Seminario Geometria Algebrica B

Lorenzo Picinelli

8 luglio 2025

Ricordiamo che uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ è il dato di X spazio topologico e $\mathcal{O}_X$ fascio di anelli su X. Se $\mathcal{F}$ è un fascio di gruppi abeliani (o anelli) su X e $U \subseteq X$ aperto, indicheremo con $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ il gruppo abeliano (o l'anello) delle sezioni continue di X su U.

Definizione 1 (Fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli)**.** Un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{F}$ (o fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli) è un fascio di gruppi abeliani su X tale che

1. $\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo per ogni $U \subseteq X$ aperto
2. Le restrizioni sono compatibili con le moltiplicazioni per scalari, ossia per ogni coppia $V \subseteq U$ aperti di X abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{F}(U) \\ {\scriptstyle r_{U,V}}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle \rho_{U,V}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{U,V}} \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Esempi. I fasci di gruppi abeliani sono fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli per $\mathcal{O}_X = \mathbb{Z}$ fascio costante. $\mathcal{O}_X$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. M varietà complessa e $E \to M$ fibrato olomorfo, il fascio $\mathcal{O}(E)$ è un fascio di $\mathcal{O}_M$-moduli.

Osserviamo che per ogni $x \in X$, la spiga $\mathcal{F}_x$ eredita una struttura naturale di $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo. Dati i germi $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, $f_x \in \mathcal{F}_x$ scegliamo s e f sezioni che li rappresentano e poniamo $s_x \cdot f_x = (sf)_x$. La compatibilità delle restrizioni garantisce che la definizione è ben posta, cioè che non dipende dalla scelta di s e f. Introduciamo ora la corrispondente nozione di morfismi.

Definizione 2 (Morfismi di fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli)**.** Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due $\mathcal{O}_X$-moduli. Un morfismo di $\mathcal{O}_X$-moduli è un morfismo di fasci di gruppi abeliani $\varphi : \mathcal{F} \to G$ tale che per ogni $U \subseteq X$ aperto la mappa $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ indotta tra le sezioni è un omomorfismo di $\mathcal{O}_X(U)$-moduli. Equivalentemente possiamo chiedere che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{F}(U) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle \varphi_U} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_U} \\ \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Successioni esatte. Consideriamo una successione di $\mathcal{O}_X$-moduli e morfismi di $\mathcal{O}_X$-moduli

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i-1} \longrightarrow \dots$$

Diciamo che tale successione è esatta se per ogni $x \in X$ è esatta la successione di $\mathcal{O}_{X,x}$-moduli data dalle spighe

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1,x} \xrightarrow{\varphi_{i+1,x}} \mathcal{F}_{i,x} \xrightarrow{\varphi_{i,x}} \mathcal{F}_{i-1,x} \longrightarrow \dots$$

Somma diretta. Definiamo ora la somma diretta di $\mathcal{O}_X$-moduli, in particolare siamo interessati al caso finito. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli, osserviamo che il prefascio $\Gamma(\mathcal{F}) \oplus \Gamma(\mathcal{G}) = (U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U))$ è canonico in quanto lo sono $\Gamma(\mathcal{F})$ e $\Gamma(\mathcal{G})$ ed è sufficiente verificarlo sulle coordinate. Definiamo quindi $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \text{Sheaf}(U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U))$ e per quanto osservato $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$. Se I è infinito in generale il prefascio somma diretta non è canonico e non vale l'uguaglianza $(\bigoplus_I \mathcal{F}_i)(U) = \bigoplus_I \mathcal{F}_i(U)$, da cui la necessità di fascificare.

Sezioni che generano. Sia $\mathcal{O}_X^p$ la somma diretta $\mathcal{O}_X^{\oplus p}$. Se esiste un morfismo surgettivo di $\mathcal{O}_X$-moduli

$$\mathcal{O}_X^p \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{F}$$

diciamo che $\mathcal{F}$ è finitamente generato come $\mathcal{O}_X$-modulo. In tal caso esistono sezioni globali $s_i \in \mathcal{F}(X)$ per cui $\mathcal{F}_x =< (s_1)_x, \dots, (s_p)_x >_{\mathcal{O}_{X,x}}$ per ogni $x \in X$. Infatti un morfismo di $\mathcal{O}_X$-moduli $\varphi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ determina una sezione globale $1 \in \mathcal{O}_X(X) \xmapsto{\varphi_X} s \in \mathcal{F}(X)$ e viceversa poiché 1 genera $\mathcal{O}_X(X)$ come $\mathcal{O}_X(X)$-modulo. Scegliendo come $s_i = \varphi_X(e_i)$ osserviamo che i germi $(s_i)_x = \varphi_x((e_i)_x)$ generano poiché φ_x è surgettiva.

