

Metodi computazionali per la decomposizione primaria

LUDOVICO PIAZZA

PROF. ENRICO SBARRA

UNIVERSITÀ DI PISA

27 ottobre 2023



Dipartimento
di Matematica

Sommario

1. Introduzione
2. Algoritmo GTZ: caso 0-dimensionale
 - 2.1 Shape Lemma
 - 2.2 Decomposizione 0-dimensionale
3. Algoritmo GTZ: caso generale
 - 3.1 Insieme di variabili indipendente
 - 3.2 Decomposizione della localizzazione
 - 3.3 Algoritmo finale



Introduzione

Introduzione

Definizione

Dato un ideale proprio $I \subsetneq R$, chiamiamo *decomposizione primaria* di I una sua scrittura come intersezione finita di ideali primari $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$.

Diciamo che la decomposizione è *minimale* se:

1. per ogni $i \neq j$ si ha $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_j}$;
2. per ogni i la componente $\mathfrak{q}_i$ non è *ridondante*, ovvero $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$.

Introduzione

Definizione

Dato un ideale proprio $I \subsetneq R$, chiamiamo *decomposizione primaria* di I una sua scrittura come intersezione finita di ideali primari $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$. Diciamo che la decomposizione è *minimale* se:

1. per ogni $i \neq j$ si ha $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_j}$;
2. per ogni i la componente $\mathfrak{q}_i$ non è *ridondante*, ovvero $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$.

Teorema (Lasker-Noether)

Sia R un anello noetheriano e $I \subsetneq R$ un suo ideale proprio. Esiste una decomposizione primaria minimale $I = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i$.

Introduzione

Definizione

Dato un ideale proprio $I \subsetneq R$, chiamiamo *decomposizione primaria* di I una sua scrittura come intersezione finita di ideali primari $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$. Diciamo che la decomposizione è *minimale* se:

1. per ogni $i \neq j$ si ha $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_j}$;
2. per ogni i la componente $\mathfrak{q}_i$ non è *ridondante*, ovvero $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$.

Teorema (Lasker-Noether)

Sia R un anello noetheriano e $I \subsetneq R$ un suo ideale proprio. Esiste una decomposizione primaria minimale $I = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i$. Inoltre, gli insiemi

$$\text{Ass}(I) := \{\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \dots, \sqrt{\mathfrak{q}_s}\}, \quad \{\mathfrak{q}_i \mid \sqrt{\mathfrak{q}_i} \text{ minimale in } \text{Ass}(I)\}$$

non dipendono dalla scelta della decomposizione.

Algoritmi per il calcolo della decomposizione primaria

- *Francis Sowerby Macaulay, 1913*: primo algoritmo per il calcolo della decomposizione primaria, in anelli polinomiali a coefficienti interi o complessi;

Algoritmi per il calcolo della decomposizione primaria

- *Francis Sowerby Macaulay, 1913*: primo algoritmo per il calcolo della decomposizione primaria, in anelli polinomiali a coefficienti interi o complessi;
- *Grete Hermann, 1926*: primo algoritmo per gli anelli polinomiali a coefficienti in qualsiasi campo di caratteristica 0;

Algoritmi per il calcolo della decomposizione primaria

- *Francis Sowerby Macaulay, 1913*: primo algoritmo per il calcolo della decomposizione primaria, in anelli polinomiali a coefficienti interi o complessi;
- *Grete Hermann, 1926*: primo algoritmo per gli anelli polinomiali a coefficienti in qualsiasi campo di caratteristica 0;
- *Algoritmo GTZ, 1984*: Patrizia Gianni, Barry Trager e Gail Zacharias;

Algoritmi per il calcolo della decomposizione primaria

- *Francis Sowerby Macaulay, 1913*: primo algoritmo per il calcolo della decomposizione primaria, in anelli polinomiali a coefficienti interi o complessi;
- *Grete Hermann, 1926*: primo algoritmo per gli anelli polinomiali a coefficienti in qualsiasi campo di caratteristica 0;
- *Algoritmo GTZ, 1984*: Patrizia Gianni, Barry Trager e Gail Zacharias;
- *Algoritmo EHV, 1992*: David Eisenbud, Craig Huneke e Wolmer Vasconcelos;

Algoritmi per il calcolo della decomposizione primaria

- *Francis Sowerby Macaulay, 1913*: primo algoritmo per il calcolo della decomposizione primaria, in anelli polinomiali a coefficienti interi o complessi;
- *Grete Hermann, 1926*: primo algoritmo per gli anelli polinomiali a coefficienti in qualsiasi campo di caratteristica 0;
- *Algoritmo GTZ, 1984*: Patrizia Gianni, Barry Trager e Gail Zacharias;
- *Algoritmo EHV, 1992*: David Eisenbud, Craig Huneke e Wolmer Vasconcelos;
- *Algoritmo SY, 1996*: Takeshi Shimoyama e Kazuhiro Yokoyama.

