



The Geometry of Eulerian Posets: cd-Index and KLS Theory of Posets

Ludovico Piazza

Relatore: Luis Ferroni

25 Settembre 2026



Dipartimento
di Matematica
Università di Pisa

I risultati discussi in questa presentazione sono basati sulla **tesi**
magistrale e sull'articolo

Tommaso Faustini, Luis Ferroni, Ludovico Piazza

Stellahedral geometry of partially ordered sets

arXiv:2609.22078, 2026.

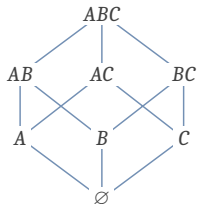


Poset e politopi

1 Politopi e poset euleriani

Poset

Un insieme P con una relazione d'ordine parziale.



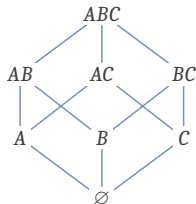


Poset e politopi

1 Politopi e poset euleriani

Poset

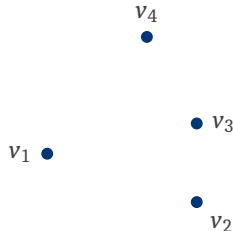
Un insieme P con una relazione d'ordine parziale.



Politopo

L'involuppo convesso di un insieme finito di punti in $\mathbb{R}^n$.

$$Q = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$



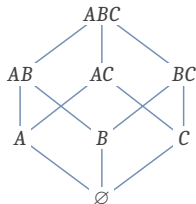


Poset e politopi

1 Politopi e poset euleriani

Poset

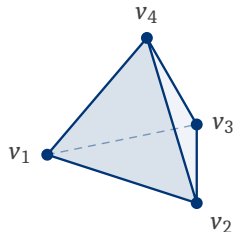
Un insieme P con una relazione d'ordine parziale.



Politopo

L'involuppo convesso di un insieme finito di punti in $\mathbb{R}^n$.

$$Q = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

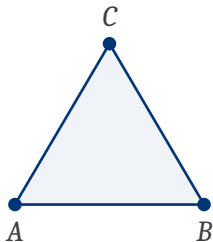




Dai politopi ai poset

1 Politopi e poset euleriani

Dato un politopo $\mathcal{P}$, è possibile associarvi il poset delle facce $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, ordinato per inclusione.

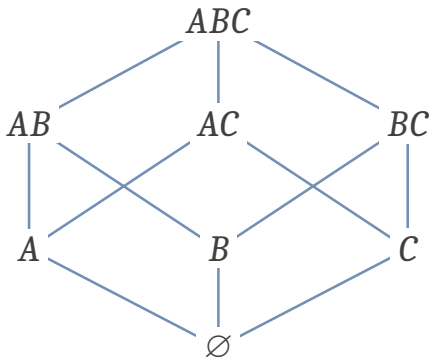
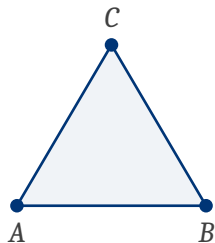




Dai politopi ai poset

1 Politopi e poset euleriani

Dato un politopo $\mathcal{P}$, è possibile associarvi il poset delle facce $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, ordinato per inclusione.



triangolo

spigoli

vertici

faccia vuota



Poset limitati e poset graduati

1 Politopi e poset euleriani

D'ora in avanti, indicheremo con P un poset finito, *limitato* e *graduato* di rango $d + 1$.



Poset limitati e poset graduati

1 Politori e poset euleriani

D'ora in avanti, indicheremo con P un poset finito, *limitato* e *graduato* di rango $d + 1$.

Limitato: ha un minimo $\hat{0}$ e un massimo $\hat{1}$.



Poset limitati e poset graduati

1 Politopi e poset euleriani

D'ora in avanti, indicheremo con P un poset finito, *limitato* e *graduato* di rango $d + 1$.

Limitato: ha un minimo $\hat{0}$ e un massimo $\hat{1}$.

Graduato: tutte le catene massimali hanno la stessa lunghezza.



