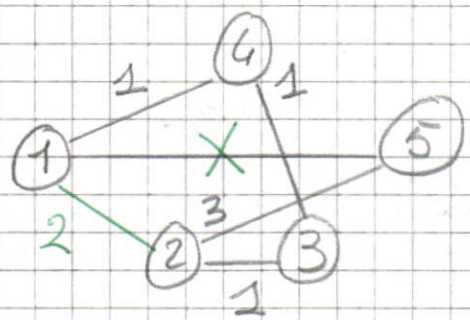
$\underline{z} = 8$

Poiché $\underline{z} = 8 > z = 7$, pruning by bound

$Q = \{(P_3)\}$

(P_3)

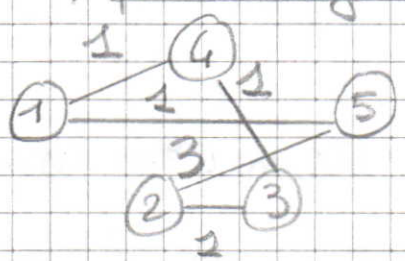
MST



$\underline{z} = 8$

Poiché $\underline{z} = 8 > z = 7$, pruning by bound

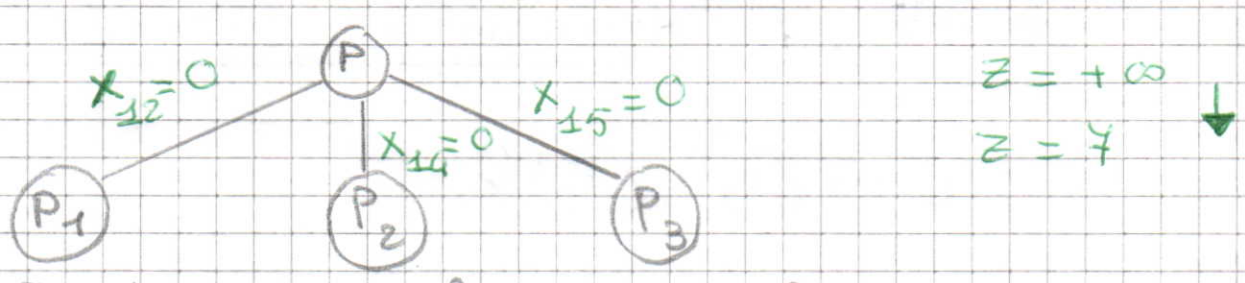
$Q = \emptyset$, STOP:



soluzione ottima

$z = 7$

Albero di enumerazione generato



$z = +\infty$

$z = 7$

$\underline{z} = \bar{z} = 7$
pruning by optimality

$\underline{z} = 8$
pruning by bound

$\underline{z} = 8$
pruning by bound

lez 26-27

Algoritmo dei piani di taglio

Maria Grazia Scutellà
"Ricerca Operativa", Corso di Laurea in Matematica
Università di Pisa

(Rif: Peppalardo, Passacantando, "Ricerca Operativa", Seconda Edizione: 11.3)

(P) $\max c^T x$
$Ax \leq b$
$x \in \mathbb{Z}^n$

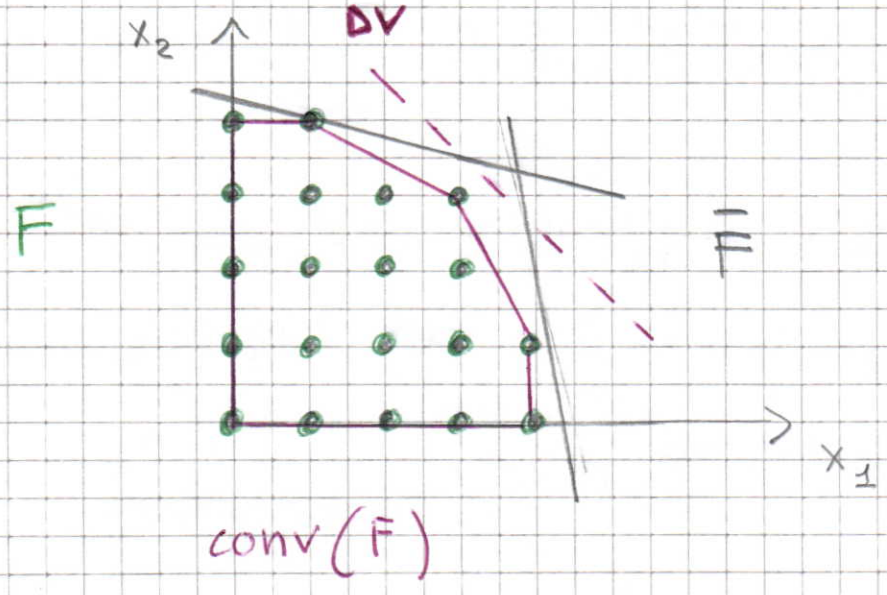
$\bar{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ poliedro definito dai vincoli lineari di (P)

$F = \bar{F} \cap \mathbb{Z}^n$ regione ammissibile di (P)

$conv(F)$ inviluppo convesso di F (poliedro sotto ipotesi molto ragionevoli)

↳ quindi possiamo assumere sia un poliedro

esempio (cont.)



Poiché

$$z(P) = \max_{x \in conv(F)} c^T x$$

l'idea è approssimare $conv(F)$ in modo più accurato rispetto all'approssimazione fornita da $\bar{F}$

Definizione La disequazione $\pi^T x \leq \pi_0$ è detta **disuguaglianza valida** (DV) per F se

$$\pi^T x \leq \pi_0 \quad \forall x \in F$$

Teorema Se $\pi^T x \leq \pi_0$ è una DV per F, allora è una DV anche per $conv(F)$.

Dim.:

Se $x \in conv(F)$, allora $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x^i$ (esprimibile come combinazione convessa), con $x^i \in F$ per $i \in I$, $\lambda_i \geq 0$ per $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

Quindi $\pi^T x = \sum_{i \in I} \lambda_i (\pi^T x^i) \overset{\text{Hp.}}{\leq} \pi_0 \sum_{i \in I} \lambda_i = \pi_0$ □

Idea algoritmica: aggiungere DV all'insieme di vincoli che definiscono $\bar{F}$, per approssimare $conv(F)$ in modo sempre più accurato.

Metodi generali per generare DV

Osservazioni base: 1) ogni vincolo lineare in $Ax \leq b$ è una DV per F (e anche per $\bar{F}$) $A_i^T x \leq b_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} u^T A^i x_i \leq u^T b$ è una DV per F (e anche $\bar{F}$),

dove $A^1, A^2, \dots, A^n$ sono le colonne di A ($m \times n$)

(m: numero vincoli; n: numero variabili decisionali)

$u \in \mathbb{R}_+^m$ è un vettore di moltiplicatori non negativi (uno per ogni riga di A) cioè per ogni vincolo

Assumendo $x \geq 0$ (quindi $Ax \leq b$ include i vincoli lineari $-x \leq 0$):

Tecnica di arrotondamento di Chvátal-Gomory:

1) genera $\sum_{i=1}^{n} u^T A^i x_i \leq u^T b$ per opportuni moltiplicatori $u \in \mathbb{R}_+^m$: DV per F (e per $\bar{F}$)

↳ genera una DV di questa forma

2) genera $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u^T A^i \rfloor^T x_i \leq u^T b$: DV per F (e anche per $\bar{F}$) in quanto $x \geq 0$ *

↳ genera un'altra DV intervenendo su quella del passo 1

3) genera $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u^T A^i \rfloor^T x_i \leq \lfloor u^T b \rfloor$: DV per F in quanto $x \in \mathbb{Z}^n$.

* poiché vale questo, la disuguaglianza è ancora valida per gli elementi di $\bar{F}$ e quindi anche per gli elementi di F

Teorema: Ogni DV per F può essere ottenuta applicando la tecnica di Chvátal-Gomory un numero finito di volte.

↳ Non è un risultato operativo, cioè non si dimostra in modo costruttivo, quindi non so come applicare la tecnica, so solo che esiste un modo

No dim.

esempio

$$A x \leq b \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

u → Scelgo i moltiplicatori (non chiediamoci perché scelgo questi)

u: $\frac{2}{7}$, $\frac{37}{63}$, 0, 0, 0

1) $2x_1 + x_2\left(\frac{37}{63} - \frac{4}{7}\right) \leq 4 + 3 \cdot \frac{37}{63}$ $\quad \frac{37}{63}$ $\quad 21$

ovvero $2x_1 + \frac{1}{63} x_2 \leq \frac{121}{21}$

DV per F (e anche per $\overline{F}$)

2) $2x_1 \leq \frac{121}{21}$

DV per F (e anche per $\overline{F}$)

3) $2x_1 \leq \left\lfloor \frac{121}{21} \right\rfloor = 5$ DV per F

Iterando, e scegliendo moltiplicatore $\frac{1}{2}$ per il nuovo vincolo: [1) $2x_1 <= 5$ u=1/2, 2) $x_1 <= 5/2$, 3) $x_1 <= 2$]

$x_1 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ DV (più stretta) per F

Una sottoclasse fondamentale di DV è:

Definizione Sia $\bar{x}$ una soluzione ottima del rilassamento continuo. Una DV $\pi^T x \leq \pi_0$ tale che $\pi^T \bar{x} > \pi_0$ è detta **piano di taglio**.

Schema algoritmico dei piani di taglio

Inizializzazione: $t = 0$, $Q^0 = \bar{F}$

Iterazione t:

- Risolvi il rilassamento continuo

$$\bar{z}^t = \max c^T x$$
$$x \in Q^t$$

All'inizio Qt è il poliedro che rappresenta la regione ammissibile del rilassamento lineare di (P)

sia $\bar{x}^t$ la soluzione ottima determinata

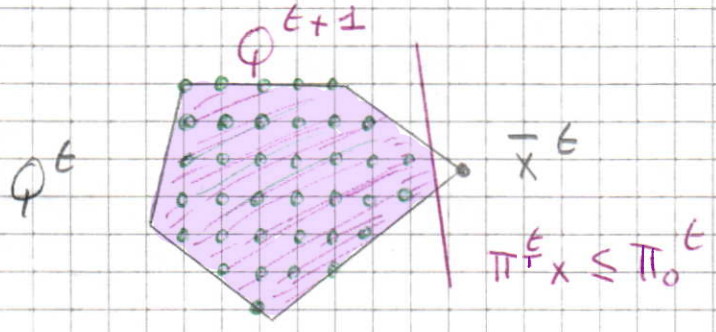
- Se $\bar{x}^t \in \mathbb{Z}^n$, STOP: $\bar{x}^t$ è una soluzione ottima di (P)
- Se $\bar{x}^t \notin \mathbb{Z}^n$: genera un piano di taglio

come farlo? Non è facile

$\pi^{tT} x \leq \pi_0^t$ che taglia via $\bar{x}^t$ (ovvero $\pi^{tT} \bar{x}^t > \pi_0^t$), e aggiorna il poliedro:

$$Q^{t+1} = Q^t \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^{tT} x \leq \pi_0^t\};$$

$t = t + 1$



L'algoritmo può essere interrotto senza l'individuazione di una soluzione intera: in tal caso Q^t è un'approssimazione di $conv(F)$ migliore di $\bar{F}$, e può essere utilizzata in un Branch and Bound.