	GTZ	EHV	SY
Singular	✓	X	✓
CoCoA	✓	X	✓
Macaulay2	✓	✓	✓
Sage	✓	X	✓

Notazione e strumenti

Indicheremo con

- $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0
- $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
- $I \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ un ideale
- $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ ideali primari di una decomposizione primaria minimale di I
- $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ primi associati di I

Notazione e strumenti

Indicheremo con

- $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0
- $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
- $I \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ un ideale
- $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ ideali primari di una decomposizione primaria minimale di I
- $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ primi associati di I

Useremo

- Basi di Gröbner

Notazione e strumenti

Indicheremo con

- $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0
- $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
- $I \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ un ideale
- $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ ideali primari di una decomposizione primaria minimale di I
- $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ primi associati di I

Useremo

- Basi di Gröbner
- Calcolo degli ideali di eliminazione: se G è una base di Gröbner di I rispetto all'ordinamento lessicografico $x_1 > \dots > x_n$, abbiamo $I \cap \mathbb{K}[x_{i+1}, \dots, x_n] = (G \cap \mathbb{K}[x_{i+1}, \dots, x_n])$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$

Notazione e strumenti

Indicheremo con

- $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0
- $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
- $I \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ un ideale
- $q_1, \dots, q_r$ ideali primari di una decomposizione primaria minimale di I
- $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ primi associati di I

Useremo

- Basi di Gröbner
- Calcolo degli ideali di eliminazione: se G è una base di Gröbner di I rispetto all'ordinamento lessicografico $x_1 > \dots > x_n$, abbiamo $I \cap \mathbb{K}[x_{i+1}, \dots, x_n] = (G \cap \mathbb{K}[x_{i+1}, \dots, x_n])$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$
- Dato $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}$, consideriamo estensioni e contrazioni di ideali rispetto all'inclusione $i: \mathbb{K}[\mathbf{x}] \hookrightarrow \mathbb{K}(\mathbf{u})[\mathbf{x} \setminus \mathbf{u}]$. Sia q un ideale $\mathfrak{p}$ -primario di $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Se $\mathbb{K}(\mathbf{u}) \cap \mathfrak{p} = 0$ allora q^e è $\mathfrak{p}^e$ -primario e $q^{ec} = q$. Se invece $\mathbb{K}(\mathbf{u}) \cap \mathfrak{p} \neq 0$ allora $q^e = \mathbb{K}(\mathbf{u})[\mathbf{x} \setminus \mathbf{u}]$

Algoritmo GTZ: caso 0-dimensionale

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Definizione

Un ideale massimale $\mathfrak{m} \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dice in *posizione generale* se esistono $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{K}[x_n]$ tali che

$$\mathfrak{m} = (x_1 - g_1(x_n), \dots, x_{n-1} - g_{n-1}(x_n), g_n(x_n)).$$

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Definizione

Un ideale massimale $\mathfrak{m} \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dice in *posizione generale* se esistono $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{K}[x_n]$ tali che

$$\mathfrak{m} = (x_1 - g_1(x_n), \dots, x_{n-1} - g_{n-1}(x_n), g_n(x_n)).$$

Un ideale 0–dimensionale I si dice in *posizione generale* se $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ sono in posizione generale e $\mathfrak{p}_i \cap \mathbb{K}[x_n] \neq \mathfrak{p}_j \cap \mathbb{K}[x_n]$ per $i \neq j$.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Definizione

Un ideale massimale $\mathfrak{m} \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dice in *posizione generale* se esistono $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{K}[x_n]$ tali che

$$\mathfrak{m} = (x_1 - g_1(x_n), \dots, x_{n-1} - g_{n-1}(x_n), g_n(x_n)).$$

Un ideale 0–dimensionale I si dice in *posizione generale* se $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ sono in posizione generale e $\mathfrak{p}_i \cap \mathbb{K}[x_n] \neq \mathfrak{p}_j \cap \mathbb{K}[x_n]$ per $i \neq j$.