Poset limitati e poset graduati

1 Politori e poset euleriani

D'ora in avanti, indicheremo con P un poset finito, *limitato* e *graduato* di rango $d + 1$.

Limitato: ha un minimo $\hat{0}$ e un massimo $\hat{1}$.

Graduato: tutte le catene massimali hanno la stessa lunghezza. In questo caso, un elemento $x \in P$ si dice avere rango $\rho(x) = k$ se le catene massimali da $\hat{0}$ ad x hanno $k + 1$ elementi.



Poset limitati e poset graduati

1 Politopi e poset euleriani

D'ora in avanti, indicheremo con P un poset finito, *limitato* e *graduato* di rango $d + 1$.

Limitato: ha un minimo $\hat{0}$ e un massimo $\hat{1}$.

Graduato: tutte le catene massimali hanno la stessa lunghezza. In questo caso, un elemento $x \in P$ si dice avere rango $\rho(x) = k$ se le catene massimali da $\hat{0}$ ad x hanno $k + 1$ elementi. Il rango di un poset è il rango dell'elemento $\hat{1}$.



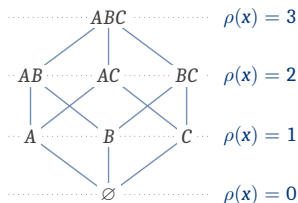
Poset limitati e poset graduati

1 Politopi e poset euleriani

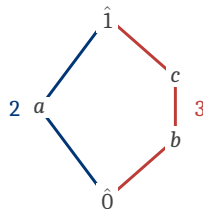
D'ora in avanti, indicheremo con P un poset finito, *limitato* e *graduato* di rango $d + 1$.

Limitato: ha un minimo $\hat{0}$ e un massimo $\hat{1}$.

Graduato: tutte le catene massimali hanno la stessa lunghezza. In questo caso, un elemento $x \in P$ si dice avere rango $\rho(x) = k$ se le catene massimali da $\hat{0}$ ad x hanno $k + 1$ elementi. Il rango di un poset è il rango dell'elemento $\hat{1}$.



Limitato e graduato



Limitato, non graduato



I poset euleriani

1 Politopi e poset euleriani

Definizione

Un poset finito, graduato e limitato P è **euleriano** se ogni intervallo $[s, t] = \{z \in P : s \leq z \leq t\}$, con $s < t$, contiene tanti elementi di rango pari quanti di rango dispari.



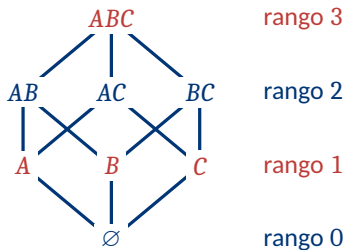
I poset euleriani

1 Politopi e poset euleriani

Definizione

Un poset finito, graduato e limitato P è **euleriano** se ogni intervallo $[s, t] = \{z \in P : s \leq z \leq t\}$, con $s < t$, contiene tanti elementi di rango pari quanti di rango dispari.

4 pari = 4 dispari



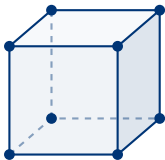


Esempi di poset euleriani

1 Politopi e poset euleriani

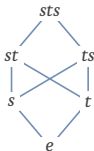
I poset euleriani compaiono naturalmente in diversi contesti:

Politopi



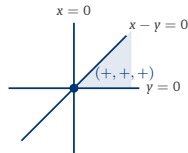
Poset delle facce

Gruppi di Coxeter finiti



Intervalli nell'ordine di
Bruhat

Matroidi orientati



Reticolo delle regioni

Il cd-index e il flag h -vector



Le equazioni di Dehn–Sommerville

2 Il cd -index e il flag h -vector

Sui poset euleriani è possibile generalizzare molte proprietà soddisfatte dai politopi. Un esempio è dato dalle equazioni di Dehn–Sommerville.



Le equazioni di Dehn–Sommerville

2 Il cd -index e il flag h -vector

Sui poset euleriani è possibile generalizzare molte proprietà soddisfatte dai politopi. Un esempio è dato dalle equazioni di Dehn–Sommerville.

