



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Laurea Triennale in Matematica

## Un'introduzione all'omologia persistente

Relatore:

**Prof. Enrico Sbarra**

Candidato:

**Lorenzo Picinelli**

ANNO ACCADEMICO 2023/2024



### **Abstract**

Questa tesi si propone di essere una breve introduzione all'omologia persistente. Ci concentriamo in particolare sui moduli di persistenza per la loro importanza sia a livello teorico che computazionale. A riguardo enunciamo due fondamentali risultati: un teorema algebrico di struttura e un teorema di isometria di natura geometrica.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduzione all'omologia persistente</b>	<b>3</b>
1.1 Visualizzare l'omologia persistente . . . . .	5
<b>2 Un esempio di calcolo</b>	<b>8</b>
2.1 Il complesso di Vietoris-Rips . . . . .	8
2.2 Calcolo delle coppie di persistenza tramite Ripser . . . . .	9
<b>3 Moduli di persistenza</b>	<b>13</b>
3.1 Complessi e moduli di persistenza . . . . .	13
3.2 Una condizione di finitezza . . . . .	15
<b>4 Struttura dei moduli di persistenza di tipo finito</b>	<b>16</b>
4.1 Il teorema di corrispondenza . . . . .	16
4.2 Moduli di persistenza di tipo finito su un campo . . . . .	18
<b>5 Il teorema di isometria</b>	<b>20</b>
5.1 Moduli di persistenza decomponibili . . . . .	20
5.2 Distanze e teorema di isometria . . . . .	22
<b>Ringraziamenti</b>	<b>25</b>
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>26</b>

## Introduzione

L'omologia persistente nasce nei primi anni 2000 grazie al lavoro congiunto di Herbert Edelsbrunner, David Letscher e Afra Zomorodian che porta alla pubblicazione dell'articolo "Topological Persistence and Simplification" [ELZ00]. In questo lavoro l'omologia persistente viene definita per la prima volta con l'obiettivo di individuare le caratteristiche topologiche significative in un insieme di dati.

Negli anni successivi si consolidano le basi della teoria, nel 2005 grazie al contributo di A. Zomorodian e Gunnar Carlsson si definiscono i fondamentali concetti di modulo di persistenza e barcode [ZC05]. Contemporaneamente vengono sviluppati algoritmi di calcolo efficienti che permettono di applicare la teoria a grandi insiemi di dati. Ad oggi l'omologia persistente è uno degli strumenti principali dell'analisi topologica dei dati. La teoria ha trovato applicazioni in svariati campi quali chimica e biologia, analisi di immagini, analisi di reti sociali e reti di sensori.

Riguardo agli sviluppi della ricerca attuale rimane di grande importanza il miglioramento degli algoritmi di calcolo per lo studio di insiemi di dati sempre più grandi. Un'altra promettente prospettiva è l'utilizzo di questi metodi per il machine learning: un campo dell'intelligenza artificiale che studia e sviluppa algoritmi statistici in grado di apprendere automaticamente un compito da un insieme di dati iniziali.

Il mio percorso di studio dell'omologia persistente è iniziato con l'articolo "Persistent Homology: a Step-by-step Introduction for Newcomers" [FSIF16], in cui vengono introdotti i concetti che costituiscono la prima sezione della tesi. La guida interattiva associata a questo articolo, che si trova al seguente link <https://iuricichf.github.io/ICT/>, è stata di grande aiuto. Tale materiale ha facilitato l'intuizione geometrica nella comprensione dell'omologia persistente e semplificato la visualizzazione delle coppie di persistenza. Inoltre, nella parte conclusiva di questa guida, vengono menzionati il complesso di Vietoris-Rips e il software Ripser, sui quali si basa l'esempio portato nella seconda sezione della tesi. L'articolo [FSIF16] si è rivelato utile anche nell'indirizzarmi verso il contenuto più algebrico presente nella terza e quarta sezione. Viene sottolineato infatti come l'importanza delle coppie di persistenza abbia concentrato la ricerca sulla visualizzazione e lo studio delle loro proprietà. Come passo fondamentale in questa direzione è citato il lavoro [ZC05] di A. Zomorodian e G. Carlsson, in cui gli autori studiano la natura algebrica dell'omologia persistente introducendo i moduli di persistenza e ottenendo un risultato di classificazione. L'articolo [ZC05] è stato quindi il riferimento fondamentale per la teoria relativa ai moduli di persistenza e al teorema di corrispondenza. Per una formulazione più generale di tale teorema ho consultato [CK18], in cui se ne trova anche una completa dimostrazione. L'articolo [Loe23] è invece citato quale fonte di una dettagliata dimostrazione del Teorema 4.2. La sezione conclusiva della tesi si basa quasi interamente sulla pubblicazione [CdSGO13], ad eccezione della Defi-

nizione 5.5. Riguardo alla condizione tame, ho optato infatti per la definizione presente in [CCSG+08], meno generale ma più naturale rispetto alla condizione q-tame introdotta in [CdSGO13]. L'articolo [CB14] è infine la referenza per il Teorema 5.6.

La tesi è suddivisa in 5 sezioni. Nella prima sezione introduciamo i concetti di base della teoria, in particolare l'omologia persistente nella Definizione 1.5 e le coppie di persistenza di seguito. Concludiamo la sezione con un esempio in cui presentiamo i metodi del codice a barre e dei diagrammi di persistenza per la visualizzazione delle coppie di persistenza. Nella seconda sezione introduciamo il complesso di Vietoris-Rips e la relativa filtrazione nella Definizione 2.1. Con MATLAB generiamo una nuvola di punti su un toro e grazie al software Ripser ne studiamo l'omologia persistente rispetto alla filtrazione di Vietoris-Rips. Nella terza sezione definiamo i moduli di persistenza nella Definizione 3.3: un concetto algebrico fondamentale sul quale vertono le sezioni seguenti. Nella Definizione 3.5 introduciamo una condizione di finitezza che nell'Osservazione 3.6 mostriamo essere soddisfatta da un certo modulo di persistenza associato alla filtrazione di un complesso simpliciale. Nella quarta sezione con il Teorema 4.2 generalizziamo al caso graduato il teorema di struttura per moduli finitamente generati su domini a ideali principali. Successivamente enunciamo il Teorema centrale di questa sezione: il teorema di corrispondenza 4.5. Alla fine della sezione, combinando questi due teoremi, otteniamo la caratterizzazione della struttura dei moduli di persistenza di tipo finito su un campo  $K$ . Nella quinta sezione generalizziamo i moduli di persistenza su  $K$  indicizzandoli sui numeri reali, e generalizziamo la condizione di tipo finito con la condizione tame nella Definizione 5.5. Sotto queste ipotesi grazie al Teorema 5.6 associamo un diagramma di persistenza a un  $K$ -modulo di persistenza tame. Dopo aver definito una metrica sui moduli di persistenza e una sui diagrammi di persistenza, possiamo enunciare il Teorema di isometria 5.12: la mappa che associa un  $K$ -modulo di persistenza tame al suo diagramma di persistenza è un'isometria.

# 1 Introduzione all'omologia persistente

In questa sezione definiamo l'omologia persistente e le coppie di persistenza. Successivamente, attraverso un esempio presentiamo i metodi del codice a barre e dei diagrammi di persistenza per la visualizzazione delle coppie di persistenza.

**Definizione 1.1** (Complesso simpliciale). Un complesso simpliciale  $\Sigma$  è un insieme di  $k$ -simplessi tali che:

1. Ogni faccia di un  $k$ -simpleso di  $\Sigma$  è un elemento di  $\Sigma$ .
2. Se  $k_1, k_2$  sono simplessi di  $\Sigma$ , allora  $k_1 \cap k_2$  è una faccia sia di  $k_1$  che di  $k_2$ .

Se  $\Sigma$  è un complesso simpliciale e  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  è a sua volta un complesso simpliciale diciamo che  $\Sigma'$  è un sottocomplesso simpliciale di  $\Sigma$ . Nella tesi lavoreremo con complessi simpliciali finiti, cioè di cardinalità finita.

**Definizione 1.2** (Filtrazione). Sia  $m$  un numero naturale positivo. Una filtrazione  $\Sigma^f = \{\Sigma^i \mid i = 0, \dots, m\}$  di  $\Sigma$  è una sequenza di sottocomplessi simpliciali tale che  $\emptyset = \Sigma^0 \subseteq \dots \subseteq \Sigma^m = \Sigma$ .

**Definizione 1.3** (Complesso di catene). Sia  $R$  un anello e  $C_\bullet = \{C_n, \varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  una famiglia di  $R$ -moduli  $C_n$ , con omomorfismi  $\varphi_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ .

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_1} C_0 \xrightarrow{\varphi_0} \dots$$

Se  $\varphi_{n-1} \circ \varphi_n = 0$  per ogni intero  $n$ , diciamo che  $C_\bullet$  è un complesso di catene.