Modo generale per generare un piano di taglio

Caso speciale: piani di taglio di Gomory

Supponiamo:

$$(P) \quad \max c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$

(Potrei averlo anche in forma di min)

→ Assumo che il problema sia stato trasformato sintatticamente in questa forma

e B sia una base ottima del suo rilassamento continuo.

Sia $A = [A_B \; A_N]$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ $\quad A: m \times n$ $(m < n)$

poniamo $\tilde{b} = A_B^{-1} b$ e $\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ *

Teorema Se $\tilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$ per r in B, allora

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}$$

taglio di Gomory

è un piano di taglio per (P).

NB: $\{y\}$ denota la parte frazionaria di y.

---

* $\tilde{x}_N = 0$, $\tilde{x}_B = A_B^{-1} b = \tilde{b}$ soluz. ottima del rilassamento in $\tilde{b}$, se le componenti di $\tilde{b}$ sono tutte intere l'algoritmo dei piani di taglio si ferma.

Dim. Dato un qualsiasi $x \in F$ si ha:

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$$

quindi $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N = \tilde{b} - \tilde{A} x_N$

Sia $\bullet{x}_r$ la componente r_{ma} di x_B:

$$\bullet{x}_r = \tilde{b}_r - \sum_{j \in N} \tilde{a}_{rj} x_j =$$

$$= \lfloor \tilde{b}_r \rfloor + \{ \tilde{b}_r \} - \sum_{j \in N} (\lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor + \{ \tilde{a}_{rj} \}) x_j =$$

$$= \lfloor \tilde{b}_r \rfloor + \{ \tilde{b}_r \} - \sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor x_j - \sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{rj} \} x_j$$

quindi:

$$(1) \quad \sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{rj} \} x_j - \{ \tilde{b}_r \} = \underbrace{\lfloor \tilde{b}_r \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{\sum_{j \in N} \lfloor \tilde{a}_{rj} \rfloor x_j}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{\bullet{x}_r}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

Inoltre:

$$(2) \quad \underbrace{\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{rj} \} x_j}_{\geq 0} - \{ \tilde{b}_r \} \geq - \{ \tilde{b}_r \} > -1$$

La parte frazionaria è tra 0 e 1

Da (1) e (2) segue che: (Quantità intera e >-1, allora è >=0)

$$\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{rj} \} x_j \geq \{ \tilde{b}_r \} \qquad \forall x \in F$$

Quindi $\sum_{j \in N} \{ \tilde{a}_{rj} \} x_j \geq \{ \tilde{b}_r \}$ è una DV per F.

Poiché per ipotesi B è una base ottima del rilassamento continuo di B,

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1} b = \tilde{b} \qquad \tilde{x}_N = 0$$

è una soluzione ottima del rilassamento continuo.

Poiché

$$0 = \sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} \tilde{x}_j < \{\tilde{b}_r\}$$

($\tilde{x}_N = 0$; $\{\tilde{b}_r\}$ è una parte frazionaria, quindi è ≥ 0, ma, siccome $\tilde{b}_r$ non è intero per ipotesi, è > 0)

segue che

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}$$

è un piano di taglio per (P). □

esempio (cont.)

$$\max x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 21$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 35$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Riformuliamo:

(P)

$$\max x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 21$$
$$8x_1 + 2x_2 + x_4 = 35$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \in \mathbb{Z}$$

x_3, x_4: variabili di scarto (Sono 2 perché ho 2 vincoli in forma di $\leq$)

In generale non posso dire che sono positive, ma in questo caso segue dai primi 2 vincoli

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 5\\ 8 & 2\end{bmatrix}}_{A_B}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{A_N} \qquad b=\begin{bmatrix}21\\ 35\end{bmatrix} \qquad c^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La base ottima del rilassamento continuo è $B=\{1,2\}$, quindi

$$A_B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 8 & 2\end{bmatrix} \qquad A_B^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{19} & \frac{5}{38}\\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_B=A_B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{7}{2}\end{bmatrix} \qquad \tilde{x}_N=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \tilde{A}=A_B^{-1}A_N=\begin{bmatrix}-\frac{1}{19} & \frac{5}{38}\\ \frac{4}{19} & -\frac{1}{38}\end{bmatrix}$$

Poiché $\tilde{b}_r=\tilde{x}_B$ ha entrambe le componenti non intere, si possono generare due tagli di gomory.

1) $\boxed{r=1}$

$$\left\{-\frac{1}{19}\right\}x_3+\left\{\frac{5}{38}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

$\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$

Quindi: {-1/19}=-1/19-(-1)

ovvero

$$\frac{18}{19}x_3+\frac{5}{38}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

ovvero

$$36x_3+5x_4 \geq 19$$

che, riformulato nelle variabili x_1 e x_2, diventa

$$36(\underbrace{21-x_1-5x_2}_{x_3})+5(\underbrace{35-8x_1-2x_2}_{x_4}) \geq 19$$

cioè:

$$\boxed{2x_1+5x_2 \leq 24}$$

2) $\boxed{r = 2}$

$$\left\lfloor \frac{4}{19} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor -\frac{1}{38} \right\rfloor x_4 \geq \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor$$

ovvero

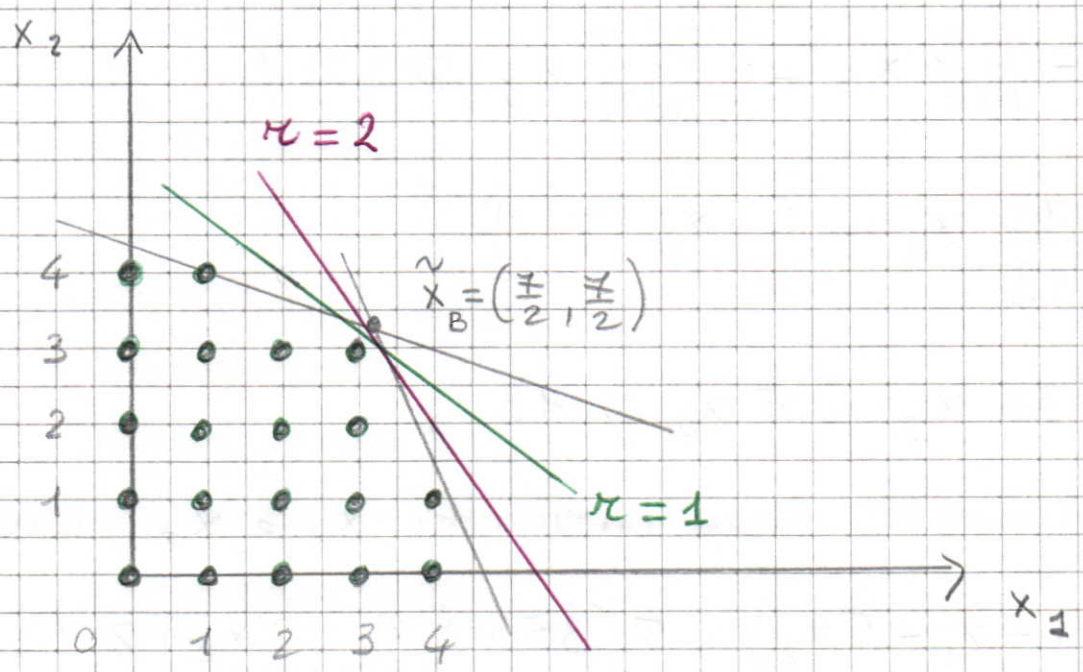
$$\frac{4}{19} x_3 + \frac{37}{38} x_4 \geq \frac{1}{2}$$

ovvero $\quad 8 x_3 + 37 x_4 \geq 19$

che, riformulata nelle variabili x_1 e x_2, diventa

$$8(21 - x_1 - 5x_2) + 37(35 - 8x_1 - 2x_2) \geq 19$$

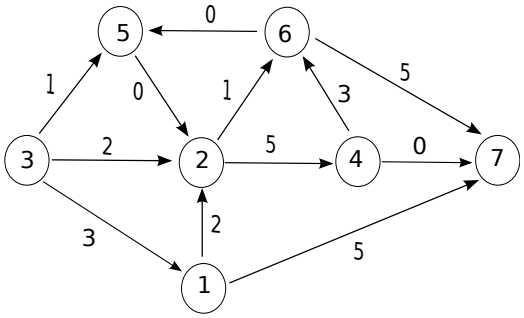
ovvero $\quad \boxed{8 x_1 + 3 x_2 \leq 38}$



Esercitazione di Ricerca Operativa: Flussi su rete

1) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui il costo dell'arco $(4, 7)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3? E per quali valori di ϵ tale albero sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3? Giustificare le risposte.



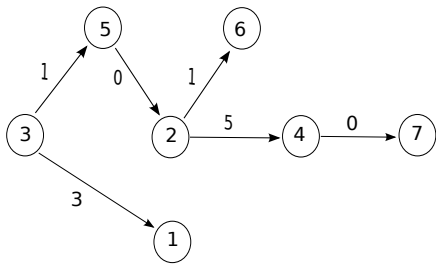
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(2, 6, 5)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$.

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		3	3	*nil*	3	3	3	3	31	31	0	31	31	31	31	$\{3\}$
1	3	3	3	*nil*	3	3	3	3	3	2	0	31	1	31	31	$\{1, 2, 5\}$
2	5	3	5	*nil*	3	3	3	3	3	1	0	31	1	31	31	$\{1, 2\}$
3	2	3	5	*nil*	2	3	2	3	3	1	0	6	1	2	31	$\{1, 4, 6\}$
4	6	3	5	*nil*	2	3	2	6	3	1	0	6	1	2	7	$\{1, 4, 7\}$
5	1	3	5	*nil*	2	3	2	6	3	1	0	6	1	2	7	$\{4, 7\}$
6	4	3	5	*nil*	2	3	2	4	3	1	0	6	1	2	6	$\{7\}$
7	7	3	5	*nil*	2	3	2	4	3	1	0	6	1	2	6	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



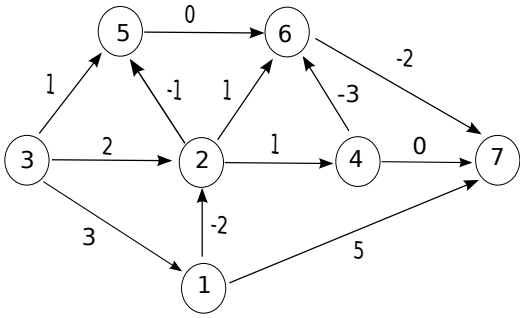
Se il costo dell'arco $(4, 7)$ fosse pari a un parametro reale ϵ, l'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman. Si osservi che, in tal caso, si avrebbe $d(7) = 6 + \epsilon$. Occorrerebbe quindi garantire che, per tutti gli archi esterni all'albero, ed incidenti il nodo 7, tali condizioni continuino ad essere rispettate:

- $d(6) + 5 \geq d(7)$, ovvero $2 + 5 \geq 6 + \epsilon$
- $d(1) + 5 \geq d(7)$, ovvero $3 + 5 \geq 6 + \epsilon$.