Teorema (Shape Lemma)

Per ogni $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$, definiamo un cambio di variabili ϕ_a

$$x_i \longmapsto x_i \quad \text{per } i < n \quad x_n \longmapsto x_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i.$$

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Definizione

Un ideale massimale $\mathfrak{m} \subsetneq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dice in *posizione generale* se esistono $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{K}[x_n]$ tali che

$$\mathfrak{m} = (x_1 - g_1(x_n), \dots, x_{n-1} - g_{n-1}(x_n), g_n(x_n)).$$

Un ideale 0–dimensionale I si dice in *posizione generale* se $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ sono in posizione generale e $\mathfrak{p}_i \cap \mathbb{K}[x_n] \neq \mathfrak{p}_j \cap \mathbb{K}[x_n]$ per $i \neq j$.

Teorema (Shape Lemma)

Per ogni $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$, definiamo un cambio di variabili ϕ_a

$$x_i \longmapsto x_i \quad \text{per } i < n \quad x_n \longmapsto x_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i.$$

Se I è 0–dimensionale, esiste un aperto di Zariski non vuoto $U \subseteq \mathbb{K}^{n-1}$ tale che $\forall a \in U: \phi_a(I)$ è in posizione generale.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Teorema

Sia $g = g_1^{\nu_1} \dots g_s^{\nu_s} \in \mathbb{K}[x_n]$, con g_i polinomi monici irriducibili distinti, tale che $(g) = I \cap \mathbb{K}[x_n]$.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Teorema

Sia $g = g_1^{\nu_1} \dots g_s^{\nu_s} \in \mathbb{K}[x_n]$, con g_i polinomi monici irriducibili distinti, tale che $(g) = I \cap \mathbb{K}[x_n]$. Se I è 0–dimensionale allora

1. $I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i})$.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Teorema

Sia $g = g_1^{\nu_1} \dots g_s^{\nu_s} \in \mathbb{K}[x_n]$, con g_i polinomi monici irriducibili distinti, tale che $(g) = I \cap \mathbb{K}[x_n]$. Se I è 0–dimensionale allora

$$1. \quad I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i}).$$

Inoltre, se I è in posizione generale

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Teorema

Sia $g = g_1^{\nu_1} \dots g_s^{\nu_s} \in \mathbb{K}[x_n]$, con g_i polinomi monici irriducibili distinti, tale che $(g) = I \cap \mathbb{K}[x_n]$. Se I è 0–dimensionale allora

$$1. \quad I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i}).$$

Inoltre, se I è in posizione generale

$$2. \quad (I, g_i^{\nu_i}) \text{ è primario per ogni } i = 1, \dots, s.$$

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$$I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i}).$$

Sappiamo già che $I \subseteq \cap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i})$.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$$I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i}).$$

Sappiamo già che $I \subseteq \cap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i})$.

Sia $f \in \cap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i})$. Ponendo $p_i := g/g_i^{\nu_i}$, abbiamo $(p_1, \dots, p_s)_{\mathbb{K}[x_n]} = (1)_{\mathbb{K}[x_n]}$,
perciò

$$\exists : a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}[x_n] \text{ tali che } \sum_{i=1}^s a_i p_i = 1.$$

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$$I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i}).$$

Sappiamo già che $I \subseteq \cap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i})$.

Sia $f \in \cap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i})$. Ponendo $p_i := g/g_i^{\nu_i}$, abbiamo $(p_1, \dots, p_s)_{\mathbb{K}[x_n]} = (1)_{\mathbb{K}[x_n]}$, perciò

$$\exists : a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}[x_n] \text{ tali che } \sum_{i=1}^s a_i p_i = 1.$$

Per ogni $i = 1, \dots, s$ esistono $f_i \in I$, $\xi_i \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ tali che $f = f_i + \xi_i g_i^{\nu_i}$.

Concludiamo

$$f = \sum_{i=1}^s a_i p_i (f_i + \xi_i g_i^{\nu_i}) = \sum_{i=1}^s (a_i p_i f_i + a_i \xi_i g) \in I.$$



Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Per ogni $i = 1, \dots, s$, l'ideale $(I, g_i^{\nu_i}) \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dimostra che è proprio.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Per ogni $i = 1, \dots, s$, l'ideale $(I, g_i^{\nu_i}) \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dimostra che è proprio.

Mostriamo che $\text{Ass}((I, g_i^{\nu_i})) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \mid g_i \in \mathfrak{p}\}$:

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Per ogni $i = 1, \dots, s$, l'ideale $(I, g_i^{\nu_i}) \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dimostra che è proprio.