Equazioni di Dehn–Sommerville

Sia $\mathcal{P}$ un politopo **simpliciale** di dimensione d . Dato f_i il numero di facce di dimensione i di $\mathcal{P}$, si ha

$$f_k = \sum_{i=k}^{d-1} (-1)^{d-i-1} \binom{i+1}{k+1} f_i \quad \text{per ogni } k = -1, \dots, d-2.$$

In dimensione 3:

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2, \quad 3f_2 = 2f_1.$$



Il flag f -vector

2 Il cd -index e il flag h -vector

Sia P di rango $d + 1$. Scriviamo $[d] := \{1, \dots, d\}$.

Definizione

Il **flag f -vector** di P è la funzione $f_P : 2^{[d]} \rightarrow \mathbb{N}$ data da

$$f_P(S) := \#\left\{ \{x_1 < x_2 < \dots < x_r\} \text{ catena di } P : \{\rho(x_1), \dots, \rho(x_r)\} = S \right\}.$$



Le equazioni di Dehn–Sommerville

2 Il cd -index e il flag h -vector

Le equazioni di Dehn-Sommerville possono essere generalizzate a tutti i poset euleriani, ottenendo delle relazioni per il flag f -vector.



Le equazioni di Dehn–Sommerville

2 Il cd -index e il flag h -vector

Le equazioni di Dehn–Sommerville possono essere generalizzate a tutti i poset euleriani, ottenendo delle relazioni per il flag f -vector.

Equazioni di Dehn–Sommerville generalizzate

Sia P un poset euleriano di rango $d + 1$ e sia $S \subseteq \{1, \dots, d\}$. Se $i, k \in S \cup \{0, d + 1\}$, $i < k - 1$ e $S \cap \{i + 1, \dots, k - 1\} = \emptyset$, allora

$$\sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} f_P(S \cup \{j\}) = f_P(S) \left(1 - (-1)^{k-i-1} \right).$$

In rango 4, siano $f_i = f_P(\{i\})$, $f_{ij} = f_P(\{i, j\})$ e $f_{ijk} = f_P(\{i, j, k\})$:

$$f_1 - f_2 + f_3 = 2, \quad f_{12} = f_{13} = f_{23} = 2f_2, \quad f_{123} = 2f_{12} = 2f_{13} = 2f_{23}.$$



Dal flag h -vector all'ab-index

2 Il cd -index e il flag h -vector

Applicando un'applicazione lineare invertibile al flag f -vector, si ottiene il seguente vettore.

Definizione

Il **flag h -vector** di P è la funzione $f_P : 2^{[d]} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da

$$h_P(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} f_P(T), \quad S \subseteq [d].$$



Dal flag h -vector all' ab -index

2 Il cd -index e il flag h -vector

È possibile codificare l'informazione del flag h -vector mediante un polinomio generatore **non-commutativo**.

Definizione

L' **ab -index** del poset P è il polinomio $\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ dato da

$$\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{S \subseteq [d]} h_S(P) u_S, \quad u_S = u_1 \cdots u_d, \quad u_i = \begin{cases} \mathbf{b} & i \in S, \\ \mathbf{a} & i \notin S. \end{cases}$$



Il cd -index

2 Il cd -index e il flag h -vector

Poniamo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}, \quad \text{con } \deg \mathbf{c} = 1 \text{ e } \deg \mathbf{d} = 2.$$

Teorema (Bayer, Klapper)

P soddisfa le equazioni
di Dehn–Sommerville
generalizzate



Esiste
 $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$
tale che
 $\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d})$.



Il **cd-index**

2 Il **cd-index** e il flag h -vector

Poniamo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}, \quad \text{con } \deg \mathbf{c} = 1 \text{ e } \deg \mathbf{d} = 2.$$

Teorema (Bayer, Klapper)

P soddisfa le equazioni
di Dehn–Sommerville
generalizzate



Esiste
 $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$
tale che
 $\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d})$.

Il polinomio $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ è detto **cd-index** di P .