Segue che l'albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 se e solo se $\epsilon \leq 1$.

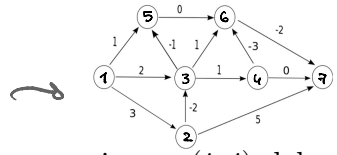
Poiché per $\epsilon = 1$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(6, 7)$ valgono in forma di uguaglianza e $(6, 7)$ può sostituire $(4, 7)$ nell'albero, si ha che l'albero determinato sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3 per $\epsilon < 1$ (si osservi che, per gli archi non incidenti il nodo 7, le condizioni di Bellman valgono in forma di disuguaglianza stretta).

2) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta infine se l'albero individuato sia l'unico albero dei cammini minimi di radice 3.



SVOLGIMENTO La numerazione fornita non è una buona numerazione
Rinumerando i nodi come segue

originale	1	2	3	4	5	6	7
rinumerato	2	3	1	4	5	6	7

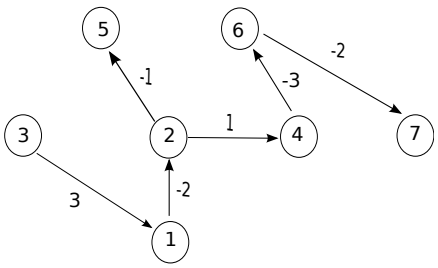


si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. Si noti che tale rinumerazione non è unica, in quanto la numerazione dei nodi 4 e 5 potrebbe essere invertita. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi. Inoltre, non viene riportato Q in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

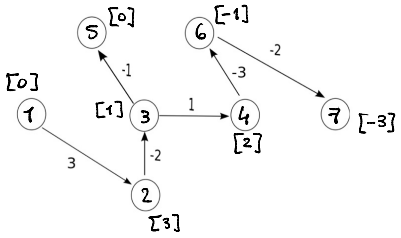
$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	0	31	31	31	31	31	31
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	3	2	31	1	31	31
2	2	*nil*	1	2	1	1	1	2	0	3	1	31	1	31	8
3	3	*nil*	1	2	3	3	3	2	0	3	1	2	0	2	8
4	4	*nil*	1	2	3	3	4	4	0	3	1	2	0	-1	2
5	5	*nil*	1	2	3	3	4	4	0	3	1	2	0	-1	2
6	6	*nil*	1	2	3	3	4	6	0	3	1	2	0	-1	-3

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):

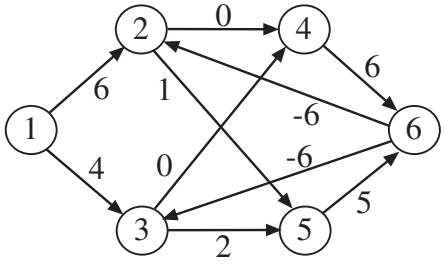


sul grafo con nuova numerazione:



L'albero individuato è unico. Infatti, ogni arco non appartenente all'albero soddisfa le condizioni di Bellman in forma di stretta disuguaglianza.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima ottenuta è unica? Giustificare la risposta.



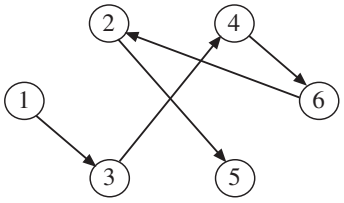
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene cicli orientati, ad esempio $(3, 5, 6)$, e archi di costo negativo. Pertanto l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo è SPT.L in cui Q è implementato come una coda, ovvero l'algoritmo di Bellman, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31$.

it.	u	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	Q
0		0	31	31	31	31	31	nil	1	1	1	1	1	$\{1\}$
1	1	0	6	4	31	31	31	nil	1	1	1	1	1	$\{2, 3\}$
2	2	0	6	4	6	7	31	nil	1	1	2	2	1	$\{3, 4, 5\}$
3	3	0	6	4	4	6	31	nil	1	1	3	3	1	$\{4, 5\}$
4	4	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4	$\{5.6\}$
5	5	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4	$\{6\}$
6	6	0	4	4	4	6	10	nil	6	1	3	3	4	$\{2\}$
7	2	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4	$\{5\}$
8	5	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4	$\emptyset$

L'albero dei cammini minimi individuato è:



Tale albero è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1, nonostante esistano tre archi non appartenenti all'albero che soddisfano le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza. Infatti:

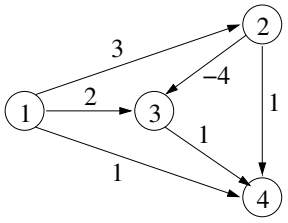
1. $d(5) + 5 = 5 + 5 = 10 = d(6)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(5, 6)$ valgono in forma di uguaglianza: $(5, 6)$ non può essere inserito al posto di $(4, 6)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;
2. $d(2) + 0 = 4 + 0 = 4 = d(4)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(2, 4)$ valgono in forma di uguaglianza: $(2, 4)$ non può essere inserito al posto di $(3, 4)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;
3. $d(6) - 6 = 10 - 6 = 4 = d(3)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(6, 3)$ valgono in forma di uguaglianza: $(6, 3)$ non può essere inserito al posto di $(1, 3)$ perché si creerebbe un ciclo orientato.

priva di cicli negativi

4) Si fornisca un'istanza del problema SPT per la quale, applicando l'algoritmo di Dijkstra a partire da un nodo radice r, almeno un nodo venga inserito in Q più di una volta.

SVOLGIMENTO

Affinché *SPT.S*, e quindi anche l'algoritmo di Dijkstra, che ne rappresenta una particolare implementazione, inserisca un nodo in Q più di una volta, è necessario che il grafo includa archi di costo negativo. Si consideri il seguente grafo, in cui l'arco (2,3) ha costo negativo:



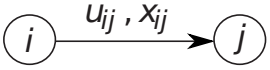
L'esecuzione dell'algoritmo di Dijkstra (e, più in generale, di *SPT.S*) sul grafo in figura, a partire dal nodo radice $r = 1$, comporta le seguenti iterazioni:

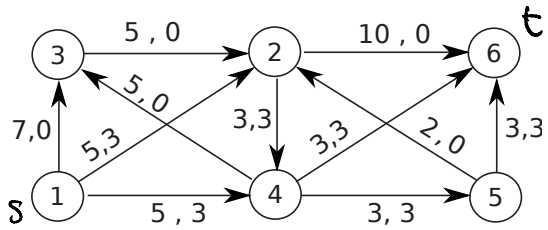
$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10.$

It.	i	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	Q
0		0	10	10	10	1	1	1	1	{1}
1	1	0	3	2	1	1	1	1	1	{2,3,4}
2	4	0	3	2	1	1	1	1	1	{2,3}
3	3	0	3	2	1	1	1	1	1	{2}
4	2	0	3	-1	1	1	1	2	1	{3}
5	3	0	3	-1	0	1	1	2	3	{4}
6	4	0	3	-1	0	1	1	2	3	$\emptyset$

Osserviamo che i nodi 3 e 4 sono inseriti in Q due volte ciascuno.

5) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 6$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). A ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine quale sarebbe il massimo numero di unità di flusso inviabili al nodo 6 se, oltre al nodo 1, anche il nodo 5 fosse una sorgente di flusso. Giustificare la risposta.

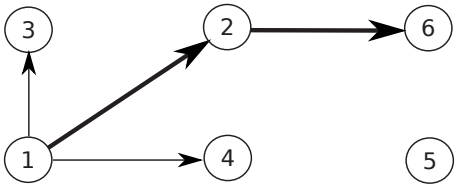




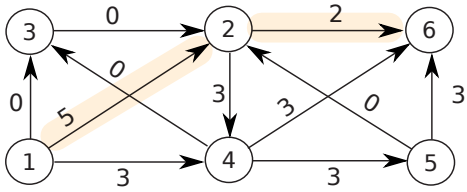
SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} + u_{32} = 5 + 5 + 5 = 15 = v$.

it. 1)



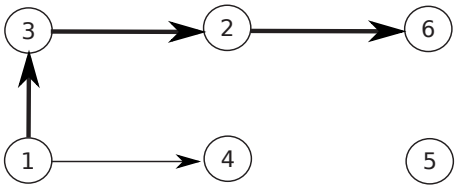
θ(P, x) = 2



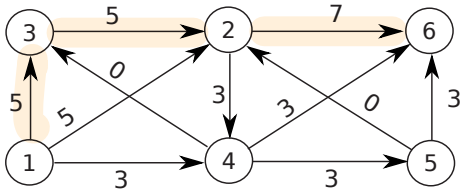
v = 8 = 6+θ

gli altri archi (non evidenziati) li ricopiamo

it. 2)

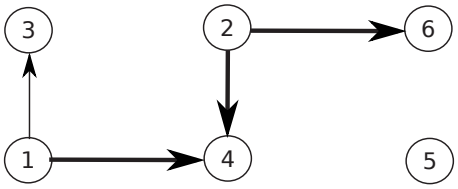


θ(P, x) = 5

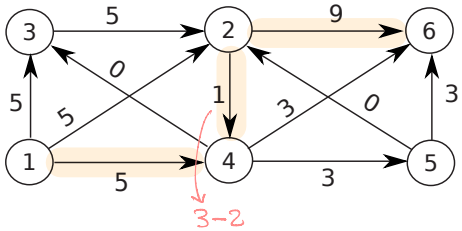


v=13

it. 3)

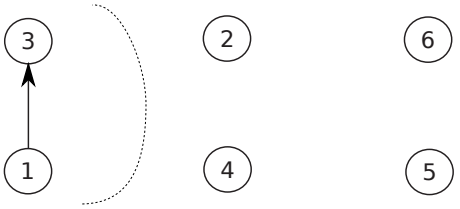


θ(P, x) = 2



v=15

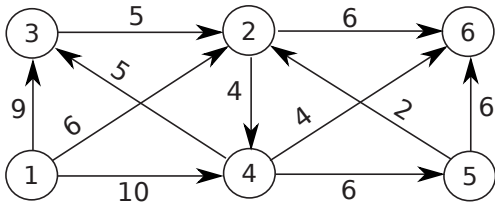
it. 4)