Mostriamo che $\text{Ass}((I, g_i^{\nu_i})) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \mid g_i \in \mathfrak{p}\}$: per le proprietà del radicale si ha

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}((I, g_i^{\nu_i}))} \mathfrak{p} = \sqrt{(I, g_i^{\nu_i})} = \sqrt{(\sqrt{I}, g_i)} = \bigcap_{i=1}^r \sqrt{(\mathfrak{p}_i, g_i)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \\ g_i \in \mathfrak{p}}} \mathfrak{p},$$

da cui segue quanto voluto.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Per ogni $i = 1, \dots, s$, l'ideale $(I, g_i^{\nu_i}) \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dimostra che è proprio.

Mostriamo che $\text{Ass}((I, g_i^{\nu_i})) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \mid g_i \in \mathfrak{p}\}$: per le proprietà del radicale si ha

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}((I, g_i^{\nu_i}))} \mathfrak{p} = \sqrt{(I, g_i^{\nu_i})} = \sqrt{(\sqrt{I}, g_i)} = \bigcap_{i=1}^r \sqrt{(\mathfrak{p}_i, g_i)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \\ g_i \in \mathfrak{p}}} \mathfrak{p},$$

da cui segue quanto voluto.

Siano $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{K}[x_n]$ tali che $\mathfrak{p}_i \cap \mathbb{K}[x_n] = (q_i)$, perciò irriducibili.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Per ogni $i = 1, \dots, s$, l'ideale $(I, g_i^{\nu_i}) \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ si dimostra che è proprio.

Mostriamo che $\text{Ass}((I, g_i^{\nu_i})) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \mid g_i \in \mathfrak{p}\}$: per le proprietà del radicale si ha

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}((I, g_i^{\nu_i}))} \mathfrak{p} = \sqrt{(I, g_i^{\nu_i})} = \sqrt{(\sqrt{I}, g_i)} = \bigcap_{i=1}^r \sqrt{(\mathfrak{p}_i, g_i)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \\ g_i \in \mathfrak{p}}} \mathfrak{p},$$

da cui segue quanto voluto.

Siano $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{K}[x_n]$ tali che $\mathfrak{p}_i \cap \mathbb{K}[x_n] = (q_i)$, perciò irriducibili.

Dato che I in posizione generale, i polinomi q_i a coppie distinti, e quindi comassimali. Perciò

$$\left(\prod_{i=1}^r q_i \right) = \bigcap_{i=1}^r (q_i) = \bigcap_{i=1}^r (\mathfrak{p}_i \cap \mathbb{K}[x_n]) = \sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n].$$

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Dato che $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ è noetheriano, esiste un intero m per cui

$$\left(\prod_{i=1}^l q_i\right)^m = \left(\sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n]\right)^m \subseteq (g) = I \cap \mathbb{K}[x_n] \subseteq \sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n] = \left(\prod_{i=1}^l q_i\right).$$

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Dato che $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ è noetheriano, esiste un intero m per cui

$$\left(\prod_{i=1}^l q_i \right)^m = \left(\sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n] \right)^m \subseteq (g) = I \cap \mathbb{K}[x_n] \subseteq \sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n] = \left(\prod_{i=1}^l q_i \right).$$

Quindi $\prod_{i=1}^l q_i \mid g \mid \prod_{i=1}^l q_i^m$.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Dato che $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ è noetheriano, esiste un intero m per cui

$$\left(\prod_{i=1}^l q_i\right)^m = \left(\sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n]\right)^m \subseteq (g) = I \cap \mathbb{K}[x_n] \subseteq \sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n] = \left(\prod_{i=1}^l q_i\right).$$

Quindi $\prod_{i=1}^l q_i \mid g \mid \prod_{i=1}^l q_i^m$.
Senza perdita di generalità $q_i = g_i$.

Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

$(I, g_i^{\nu_i})$ è primario.

Dato che $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ è noetheriano, esiste un intero m per cui

$$\left(\prod_{i=1}^l q_i\right)^m = \left(\sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n]\right)^m \subseteq (g) = I \cap \mathbb{K}[x_n] \subseteq \sqrt{I} \cap \mathbb{K}[x_n] = \left(\prod_{i=1}^l q_i\right).$$

Quindi $\prod_{i=1}^l q_i \mid g \mid \prod_{i=1}^l q_i^m$.

Senza perdita di generalità $q_i = g_i$. Allora $\mathfrak{p}_i$ è l'unico primo associato ad I che contiene g_i e si conclude

$$\text{Ass}((I, g_i^{\nu_i})) = \{\mathfrak{p}_i\}.$$



Algoritmo GTZ: caso 0–dimensionale

Teorema

Sia $g = g_1^{\nu_1} \dots g_s^{\nu_s} \in \mathbb{K}[x_n]$, con g_i polinomi monici irriducibili distinti, tale che $(g) = I \cap \mathbb{K}[x_n]$. Se I è 0– dimensionale allora

1. $I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i}).$

Inoltre, se I è in posizione generale

2. $(I, g_i^{\nu_i})$ è primario per ogni $i = 1, \dots, s.$

Corollario

La decomposizione $I = \bigcap_{i=1}^s (I, g_i^{\nu_i})$ descritta sopra è una decomposizione primaria minimale.