Sia  $\Sigma$  un complesso simpliciale e  $C_k(\Sigma)$  il gruppo abeliano libero generato dai  $k$ -simplessi di  $\Sigma$ . Dato  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$  un  $k$ -simpleso di  $\Sigma$ , indichiamo con  $[v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k]$  la faccia di  $\sigma$  ottenuta eliminando l' $i$ -esimo vertice. Definiamo ora la mappa di bordo  $\partial_k : C_k(\Sigma) \rightarrow C_{k-1}(\Sigma)$  su una base:

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k],$$

e la estendiamo per linearità. Se  $k$  è un intero negativo poniamo  $C_k = 0$ , a questo punto non è difficile verificare che  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  per ogni  $k$  intero. Abbiamo quindi ottenuto un complesso di catene  $C_\bullet = \{C_k(\Sigma), \partial_k\}$ , che chiamiamo complesso delle catene simpliciali.

**Definizione 1.4** (Omologia simpliciale). Definiamo l'omologia simpliciale come l'omologia del complesso delle catene simpliciali:

$$H_k(\Sigma) = \ker \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}.$$

Chiamiamo  $k$ -catene gli elementi di  $C_k(\Sigma)$ . Utilizziamo la seguente notazione standard:  $Z_k(\Sigma) = \ker \partial_k$  e  $B_k(\Sigma) = \text{Im } \partial_{k+1}$ . Diciamo  $k$ -cicli gli elementi di  $Z_k(\Sigma)$  e  $k$ -bordi gli elementi di  $B_k(\Sigma)$ . Un elemento di  $H_k(\Sigma)$  è una classe di omologia  $k$ -dimensionale.

**Definizione 1.5** (Omologia persistente). Sia  $\Sigma$  un complesso simpliciale finito e  $\Sigma^f = \{\Sigma^i \mid i = 0, \dots, m\}$  una filtrazione di  $\Sigma$ . Fissiamo interi  $p, q$  tali che  $0 \leq p \leq q \leq m$  e consideriamo la mappa di inclusione  $i^{p,q} : \Sigma^p \rightarrow \Sigma^q$ . Essa induce l'omomorfismo  $(i_k^{p,q})_*$  tra i  $k$ -esimi gruppi di omologia simpliciale. Il  $k$ -esimo gruppo di omologia persistente relativo alla coppia  $(p, q)$  è l'immagine della mappa  $(i_k^{p,q})_*$ . Più esplicitamente, il  $k$ -esimo gruppo di omologia persistente relativo alla coppia  $(p, q)$  è dato da

$$H_k^{p,q}(\Sigma^f) = Z_k(\Sigma^p) / (Z_k(\Sigma^p) \cap B_k(\Sigma^q))$$

Dalla definizione segue che per  $p = q$  otteniamo i gruppi di omologia standard  $H_k^{p,p}(\Sigma^f) = H_k(\Sigma^p)$ . Se  $i \leq j$ , poiché  $\Sigma^i \subseteq \Sigma^j$ , abbiamo che  $Z_k(\Sigma^i) \subseteq Z_k(\Sigma^j)$ . Analogamente  $B_k(\Sigma^i) \subseteq B_k(\Sigma^j)$ . Per interi  $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq q$ , otteniamo quindi  $H_k^{p_1,q}(\Sigma^f) \subseteq H_k^{p_2,q}(\Sigma^f)$ . Viceversa per interi  $0 \leq p \leq q_1 \leq q_2$ , abbiamo che  $H_k^{p,q_1}(\Sigma^f) \supseteq H_k^{p,q_2}(\Sigma^f)$ .

Ricordiamo che il rango di un gruppo è la minima cardinalità di un suo insieme di generatori. I gruppi di omologia persistente sono finitamente generati, dunque hanno rango finito. Possiamo quindi definire i numeri di Betti di persistenza della filtrazione  $\Sigma^f$  come

$$\beta_k^{p,q}(\Sigma^f) = \text{rank } H_k^{p,q}(\Sigma^f) .$$

L'obiettivo fondamentale che ha guidato lo sviluppo dell'omologia persistente è quello di studiare la variazione delle caratteristiche topologiche di un oggetto. Per tenere traccia di questi cambiamenti introduciamo ora il concetto di coppie di persistenza.

**Coppie di persistenza.** Siano  $\sigma, \tau \in C_k(\Sigma^p)$  due  $k$ -cicli. In quanto segue consideriamo classi di omologia modulo la seguente relazione di equivalenza:  $[\sigma] \sim [\tau]$  se esiste  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tale che  $[\sigma] = n[\tau]$  oppure  $[\tau] = n[\sigma]$ . Questo poiché la presenza di una determinata caratteristica topologica è catturata da una classe di omologia a meno di multipli.

Supponiamo che  $[\sigma] \neq 0$  in  $H_k(\Sigma^p)$ . Se  $[\sigma] \notin H_k^{p-1,p}(\Sigma^f)$  diciamo che  $[\sigma]$  nasce al passo  $p$  della filtrazione. Osserviamo che questa definizione ha senso in quanto  $H_k^{p-1,p}(\Sigma^f) \subseteq H_k^{p,p}(\Sigma^f) = H_k(\Sigma^p)$ . Geometricamente, se  $k = 0$ , la nascita di una classe corrisponde alla presenza di una nuova componente connessa. Se  $k$  è un intero positivo, la nascita di una classe corrisponde invece alla formazione di un buco  $k$ -dimensionale.

Concentriamoci ora sul modo in cui queste caratteristiche topologiche possono scomparire. Consideriamo una classe  $[\sigma]$  nata al passo  $p$  e una classe  $[\sigma']$  nata al passo  $p'$ , assumiamo  $p' \leq p$  senza perdita di generalità. Supponiamo che le classi siano distinte, ma che vadano a coincidere al passo  $q$  per la prima volta, cioè  $[\sigma] = [\sigma']$  in  $H_k^{p,q}(\Sigma^f)$  e  $[\sigma] \neq [\sigma']$  in  $H_k^{p,q-1}(\Sigma^f)$ . Questo si verifica tipicamente quando  $\sigma$  e  $\sigma'$  sono 0-catene, e rappresenta due componenti connesse distinte che vanno a coincidere al passo  $q$ .

Supponiamo ora che  $[\sigma] \neq 0$  in  $H_k^{p,q-1}(\Sigma^f)$  ma  $[\sigma] = 0$  in  $H_k^{p,q}(\Sigma^f)$ , ossia che si  $[\sigma]$  si annulli per la prima volta al passo  $q$  della filtrazione. Geometricamente questo si verifica quando, al passo  $q$  della filtrazione, aggiungiamo un simpleso che riempie un buco  $k$ -dimensionale.

In entrambi i casi precedenti, diciamo che la classe  $[\sigma]$  muore al passo  $q$ . Ad una classe che nasce al passo  $p$  e muore al passo  $q$  associamo la coppia  $(p, q)$ . Il valore  $q - p$  si dice persistenza della classe. Analogamente ad una classe che nasce al passo  $p$  e sopravvive per tutti i passi della filtrazione associamo la coppia  $(p, +\infty)$ . Una classe di quest'ultimo tipo si dice essenziale. Le coppie  $(p, q)$  e  $(p, +\infty)$  si dicono coppie di persistenza.

## 1.1 Visualizzare l'omologia persistente

Introduciamo ora due metodi, quello del codice a barre e quello dei diagrammi di persistenza, che permettono una visualizzazione intuitiva delle classi di persistenza.

**Codice a barre.** Con il metodo del codice a barre rappresentiamo ogni coppia di persistenza  $(p, q)$  come un intervallo orizzontale.

**Diagrammi di persistenza.** Con il metodo dei diagrammi di persistenza rappresentiamo ogni coppia di persistenza  $(p, q)$  come un punto del piano cartesiano.

Osserviamo che è possibile che la stessa coppia di persistenza sia associata a più classi, il numero di tali classi è detto molteplicità della coppia di persistenza. Nel caso dei diagrammi di persistenza, dato che ogni coppia di persistenza è rappresentata da un punto nel piano, è necessario considerare le molteplicità a parte. Per chiarire i concetti introdotti finora, calcoliamo esplicitamente l'omologia persistente in un caso non elaborato. Visualizziamo poi le coppie di persistenza con entrambi i metodi presentati.

**Esempio 1.6.** Poniamo  $\Sigma = \{v_0, v_1, v_2, [v_1, v_2], [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_1, v_2]\}$  e consideriamo la filtrazione  $\Sigma^f = \{\emptyset, \Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \Sigma^4\}$  dove

1.  $\Sigma^1 = \{v_0, v_1, v_2\}$
2.  $\Sigma^2 = \Sigma^1 \cup \{[v_1, v_2]\}$
3.  $\Sigma^3 = \Sigma^2 \cup \{[v_0, v_1], [v_0, v_2]\}$
4.  $\Sigma^4 = \Sigma^3 \cup \{[v_0, v_1, v_2]\}$

Consideriamo inizialmente le classi di omologia 0-dimensionali. Nei passi della filtrazione successivi al primo non sono nate classi di omologia 0-dimensionali. Possiamo quindi ridurci ai gruppi di omologia persistente relativi alle coppie  $(1, q)$  per  $q = 1, \dots, 4$ .