Il **cd-index**

2 Il **cd-index** e il flag h -vector

Poniamo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}, \quad \text{con } \deg \mathbf{c} = 1 \text{ e } \deg \mathbf{d} = 2.$$

Teorema (Bayer, Klapper)

P soddisfa le equazioni
di Dehn–Sommerville
generalizzate



Esiste
 $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$
tale che
 $\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d})$.

Il polinomio $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ è detto **cd-index** di P . In particolare, ogni poset euleriano ammette un **cd-index**.

Teoria KLS dei poset



Introduzione

3 Teoria KLS dei poset

Al poset P possiamo associare la seguente algebra

$$I_\rho(P) = \{ \varphi = (\varphi_{st})_{s \leq t} : \varphi_{st} \in \mathbb{Q}[x], \quad \deg \varphi_{st} \leq \rho(t) - \rho(s) \},$$

con prodotto dato da

$$(\varphi\psi)_{st}(x) := \sum_{s \leq u \leq t} \varphi_{su}(x) \psi_{ut}(x).$$



Introduzione

3 Teoria KLS dei poset

Al poset P possiamo associare la seguente algebra

$$I_\rho(P) = \{ \varphi = (\varphi_{st})_{s \leq t} : \varphi_{st} \in \mathbb{Q}[x], \quad \deg \varphi_{st} \leq \rho(t) - \rho(s) \},$$

con prodotto dato da

$$(\varphi\psi)_{st}(x) := \sum_{s \leq u \leq t} \varphi_{su}(x) \psi_{ut}(x).$$

È dotata anche di una seconda operazione:

$$\varphi_{st}^{\text{rev}}(x) := x^{\rho(t) - \rho(s)} \varphi_{st}(x^{-1}).$$



Introduzione

3 Teoria KLS dei poset

Al poset P possiamo associare la seguente algebra

$$I_\rho(P) = \{ \varphi = (\varphi_{st})_{s \leq t} : \varphi_{st} \in \mathbb{Q}[x], \quad \deg \varphi_{st} \leq \rho(t) - \rho(s) \},$$

con prodotto dato da

$$(\varphi\psi)_{st}(x) := \sum_{s \leq u \leq t} \varphi_{su}(x) \psi_{ut}(x).$$

È dotata anche di una seconda operazione:

$$\varphi_{st}^{\text{rev}}(x) := x^{\rho(t) - \rho(s)} \varphi_{st}(x^{-1}).$$

La teoria KLS dei poset permette di associare ad ogni poset degli invarianti che appartengono a questa algebra.



Kernel ed esempi

3 Teoria KLS dei poset

Kernel

Un elemento $\kappa \in I_\rho(P)$ è un **kernel** se

$$\kappa_{ss} = 1 \quad \text{per ogni } s \in P, \quad \kappa^{\text{rev}} = \kappa^{-1}.$$



Kernel ed esempi

3 Teoria KLS dei poset

Kernel

Un elemento $\kappa \in I_\rho(P)$ è un **kernel** se

$$\kappa_{ss} = 1 \quad \text{per ogni } s \in P, \quad \kappa^{\text{rev}} = \kappa^{-1}.$$

Poset

Reticolo dei flat di un matroide

Gruppo di Coxeter finito con ordine di Bruhat

Poset euleriano

Kernel sull'intervallo $[s, t]$

Polinomio caratteristico $\chi_{[s,t]}(x)$

R -polinomio $R_{s,t}(x)$

$$\varepsilon_{st}(x) = (x - 1)^{\rho(t) - \rho(s)}$$



Funzioni KLS

3 Teoria KLS dei poset

Teorema

Per ogni kernel κ esistono unici elementi $g, f \in I_\rho(P)$ tali che per ogni $s \leq t$

$$g_{ss} = f_{ss} = 1, \quad \deg g_{st}, \deg f_{st} < \frac{\rho(t) - \rho(s)}{2} \quad \text{se } s \neq t,$$
$$g^{\text{rev}} = g\kappa, \quad f^{\text{rev}} = \kappa f.$$

Chiamiamo g la **funzione KLS sinistra** e f **funzione KLS destra** associate a κ .