Esempio

Prendiamo $I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale 0-dimensionale.
Effettuiamo un cambio di variabili con $a = (1, 1)$

Esempio

Prendiamo $I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale 0-dimensionale.
Effettuiamo un cambio di variabili con $a = (1, 1)$

$$I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \xrightarrow{\phi_a} I' = (x - (x + y + z), y - (x + y + z)^2, (x + y + z)^3 - y).$$

Esempio

Prendiamo $I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale 0-dimensionale.
Effettuiamo un cambio di variabili con $a = (1, 1)$

$$I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \xrightarrow{\phi_a} I' = (x - (x + y + z), y - (x + y + z)^2, (x + y + z)^3 - y).$$

La base di Gröbner di I' rispetto all'ordinamento lessicografico dato da $x > y > z$ è

$$G' = \{x^2 + z, xz - z, y + z, z^2 + z\}.$$

Esempio

Prendiamo $I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale 0-dimensionale.
Effettuiamo un cambio di variabili con $a = (1, 1)$

$$I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \xrightarrow{\phi_a} I' = (x - (x + y + z), y - (x + y + z)^2, (x + y + z)^3 - y).$$

La base di Gröbner di I' rispetto all'ordinamento lessicografico dato da $x > y > z$ è

$$G' = \{x^2 + z, xz - z, y + z, z^2 + z\}.$$

Prendiamo $G' \cap \mathbb{K}[z] = \{z^2 + z\} = \{z(z + 1)\}.$

Esempio

Prendiamo $I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale 0-dimensionale.
Effettuiamo un cambio di variabili con $a = (1, 1)$

$$I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \xrightarrow{\phi_a} I' = (x - (x + y + z), y - (x + y + z)^2, (x + y + z)^3 - y).$$

La base di Gröbner di I' rispetto all'ordinamento lessicografico dato da $x > y > z$ è

$$G' = \{x^2 + z, xz - z, y + z, z^2 + z\}.$$

Prendiamo $G' \cap \mathbb{K}[z] = \{z^2 + z\} = \{z(z + 1)\}$. Abbiamo quindi:

Esempio

Prendiamo $I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale 0-dimensionale.
Effettuiamo un cambio di variabili con $a = (1, 1)$

$$I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \xrightarrow{\phi_a} I' = (x - (x + y + z), y - (x + y + z)^2, (x + y + z)^3 - y).$$

La base di Gröbner di I' rispetto all'ordinamento lessicografico dato da $x > y > z$ è

$$G' = \{x^2 + z, xz - z, y + z, z^2 + z\}.$$

Prendiamo $G' \cap \mathbb{K}[z] = \{z^2 + z\} = \{z(z + 1)\}$. Abbiamo quindi:

$$I' = (I', z) \cap (I', z + 1).$$

Esempio

Prendiamo $I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale 0-dimensionale.
Effettuiamo un cambio di variabili con $a = (1, 1)$

$$I = (x - z, y - z^2, z^3 - y) \xrightarrow{\phi_a} I' = (x - (x + y + z), y - (x + y + z)^2, (x + y + z)^3 - y).$$

La base di Gröbner di I' rispetto all'ordinamento lessicografico dato da $x > y > z$ è

$$G' = \{x^2 + z, xz - z, y + z, z^2 + z\}.$$

Prendiamo $G' \cap \mathbb{K}[z] = \{z^2 + z\} = \{z(z + 1)\}$. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\phi_a^{-1}} I &= (I, x + y - z) \cap (I, x + y - z - 1) = \\ &= (x - z, y - z^2, y - z^3, z^2) \cap (x - z, y - z^2, y - z^3, z^2 - 1). \end{aligned}$$

Algoritmo GTZ: caso generale

Algoritmo GTZ: caso generale

Definizione

Un sottoinsieme di variabili $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}$ si dice *indipendente* rispetto a I se

$$I \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] = 0.$$

Algoritmo GTZ: caso generale

Definizione

Un sottoinsieme di variabili $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}$ si dice *indipendente* rispetto a I se

$$I \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] = 0.$$

Si dimostra che $\mathbf{u}$ è massimale se e solo se $\dim(I) = \#\mathbf{u}$.