2→ Non esistono altri cammini aumentanti (dal nodo 1 andiamo al nodo 3, visto che 12 e 14 sono saturi, provo a proseguire la visita da 3 ma l'unico arco della stella uscente è saturo (32) e quelli della stella entrante sono tali che uno ha flusso nullo e l'altro riporterebbe al nodo 1)

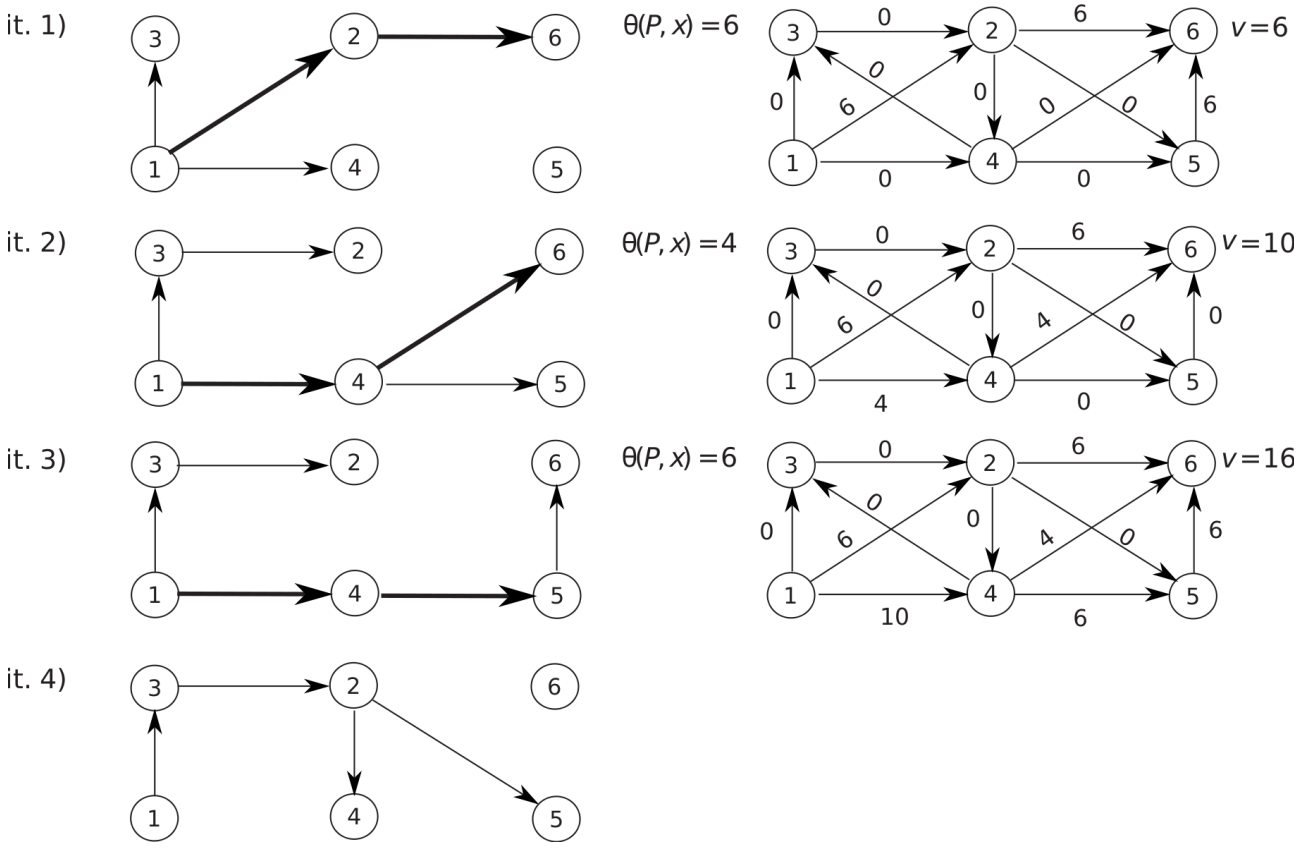
Se anche il nodo 5 fosse sorgente di flusso, 5 potrebbe inviare un'ulteriore unità di flusso lungo il cammino aumentante $(5, 2, 6)$. Il nodo 6 potrebbe quindi ricevere 16 unità di flusso. Si tratta del massimo numero di unità di flusso che il nodo 6 può ricevere dai nodi 1 e 5, come dimostra il taglio $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\})$, di capacità 16, che separa i due nodi sorgente dal nodo destinazione 6.

6) Si individui un flusso massimo dal nodo sorgente 1 al nodo destinazione 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se l'arco (1,3) venisse cancellato dalla rete? Giustificare le risposte.



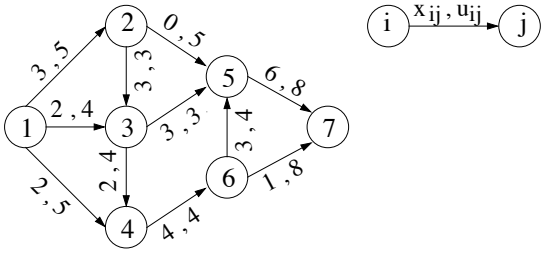
SVOLGIMENTO

Le iterazioni dell'algoritmo sono rappresentate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P,x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1,2,3,4\},\{5,6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{46} + u_{45} = 6 + 4 + 6 = 16 = v$.



Se l'arco (1,3) venisse cancellato dalla rete il valore del flusso massimo sarebbe sempre pari a 16 in quanto il flusso massimo determinato non utilizza tale arco (il flusso corrispondente è 0), e $(\{1,2,3,4\},\{5,6\})$ sarebbe sempre un taglio di capacità (minima) 16. In tale caso, tuttavia, l'algoritmo individuerebbe il taglio di capacità minima alternativo $(\{1\},\{2,3,4,5,6\})$.

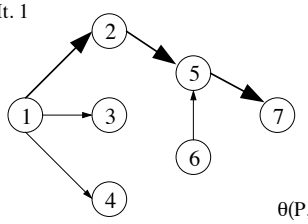
7) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso dato, di valore $v = 7$. Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Se si diminuisse la capacità dell'arco $(2, 5)$ di una unità, di quanto diminuirebbe il valore del flusso massimo? Giustificare la risposta.



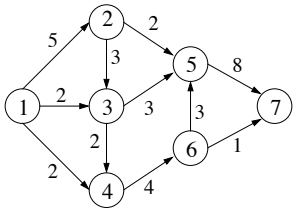
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

It. 1

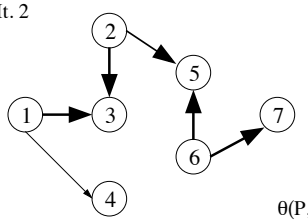


θ(P,x)= 2

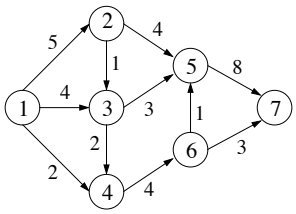


v=9

It. 2

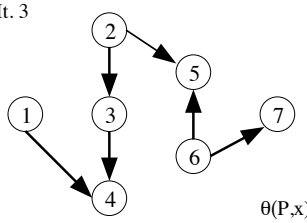


θ(P,x)= 2

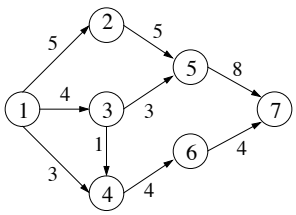


v=11

It. 3

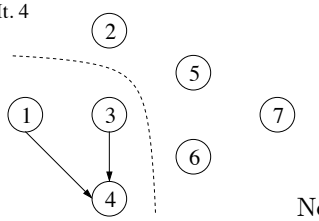


θ(P,x)= 1



v=12

It. 4

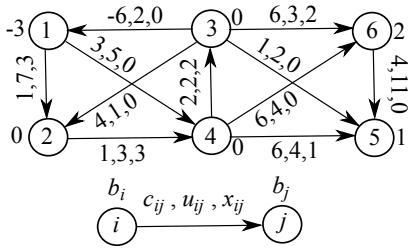


Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed inoltre il taglio $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 5 + 3 + 4 = 12$.

Diminuendo la capacità dell'arco $(2, 5)$ di una unità, ovvero nel caso in cui risulta $u_{25} = 4$, il valore del flusso massimo diminuisce anch'esso di una unità. Infatti, il flusso di valore 11 ottenuto al termine

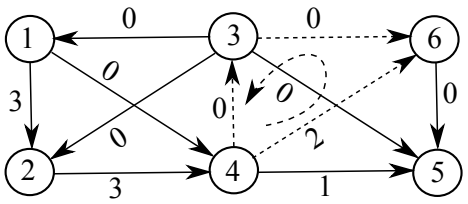
della seconda iterazione rimane ammissibile anche in questo caso, ma la procedura di visita associata a tale flusso termina senza raggiungere la destinazione ed individuando il taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\})$ di capacità 11. Pertanto, se $u_{25} = 4$ il flusso massimo ha valore 11.

8) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 28$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

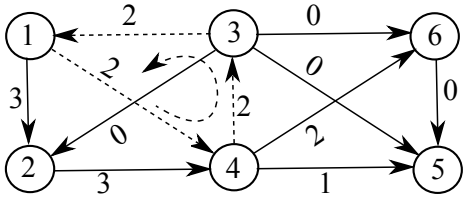


SVOLGIMENTO

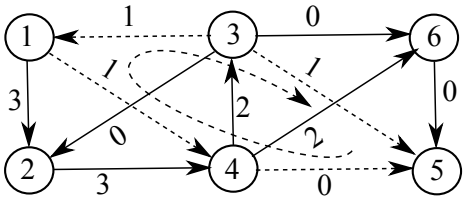
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso). In ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



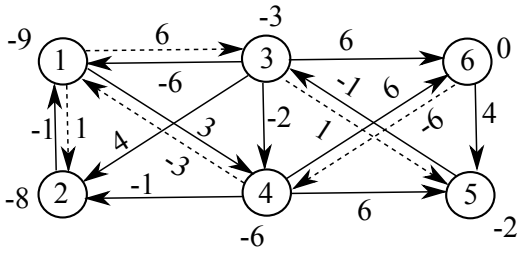
θ= 2, $c(C)$ = -2, cx = 24



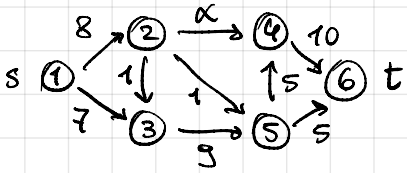
θ= 2, $c(C)$= -1, cx = 22

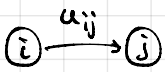


θ = 1, $c(C)$ = -2, cx = 20

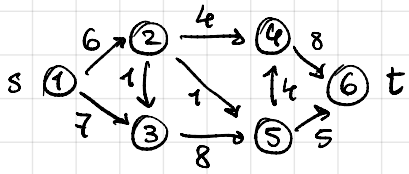


esercizio





flusso x:



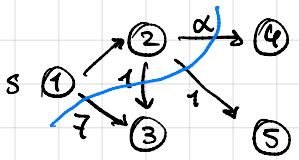
α t.che il flusso è ottimo?