Al primo passo della filtrazione nascono le classi  $[v_1], [v_2]$  e  $[v_3]$ . Abbiamo quindi  $H_0^{1,1}(\Sigma^f) = \mathbb{Z}^3$ . Al secondo passo, aggiungendo il semplice  $[v_1, v_2]$ , le classi  $[v_1]$  e  $[v_2]$  diventano equivalenti poiché  $v_2 = v_1 + \partial[v_1, v_2]$ . La classe  $[v_2]$  muore, e quindi  $H_0^{1,2}(\Sigma^f) = \mathbb{Z}^2$ . Al terzo passo della filtrazione infine, tutte le classi 0-dimensionali diventano equivalenti a  $[v_0]$ , che è una classe essenziale. Concludiamo allora che  $H_0^{1,3}(\Sigma^f) = H_0^{1,4}(\Sigma^f) = \mathbb{Z}$ . Coerentemente, dal terzo passo della filtrazione si ha un'unica componente connessa.

Consideriamo ora le classi di omologia 1-dimensionali: al terzo passo della filtrazione nasce il loop  $[v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ . Abbiamo quindi  $H_1^{3,3}(\Sigma^f) = \mathbb{Z}$ . La classe muore al passo successivo poiché aggiungiamo il semplice  $[v_0, v_1, v_2]$ , infatti  $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_0, v_1] - [v_0, v_2] + [v_1, v_2] = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ . Geometricamente nell'ultimo passo della filtrazione abbiamo riempito il buco di cui il loop era il bordo.

Rappresentiamo le coppie di persistenza tramite il metodo del codice a barre nella Figura 1 e tramite il metodo dei diagrammi di persistenza nella Figura 2.

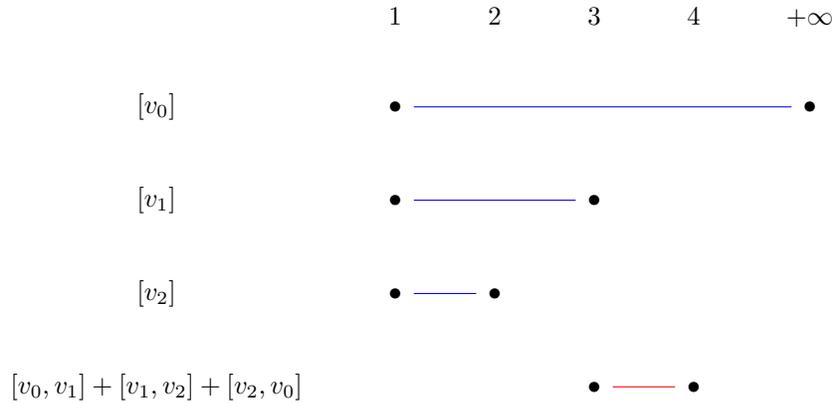


Figura 1: Codice a barre associato alla filtrazione  $\Sigma^f$  di  $\Sigma$

Le classi di omologia 0-dimensionali sono rappresentate in blu mentre la classe 1-dimensionale in rosso.

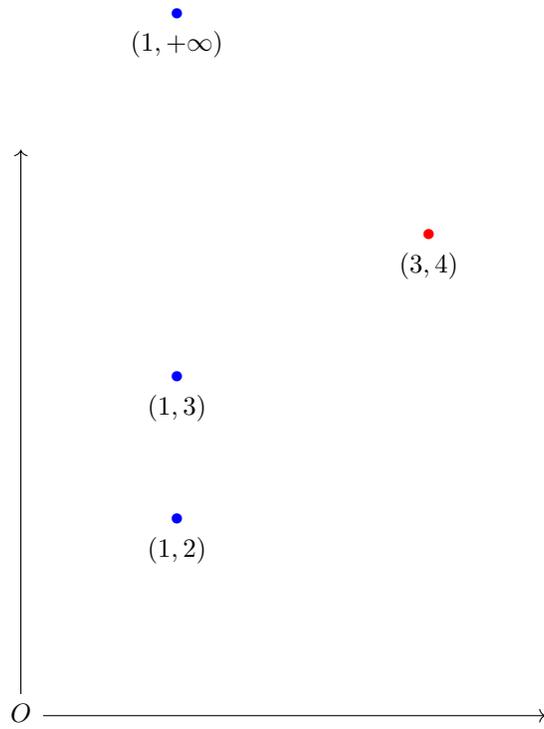


Figura 2: Diagramma di persistenza associato alla filtrazione  $\Sigma^f$  di  $\Sigma$

In questo caso, tutte le coppie di persistenza hanno molteplicità 1. La coppia essenziale  $(1, +\infty)$  è rappresentata al di sopra del diagramma.

## 2 Un esempio di calcolo

In questa sezione introduciamo la filtrazione di un complesso simpliciale più elaborato, il complesso di Vietoris-Rips. Tale complesso simpliciale venne introdotto da Leopold Vietoris per estendere le teorie omologiche agli spazi metrici e in seguito utilizzato da Eliyahu Rips nello studio dei gruppi iperbolici.

### 2.1 Il complesso di Vietoris-Rips

**Definizione 2.1** (Complesso di Vietoris-Rips). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Il complesso di Vietoris-Rips per un parametro di soglia  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  è il complesso simpliciale

$$\mathbf{VR}_\alpha(X) = \{h \mid \emptyset \neq S \subseteq X, S \text{ finito}, h \text{ inviluppo convesso di } S \text{ e } \text{diam}(h) \leq \alpha\}$$

dove il diametro di  $h$  è  $\text{diam}(h) = \sup_{x,y \in h} d(x,y)$ . Sia  $m \in \mathbb{N}^+$ , aumentando il valore del parametro  $\alpha$  si ottiene una catena ascendente per contenimento di complessi simpliciali, detta filtrazione di Vietoris-Rips

$$\mathbf{VR}(X) = \{\emptyset, \mathbf{VR}_{\alpha_1}(X), \dots, \mathbf{VR}_{\alpha_m}(X)\}, \quad \text{per } \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m.$$

La filtrazione di Vietoris-Rips è una filtrazione di  $\Sigma = \mathbf{VR}_{\alpha_m}(X)$ .

**Esempio 2.2** (Complesso di Vietoris-Rips per i vertici di un quadrato). Siano  $v_0, v_1, v_2, v_3$  i vertici di un quadrato unitario rispetto alla metrica euclidea e sia  $X = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ . Se consideriamo i complessi di Vietoris-Rips per  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = \sqrt{2}$  otteniamo

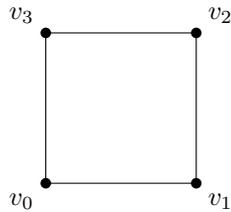


Figura 3:  $\mathbf{VR}_{\alpha_1}(X)$

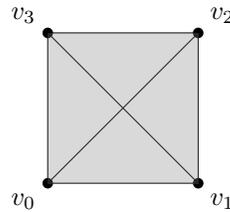


Figura 4:  $\mathbf{VR}_{\alpha_2}(X)$

## 2.2 Calcolo delle coppie di persistenza tramite Ripser

Ricordiamo che una nuvola di punti è un sottoinsieme discreto di  $\mathbb{R}^3$ . Con il seguente codice MATLAB, generiamo una nuvola di punti su un toro:

```
N=1000; %numero di punti
R=3; %distanza tra i centri del toro e del tubo
r=1; %raggio del tubo

u=2*pi*rand(N, 1);
v=2*pi*rand(N, 1);
%u e v scelti uniformemente tra 0 e 2pi

x=(R+r.*cos(v)).*cos(u);
y=(R+r.*cos(v)).*sin(u);
z=r.*sin(v);
%coordinate parametriche di un toro

plot3(x, y, z, 'b');
```

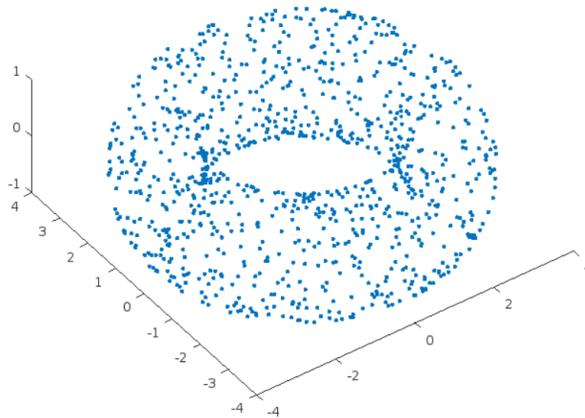


Figura 5: Nuvola di 1000 punti su un toro

Per studiare l'omologia persistente rispetto alla filtrazione di Vietoris-Rips di una data nuvola di punti, utilizziamo il software Ripser. Fissata una nuvola di punti  $X$ , Ripser ne calcola le distanze reciproche rispetto alla metrica euclidea e costruisce la filtrazione di Vietoris-Rips  $\mathbf{VR}(X)$ . I parametri  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  della filtrazione sono determinati volta per volta in base alle distanze calcolate, in modo da aggiungere almeno un semplice ad ogni passo della filtrazione. Sia  $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ , è possibile inserire manualmente un parametro di soglia massimo per la filtrazione, nel nostro caso poniamo  $\alpha \leq 2$ . Infine, Ripser

rappresenta le coppie di persistenza associate con il metodo del codice a barre. Nel caso di una nuvola di punti su un toro abbiamo i risultati seguenti.