Funzioni KLS

3 Teoria KLS dei poset

Teorema

Per ogni kernel κ esistono unici elementi $g, f \in I_\rho(P)$ tali che per ogni $s \leq t$

$$g_{ss} = f_{ss} = 1, \quad \deg g_{st}, \deg f_{st} < \frac{\rho(t) - \rho(s)}{2} \quad \text{se } s \neq t,$$
$$g^{\text{rev}} = g\kappa, \quad f^{\text{rev}} = \kappa f.$$

Chiamiamo g la **funzione KLS sinistra** e f **funzione KLS destra** associate a κ . Chiamiamo anche $g_P(x) := g_{\hat{0}\hat{1}}(x)$ il **polinomio KLS sinistro** e $f_P := f_{\hat{0}\hat{1}}$ il **polinomio KLS destro** associate a κ .



Funzioni KLS

3 Teoria KLS dei poset

Teorema

Per ogni kernel κ esistono unici elementi $g, f \in I_\rho(P)$ tali che per ogni $s \leq t$

$$g_{ss} = f_{ss} = 1, \quad \deg g_{st}, \deg f_{st} < \frac{\rho(t) - \rho(s)}{2} \quad \text{se } s \neq t,$$
$$g^{\text{rev}} = g\kappa, \quad f^{\text{rev}} = \kappa f.$$

Chiamiamo g la **funzione KLS sinistra** e f **funzione KLS destra** associate a κ . Chiamiamo anche $g_P(x) := g_{\hat{0}\hat{1}}(x)$ il **polinomio KLS sinistro** e $f_P := f_{\hat{0}\hat{1}}$ il **polinomio KLS destro** associate a κ .



Funzioni KLS

3 Teoria KLS dei poset

Poset

Funzione KLS sinistra su $[s, t]$

Reticolo dei flat di un matroide

Funzione $\zeta_{st}(x)$

Gruppo di Coxeter finito con ordine di Bruhat

Polinomio di Kazhdan–Lusztig $P_{s,t}(x)$

Poset euleriano

g -polinomio torico di $[s, t]$



h -polinomio torico

3 Teoria KLS dei poset

Dal g -polinomio torico si definisce l' **h -polinomio torico**

$$h(P, x) := \frac{g_P^{\text{rev}}(x) - g_P(x)}{x - 1}.$$



h -polinomio torico

3 Teoria KLS dei poset

Dal g -polinomio torico si definisce l' **h -polinomio torico**

$$h(P, x) := \frac{g_P^{\text{rev}}(x) - g_P(x)}{x - 1}.$$

L' h -polinomio torico codifica i numeri di Betti delle varietà toriche proiettive.



h -polinomio torico

3 Teoria KLS dei poset

Dal g -polinomio torico si definisce l' **h -polinomio torico**

$$h(P, x) := \frac{g_P^{\text{rev}}(x) - g_P(x)}{x - 1}.$$

L' h -polinomio torico codifica i numeri di Betti delle varietà toriche proiettive.

Teorema

Sia $\mathcal{Q}$ un politopo razionale di dimensione d . Dato il poset delle facce $P = \mathcal{F}(\mathcal{Q})$, l' h -polinomio torico $h(P, x) := \sum_{i \geq 0} h_i x^i$ soddisfa

$$h_i = \dim \text{IH}^{2i}(X_{\mathcal{Q}}, \mathbb{C}),$$

dove

- IH : coomologia di intersezione;
- $X_{\mathcal{Q}}$: varietà torica proiettiva associata a $\mathcal{Q}$.



Altri invarianti

3 Teoria KLS dei poset

Al kernel sono associati alcuni invarianti provenienti dalla teoria dei matroidi.

Invariante	Interpretazione per P euleriano	Interpretazione per poset delle facce di politopi
Z-polinomio	h -polinomio torico del poset degli intervalli	h -polinomio torico dell'antiprisma geometrico
Polinomio di Chow	h -polinomio del complesso d'ordine	h -polinomio della suddivisione baricentrica
Polinomio di Chow aumentato	?	?



Altri invarianti

3 Teoria KLS dei poset

Proviamo a rispondere anche ad una seconda domanda.