Svolgimento: $\alpha \geq 4$ affinché x sia un flusso ammissibile.

CASO 1: $\alpha = 4$

Vediamo se esistono cammini aumentanti.
Effettuando la visita dal nodo sorgente (1) abbiamo che l'arco 13 è saturo, mentre 12 è visitabile. 23, 25 e 24 sono saturi. Allora non ci sono cammini aumentanti e dunque x è un flusso massimo.

Taglio:



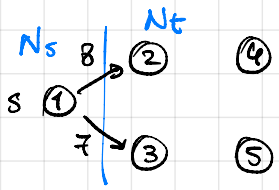
$u(N_s, N_t) = 9 + \alpha$

CASO 2: $\alpha > 4$

Esiste un cammino aumentante: 1246, quindi il flusso non è massimo

Quindi x flusso massimo sse alpha=4.

Domanda aggiuntiva: se si considera il taglio disegnato sotto, per quali alpha si ha che è un taglio di capacità minima?



$u(N_s, N_t) = 8 + 7 = 15$

quindi mi chiedo per quali α si ha un taglio di capacità minima o, equivalentemente, il flusso max ha valore 15

Nel taglio trovato al pto precedente si era detto che $u(\tilde{N}_s, \tilde{N}_t) = 9 + \alpha$

li scrivo con ~ per distinguerli da quelli di adesso

e, dunque, se $\alpha = 5$ quel taglio ha capacità 14, mentre se $\alpha = 6$ ha capacità 15.

Allora per $\alpha \geq 6$ è un taglio di capacità minima.

Esercitazione di Ricerca Operativa: Programmazione Lineare

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -2x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i*) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; *ii*) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) Alla prima iterazione scrivere per bene tutte le formule, dopo basta mettere solo i corrispondenti valori numerici

$$B = \{3,4\} \ , \ A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y}_N = 0 \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale degenere] $h = \min\{ i \in B \, : \, y_i < 0 \} = 3 \ , \ B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ ,$$

$$J = \{ i \in N \, : \, A_i \xi > 0 \} = \{1, 2, 5\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x}) / A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 4 \ , \ \lambda_5 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{ \lambda_i \, : \, i \in J \} = 0$$

$$k = \min\{ i \in J \, : \, \lambda_i = \bar{\lambda} \} = 5 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{4,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ ammissibile

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

non ammissibile (non ha tutte le componenti >=0); indici fuori base

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = 4 \ , \ B(h) = 1$

nessuna delle componenti in base è nulla

$I(\bar{x}) = \{3,4,5\} \supseteq B$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

direzione di crescita

$$J = \{2\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_2 = 4 \ , \ k = 2$$

it.3) $B = \{2,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$B = \{4,5\} \setminus \{4\}^{h} \cup \{2\}^{k}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale non degenere e duale degenere]

ammissibile ammissibile

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $\bar{x} = (2, 4)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $\bar{y} = (0, 2, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito.

i) Le soluzioni ottime del problema primale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il primale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y} = (0, 2, 0, 0, 0)$. L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $\{2\}$. Di conseguenza, una soluzione primale che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve avere il secondo vincolo attivo. Affinché tale soluzione sia ammissibile per (P), essa deve quindi soddisfare il sistema

↳ perché $\bar{y}_2 > 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Posto $x_1 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(\alpha, 2+\alpha)$, per $\alpha \leq 2$. Segue che il problema primale ammette infinite soluzioni ottime della forma $(\alpha, 2 + \alpha)$, per $\alpha \leq 2$.

NB. (2,4) trovata prima corrisponde ad alpha=2.

ii) Poiché la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo (2,4) è non degenere, segue che $\bar{y} = (0, 2, 0, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale. (Per le condizioni degli scarti complementari)

2) Si consideri il problema di *PL* riportato a lato, parametrico in ε: *i)* si individui l'insieme di tutti i valori di ε per cui la base $B = \{3, 4\}$ è ottima; *ii)* si risolva il problema dato, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$, per $\varepsilon < -2$, utilizzando l'algoritmo del Simplesso appropriato. Giustificare algebricamente le risposte date.

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & \varepsilon \end{array}$$

SVOLGIMENTO

i) Considerando la base $B = \{3, 4\}$, si ha (dipende da epsilon)

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La soluzione di base duale è ammissibile a prescindere dal valore di ε. La soluzione di base primale è invece ammissibile per tutti i valori di ε per cui $\bar{x}(\varepsilon)$ soddisfa i due vincoli fuori base, ossia

$$\varepsilon - 2 \leq 0 \quad , \quad -\varepsilon - 2 \leq 0 \quad \equiv \quad \varepsilon \in [-2, 2] \ .$$

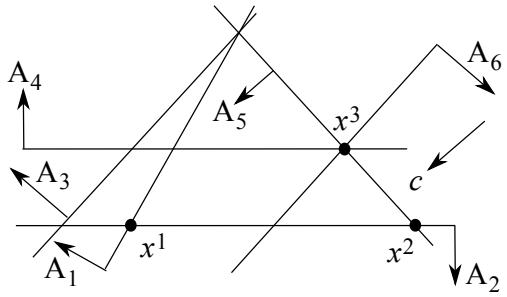
Segue che $B = \{3, 4\}$ è una base ottima per $\varepsilon \in [-2, 2]$.

ii) Per $\varepsilon < -2$ ({3,4} non è più ottima), il problema di *PL* risulta vuoto. Per dimostrarlo osserviamo che, per $\varepsilon < -2$, la base $B = \{3, 4\}$ è duale ammissibile ma non più primale ammissibile, come risulta dall'analisi in *i)*: la soluzione di base $\bar{x}(\varepsilon) = [\varepsilon, 2]$ viola infatti il vincolo 2. Essendo $B = \{3, 4\}$ duale ammissibile, è possibile risolvere il problema dato mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, a partire da $B = \{3, 4\}$, calcolando:

$$\eta_B = A_2 A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato, e quindi il problema di *PL* dato risulta vuoto. In particolare, la direzione $d = [0, 1, 1, 1]$ ha la caratteristica che $dA = 0$, $db = 2 + \varepsilon < 0$, e $d \geq 0$, come è facile verificare: pertanto è una direzione ammissibile di decrescita illimitata per il problema duale, il che dimostra che il problema primale è vuoto.

3) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Duale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$; si noti che c è collineare ad A_5 e perpendicolare ad A_3 e A_6, che sono collineari; anche A_2 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottime, giustificando la risposta fornita.

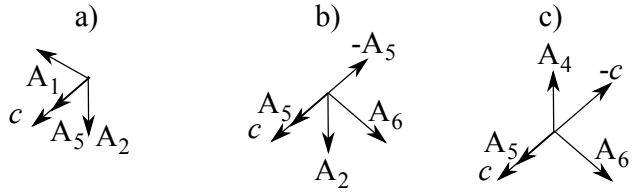


SVOLGIMENTO

it. 1): $B = \{\ 1\ ,\ 2\ \}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola il solo vincolo 5, quindi $k = 5$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_2, quindi la base è duale non degenere; è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^1)$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(A_1, A_)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Essendo A_5 collineare a c, risulta $\bar{y}_1/\eta_1 = \bar{y}_2/\eta_2$, e quindi $h = \min\{\,1\,,\,2\,\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2): $B = \{\ 2\ ,\ 5\ \}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare ad A_5. Quindi la base è duale degenere, e rimane primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^2)$. Poiché $A_6 \in \text{cono}(A_2, -A_5)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_2 > 0$ e $\eta_5 < 0$, pertanto $h = 2$.

it. 3): $B = \{\ 5\ ,\ 6\ \}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ non viola alcun vincolo: l'algoritmo quindi termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale. Poiché c è collineare ad A_5 si ha $\bar{y}_5 > 0$ e $\bar{y}_6 = 0$, ossia la base è ancora duale degenere, ed è anche primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^3) = \{4, 5, 6\}$.



Poiché la soluzione duale è degenere, la soluzione ottima del primale potrebbe non essere unica. È facile verificare tuttavia che questo non è il caso, ossia che la soluzione ottima del primale è unica; in effetti, è *l'unica soluzione ammissibile* del primale. Poiché la base è primale degenere, la soluzione ottima del duale potrebbe non essere unica, come effettivamente accade. Per verificarlo si osservi che $-c$ può essere espresso come combinazione lineare di A_4 ed A_6 con coefficienti positivi, ossia

$$y_4 A_4 + y_6 A_6 = -c$$

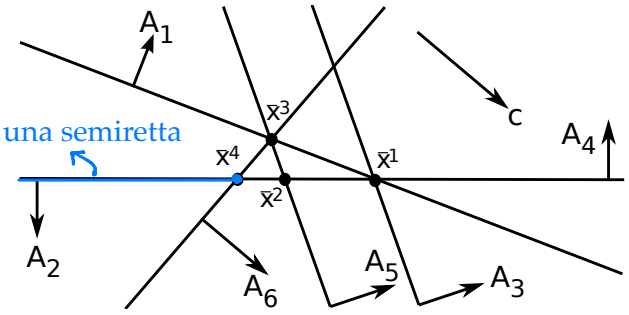
per opportuni coefficienti $y_4 > 0$ e $y_6 > 0$. Inoltre, poiché c è collineare ad A_5, si ha $c = \bar{y}_5 A_5$, dove $\bar{y}_5 > 0$ è componente della soluzione di base duale determinata dall'algoritmo. Segue che

$$y_4 A_4 + 2\bar{y}_5 A_5 + y_6 A_6 = 2c - c = c\ \ ,$$

ovvero esiste una diversa soluzione ammissibile del duale, $y = [\,0\,,\,0\,,\,y_4\,,\,2\bar{y}_5\,,\,y_6\,]$, che rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}^3$, e pertanto è anch'essa ottima.

4) Si risolva graficamente il problema di PL in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che le tre coppie c e A_6, A_3 e A_5, e A_2 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. In caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale.