Algoritmo GTZ: caso generale

Definizione

Un sottoinsieme di variabili $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}$ si dice *indipendente* rispetto a I se

$$I \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] = 0.$$

Si dimostra che $\mathbf{u}$ è massimale se e solo se $\dim(I) = \#\mathbf{u}$.

Proposizione

Gli ideali $I = (f_1, \dots, f_s)$ e $\text{Lt}(I)$ hanno gli stessi insiemi di variabili indipendenti.

Algoritmo GTZ: caso generale

Definizione

Un sottoinsieme di variabili $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}$ si dice *indipendente* rispetto a I se

$$I \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] = 0.$$

Si dimostra che $\mathbf{u}$ è massimale se e solo se $\dim(I) = \#\mathbf{u}$.

Proposizione

Gli ideali $I = (f_1, \dots, f_s)$ e $\text{Lt}(I)$ hanno gli stessi insiemi di variabili indipendenti. Inoltre, un tale insieme di variabili massimale è dato da

$$\text{maxSet}(I, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{se } I = 0 \text{ e } n = 0, \end{cases}$$

Algoritmo GTZ: caso generale

Definizione

Un sottoinsieme di variabili $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}$ si dice *indipendente* rispetto a I se

$$I \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] = 0.$$

Si dimostra che $\mathbf{u}$ è massimale se e solo se $\dim(I) = \#\mathbf{u}$.

Proposizione

Gli ideali $I = (f_1, \dots, f_s)$ e $\text{Lt}(I)$ hanno gli stessi insiemi di variabili indipendenti. Inoltre, un tale insieme di variabili massimale è dato da

$$\text{maxSet}(I, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{se } I = 0 \text{ e } n = 0, \\ \argmax_{\mathbf{w} \in \left\{ \text{maxSet}(I_{x_j=0}, \mathbf{x} \setminus \{x_j\}) : x_j | \text{lm}(f_1) \right\}} |\mathbf{w}|} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Algoritmo GTZ: caso generale

Definizione

Un sottoinsieme di variabili $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}$ si dice *indipendente* rispetto a I se

$$I \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] = 0.$$

Si dimostra che $\mathbf{u}$ è massimale se e solo se $\dim(I) = \#\mathbf{u}$.

Proposizione

Gli ideali $I = (f_1, \dots, f_s)$ e $\text{Lt}(I)$ hanno gli stessi insiemi di variabili indipendenti. Inoltre, un tale insieme di variabili massimale è dato da

$$\text{maxSet}(I, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{se } I = 0 \text{ e } n = 0, \\ \operatorname{argmax}_{\mathbf{w} \in \left\{ \text{maxSet}(I_{x_j=0}, \mathbf{x} \setminus \{x_j\}) : x_j \mid \text{lm}(f_1) \right\}} |\mathbf{w}| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fissato $\mathbf{u}$, consideriamo estensioni e contrazioni di ideali rispetto all'immersione canonica $i : \mathbb{K}[\mathbf{x}] \hookrightarrow \mathbb{K}(\mathbf{u})[\mathbf{x} \setminus \mathbf{u}]$.

Algoritmo GTZ: caso generale

Teorema

L'estensione $I^e \subseteq \mathbb{K}(\mathbf{u})[\mathbf{x} \setminus \mathbf{u}]$ è un ideale 0-dimensionale con decomposizione primaria minimale

$$I^e = \bigcap_{\substack{\mathbf{u} \text{ indipendente} \\ \text{rispetto a } q_i}} q_i^e.$$

Algoritmo GTZ: caso generale

Teorema

L'estensione $I^e \subseteq \mathbb{K}(\mathbf{u})[\mathbf{x} \setminus \mathbf{u}]$ è un ideale 0-dimensionale con decomposizione primaria minimale

$$I^e = \bigcap_{\substack{\mathbf{u} \text{ indipendente} \\ \text{rispetto a } q_i}} q_i^e.$$

Inoltre, una decomposizione primaria minimale di I^{ec} è data da

$$I^{ec} = \bigcap_{\substack{\mathbf{u} \text{ indipendente} \\ \text{rispetto a } q_i}} q_i^{ec}.$$

Algoritmo GTZ: caso generale

Prendiamo una base di Gröbner $G := \{g_1, \dots, g_s\}$ di I rispetto a un ordinamento lessicografico per cui $\mathbf{x} \setminus \mathbf{u} > \mathbf{u}$.

Algoritmo GTZ: caso generale

Prendiamo una base di Gröbner $G := \{g_1, \dots, g_s\}$ di I rispetto a un ordinamento lessicografico per cui $\mathbf{x} \setminus \mathbf{u} > \mathbf{u}$.