Altri invarianti

3 Teoria KLS dei poset

Proviamo a rispondere anche ad una seconda domanda.

Invariante

Nel caso euleriano, è nota una formula per calcolarlo mediante il cd-index?

Polinomi KLS

Sì.

Z-polinomio

Formula ricorsiva, ma non chiusa.

Polinomio di Chow

Sì.

Polinomi di Chow aumentati

No.



Trasformata stellaedrale



Trasformata stellaedrale

4 Trasformata stellaedrale

Per fornire un'interpretazione ai polinomi di Chow aumentati, abbiamo costruito a partire da P il seguente poset.

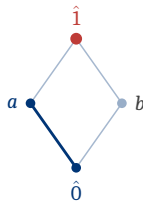
Definizione

La **trasformata stellaedrale** di P è il poset dato dalle coppie (c, γ) tali che

$$c = \{\hat{0} = c_0 < \cdots < c_k\}, \quad c_k \leq \gamma,$$

insieme a un nuovo massimo $\hat{1}_{\text{Stell}}$, ed ordinato mediante

$$(c, \gamma) \leq (c', \gamma') \iff c \subseteq c' \text{ e } \gamma' \leq \gamma.$$



$$(\{\hat{0}, a\}, \hat{1})$$



Realizzazione poliedrale

4 Trasformata stellaedrale

Dato un politopo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, definisco la sua **trasformata stellare duale** nel seguente modo:

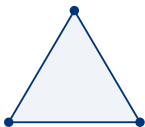


Realizzazione poliedrale

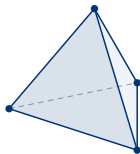
4 Trasformata stellaedrale

Dato un politopo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, definisco la sua **trasformata stellare duale** nel seguente modo:

- Costruisco una piramide su Q ;



Q



$\text{Pyr}(Q)$

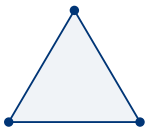


Realizzazione poliedrale

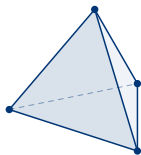
4 Trasformata stellaedrale

Dato un politopo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, definisco la sua **trasformata stellare duale** nel seguente modo:

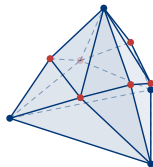
- Costruisco una piramide su Q ;
- Applico delle suddivisioni alle facce che contengono l'apice della piramide.



Q



$\text{Pyr}(Q)$



$\text{DStell}(Q)$

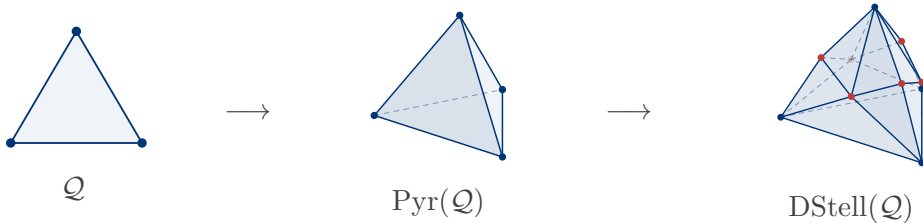


Realizzazione poliedrale

4 Trasformata stellaedrale

Dato un politopo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, definisco la sua **trasformata stellare duale** nel seguente modo:

- Costruisco una piramide su Q ;
- Applico delle suddivisioni alle facce che contengono l'apice della piramide.



Questa operazione soddisfa

$$\mathcal{F}(\text{DStell}(Q)) \cong \text{Stell}(\mathcal{F}(Q^*)).$$



Realizzazione poliedrale

4 Trasformata stellaedrale

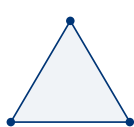
Perché si chiama trasformata stellaedrale?



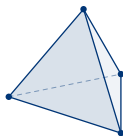
Realizzazione poliedrale

4 Trasformata stellaedrale

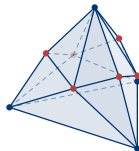
Perché si chiama trasformata stellaedrale?