La regione ammissibile è una semiretta



SVOLGIMENTO

it. 1): $B = \{1, 2\}$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto c è interno a cono(A_1, A_2), come mostrato in figura a); la base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^1) = \{\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,\}$ (anche i vincoli 3 e 4 sono attivi, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola i vincoli 5 e 6, pertanto

I è II vincolo

$$k = \min\{\, i \in N \,:\, A_i\bar{x} > b_i \,\} = \min\{\,5\,,\,6\,\} = 5$$

per la regola anticiclo di Bland. Poiché A_5 è interno a cono(A_1, A_2), come mostrato in figura a), si ha $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Per determinare

$$\bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} \quad \text{e} \quad h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i \,\} \ ,$$

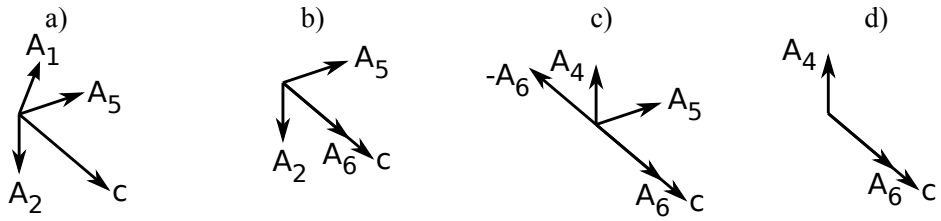
si osservi che la base $\{1, 5\}$ non è duale ammissibile, mentre $\{2, 5\}$ lo è. Deve quindi essere necessariamente $h = 1$.

it. 2): $B = \{2, 5\}$. $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è interno a cono(A_2, A_5), come mostrato in figura b); la base è quindi ancora duale non degenere, e rimane anche primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^2) = \{\,2\,,\,4\,,\,5\,\}$ (anche il vincolo 4 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. Poiché A_6 risulta interno a cono(A_2, A_5), si ha che $\eta_2 > 0$ e $\eta_5 > 0$. Inoltre, poiché A_6 è collineare a c, η_2 e η_5 sono multipli di $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_5$, e quindi $\bar{y}_2/\eta_2 = \bar{y}_5/\eta_5$. Segue $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3): $B = \{5, 6\}$. $\bar{y}_5 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare ad A_6 e ha lo stesso verso, come mostrato in figura c); pertanto la base è duale degenere, ed è inoltre primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^3) = \{\,1\,,\,5\,,\,6\,\}$ (anche il vincolo 1 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ viola il solo vincolo 4, pertanto $k = 4$. A_4 è interno a cono$(A_5, -A_6)$ come mostrato in figura c). Pertanto $\eta_5 > 0$ e $\eta_6 < 0$, e quindi necessariamente $h = 5$.

it. 4): $B = \{4, 6\}$. $\bar{y}_4 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare ad A_6 e ha lo stesso verso, come mostrato in figura d); pertanto la base è duale degenere, ed è pure primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^4) = \{\,2\,,\,4\,,\,6\,\}$ (anche il vincolo 2 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^4$ non viola alcun vincolo, e pertanto è ottima per il problema primale, mentre la corrispondente soluzione di base duale è ottima per il problema duale.

Per discutere l'unicità di $\bar{x}^4$ esaminiamo la degenerazione della base ottima determinata. Essa risulta duale degenere in quanto c è collineare ad A_6, e pertanto la soluzione ottima primale potrebbe non essere unica. Ma questo non è il caso. Infatti, la regione ammissibile primale è una semiretta di estremo $\bar{x}^4$, individuata dalle rette corrispondenti al secondo e al quarto vincolo. Il vettore dei costi



c non è ortogonale a tale semiretta, e pertanto non esistono altre soluzioni ottime primali oltre a quella individuata dall'algoritmo.

La base ottima è anche primale degenere, e quindi la soluzione ottima duale potrebbe non essere unica. Questo è in effetti il caso. Infatti, la soluzione ottima duale determinata è tale che $\bar{y}_6 > 0$ e $\bar{y}_i = 0$ per $i \neq 6$. Ma A_2 e A_4 sono collineari di verso opposto: pertanto, assumendo per semplicità (e senza perdita di generalità) che abbiano la stessa norma, ponendo $\tilde{y}_2 = \tilde{y}_4 = 1$ si può ottenere una diversa soluzione duale $\tilde{y} \geq 0$ tale che $\tilde{y}A = c$ (il contributo dei due vettori A_2 e A_4 si annulla reciprocamente). Pertanto, la soluzione ottima duale non è unica.

$\bar{\theta} = \min\{\bar{y}_1/y_1, \bar{y}_2/y_2\}$ $\begin{cases} h=2 \Rightarrow B=\{1,5\} \\ h=1 \Rightarrow B=\{2,5\} \end{cases}$



Non è duale ammissibile

È duale ammissibile

5) Si consideri il seguente problema di PL, in cui γ è un parametro reale:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \max & (-1-\gamma)x_1 & + & (-1+2\gamma)x_2 & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si individui il sottoinsieme di valori di γ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale problema, giustificando la risposta. Si consideri quindi la seguente variante del problema, in cui α è un parametro reale:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \max & -x_1 & - & x_2 & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4-2\alpha \\ & x_1 & & & \leq & 2-\alpha \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1+\alpha \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si individui il sottoinsieme di valori di α per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale secondo problema di PL.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il primo problema di PL, e calcoliamo la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

E' immediato verificare che tale soluzione è primale ammissibile, in quanto soddisfa i primi tre vincoli del problema. Calcoliamo ora la corrispondente soluzione di base duale in funzione del parametro γ:

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} (-1-\gamma) & (-1+2\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

Basta che $\exists B \subseteq I$ t.c. (D_B) abbia sol. $I(x) = \{1,2,3\}$, lui ha controllato solo $B = \{4,5\}$

$B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile se e solo se $\bar{y}_B \geq 0$, vale a dire se e solo se $\gamma \in [-1, 0]$. Segue che $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il primo problema di PL se e solo se $\gamma \in [-1, 0]$.

FALSO

Consideriamo ora il secondo problema di PL. La base $B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile per tale problema, in quanto il vettore dei costi di tale problema si ottiene dal vettore dei costi del problema di PL precedentemente considerato fissando $\gamma = 0$. La soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$ è $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, come nel caso precedente. Tale soluzione è primale ammissibile se e solo se essa soddisfa i vincoli fuori base, vale a dire i primi tre vincoli del problema. E' facile verificare che tale soddisfacimento avviene se e solo se $\alpha \in [0, 1]$. Segue che $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il secondo problema di PL se e solo se $\alpha \in [0, 1]$.

6) Si consideri il seguente problema di PL parametrico in ε

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4+\varepsilon \end{array}$$

e la soluzione $\bar{y} = [3, 0, 0, 2]$ per il suo duale. Utilizzando il il teorema degli scarti complementari si determini per quali valori di ε la soluzione $\bar{y}$ è ottima per il duale, discutendone l'unicità. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Per la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{\, cx \,:\, Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \quad \min\{\, yb \,:\, yA = c\,,\, y \geq 0 \,\},$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il duale di (P) è

$$(D) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcl} \min & y_1 & & & + & y_3 & + & (4+\varepsilon)y_4 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 3 \\ & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & -1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Per il teorema degli scarti complementari, $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione primale $\bar{x}$ che rispetta gli scarti complementari con essa. Ovvero i vincoli primali a cui corrispondono variabili duali che hanno valore positivo in $\bar{y}$, ossia i vincoli 1 e 4, devono essere attivi in $\bar{x}$. Quindi $\bar{x}$ deve risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 4+\varepsilon \end{array} \right.$$

che ha come unica soluzione $\bar{x}(\varepsilon) = [(5+\varepsilon)/2, -(7+\varepsilon)/2]$. Affinché $\bar{y}$ sia ottima, la soluzione $\bar{x}(\varepsilon)$ deve rispettare gli altri due vincoli del problema primale, quindi

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(5+\varepsilon)/2 - (7+\varepsilon)/2 \leq 0 & \Longrightarrow \quad \varepsilon \geq -6 \\ 2(5+\varepsilon)/2 + (7+\varepsilon)/2 \leq 1 & \Longrightarrow \quad \varepsilon \leq -5 \end{array} \right.$$

Pertanto la soluzione $\bar{y}$ è ottima per tutti i valori $\varepsilon \in [-6, -5]$. Si osservi che, per il teorema degli scarti complementari, $\bar{x}(\varepsilon) = [(5+\varepsilon)/2, -(7+\varepsilon)/2]$, per $\varepsilon \in [-6, -5]$, rappresenta quindi l'insieme di tutte e sole le soluzioni ottime del problema primale.

Per discutere l'unicità di $\bar{y}$ dobbiamo studiare l'insieme dei vincoli attivi $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} : A_i\bar{x}(\varepsilon) = b_i \,\}$, per $\varepsilon \in [-6, -5]$. Tale insieme comprende sempre i vincoli 1 e 4. L'analisi precedente mostra che $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 2, 4\}$ per $\varepsilon = -6$, $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 4\}$ per $\varepsilon \in (-6, -5)$, e $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 3, 4\}$ per $\varepsilon = -5$. Per tutti i valori $\varepsilon \in (-6, -5)$ $\{1, 4\}$ è una base primale ammissibile e non degenere: di conseguenza, $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima del duale.

Per $\varepsilon = -6$, $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale. Infatti, sempre per le condizioni degli scarti complementari, tutte le soluzioni duali ammissibili tali che $y_3 = 0$ sono soluzioni ottime duali. Ponendo $y_3 = 0$ e $y_4 = \alpha$ nel sistema duale, si ottiene che le soluzioni ottime duali hanno forma $(3 + 2\alpha, \alpha, 0, 2 + \alpha)$, per $\alpha \geq 0$.

Similmente, per $\varepsilon = -5$ $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale. Infatti, tutte le soluzioni duali ammissibili tali che $y_2 = 0$ sono soluzioni ottime duali. In particolare la soluzione di base duale $[0, 0, 6/5, 1/5]$, corrispondente alla base $\{3, 4\}$, è ottima in quanto ammissibile per il duale.