Sia $h := \text{lcm}(\text{lc}(g_1), \dots, \text{lc}(g_s))$ con g_i visti come polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}(\mathbf{u})$, allora

$$I^{ec} = I : (h^k) = I : (h^{k+1})$$

per un qualche $k \in \mathbb{N}$.

Algoritmo GTZ: caso generale

Prendiamo una base di Gröbner $G := \{g_1, \dots, g_s\}$ di I rispetto a un ordinamento lessicografico per cui $\mathbf{x} \setminus \mathbf{u} > \mathbf{u}$.

Sia $h := \text{lcm}(\text{lc}(g_1), \dots, \text{lc}(g_s))$ con g_i visti come polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}(\mathbf{u})$, allora

$$I^{ec} = I : (h^k) = I : (h^{k+1})$$

per un qualche $k \in \mathbb{N}$.

Lemma (Splitting Tool)

Dato $h^k \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ come sopra, si ha la seguente decomposizione:

$$I = I : (h^k) \cap (I, h^k).$$

Algoritmo GTZ

Scheletro dell'algoritmo:

1. calcolo un insieme di variabili $\mathbf{u}$ indipendente massimale rispetto a I

Algoritmo GTZ

Scheletro dell'algoritmo:

1. calcolo un insieme di variabili $\mathbf{u}$ indipendente massimale rispetto a I
2. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^e = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$, che è un ideale 0-dimensionale

Algoritmo GTZ

Scheletro dell'algoritmo:

1. calcolo un insieme di variabili $\mathbf{u}$ indipendente massimale rispetto a I
2. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^e = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$, che è un ideale 0-dimensionale
3. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^{ec} = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i^c$

Algoritmo GTZ

Scheletro dell'algoritmo:

1. calcolo un insieme di variabili $\mathbf{u}$ indipendente massimale rispetto a I
2. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^e = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$, che è un ideale 0-dimensionale
3. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^{ec} = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i^c$
4. calcolo un polinomio $h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ per cui $I : (h) = I^{ec}$

Algoritmo GTZ

Scheletro dell'algoritmo:

1. calcolo un insieme di variabili $\mathbf{u}$ indipendente massimale rispetto a I
2. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^e = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$, che è un ideale 0-dimensionale
3. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^{ec} = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i^c$
4. calcolo un polinomio $h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ per cui $I : (h) = I^{ec}$
5. calcolo ricorsivamente la decomposizione primaria di (I, h)

Algoritmo GTZ

Scheletro dell'algoritmo:

1. calcolo un insieme di variabili $\mathbf{u}$ indipendente massimale rispetto a I
2. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^e = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$, che è un ideale 0-dimensionale
3. calcolo la decomposizione primaria minimale di $I^{ec} = \cap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i^c$
4. calcolo un polinomio $h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ per cui $I : (h) = I^{ec}$
5. calcolo ricorsivamente la decomposizione primaria di (I, h)
6. l'intersezione delle componenti primarie di I^{ec} e di (I, h) è una decomposizione primaria di I , dato che

$$I = I : (h) \cap (I, h)$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \quad \emptyset$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \quad \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \quad \emptyset$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}[z], \{z\}$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \quad \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \quad \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=0} = (0) \quad \subseteq \mathbb{Q}[z], \quad \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=z=0} = (x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[y], \quad \{z\}$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}[z], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=z=0} = (x^3) \subseteq \mathbb{Q}[y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=z=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}, \{z\}$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}[z], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=z=0} = (x^3) \subseteq \mathbb{Q}[y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=z=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}, \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{z=0} = (y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y], \{z\}$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}[z], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=z=0} = (x^3) \subseteq \mathbb{Q}[y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=z=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}, \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{z=0} = (y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{y=z=0} = (x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x], \{z\}$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=0} = (0) \quad \subseteq \mathbb{Q}[z], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=z=0} = (x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=z=0} = (0) \quad \subseteq \mathbb{Q}, \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{z=0} = (y^2, yx^2, x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[x, y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{y=z=0} = (x^3) \quad \subseteq \mathbb{Q}[x], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=z=0} = (0) \quad \subseteq \mathbb{Q}, \{z\}$$

Esempio

- Calcolo insieme di variabili indipendente massimale

Sia $I = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ideale

$$\text{Lt}(I) = (yz, xz, y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{y=0} = (xz, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, z], \emptyset$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}[z], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=z=0} = (x^3) \subseteq \mathbb{Q}[y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=z=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}, \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{z=0} = (y^2, yx^2, x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{y=z=0} = (x^3) \subseteq \mathbb{Q}[x], \{z\}$$

$$\text{Lt}(I)_{x=y=z=0} = (0) \subseteq \mathbb{Q}, \{z\}$$

L'insieme di variabili $\mathbf{u} = \{z\}$ è indipendente massimale rispetto a I .