Proposizione 1. *Sia $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente finitamente generato con sezioni $s_1, \dots, s_p$, definite in un intorno di $x \in X$, che generano la spiga $\mathcal{F}_x$. In un intorno di x si ha $\mathcal{F}_y =< (s_1)_y, \dots, (s_p)_y >_{\mathcal{O}_{X,y}}$.*

Dimostrazione. Per quanto osservato esistono sezioni $t_1, \dots, t_q$ i cui germi generano ogni spiga $\mathcal{F}_y$ in un intorno di x. Per ipotesi esistono a_{ij} sezioni di $\mathcal{O}_X$ tali che

$$(t_i)_x = \sum_{j=1}^{p} (a_{ij})_x (s_i)_x$$

Ma allora per y abbastanza vicino

$$(t_i)_y = \sum_{j=1}^{p} (a_{ij})_y (s_i)_y$$

$\square$

Definizione 3 (Fascio coerente su $(X, \mathcal{O}_X)$)**.** Un fascio coerente $\mathcal{F}$ su $(X, \mathcal{O}_X)$ spazio anellato è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli tale che

1. $\mathcal{F}$ è localmente finitamente generato
2. Sia $U \subseteq X$ aperto e n naturale. Ogni morfismo di $\mathcal{O}_X$-moduli $f : \mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U$ ha nucleo $\ker f$ localmente finitamente generato

Diciamo che $\ker f$ è il sottofascio delle relazioni tra le sezioni $s_i = f(e_i)$ in $\mathcal{F}|_U$.

Proposizione 2. *Sia* $0 \to \mathcal{F} \overset{\alpha}{\to} \mathcal{G} \overset{\beta}{\to} \mathcal{K} \to 0$ *una successione esatta di* $\mathcal{O}_X$*-moduli. Se* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{K}$ *sono coerenti anche* $\mathcal{G}$ *lo è.*

Dimostrazione. Assumiamo che localmente $\mathcal{F}$ e $\mathcal{K}$ siano generati rispettivamente da sezioni $n_1, \dots, n_q$ e $s_1, \dots, s_p$. Per surgettività esistono sezioni s'_i di $\mathcal{G}$ tali che $\beta(s'_i) = s_i$. $\mathcal{G}$ è localmente finitamente generato da $\alpha(n_1), \dots, \alpha(n_q), s'_1, \dots, s'_p$. Siano $t_1, \dots, t_r$ sezioni di $\mathcal{G}$ in un intorno di x, poiché $\mathcal{K}$ è coerente esistono $f_j = (f_j^1, \dots, f_j^r)$ sezioni di $\mathcal{O}_U^r$ per $1 \leq j \leq h$, definite in un intorno di x, che generano le relazioni tra i $\beta(t_i)$. Poniamo $u_j = \sum_{i=1}^r f_j^i t_i$, poiché $\beta(u_j) = \sum_{i=1}^r f_j^i \beta(t_i) = 0$, si ha che $u_j \in \mathrm{Im}(\alpha)$. Visto che α è iniettiva le relazioni tra gli u_j sono le stesse di quelle tra i v_j tali che $\alpha(v_j) = u_j$. Ma $\mathcal{F}$ è coerente, dunque esistono $g_k = (g_k^1, \dots, g_k^s)$ sezioni di $\mathcal{O}_U^h$ per $1 \leq k \leq h$ che generano le relazioni tra gli u_j in un intorno di x. Verifichiamo che le sezioni di O_U^r

$$\left(\sum_{j=1}^s g_k^j f_j \right)_{k=1,\dots,h} = \left(\sum_{j=1}^s g_k^j f_j^1, \dots, \sum_{j=1}^s g_k^j f_j^r \right)_{k=1,\dots,h}$$

generano le relazioni tra i t_i in un intorno di x. Come prima cosa osserviamo che sono effettivamente relazioni in quanto

$$\sum_{i,j} (g_k^j f_j^i) t_i = \sum_{i,j} g_k^j (f_j^i t_i) = \sum_j g_k^j u_j = 0$$

poiché ogni g_k è relazione per gli u_j. Sia $l = (l_1, \dots, l_r)$ una relazione tra i t_i, a maggior ragione lo è tra i $\beta(t_i)$ e può quindi essere scritta come $l = \sum_{j=1}^s b_j f_j$. Osserviamo però che i $b = (b_1, \dots, b_s)$ è una relazione per gli u_j, infatti

$$\sum_j b_j u_j = \sum_{i,j} b_j (f_j^i t_i) = \sum_{i,j} (b_j f_j^i) t_i = \sum_i l_i t_i = 0$$

ma allora $b_j = \sum_k c_k g_k^j$ e quindi

$$l_i = \sum_j b_j f_j^i = \sum_{j,k} c_k g_k^j f_j^i = \sum_{k=1}^h c_k \left(\sum_{j=1}^s g_k^j f_j^i \right)$$

e le relazioni generano. □

Corollario 3. *Somma diretta finita di fasci coerenti è coerente.*

Lemma 4 (Lemma di Oka). *Sia $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto e $f : \mathcal{O}_U^p \to \mathcal{O}_U$ morfismo di $\mathcal{O}_U$-moduli, allora* $\ker f$ *è un $\mathcal{O}_U$-modulo localmente finitamente generato.*

Dimostrazione. Siano $f_1, \ldots, f_p$ le funzioni olomorfe tali che $f(s_1, \ldots, s_n) = s_1 f_1 + \ldots + s_p f_p$. Denotiamo con $z_1, \ldots, z_n$ le coordinate di $\mathbb{C}^n$, a meno di cambiarle possiamo assumere di lavorare in un intorno dell'origine dove $f_1(0, z_n)$ non sia identicamente nulla e con f_i tali che $f_i(0) = 0$.