**Coppie di persistenza 0-dimensionali** Nel caso di un complesso di Vietoris-Rips tutte le classi 0-dimensionali nascono immediatamente poiché durante la filtrazione non si aggiungono componenti connesse. Osserviamo che c'è un'unica classe di persistenza essenziale, questo significa che per  $\alpha = 2$  il complesso di Vietoris-Rips associato ha un'unica componente connessa. Più precisamente notiamo che per approssimativamente  $\alpha \geq 0.6$  tutte le classi 0-dimensionali sono equivalenti.

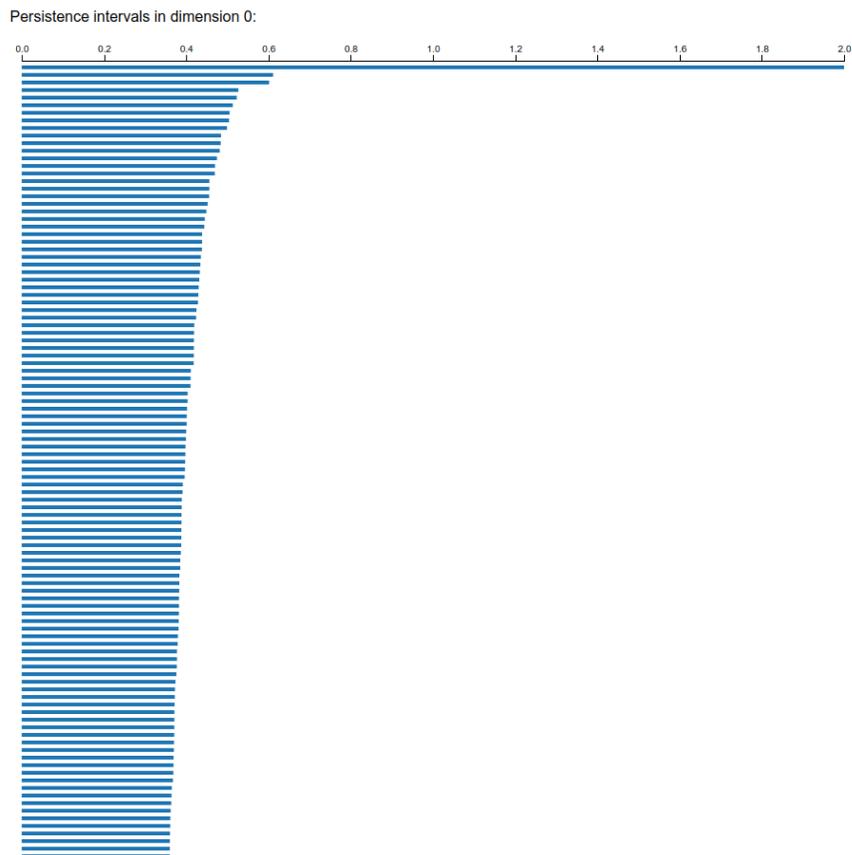


Figura 6: Coppie di persistenza associate a classi 0-dimensionali

**Coppie di persistenza 1-dimensionali** Osserviamo la presenza di un'unica classe essenziale, che in questo caso indica un unico loop non banale. Il risultato è ragionevole, questo loop circonda il buco esterno approssimando un parallelo e persisterà durante la filtrazione.

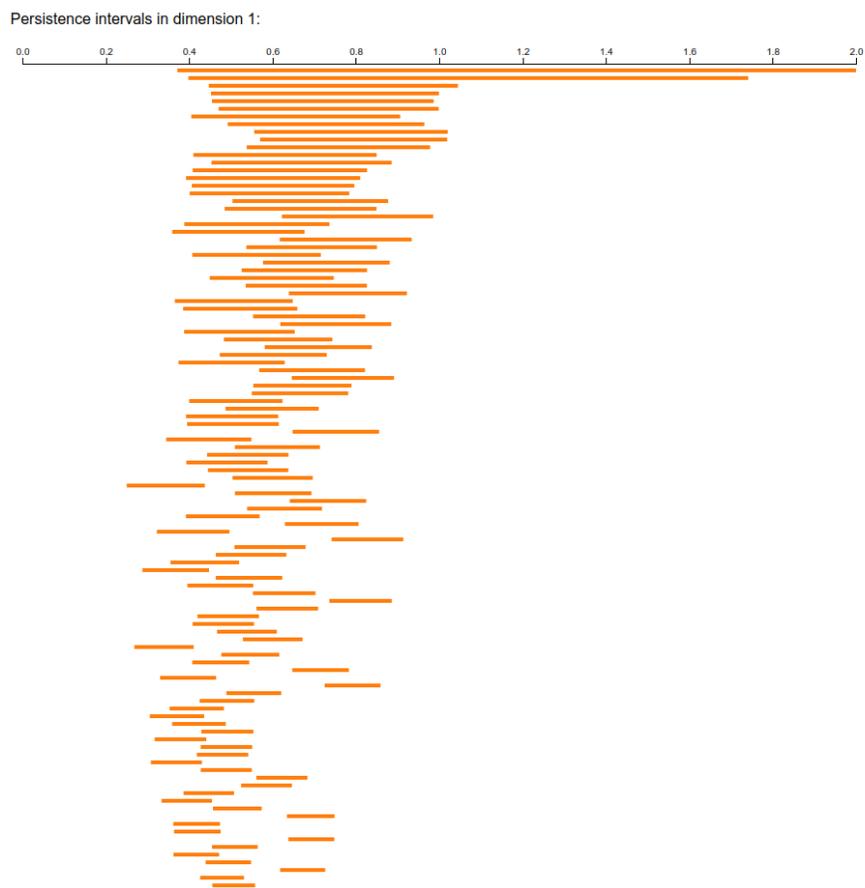


Figura 7: Coppie di persistenza associate a classi 1-dimensionali

**Coppie di persistenza 2-dimensionali** In questo caso non ci sono classi 2-dimensionali essenziali, ciò significa che il valore che il parametro  $\alpha$  raggiunge, è sufficiente a riempire tutte le cavità che si formano percorrendo la filtrazione. Riguardo alle classi 2-dimensionali osserviamo una nascita più tardiva e una minore persistenza rispetto alle classi di dimensione inferiore.

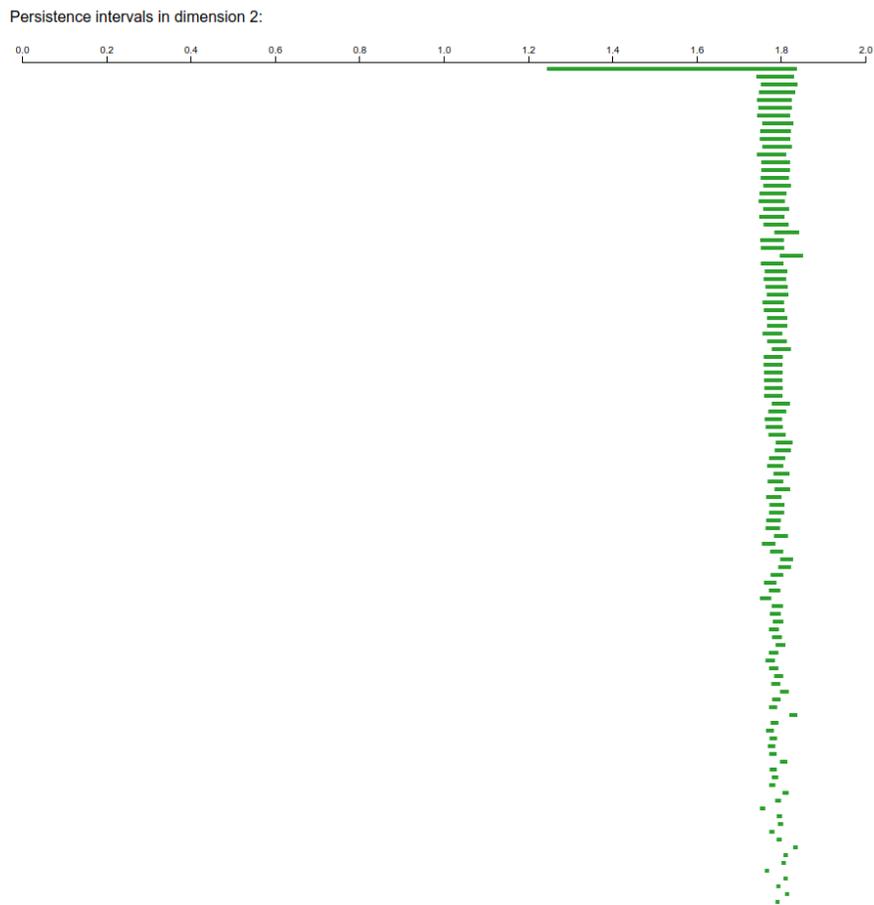


Figura 8: Coppie di persistenza associate a classi 2-dimensionali

### 3 Moduli di persistenza

In questa sezione associamo un modulo di persistenza alla filtrazione di un complesso simpliciale finito. Introduciamo quindi una condizione di finitezza, che verifichiamo essere soddisfatta da tali moduli di persistenza.