7) Si risolva il seguente problema di *PL* applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i*) si individui l'insieme delle soluzioni ottime primali; *ii*) si discuta se la soluzione $y^* = [0, 2, 0, 1, 0]$ sia una soluzione duale ottima alternativa a quella individuata dall'algoritmo. Giustificare le risposte.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

SVOLGIMENTO

it. 1)

$$B = \{1,3\} : A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = 4$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 1/3,$$

$$h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i \,\} = 1$$

it. 2)

$$B = \{3,4\} : A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{STOP.}$$

Poiché la soluzione di base primale è ammissibile, l'algoritmo termina individuando la soluzione ottima primale $\bar{x} = [2, 0]$ e la soluzione ottima duale $\bar{y} = [0, 0, 2/3, 1/3, 0]$.

i) Si osservi che la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo è non degenere. Segue che $\bar{x} = [2, 0]$ è l'unica soluzione ottima primale.

ii) La soluzione ottima primale è degenere in quanto $I(\bar{x}) = \{2, 3, 4, 5\}$. E' quindi possibile che esistano soluzioni ottime duali alternative. In particolare, $y^* = [0, 2, 0, 1, 0]$ è la soluzione di base, duale ammissibile, corrispondente alla base $B' = \{2, 4\}$, base alternativa per $\bar{x} = [2, 0]$. Le componenti in base di y^*, ovvero la seconda e la quarta componente, sono infatti calcolabili mediante:

$$c A_B'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto $y^* = [0, 2, 0, 1, 0]$ è una soluzione duale ottima alternativa a quella individuata dall'algoritmo.

8) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & - & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato.

SVOLGIMENTO

it.1) $$B = \{3,4\} \ , \ A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \ , \ y_N = 0 \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere]

$$h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{3,4\} = 3 \ , \ B(h) = 1$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i\xi > 0 \,\} = \{1,2\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i\xi \ , \ \lambda_1 = 3 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 2 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{2,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{1\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_1 = 3 \ , \ k = 1$$

it.3) $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale non degenere e duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \emptyset$$

STOP. ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota.

esercizio $\max \ \beta x_1 + x_2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\le \alpha \\ x_2 &\le 3 \\ x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 &\le 2 \end{aligned}$$

Trovare l'insieme degli α, β t. che $\bar{x} = (2,3)$ è soluz. ottima

Svolgimento: Per essere soluzione ottima deve essere ammissibile, dunque deve valere che $\alpha \ge -5$ $(\underline{-x_1} - \underline{x_2} \ge \underline{-2} \underline{-3})$.
4° vincolo 2° vincolo

Duale: 4 vincoli $\Rightarrow$ 4 variabili

$$(D) \quad \min \ \alpha y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4$$

$$\begin{aligned} -y_1 \quad\quad + y_3 + y_4 &= \beta \\ -y_1 + y_2 - y_3 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\bar{x}$ ottima $\Leftrightarrow \exists$ soluzione duale ammissibile in scarti complementari con $\bar{x}$

cioè: $y_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1,2,3,4$

CASO 1 $\alpha > -5 \Rightarrow I(\bar{x}) = \{2,4\}$

CASO 2 $\alpha = -5 \Rightarrow I(\bar{x}) = \{1,2,4\}$

↪ CASO 1 Una soluzione duale in scarti complementari con $\bar{x}$ è della forma: $(0, y_2, 0, y_4)$

$$(DR) \begin{cases} y_4 = \beta \\ y_2 = 1 \\ y_2, y_4 \ge 0 \end{cases} \quad \text{ha soluzione} \Leftrightarrow \beta \ge 0$$

↪ CASO 2 Una soluzione duale in scarti complementari con $\bar{x}$ è della forma: $(y_1, y_2, 0, y_4)$

$$(DR) \begin{cases} -y_1 + y_4 = \beta \\ -y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2, y_4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_4 = \beta + y_1 \\ y_2 = 1 + y_1 \\ y_1, y_2, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

Poiché $y_1 \ge 0$, allora $y_2 = 1 + y_1 \ge 0$

mentre y_4 dipende da β: $y_4 \geq 0 \Leftrightarrow y_1 \geq -\beta$

Quindi $y_1 \geq \max\{0, -\beta\}$ (beta non crea problemi, sia che sia positivo che negativo trovo una soluzione)

Unendo i 2 casi:

$\bar{x}$ ottima $\Leftrightarrow \{(\alpha,\beta): \alpha > -5,\ \beta \geq 0\} \cup \{(-5,\beta): \beta \in \mathbb{R}\}$

Esercitazione di Ricerca Operativa: Programmazione Lineare Intera

1) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrcc} \max & 6x_1 & +9x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordine delle variabili per Costo Unitario Decrescente è $x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Inizializzazione La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$, $\bar{z} = 22 + 1/3$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 21$. Siccome $\bar{z} = 22 + 1/3 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$x_4 = 0$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 22$. $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, z non cambia. Poiché $\bar{z} = 22 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$x_4 = 1$ $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 22$. $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\bar{z} = 22 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$x_4 = x_5 = 0$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 21 + 1/2$. Si noti che si può porre $\bar{z} = 21$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_4 = 0, x_5 = 1$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 21 + 1/2$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 21$. Poiché $\bar{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

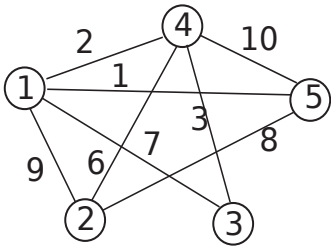
$x_4 = 1, x_3 = 0$ $x^* = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = \underline{z} = 21$. Il nodo viene chiuso per ottimalità. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, potrebbe essere chiuso anche dalla valutazione superiore.

$x_4 = 1, x_3 = 1$ $x^* = [1/3, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 21$. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch and Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$, di costo 21.

commesso viaggiatore Branch and Bound

2) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

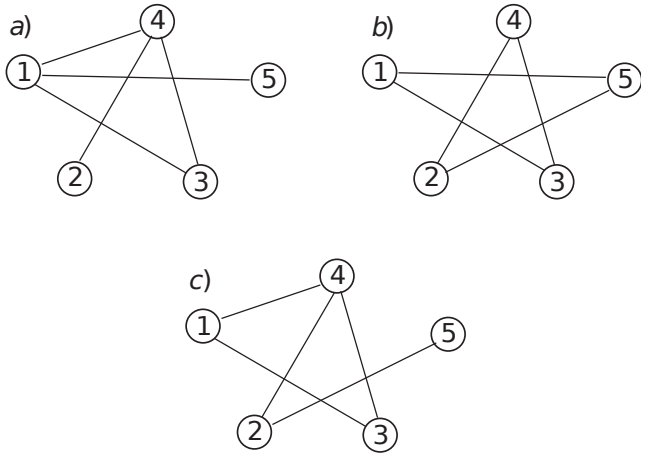
Nodo radice L'MS1T, con $\underline{z} = 19$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 19 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre lati incidenti, e creare $3(3-1)/2 = 3$ figli, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{1,3\}$, $\{1,4\}$ e $\{1,5\}$.

$x_{13} = 0$ Poiché il nodo 3 ha un solo lato incidente nel grafo ridotto è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

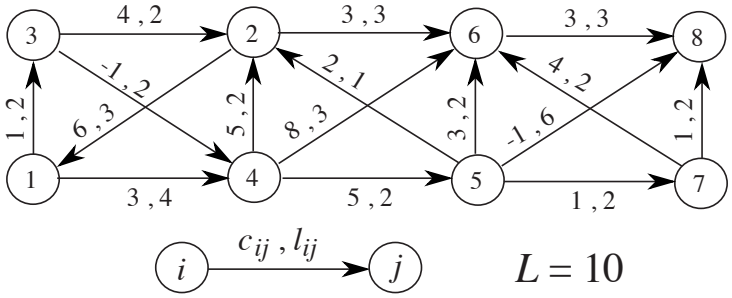
$x_{14} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 25$, è mostrato in (b). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $25 < z = +\infty$, si pone $z = 25$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$x_{15} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 26$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} = 26 > z = 25$, il nodo viene dalla valutazione inferiore.

Poiché Q è vuota l'algoritmo termina, restituendo la soluzione ottima in (b), di valore $z = 25$.



3) Si risolva il problema del cammino minimo vincolato dal nodo 1 al nodo 8, sul grafo in figura, mediante l'algoritmo Branch&Bound che usa come rilassamento il problema di cammino minimo (non vincolato), non fa ricorso a euristiche, visita l'albero delle decisioni a ventaglio, e usa la seguente regola di branching: dato il cammino minimo ottenuto dal rilassamento, genera il primo figlio eliminando il primo arco del cammino, genera il secondo figlio fissando in soluzione il primo arco del cammino e eliminando il secondo, genera il terzo figlio fissando in soluzione i primi due archi del cammino ed eliminando il terzo, e così via fino all'ultimo sottocammino (di origine 1) la cui lunghezza è minore della soglia massima. Per ogni nodo si riporti la soluzione del rilassamento e si indichi se il nodo viene chiuso e perché, oppure se viene effettuato il branching e come. Si esaminino solamente i primi cinque nodi dell'albero delle decisioni, compresa la radice. Al termine si riportino la miglior valutazione inferiore e la miglior valutazione superiore del valore ottimo disponibili, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo rispettivamente con $c(P)$ e $l(P)$ il costo e la lunghezza del cammino minimo P individuato nel nodo corrente, dove $c(P)$ è il costo totale del cammino, dato dall'etichetta del nodo destinazione nell'albero dei cammini minimi più il costo dell'eventuale sottocammino iniziale fissato. Si noti che $c(P)$ è una valutazione inferiore per il nodo considerato, e anche una valutazione superiore se $l(P) \leq L$. Indichiamo inoltre con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

Nodo radice L'SPT ottenuto è mostrato in a) insieme alle etichette ottime, che certificano il soddisfacimento delle condizioni di Bellman. Il cammino $P = \{(1,3),(3,4),(4,5),(5,8)\}$ ha $c(P) = 4$ ma $l(P) = 12$, e quindi non è ammissibile. Non avendo ottenuto nessuna soluzione ammissibile si ha $z = +\infty > c(P) = 4$ e occorre procedere con il branching, generando un nodo dell'albero delle decisioni in cui si elimina l'arco $(1,3)$, un altro in cui si fissa in soluzione l'arco $(1,3)$ e si elimina l'arco $(3,4)$, un terzo in cui si fissano in soluzione gli archi $(1,3)$ e $(3,4)$ e si elimina l'arco $(4,5)$, ed un quarto in cui si fissano in soluzione gli archi $(1,3)$, $(3,4)$ e $(4,5)$ e si elimina l'arco $(5,8)$.