Δ_2

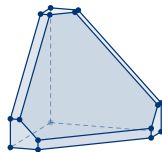


$\text{Pyr}(\Delta_2)$



$\text{DStell}(\Delta_2)$

duale
polare



Stellaedro
tridimensionale



Polinomio di Chow aumentato come h -polinomio torico

4 Trasformata stellaedrale

Teorema

Se P è euleriano e $\text{Stell}(P)$ è la sua trasformata stellaedrale, allora:

- $\text{Stell}(P)$ è euleriano;
- il polinomio di Chow aumentato destro di P è l' h -polinomio torico della sua trasformata stellaedrale

$$F_P(x) = h(\text{Stell}(P), x).$$



Conseguenze

4 Trasformata stellaedrale

Da questi risultati segue che:



Conseguenze

4 Trasformata stellaedrale

Da questi risultati segue che:

- se P è euleriano e soddisfa la proprietà di essere **Cohen-Macaulay** allora i coefficienti dei polinomi di Chow aumentati sono **non-negativi** e **unimodali**;



Conseguenze

4 Trasformata stellaedrale

Da questi risultati segue che:

- se P è euleriano e soddisfa la proprietà di essere **Cohen–Macaulay** allora i coefficienti dei polinomi di Chow aumentati sono **non-negativi** e **unimodali**;
- se P è il poset delle facce di un politopo, allora è anche **γ -positivo**.

Per ottenere il secondo risultato, è stata calcolata una formula del polinomio di Chow aumentato mediante il **cd-index**.



Conseguenze

4 Trasformata stellaedrale

Per ottenere il secondo risultato, è stata esplicitata una formula per polinomio di Chow aumentato mediante il **cd**-index.

Teorema

Sia P un poset Euleriano con **cd**-index $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_w \xi_w w$. Allora, il polinomio di Chow aumentato destro è dato da $F_P(x) = \sum_w \xi_w F(\mathbf{w}, x)$, dove per ogni parola $w = \mathbf{c}^{k_1} \mathbf{d} \mathbf{c}^{k_2} \mathbf{d} \dots \mathbf{c}^{k_r} \mathbf{d} \mathbf{c}^{k_{r+1}}$, il polinomio $F(w, x)$ è uguale a

$$x^r \sum_{\ell=0}^r 2^\ell (1+x)^{\sum_{i=0}^{\ell-1} k_i} S_{k_\ell}(x) \prod_{j=\ell+1}^r T_{k_j+1}(x),$$

dove $T_{2m} = 0$ e $T_{2m+1} = C_m(-x)^m$, con C_m l' m -simo numero di Catalan, e

$$S_k(x) := (1+x)^{k+1} + x \sum_{i=0}^{k-1} (1+x)^i T_{k-i}(x).$$

Grazie per l'attenzione.



A. Il polinomio di Chow aumentato non è positivo in generale

5 Appendice

La tesi costruisce un poset euleriano di rango 9 il cui polinomio di Chow ha coefficienti

$(1, 1664, 128620, 810560, -125786, 810560, 128620, 1664, 1)$.

Anche il polinomio di Chow aumentato destro ha coefficienti negativi:

$(1, 1702, 136410, 1182162, -1108, -1108, 1182162, 136410, 1702, 1)$.



B. Definizione dello stellaedro

5 Appendice

Il **permutaedro** $\Pi_n \subseteq \mathbb{R}^n$ di ordine n è il politopo di dimensione $n - 1$ definito come l'involuppo convesso di

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sigma \in \mathcal{S}_n \right\}.$$



B. Definizione dello stellaedro

5 Appendice

Il **permutaedro** $\Pi_n \subseteq \mathbb{R}^n$ di ordine n è il politopo di dimensione $n - 1$ definito come l'involuppo convesso di

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sigma \in \mathcal{S}_n \right\}.$$

Lo **stellaedro** $\text{St}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ di ordine n è un politopo di dimensione n descritto come

$$\text{St}_n = \{u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \text{esiste } v \in \Pi_n \text{ tale che } v - u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n\},$$

dove $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ è l'ortante non negativo di $\mathbb{R}^n$.