#### 3.1 Complessi e moduli di persistenza

**Definizione 3.1** (Complesso di persistenza). Sia  $R$  un anello, un complesso di persistenza  $\mathcal{C} = \{C_{\bullet}^i, f_{\bullet}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è composto da una famiglia di complessi di catene di  $R$ -moduli  $\{C_{\bullet}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , insieme a una famiglia di morfismi di complessi di catene  $\{f_{\bullet}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , dove  $f_{\bullet}^i : C_{\bullet}^i \rightarrow C_{\bullet}^{i+1}$ .

Esplicitamente, una porzione del complesso di catene  $\mathcal{C}$  sarà data da

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_2^0 & \xrightarrow{\partial_2^0} & C_1^0 & \xrightarrow{\partial_1^0} & C_0^0 \\
 & & f_2^0 \downarrow & & f_1^0 \downarrow & & f_0^0 \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C_2^1 & \xrightarrow{\partial_2^1} & C_1^1 & \xrightarrow{\partial_1^1} & C_0^1 \\
 & & f_2^1 \downarrow & & f_1^1 \downarrow & & f_0^1 \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C_2^2 & \xrightarrow{\partial_2^2} & C_1^2 & \xrightarrow{\partial_1^2} & C_0^2 \\
 & & f_2^2 \downarrow & & f_1^2 \downarrow & & f_0^2 \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C_2^3 & \xrightarrow{\partial_2^3} & C_1^3 & \xrightarrow{\partial_1^3} & C_0^3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Osserviamo che ogni quadrato è commutativo. Infatti le mappe  $f_{\bullet}^i$  sono morfismi di complessi di catene, dunque commutano con le mappe di bordo.

**Esempio 3.2** (Complesso di persistenza associato a una filtrazione). Consideriamo una filtrazione  $\Sigma^f = \{\Sigma^0, \dots, \Sigma^m\}$  di un complesso simpliciale finito  $\Sigma$ . Per  $j = 0, \dots, m$ , poniamo  $C_{\bullet}^j = C_{\bullet}(\Sigma^j)$  il complesso delle catene simpliciali e  $f_{\bullet}^j = (i_{\bullet}^{j, j+1})_{\#}$  il morfismo di catene indotto dall'inclusione  $i^{j, j+1} : \Sigma^j \rightarrow \Sigma^{j+1}$ .

In questo caso otteniamo il complesso di persistenza

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & C_2(\Sigma^0) & \xrightarrow{\partial_2^0} & C_1(\Sigma^0) & \xrightarrow{\partial_1^0} & C_0(\Sigma^0) \\
& & (i_2^{0,1})\# \downarrow & & (i_1^{0,1})\# \downarrow & & (i_0^{0,1})\# \downarrow \\
\dots & \longrightarrow & C_2(\Sigma^1) & \xrightarrow{\partial_2^1} & C_1(\Sigma^1) & \xrightarrow{\partial_1^1} & C_0(\Sigma^1) \\
& & (i_2^{1,2})\# \downarrow & & (i_1^{1,2})\# \downarrow & & (i_0^{1,2})\# \downarrow \\
\dots & \longrightarrow & C_2(\Sigma^2) & \xrightarrow{\partial_2^2} & C_1(\Sigma^2) & \xrightarrow{\partial_1^2} & C_0(\Sigma^2) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & (i_2^{m-1,m})\# \downarrow & & (i_1^{m-1,m})\# \downarrow & & (i_0^{m-1,m})\# \downarrow \\
\dots & \longrightarrow & C_2(\Sigma^m) & \xrightarrow{\partial_2^m} & C_1(\Sigma^m) & \xrightarrow{\partial_1^m} & C_0(\Sigma^m) \quad .
\end{array}$$

Definiamo i moduli di persistenza e la condizione di tipo finito seguendo [ZC05], Definizioni 3.2 e 3.3.

**Definizione 3.3** (Modulo di persistenza). Sia  $R$  un anello, un modulo di persistenza  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è composto da una famiglia di  $R$ -moduli  $\{M^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  e da una famiglia di omomorfismi di  $R$ -moduli  $\{\varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , dove  $\varphi^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$ . Rappresentiamo un modulo di persistenza come una sequenza

$$M^0 \xrightarrow{\varphi^0} M^1 \xrightarrow{\varphi^1} M^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots$$

**Osservazione 3.4** (Modulo di persistenza associato). Un complesso di persistenza induce in omologia un modulo di persistenza. Più precisamente, associamo a un complesso di persistenza  $\mathcal{C} = \{C_\bullet^i, f_\bullet^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un modulo di persistenza  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  nel seguente modo. Per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , poniamo gli  $R$ -moduli  $M^i = H_\bullet(C_\bullet^i) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k(\Sigma^i)$ , con omomorfismi in omologia indotti dai morfismi di complessi:  $\varphi^i = (f_\bullet^i)_*$ .

Nell'Esempio 3.2 abbiamo associato un complesso di persistenza alla filtrazione di un complesso simpliciale. Per quanto appena osservato possiamo associare un modulo di persistenza ad un complesso di persistenza, e dunque associare un modulo di persistenza alla filtrazione di un complesso simpliciale.

### 3.2 Una condizione di finitezza

**Definizione 3.5** (Condizione di tipo finito). Consideriamo un complesso di persistenza  $\mathcal{C} = \{C_{\bullet}^i, f_{\bullet}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , tale complesso si dice di tipo finito se valgono le seguenti condizioni:

1.  $\bigoplus_{k=0}^{\infty} C_k^i$  è un  $R$ -modulo finitamente generato per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .
2. Esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $f_{\bullet}^i$  è un isomorfismo per ogni  $i \geq n$ .

Analogamente diciamo che il modulo di persistenza  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è di tipo finito se:

1.  $M^i$  è un  $R$ -modulo finitamente generato per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .
2. Esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\varphi^i$  è un isomorfismo per ogni  $i \geq n$ .

**Osservazione 3.6.** Verifichiamo che il modulo di persistenza associato alla filtrazione di un complesso simpliciale finito sia di tipo finito. Sia  $i \in \mathbb{N}$ .

1. Vogliamo mostrare che per ogni  $i$  il termine  $M^i = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\Sigma^i)$  è un modulo finitamente generato. Sia  $n = \dim \Sigma < +\infty$ . Se  $k > n$  chiaramente  $C_k(\Sigma^i) = 0$ , poiché  $\Sigma^i$  non contiene  $k$ -simplessi. Se  $k \leq n$  allora  $C_k(\Sigma^i)$  è finitamente generato poiché  $\Sigma^i$  contiene un numero finito di  $k$ -simplessi. Quindi se  $k > n$  si ha  $H_k(\Sigma^i) = 0$ . Se  $k \leq n$  abbiamo invece che  $H_k(\Sigma^i)$  è finitamente generato poiché quoziente di un modulo finitamente generato.
2. Estendiamo per convenzione la filtrazione ponendo  $\Sigma^i = \Sigma^m = \Sigma$  per  $i > m$ . Dunque per  $i > m$  gli omomorfismi  $\varphi^i$  indotti in omologia sono l'identità, e quindi isomorfismi.

## 4 Struttura dei moduli di persistenza di tipo finito

In questa sezione generalizziamo il teorema di struttura per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali al caso graduato. Enunciamo dunque il teorema di corrispondenza grazie a cui otteniamo la caratterizzazione dei moduli di persistenza di tipo finito su un campo.

### 4.1 Il teorema di corrispondenza

Ricordiamo le definizioni di anello graduato e modulo graduato. Sia  $R$  un anello che si decompone come somma diretta di sottogruppi additivi

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots ,$$

e tale che, per ogni  $i, j \in \mathbb{N}$  si abbia  $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ . Diciamo che  $R$  è un anello graduato rispetto alla gradazione  $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

Sia  $R$  un anello graduato e  $M$  un  $R$ -modulo che si decompone come somma diretta di sottogruppi additivi

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots ,$$

e tale che, per ogni  $i, j \in \mathbb{N}$  si abbia  $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$ . Diciamo che  $M$  è un anello graduato rispetto alla gradazione  $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

Consideriamo due  $R$ -moduli graduati  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$  e  $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i$ . Ricordiamo che un omomorfismo di  $R$ -moduli graduati è un omomorfismo di  $R$ -moduli  $\mu : M \rightarrow N$ , tale che  $\mu(M_i) \subseteq N_i$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .

Ad esempio, ogni anello  $R$  può essere visto come anello graduato ponendo  $R_0 = R$  e  $R_i = 0$  per  $i$  intero positivo. Tale gradazione è detta banale.