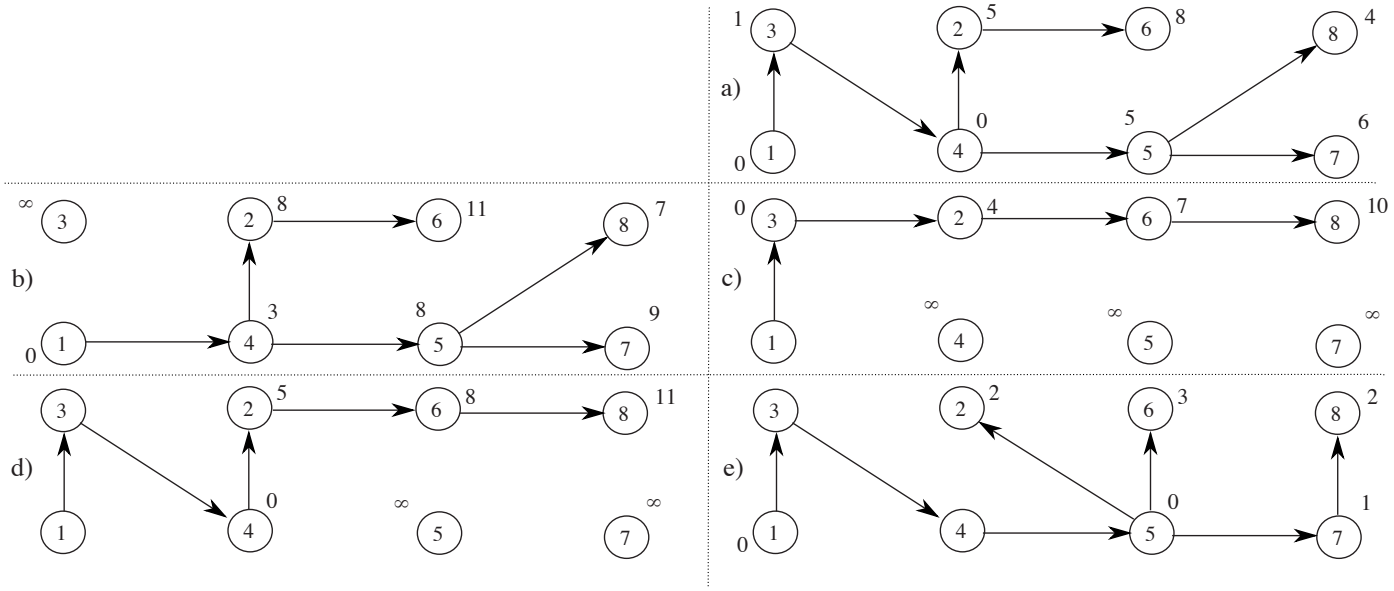
$x_{13} = 0$ L'SPT ottenuto è mostrato in b). $c(P) = 7$ ma $l(P) = 12$. Pertanto $z = +\infty > 7 = c(P)$ e occorre procedere con il branching, creando i tre nodi $x_{13} = x_{14} = 0$; $x_{13} = x_{45} = 0$ e $x_{14} = 1$; $x_{13} = x_{58} = 0$ e $x_{14} = x_{45} = 1$.

$x_{13} = 1, x_{34} = 0$ L'SPT di radice 3 è mostrato in c). $c(P) = 10 + 1 = 11$, e $l(P) = 10$. Pertanto è stata determinata una soluzione ammissibile: $z = +\infty > 11 = c(P)$ e quindi si pone $z = 11$. Inoltre, il nodo viene potato per ottimalità (come pure dalla valutazione inferiore).

$x_{13} = x_{34} = 1, x_{45} = 0$ L'SPT di radice 4 è mostrato in d). $c(P) = 11$ mentre $l(P) = 14$. Il cammino non è quindi ammissibile, ma poiché $c(P) = 11 \geq 11 = z$ il nodo viene potato dalla valutazione inferiore.

$x_{13} = x_{34} = x_{45} = 1$, $x_{58} = 0$ L'SPT di radice 5 è mostrato in e). $c(P) = 7$ e $l(P) = 10$. Pertanto è stata determinata un'altra soluzione ammissibile: siccome $z = 11 > 7 = c(P)$, si pone $z = 7$. Inoltre, il nodo viene potato per ottimalità (come pure dalla valutazione inferiore).

Avendo visitato cinque nodi, l'algoritmo termina anche se $Q \neq \emptyset$. La miglior valutazione superiore è $z = 7$. L'analisi dell'algoritmo Branch&Bound assicura che la migliore valutazione inferiore disponibile è pari a $\min\{\ z\ ,\ \min\{\ \underline{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. Q contiene tutti i figli del nodo $\boxed{x_{13} = 0}$, e pertanto la miglior valutazione inferiore è pari alla valutazione inferiore di quel nodo, ossia 7. Poiché $z = 7$, il gap ottenuto è nullo: il problema è stato risolto all'ottimo anche se Q non è ancora vuota.



4) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta mediante un grafo orientato $G = (N, A)$. Il nodo sorgente s deve inviare un messaggio cifrato al nodo destinazione t lungo un cammino orientato di G. Al fine di monitorare l'instradamento del messaggio, si impone di installare un dispositivo di controllo in ogni nodo del cammino da s a t selezionato per l'invio (esclusi s e t). Sapendo che ad ogni collegamento della rete è associato un costo di utilizzo $c_{ij} > 0$, che l'installazione di un dispositivo di controllo in i comporta un costo di installazione $c_i > 0$, e che il budget a disposizione per installare dispositivi di controllo è pari a B, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere lungo quale cammino di G inviare il messaggio in modo da rispettare il vincolo di budget, minimizzando il costo totale sostenuto per l'invio.

SVOLGIMENTO

Introduciamo una famiglia di variabili di flusso binarie x_{ij} per ogni $(i, j) \in A$, con il seguente significato:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene al cammino selezionato da } s \text{ a } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Per rappresentare l'installazione dei dispositivi di monitoraggio introduciamo inoltre variabili binarie y_i per ogni $i \in N \setminus \{s, t\}$, con il seguente significato:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si installa un dispositivo in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Una formulazione del problema è quindi la seguente:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N\setminus\{s,t\}} c_i y_i \tag{1}$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ 1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N \tag{2}$$

$$y_i = \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} \qquad i \in N \setminus \{s, t\} \tag{3}$$

$$\sum_{i\in N\setminus\{s,t\}} c_i y_i \leq B \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j) \in A \tag{5}$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad i \in N \setminus \{s, t\} \tag{6}$$

I vincoli (2) sono i classici vincoli di conservazione di flusso, propri del modello di cammino minimo indicato nel suggerimento: poichè le variabili di flusso sono binarie, tali vincoli individuano un cammino orientato in G da s a t. In effetti niente vieterebbe che, oltre al cammino, le x ammissibili rispetto a (2) individuassero anche cicli disgiunti dal cammino (né che il cammino non sia semplice); il fatto che i costi siano positivi peró renderebbe qualsiasi soluzione di questo tipo chiaramente non ottima. I vincoli (3) impongono che venga installato un dispositivo di controllo in ogni nodo i, diverso da s e t, appartenente al cammino. (4) è il vincolo di budget. Infine la funzione obiettivo (1), da minimizzare, rappresenta il costo totale, espresso dalla somma dei costi di utilizzo degli archi e dei costi di installazione dei dispositivi.

Si osservi che le variabili y_i sono di fatto superflue, potendo essere sostituite nel modello dalle espressioni a destra nei vincoli (3). Ciò equivale a modificare i costi degli archi, aggiungendo al costo c_{ij} di ogni arco (i, j) il costo c_j relativo all'installazione del dispositivo di monitoraggio in j, e a esprimere il vincolo di budget in termini di massimo "peso" degli archi che possono essere selezionati, dove ancora una volta il peso di (i, j) è c_j. Si tratta quindi di un'istanza del problema del cammino minimo vincolato.

5) L'Agenzia delle Entrate ha deciso di potenziare alcuni degli m uffici riscossione di una popolosa città italiana per rendere più efficiente il servizio nei confronti dei suoi n utenti. In particolare, ogni utente deve essere servito da esattamente un ufficio. Inoltre, noti la distanza d_{ij} e il tempo di viaggio medio t_{ij} di ogni utente i nei confronti di ogni ufficio j, il servizio deve essere tale che il tempo globale speso dagli utenti per recarsi all'ufficio loro assegnato non ecceda una data soglia temporale T, oppure la distanza totale percorsa dagli utenti per recarsi all'ufficio loro assegnato non ecceda una data distanza D.

Nella configurazione corrente l'ufficio j ha capacità u_j, ovvero può servire al massimo u_j utenti, $j = 1, ..m$. Per ogni ufficio j, l'Agenzia vuole valutare se incrementare la capacità al valore $U_j > u_j$, al costo c_j. Si formuli in termini di PLI il problema di decidere quali uffici potenziare in modo da garantire agli utenti un servizio che soddisfi i requisiti sopra specificati, minimizzando il costo derivante dal potenziamento effettuato.

SVOLGIMENTO Per descrivere il problema introduciamo le variabili binarie

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene potenziato l'ufficio } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..m.$$

Per decidere come assegnare gli utenti agli uffici di riscossione introduciamo inoltre le variabili di assegnamento

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'utente } i \text{ viene assegnato all'ufficio } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, ..n, j = 1, ..m.$$

Introduciamo infine due variabili ausiliarie w_1 e w_2, per formulare il requisito relativo alla distanza totale e al tempo medio globale speso dagli utenti per recarsi all'ufficio loro assegnato. Utilizzando tali variabili decisionali, il problema dell'Agenzia delle Entrate può essere formulato mediante il seguente modello P.L.I:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{m} c_j y_j & \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, ...n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j + (U_j - u_j) y_j & j = 1, ...m \\
& \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_{ij} \leq T + M w_1 & \\
& \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} x_{ij} \leq D + M w_2 & \\
& w_1 + w_2 \leq 1 & \\
& w_1, w_2 \in \{0, 1\} & \\
& y_j \in \{0, 1\} & j = 1, ...m, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, ..n, \ j = 1, ...m.
\end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli, di semiassegnamento, garantisce che ogni utente sia assegnato ad esattamente un ufficio. Segue un gruppo di vincoli che sono contemporaneamente vincoli logici e vincoli di capacità. Infatti, se $y_j = 1$, ovvero si decide di potenziare l'ufficio j, allora il vincolo corrispondente a j garantisce che la capacità di servizio dell'ufficio j sia pari a U_j. Se invece $y_j = 0$, ovvero si decide di non potenziare l'ufficio j, allora il vincolo garantisce che la capacità di servizio dell'ufficio j sia u_j, ovvero la capacità non potenziata. I penultimi due blocchi di vincoli, in cui M denota una costante molto elevata, formulano la richiesta relativa alla distanza totale e al tempo medio globale speso dagli utenti per recarsi all'ufficio loro assegnato, utilizzando le variabili ausiliarie w_1 e w_2. Infatti, poichè l'ultimo vincolo impone che al massimo una di tali due variabili sia posta a 1, tali due blocchi garantiscono che o il tempo globale speso dagli utenti per recarsi all'ufficio loro assegnato non ecceda la soglia temporale T, oppure la distanza totale percorsa dagli utenti per recarsi

all'ufficio loro assegnato non ecceda la distanza D. La funzione obiettivo, da minimizzare, definisce il costo derivante dal potenziamento degli uffici.