Procederemo per induzione su n, come prima cosa osserviamo che il caso $n = 0$ è immediato: $\mathcal{O}_U = \mathbb{C}$ e $f_1 = c_1, \ldots, f_p = c_p$ costanti, allora $f : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ è un'applicazione lineare che ha come nucleo un sottospazio di dimensione finita.

Chiamiamo z_n-polinomio un polinomio monico

$$z_n^d + a_{d-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{d-1} + \ldots + a_0(z_1, \ldots, z_{n-1})$$

con a_i funzioni olomorfe in $n-1$ variabili tali che $a_i(0) = 0$. Il teorema di preparazione di Weierstrass ci permette di scrivere $f_1 = u p_1$ in un intorno dell'origine con $u(0) \neq 0$ invertibile e p_1 uno z_n-polinomio di grado d, possiamo quindi assumere $f_1 = p_1$. Applicando il teorema di divisione di Weierstrass, scriviamo

$$f_i = q_i p_1 + p_i$$

con $q_i(0) \neq 0$ invertibile e p_i degli z_n-polinomi di grado minore di d. Osserviamo che $(s_1, \ldots, s_p) \in \ker(f_1, \ldots, f_p)$ se e solo se $(s_1 + q_2 s_2 + \cdots + q_p s_p, s_2, \ldots, s_p) \in \ker(p_1, \ldots, p_p)$ e abbiamo una bigezione tra gli insiemi dei generatori. Ci siamo ridotti al caso in cui $f_1, \ldots, f_n$ sono z_n-polinomi di grado al più d.

Le sezioni $\sigma_i = -f_i e_1 + f_1 e_i$ appartengono a $\in \ker f$. Sia $g = \sum_{i=1}^p g_i e_i$ una relazione tra gli f_i, dal teorema di divisione di Weierstrass otteniamo

$$g = g_1 e_1 + \sum_{i=2}^{p} (q_i f_1 + r_i) e_i$$

in un intorno dell'origine. Sottraendo opportunamente si ha

$$g - \sum_{i=2}^{p} q_i \sigma_i = (g_1 + \sum_{i=2}^{p} q_i f_i) e_1 + r_2 e_2 + \ldots r_p e_p$$

e possiamo assumere che $g_2, \ldots, g_p$ siano z_n-polinomi di grado minore di d. Da $g_1 f_1 = -(g_2 f_2 + \ldots g_p f_p)$ segue che $g_1 f_1$ è uno z_n-polinomio di grado al più $2d - 2$. Per $z_0 = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ fissato $(g_1 f_1)(z_0)$ e $f_1(z_0)$ sono polinomi in z_n con rapporto una funzione olomorfa $g_1(z_0)$ che è a sua volta un polinomio in z_n. Poiché g_1 è una funzione olomorfa lo è anche la derivata

$$g_{1,d-2} = \frac{1}{(d-2)!} \frac{\partial^{d-2}}{\partial z_n^{d-2}} g_1$$

e $g_{1,d-2}(z_0)$ rappresenta è il coefficiente di testa di $g_1(z_0)$. Dunque $g_1' = g_1 - g_{1,d-2} z_n^{d-2}$ è funzione olomorfa e $g_1'(z_0)$ è un polinomio in z_n a cui abbiamo abbassato il grado. Procedendo analogamente si trovano $g_{1,d-2}, \dots, g_{1,0}$ funzioni olomorfe nelle variabili $z_1, \dots, z_{n-1}$ tali che

$$g_1 = g_{1,d-2}(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^{d-2} + \cdots + g_{1,0}(z_1, \dots, z_{n-1})$$

che è la scrittura di g_1 come z_n-polinomio.

Detto V la proiezione dell'intorno considerato sulle prime $n-1$ coordinate dobbiamo verificare la condizione sul nucleo della mappa

$$\begin{aligned} \psi :& (\mathcal{O}_V[z_n]^{\leq d})^p \to \mathcal{O}_V[z_n]^{\leq 2d-2} \\ & (r_1, \dots, r_p) \mapsto r_1 f_1 + \cdots + r_p f_p \end{aligned}$$

che è però il nucleo della mappa $\psi' : \mathcal{O}_V^{pd} \to \mathcal{O}_V^{2d-2}$ tra i coefficienti. Per ipotesi induttiva $\ker \psi'$ è localmente finitamente generato, ma allora tali generatori e le σ_i generano $\ker f$ in un intorno dell'origine e abbiamo concluso.

$\square$

Corollario 5 (Teorema di coerenza di Oka). *$\mathcal{O}_U^n$ è un fascio coerente.*