**Esempio 4.1.** Sia  $R$  un anello e  $R[x]$  l'anello dei polinomi a coefficienti in  $R$ . Sia  $i \in \mathbb{N}$ , indichiamo con  $R[x]_i$  l'insieme dei polinomi omogenei di  $R[x]$  di grado  $i$ . Poniamo  $R_0 = R$  e  $R_i = R[x]_i$ , decomponendo  $R[x]$  come

$$R[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R[x]_i = R \oplus R[x]_1 \oplus R[x]_2 \oplus \dots .$$

Consideriamo due polinomi omogenei  $p(x), q(x) \in R[x]$ . Se  $p(x) \cdot q(x) \neq 0$ , abbiamo che  $\deg p(x) \cdot q(x) = \deg p(x) + \deg q(x)$  e dunque  $R[x]_i R[x]_j \subseteq R[x]_{i+j}$  per ogni coppia di  $i, j \in \mathbb{N}$ .

Sia  $M$  un  $R$ -modulo graduato. Utilizziamo la notazione  $M(a)$  per indicare lo spostamento di  $a$  nella struttura graduata, cioè

$$M(a)_i = M_{i+a} .$$

Enunciamo ora l'estensione al caso graduato del teorema di struttura per moduli finitamente generati su un anello a ideali principali.

**Teorema 4.2** (Teorema di struttura). *Sia  $R$  un dominio graduato a ideali principali e  $M$  un  $R$ -modulo graduato finitamente generato. Allora  $M$  si decompone in modo unico nella forma*

$$\left( \bigoplus_{i=1}^n R(a_i) \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^m R(b_j)/d_j R \right),$$

dove  $d_j \in R$  sono elementi omogenei tali che  $d_j | d_{j+1}$  e  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ .

Una dimostrazione dettagliata di questo fatto si può trovare in [Loe23].

Ricordiamo alcune definizioni categoriche che ci serviranno per enunciare il teorema di corrispondenza. Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  due categorie e  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtori covarianti. Una trasformazione naturale  $\eta$  tra  $F$  e  $G$  è una famiglia di morfismi che associa ad ogni oggetto  $X$  di  $\mathcal{C}$  un morfismo  $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$  tra oggetti di  $\mathcal{D}$ , in modo che per ogni morfismo  $f : X \rightarrow Y$  il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array} .$$

Un'equivalenza di categorie tra  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  consiste nei funtori covarianti  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  e nelle trasformazioni naturali  $\varepsilon : F \circ H \rightarrow I_{\mathcal{D}}$ ,  $\eta : H \circ F \rightarrow I_{\mathcal{C}}$  dove i funtori  $I_{\mathcal{C}}$  e  $I_{\mathcal{D}}$  sono i funtori identità di  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  rispettivamente. Se esiste un'equivalenza di categorie tra  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  diciamo che le categorie  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  sono equivalenti.

**Definizione 4.3** (Morfismo di moduli di persistenza). Sia  $R$  un anello e siano  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  e  $\mathcal{N} = \{N^i, \psi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  due  $R$ -moduli di persistenza. Consideriamo quindi una famiglia di omomorfismi di  $R$ -moduli  $\nu = \{\nu^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , tali che  $\nu^i : M^i \rightarrow N^i$ . Diciamo che  $\nu$  è un morfismo di  $R$ -moduli di persistenza se il seguente diagramma commuta per ogni  $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} M^i & \xrightarrow{\varphi^i} & M^{i+1} \\ \nu^i \downarrow & & \downarrow \nu^{i+1} \\ N^i & \xrightarrow{\psi^i} & N^{i+1} \end{array} .$$

Definiamo ora un funtore  $\alpha$  tra la categoria degli  $R$ -moduli di persistenza e la categoria degli  $R[x]$ -moduli graduati.

**Definizione 4.4** (Funtore  $\alpha$ ). Sia  $R$  un anello e  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un  $R$ -modulo di persistenza. Consideriamo  $R[x]$  graduato come nell'Esempio 4.1 e definiamo un  $R[x]$ -modulo graduato

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M^i ,$$

con il prodotto per scalari definito da

$$\begin{aligned} r \cdot (m_0, m_1, m_2, \dots) &= (rm_0, rm_1, rm_2, \dots) \quad \text{se } r \in R, \\ x \cdot (m_0, m_1, m_2, \dots) &= (0, \varphi^0(m_0), \varphi^1(m_1), \varphi^2(m_2), \dots). \end{aligned}$$

Sia  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morfismo di  $R$ -moduli di persistenza, definiamo un morfismo di  $R[x]$ -moduli graduati

$$\begin{aligned} \alpha(\nu) : \alpha(\mathcal{M}) &\rightarrow \alpha(\mathcal{N}) \\ (m_0, m_1, m_2, \dots) &\mapsto (\nu^0(m_0), \nu^1(m_1), \nu^2(m_2), \dots). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che la mappa  $\alpha$  così definita è un funtore covariante.

Siamo finalmente in grado di enunciare il teorema di corrispondenza.

**Teorema 4.5** (Teorema di corrispondenza). *Sia  $R$  un anello Noetheriano, il funtore  $\alpha$  definisce un'equivalenza tra la categoria dei moduli di persistenza di tipo finito su  $R$  e la categoria dei moduli graduati finitamente generati su  $R[x]$ .*

La dimostrazione è abbastanza complessa e si può trovare in [CK18].

## 4.2 Moduli di persistenza di tipo finito su un campo

Combinando il teorema di corrispondenza e il teorema di struttura riusciamo a classificare i moduli di persistenza di tipo finito su un campo  $K$ . Sia  $\mathcal{M}$  un  $K$ -modulo di persistenza di tipo finito.  $K[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} K[x]_i$  è un dominio graduato a ideali principali, dunque grazie al teorema di struttura possiamo classificare i  $K[x]$ -moduli graduati finitamente generati. Infine, dato che  $K$  è Noetheriano, possiamo applicare il teorema di corrispondenza ottenendo

$$\alpha(\mathcal{M}) \simeq \underbrace{\left( \bigoplus_{i=1}^n x^{a_i} \cdot K[x] \right)}_{\text{parte libera}} \oplus \underbrace{\left( \bigoplus_{j=1}^m x^{b_j} \cdot (K[x]/(x^{c_j})) \right)}_{\text{parte di torsione}}$$

per  $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{N}$ .

Seguendo l'approccio di Zomorodian e Carlsson in [ZC05], introduciamo i concetti di multiinsieme e di  $\mathcal{P}$ -intervallo.

**Definizione 4.6** (Multiinsieme). Un multiinsieme è una coppia ordinata  $(A, m)$ , composta da un insieme  $A$  e da una mappa  $m : A \rightarrow \mathbb{Z}^+$  che associa a un elemento  $a \in A$  la sua molteplicità  $m(a)$ . Pensiamo a un multiinsieme come a un insieme in cui sono ammesse ripetizioni tra gli elementi.

**Definizione 4.7** ( $\mathcal{P}$ -intervallo). Definiamo un  $\mathcal{P}$ -intervallo come una coppia ordinata  $(i, j) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ , tale che  $i < j$ .

**Definizione 4.8** (Mappa  $Q$ ). Sia  $(i, j)$  un  $\mathcal{P}$ -intervallo, definiamo

$$Q(i, j) = \begin{cases} x^i \cdot (K[x]/(x^{j-i})) & \text{se } j \neq +\infty, \\ x^i \cdot K[x] & \text{se } j = +\infty. \end{cases}$$

Sia  $S = \{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}$  un multiinsieme di  $\mathcal{P}$ -intervalli, definiamo

$$Q(S) = \bigoplus_{k=0}^n Q(i_k, j_k).$$

Grazie alla decomposizione precedente è chiaro che  $Q$  è una bigezione.

Se consideriamo un modulo di persistenza  $\mathcal{M}$  associato alla filtrazione di un complesso simpliciale finito,  $S$  è il multiinsieme delle coppie di persistenza che sono quindi sufficienti per determinare l'omologia persistente.

**Osservazione 4.9** (Torsione nei moduli di persistenza). Riprendiamo l'Osservazione 3.4 replicando la costruzione con gruppi di omologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$ . Consideriamo quindi uno  $\mathbb{Z}_2$ -modulo di persistenza  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}$  dove  $M^i = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k(\Sigma^i; \mathbb{Z}_2)$ . Osserviamo che, poiché  $\mathbb{Z}_2$  è un campo, i gruppi di omologia  $H_k(\Sigma^i; \mathbb{Z}_2)$  sono liberi da torsione e  $\alpha(M)$  è uno  $\mathbb{Z}_2$ -modulo libero. Tuttavia, quando consideriamo  $\alpha(\mathcal{M})$  con la struttura di  $\mathbb{Z}_2[x]$ -modulo, ci può essere una componente di torsione non banale. In generale, quando andiamo a dotare  $\alpha(\mathcal{M})$  della struttura di  $R[x]$ -modulo introduciamo una componente di torsione, che misura la possibile morte delle classi di omologia.

## 5 Il teorema di isometria

In questa sezione seguiamo la notazione e l'approccio di [CdSGO13]: come prima cosa, estendiamo l'insieme degli indici dei moduli di persistenza all'insieme dei numeri reali. Introduciamo quindi la condizione tame, che permette di decomporre un modulo di persistenza in moduli di intervallo. Infine, dopo aver definito una pseudometrica sui moduli di persistenza e una distanza tra i diagrammi di persistenza, enunciamo il teorema di isometria.