Esempio

- Calcolo decomposizione primaria minimale di I^e e di I^{ec}

L'ideale esteso è

$$I^e = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}(z)[x, y]$$

Esempio

- Calcolo decomposizione primaria minimale di I^e e di I^{ec}

L'ideale esteso è

$$I^e = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}(z)[x, y]$$

quindi

$$I^{ec} = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$$

Esempio

- Calcolo decomposizione primaria minimale di I^e e di I^{ec}

L'ideale esteso è

$$I^e = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}(z)[x, y]$$

quindi

$$I^{ec} = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$$

- Calcolo h tale che $I^{ec} = I : (h)$

Calcolo la base di Gröbner ridotta di I rispetto all'ordinamento lessicografico $x > y > z$ e ottengo

$$G = \{y(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2\}.$$

Esempio

- Calcolo decomposizione primaria minimale di I^e e di I^{ec}

L'ideale esteso è

$$I^e = (y(z-1), x(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2) = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}(z)[x, y]$$

quindi

$$I^{ec} = (x, y) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$$

- Calcolo h tale che $I^{ec} = I : (h)$

Calcolo la base di Gröbner ridotta di I rispetto all'ordinamento lessicografico $x > y > z$ e ottengo

$$G = \{y(z-1), y^2, y(x-1)^2, x(x-1)^2\}.$$

Sia quindi

$h_1 = \text{lcm}(\text{lc}(y(z-1)), \text{lc}(y^2), \text{lc}(y(x-1)^2), \text{lc}(x(x-1)^2))) = z-1$. Visto che $I : (h_1) = I^{ec}$, posso prendere $h = h_1$.

Esempio

- Calcolo la decomposizione primaria di (I, h)

Prendiamo

$$(I, h) = (y^2, y(x-1), x(x-1)^2, z-1)$$

Esempio

- Calcolo la decomposizione primaria di (I, h)

Prendiamo

$$(I, h) = (y^2, y(x-1), x(x-1)^2, z-1)$$

Si calcola che $\emptyset$ è un insieme di variabili indipendente massimale rispetto a (I, h) , che quindi ha dimensione 0.

Esempio

- Calcolo la decomposizione primaria di (I, h)

Prendiamo

$$(I, h) = (y^2, y(x-1), x(x-1)^2, z-1)$$

Si calcola che $\emptyset$ è un insieme di variabili indipendente massimale rispetto a (I, h) , che quindi ha dimensione 0. Calcoliamo la sua decomposizione

$$(I, h) = (x, y, z-1) \cap ((x-1)^2, y^2, z-1)$$

Esempio

- Calcolo la decomposizione primaria di (I, h)

Prendiamo

$$(I, h) = (y^2, y(x-1), x(x-1)^2, z-1)$$

Si calcola che $\emptyset$ è un insieme di variabili indipendente massimale rispetto a (I, h) , che quindi ha dimensione 0. Calcoliamo la sua decomposizione

$$(I, h) = (x, y, z-1) \cap ((x-1)^2, y^2, z-1)$$

- Calcolo la decomposizione primaria di I

Per lo Splitting Tool, abbiamo la decomposizione primaria

$$I = I : (h) \cap (I, h) = (x, y) \cap (x, y, z-1) \cap ((x-1)^2, y^2, z-1)$$

Esempio

- Calcolo la decomposizione primaria di (I, h)

Prendiamo

$$(I, h) = (y^2, y(x-1), x(x-1)^2, z-1)$$

Si calcola che $\emptyset$ è un insieme di variabili indipendente massimale rispetto a (I, h) , che quindi ha dimensione 0. Calcoliamo la sua decomposizione

$$(I, h) = (x, y, z-1) \cap ((x-1)^2, y^2, z-1)$$

- Calcolo la decomposizione primaria di I

Per lo Splitting Tool, abbiamo la decomposizione primaria

$$I = I : (h) \cap (I, h) = (x, y) \cap (x, y, z-1) \cap ((x-1)^2, y^2, z-1)$$

Notiamo che $(x, y, z-1)$ è ridondante, perciò

$$I = (x, y) \cap ((x-1)^2, y^2, z-1)$$

che è una decomposizione primaria minimale.

Grazie per l'attenzione!