### 5.1 Moduli di persistenza decomponibili

D'ora in poi, assumiamo che i moduli di persistenza siano su un campo  $K$ .

**Definizione 5.1** (Moduli di persistenza indicizzati su  $\mathbb{R}$ ). Un modulo di persistenza indicizzato sui reali è una famiglia  $\mathcal{V} = \{V_\bullet, v_\bullet\}$  di  $K$ -spazi vettoriali  $V_t$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , insieme ad una famiglia di applicazioni lineari  $v_{s,t} : V_s \rightarrow V_t$  per ogni coppia di reali  $s \leq t$ . Queste mappe sono tali che:

1.  $v_{t,t}$  è l'identità per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $v_{s,t} \circ v_{r,s} = v_{r,t}$  per ogni terna di numeri reali  $r \leq s \leq t$ .

Possiamo pensare ai moduli di persistenza indicizzati su  $\mathbb{R}$  come a funtori tra la categoria  $(\mathbb{R}, \leq)$ , che ha come oggetti i numeri reali e morfismi tra  $s$  e  $t$  per  $s \leq t$ , e  $\text{Vect}_K$ , la categoria degli spazi vettoriali su  $K$ . D'ora in poi, assumiamo che i moduli di persistenza siano indicizzati su  $\mathbb{R}$ .

Introduciamo quindi i moduli di intervallo, i quali compongono la struttura di base dei moduli di persistenza che andremo a studiare.

**Definizione 5.2** (Moduli di intervallo). Sia  $J \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo, oppure un singleton. Definiamo un modulo di persistenza  $\mathcal{I}^J = (I_\bullet, i_\bullet)$  come

$$I_t = \begin{cases} K & \text{se } t \in J, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

con mappe

$$i_{s,t} = \begin{cases} \text{id}_K & \text{se } s, t \in J, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per moduli di persistenza indicizzati sui reali è rilevante distinguere la topologia dell'insieme  $J$  che stiamo considerando. Introduciamo dunque la seguente notazione: siano  $p, q \in \mathbb{R}$ , con  $p < q$ .

- $(p^-, p^+)$  significa  $\{p\}$  ;
- $(p^-, q^-)$  significa  $[p, q)$  ;
- $(p^-, q^+)$  significa  $[p, q]$  ;
- $(p^+, q^-)$  significa  $(p, q)$  ;
- $(p^+, q^+)$  significa  $(p, q]$  .

Nel caso di intervalli illimitati la notazione è analoga:

$$\begin{aligned}
(p^-, +\infty^-) &\text{ significa } [p, +\infty) ; \\
(p^+, +\infty^-) &\text{ significa } (p, +\infty) ; \\
(-\infty^+, q^-) &\text{ significa } (-\infty, q) ; \\
(-\infty^+, q^+) &\text{ significa } (-\infty, q] ; \\
(-\infty^+, +\infty^-) &\text{ significa } (-\infty, +\infty) .
\end{aligned}$$

Indichiamo un generico intervallo con la notazione  $(p^*, q^*)$ , ammettendo eventualmente  $p^* = -\infty^+$  o  $q^* = +\infty^-$ .

Siano  $\mathcal{U} = \{U_\bullet, u_\bullet\}$  e  $\mathcal{W} = \{W_\bullet, w_\bullet\}$  due moduli di persistenza. Definiamo la somma diretta  $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$  come

$$V_t = U_t \oplus W_t, \text{ con mappe } v_{s,t} = u_{s,t} \oplus w_{s,t} .$$

**Definizione 5.3** (Moduli decomponibili). Sia  $\mathcal{V}$  un modulo di persistenza, diciamo che  $\mathcal{V}$  è decomponibile se ammette una decomposizione nella forma

$$\mathcal{V} \simeq \bigoplus_{l \in L} \mathcal{I}^{J_l} ,$$

per un multiinsieme di intervalli  $\{J_l\}_{l \in L}$  con  $L \in \mathbb{N}$ .

Grazie al seguente teorema otteniamo che dato un modulo di persistenza decomponibile, il multiinsieme degli intervalli che compaiono nella decomposizione è invariante per isomorfismo, cfr. Teorema 1.3 in [CdSGO13].

**Teorema 5.4** (Krull-Remak-Schmidt-Azumaya). *Supponiamo che un modulo di persistenza  $\mathcal{V}$  si possa esprimere come somma diretta di moduli di intervalli in due modi diversi:*

$$\mathcal{V} \simeq \bigoplus_{l \in L} \mathcal{I}^{J_l} \simeq \bigoplus_{m \in M} \mathcal{I}^{K_m} .$$

Allora c'è una bigezione  $\tau : L \rightarrow M$  tale che  $J_l = K_{\tau(l)}$  per ogni  $l \in L$ .

Definiamo ora una condizione di tipo tame, prendendo come riferimento la Definizione 2.2 di [CCSG+08].

**Definizione 5.5** (Modulo di persistenza tame). Sia  $\mathcal{V}$  un modulo di persistenza, diciamo che  $\mathcal{V}$  è tame se  $\dim_K V_t < +\infty$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Il prossimo fondamentale risultato è stato mostrato da Crawley-Boevey in [CB14]. Esso ci garantisce la decomponibilità di un'ampia classe di moduli di persistenza, definita da una condizione elementare di tipo tame.

**Teorema 5.6** (Decomponibilità dei moduli di persistenza tame). *Sia  $\mathcal{V}$  un modulo di persistenza tame, allora  $\mathcal{V}$  è decomponibile.*

**Definizione 5.7** (Diagramma di persistenza). Sia  $\mathcal{V}$  un modulo di persistenza che si decompone come

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathcal{I}^{(p_l^*, q_l^*)} .$$

Allora il diagramma di persistenza di  $\mathcal{V}$  è il multiinsieme

$$\text{dmg}(\mathcal{V}) = \{(p_l, q_l) \mid l \in L\} \setminus \Delta ,$$

dove  $\Delta = \{(r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$  è la diagonale del piano.

## 5.2 Distanze e teorema di isometria

Definiamo ora una pseudometrica sui moduli di persistenza.

**Definizione 5.8** ( $\epsilon$ -interleaving). Sia  $\epsilon$  un reale non negativo, un  $\epsilon$ -interleaving tra due  $K$ -moduli di persistenza  $\mathcal{V} = \{V_\bullet, v_\bullet\}$  e  $\mathcal{W} = \{W_\bullet, w_\bullet\}$  consiste in due famiglie di applicazioni lineari

$$\{\Phi_t : V_t \rightarrow W_{t+\epsilon} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \{\Psi_t : W_t \rightarrow V_{t+\epsilon} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

che soddisfano 2 relazioni di parallelogramma:

1.  $\Phi_t \circ v_{s,t} = w_{s+\epsilon, t+\epsilon} \circ \Phi_s$  per reali  $s \leq t$ .
2.  $\Psi_t \circ w_{s,t} = v_{s+\epsilon, t+\epsilon} \circ \Psi_s$  per reali  $s \leq t$ ,

insieme con due relazioni di triangolo:

1.  $\Psi_{t+\epsilon} \circ \Phi_t = v_{t, t+2\epsilon}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\Phi_{t+\epsilon} \circ \Psi_t = w_{t, t+2\epsilon}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Ossia chiediamo che commutino i seguenti diagrammi

$$\begin{array}{ccc} V_s & \xrightarrow{v_{s,t}} & V_t \\ & \searrow \Phi_s & \searrow \Phi_t \\ & & W_{s+\epsilon} \xrightarrow{w_{s+\epsilon, t+\epsilon}} W_{t+\epsilon} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_s & \xrightarrow{w_{s,t}} & W_t \\ & \searrow \Psi_s & \searrow \Psi_t \\ & & V_{s+\epsilon} \xrightarrow{v_{s+\epsilon, t+\epsilon}} V_{t+\epsilon} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_t & \xrightarrow{v_{t, t+2\epsilon}} & V_{t+2\epsilon} \\ & \searrow \Phi_t & \nearrow \Psi_{t+\epsilon} \\ & & W_{t+\epsilon} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_t & \xrightarrow{w_{t, t+2\epsilon}} & W_{t+2\epsilon} \\ & \searrow \Psi_t & \nearrow \Phi_{t+\epsilon} \\ & & V_{t+\epsilon} \end{array} .$$

**Definizione 5.9** (Distanza interleaving). Siano  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  due moduli di persistenza. La distanza interleaving tra  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$ , che indichiamo con  $d_{\text{Int}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ , è l'estremo inferiore degli  $\epsilon$  per cui esiste un  $\epsilon$ -interleaving tra  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$ . Se un tale  $\epsilon$ -interleaving non esiste, poniamo  $d_{\text{Int}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = +\infty$ .

Osserviamo che seppur comunemente chiamata distanza, questa definizione determina solo una pseudometrica: perché valga  $d_{\text{Int}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0$ , è sufficiente infatti che si abbia  $\text{dmg}(\mathcal{V}) = \text{dmg}(\mathcal{W})$ , e ciò non implica  $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ .

Definiamo ora una vera e propria distanza tra i diagrammi di persistenza. Per le verifiche necessarie, comprese quelle riguardanti la distanza interleaving, rimandiamo alle Proposizioni 4.5 e 4.8 in [CdSGO13].

**Definizione 5.10** ( $\epsilon$ -matching). Siano  $S$  e  $S'$  due multiinsiemi di intervalli reali aperti e sia  $\epsilon$  un reale non negativo. Un  $\epsilon$ -matching tra  $S$  e  $S'$  è una bigezione  $\xi : S_0 \rightarrow S'_0$  tra due multisottoinsiemi  $S_0 \subseteq S$  e  $S'_0 \subseteq S'$  tale che

1. Ogni intervallo  $(a, b)$  in  $(S \cup S') \setminus (S_0 \cup S'_0)$  è tale che  $b - a \leq 2\epsilon$ .
2. Se  $\xi(a, b) = (a', b')$  allora  $|a - a'| \leq \epsilon$  e  $|b - b'| \leq \epsilon$ .

Un  $\epsilon$ -matching  $\xi$  tra  $S$  e  $S'$  accoppia tutti gli intervalli di lunghezza maggiore di  $2\epsilon$ , in modo che se  $\xi((a, b)) = (a', b')$  si possano ottenere  $a'$  e  $b'$  perturbando i valori  $a$  e  $b$  di al più  $\epsilon$ .

**Definizione 5.11** (Distanza bottleneck). Siano  $S$  e  $S'$  due multiinsiemi. La distanza bottleneck tra  $S$  e  $S'$ , che indichiamo con  $d_{\text{Bot}}(S, S')$ , è l'estremo inferiore degli  $\epsilon$  per cui esiste un  $\epsilon$ -matching tra  $S$  e  $S'$ . Se un tale  $\epsilon$ -matching non esiste, poniamo  $d_{\text{Bot}}(S, S') = +\infty$ .

**Teorema 5.12** (Teorema di isometria). Siano  $\mathcal{V} = \{V_\bullet, v_\bullet\}$  e  $\mathcal{W} = \{W_\bullet, w_\bullet\}$  una coppia di  $K$ -moduli di persistenza tame, allora

$$d_{\text{Int}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = d_{\text{Bot}}(\text{dmg}(\mathcal{V}), \text{dmg}(\mathcal{W}))$$

La dimostrazione si basa sulle due disuguaglianze: il Teorema 4.4 in [CCSG+08], noto come teorema di stabilità

$$d_{\text{Int}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \geq d_{\text{Bot}}(\text{dmg}(\mathcal{V}), \text{dmg}(\mathcal{W})) ,$$

insieme con il teorema di stabilità inverso

$$d_{\text{Int}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \leq d_{\text{Bot}}(\text{dmg}(\mathcal{V}), \text{dmg}(\mathcal{W})) ,$$

che è dimostrato in [CdSGO13], nel caso più generale di moduli di persistenza decomponibili.

Verifichiamo infine che valga il teorema di isometria in un caso semplice, dove possiamo calcolare esplicitamente le distanze volute.

**Esempio 5.13.** Poniamo  $\mathcal{V} = \mathcal{I}^{[1,2]} \oplus \mathcal{I}^{(2,3]}$  e  $\mathcal{W} = \mathcal{I}^{[1,3]}$ .

Abbiamo quindi  $\text{dmg}(\mathcal{V}) = \{(1, 2), (2, 3)\}$  e  $\text{dmg}(\mathcal{W}) = \{(1, 3)\}$ . Osserviamo che  $\tau : (1, 2) \mapsto (1, 3)$  è un 1-matching. Mostriamo che non esiste un  $\epsilon$ -matching per  $\epsilon < 1$ . L'intervallo  $(1, 3)$  ha lunghezza maggiore di  $2\epsilon$  ma non può essere ottenuto perturbando gli intervalli  $(1, 2)$  o  $(2, 3)$  di al più  $\epsilon$ . Dunque  $d_{\text{Bot}}(\text{dmg}(\mathcal{V}), \text{dmg}(\mathcal{W})) = 1$ .

Consideriamo le mappe

$$\Phi_t = \begin{cases} \text{id}_K & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases} \quad \text{e} \quad \Psi_t = \begin{cases} \text{id}_K & \text{se } t = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Non è difficile verificare che queste famiglie di applicazioni lineari definiscono un 1-interleaving. L'unica relazione di triangolo in cui la commutatività del diagramma non è un'uguaglianza di mappe nulle è data da

$$\begin{array}{ccc} & V_2 & \\ \text{id}_K \nearrow & & \searrow \text{id}_K \\ W_1 & \xrightarrow{\text{id}_K} & W_3 \end{array} .$$

Le uniche relazioni di parallelogramma in cui non si ha un'uguaglianza di mappe nulle sono invece quelle contenute nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\text{id}_K} & V_2 \\ & \searrow \text{id}_K & \searrow \text{id}_K \\ & & W_2 \xrightarrow{\text{id}_K} W_3 \end{array} .$$

Mostriamo che non esiste un  $\epsilon$ -interleaving per  $\epsilon < 1$ . Se valesse la relazione di parallelogramma

$$\begin{array}{ccc} & V_{1+\epsilon} & \xrightarrow{0} & V_{2+\delta} \\ & \nearrow & & \nearrow \text{---} \\ W_1 & \xrightarrow{\text{id}_K} & W_{2-\epsilon+\delta} & \end{array}$$

la mappa tratteggiata sarebbe nulla per ogni reale  $\delta$  tale che  $0 < \delta < 1$ . Scegliendo  $\delta$  sufficientemente piccolo possiamo imporre  $\delta + \epsilon < 1$ . Tuttavia la relazione di triangolo

$$\begin{array}{ccc} & V_{2+\delta} & \\ \text{---} \nearrow 0 & & \searrow \\ W_{2-\epsilon+\delta} & \xrightarrow{\text{id}_K} & W_{2+\epsilon+\delta} \end{array}$$

fornisce l'assurdo voluto. Concludiamo allora che  $d_{\text{Int}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 1$ , verificando il teorema di isometria in questo caso particolare.

## Ringraziamenti

Eccoci giunti alla parte più importante di questa tesi, che per quanto possa sembrare un lavoro individuale, è frutto del tempo condiviso con molte altre persone. Ringrazio il professor Enrico Sbarra per avermi introdotto all'argomento, per i numerosi consigli e per la disponibilità dimostrata nel lavoro di correzione. Ringrazio i miei genitori, i nonni e tutti i parenti per avermi sempre sostenuto in questo percorso. Anche se non sono riuscito a spiegarvi l'omologia persistente in poche parole, sono molto felice di condividere questo momento con voi. Sappiate che ci riproverò, quindi siate all'erta! Ringrazio gli amici. Grazie per i discorsi e le discussioni, il tempo passato studiando e quello passato giocando. Grazie per le gite, le vacanze e le tante serate passate in vostra compagnia. Grazie per essere delle persone meravigliose. Credo proprio che vi toccherà sopportarmi anche in futuro 😊

*If we meet again someday...  
will you call me your friend  
one more time?*

*From now on, no matter what hap-  
pens, this mark on our left arm...  
will be the mark of our friendship.*

## Riferimenti bibliografici

- [CB14] William Crawley-Boevey. Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules, 2014. URL: <https://arxiv.org/abs/1210.0819>, [arXiv:1210.0819](https://arxiv.org/abs/1210.0819).
- [CCSG<sup>+</sup>08] F. Chazal, D. Cohen-Steiner, M. Glisse, L. Guibas, and S. Oudot. Proximity of persistence modules and their diagrams. *Proc. 25th ACM Sympos. Comput. Geom.*, 12 2008. doi:10.1145/1542362.1542407.
- [CdSGO13] F. Chazal, V. de Silva, M. Glisse, and S. Oudot. The structure and stability of persistence modules, 2013. URL: <https://arxiv.org/abs/1207.3674>, [arXiv:1207.3674](https://arxiv.org/abs/1207.3674).
- [CK18] R. Corbet and M. Kerber. The representation theorem of persistence revisited and generalized. *Journal of Applied and Computational Topology*, 2:1–31, 2018. doi:10.1007/s41468-018-0015-3.
- [ELZ00] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. In *Proceedings 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 454–463, 2000. doi:10.1109/SFCS.2000.892133.
- [FSIF16] U. Fugacci, S. Scaramuccia, F. Iuricich, and L. De Floriani. Persistent Homology: a Step-by-step Introduction for Newcomers. In G. Pintore and F. Stanco, editors, *Smart Tools and Apps for Graphics - Eurographics Italian Chapter Conference*. The Eurographics Association, 2016. doi:10.2312/stag.20161358.
- [Loe23] C. Loeh. A comment on the structure of graded modules over graded principal ideal domains in the context of persistent homology, 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2301.11756>, [arXiv:2301.11756](https://arxiv.org/abs/2301.11756).
- [ZC05] A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33:249–274, 2005. doi:10.1007/s00454-004-1146-y.