Geometria e Topologia Differenziale
Primo Compitino

Francesca Pratali

Esercizio 1

1. Sia $C \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = f(y), y \in [0,1]\}$. Detto $\Gamma_f \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x), x \in [0,1]\}$ il grafico di f, osservo che $C = A(\Gamma_f)$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
è la rotazione del piano che scambia gli assi coordinati. A è ortogonale, in particolare invertibile, e C^∞, perchè $\mathbb{R}$-lineare in uno spazio di dimensione finita.
Come noto (visto a lezione),
$$\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (t, f(t))$$
è una parametrizzazione liscia, regolare e iniettiva di Γ_f.
Definisco $\alpha(t) \coloneqq (A \circ \beta)(t), \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, vediamo che soddisfa le richieste.
$Im(\alpha) = C$, inoltre α è liscia ed iniettiva perchè composizione di applicazioni lisce ed iniettive. Dalla regolarità di β segue anche quella di α, infatti
$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}(A \circ \beta)(t) = DA(\beta(t))\beta'(t) = A\beta'(t)$$
da cui, per l'invertibilità di A, $\beta'(t) \neq 0 \forall t \in [0,1] \Rightarrow \alpha'(t) \neq 0 \forall t \in [0,1]$.

2. A è ortogonale quindi preserva la norma euclidea, e per definizione di lunghezza di una curva si ha
$$\mathfrak{L}(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha(t)\| \, dt = \int_0^1 \|\beta(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt$$

Esercizio 2

Osservo innanzitutto che un'omotopia tra σ_0 e σ_1 deve necessariamente esistere, in quanto $deg(\sigma_0) = deg(\sigma_1)$.
Considero infatti $\tilde{\sigma_0}, \tilde{\sigma_1}$ i sollevamenti di σ_0 e σ_1 rispettivamente, definiti come

$$\tilde{\sigma_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \pi] \\ 2t - 2\pi & \text{se } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

$$\tilde{\sigma_1}(t) = t \in [0, 2\pi]$$

allora $deg(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi}[\tilde{\sigma_0}(2\pi) - \tilde{\sigma_0}(0)] = 1 = \frac{1}{2\pi}[\tilde{\sigma_1}(2\pi) - \tilde{\sigma_1}(0)] = deg(\sigma_1)$.
Sia

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \pi(t) = (\cos t, \sin t)$$

un rivestimento universale di S^1. Un'omotopia tra le due curve è

$$H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to S^1$$

$$(s, t) \to \pi(\tilde{\sigma_0}(t) + s(\tilde{\sigma_1}(t) - \tilde{\sigma_0}(t))$$

$$H(s,t) = \begin{cases} (\cos st, \sin st) & \text{se } t \in [0, \pi] \\ (\cos(2t - s\pi + s(2\pi - t)), \sin(2t - s\pi + s(2\pi - t))) & \text{se } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \tag{2}$$

Verifichiamo che $H(s, t)$ è in effetti un'omotopia.
Innanzitutto è continua: $\{[0, 1] \times [0, \pi], [0, 1] \times [\pi, 2\pi]\}$ è un ricoprimento chiuso finito di $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ e quindi fondamentale, e dato che H è continua sui singoli chiusi del ricoprimento e coincide nell'intersezione dei due, si ha la continuità su tutto $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. Inoltre,
$H(0, t) = \pi(\widetilde{\sigma_1(t)}) = \sigma_1(t)$
$H(1, t) = \pi(\widetilde{\sigma_0(t)}) = \sigma_0(t)$
$H_s(t) \coloneqq H(s, t)$ è una curva chiusa $\forall s \in [0, 1]$.

Esercizio 3

1. σ è regolare, infatti

   $$\sigma'(t) = (-\sin t, -\sin \frac{t}{3}, -\cos t)$$

   $$\|\sigma'(t)\|^2 = 1 + \sin^2 \frac{t}{3} \neq 0 \forall t$$

   da cui $\sigma'(t) \neq 0 \forall t$.

2. Osservo preliminarmente che la curva è liscia ed iniettiva (la sua terza componente è iniettiva su $[-1,1]$), quindi tutte le derivazioni sono legittime. La retta tangente a σ in $\sigma'(0)$ è

$$r = \sigma(0) + t\sigma'(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Il piano osculatore, in particolare il versore normale, è ben definito per curve biregolari. σ è biregolare se e solo se σ', σ'' sono linearmente indipendenti.

$$\sigma''(t) = (-\cos t, -\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}, \sin t)$$

σ', σ'' linearmente indipendenti $\iff rnk(\sigma'|\sigma'') = 2$.

$$(\sigma'|\sigma'') = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ -\sin\frac{t}{3} & -\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3} \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2, come si vede prendendo il minore invertibile di determinante -1 formato dalla prima e terza riga di determinante. Chiamiamo Ω il piano osculatore in $\sigma(0)$, $\underline{\mathbf{t}}(t), \underline{\mathbf{n}}(t)$ rispettivamente i versori tangente e normale a σ nel punto $\sigma(t)$.
$\underline{\mathbf{t}}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \Rightarrow \underline{\mathbf{t}}(0) = (0, 0, -1)$
Per curve biregolari, non necessariamente parametrizzate in lunghezza d'arco, vale

$$\underline{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\|\sigma''(t)\|^2 - \frac{|\langle\sigma''(t),\sigma'(t)\rangle|^2}{\|\sigma'(t)\|^2}}}(\sigma''(t) - \frac{\langle\sigma''(t), \sigma'(t)\rangle}{\|\sigma'(t)\|^2}\sigma'(t))$$

Derivando,

$$\sigma''(0) = (-1, -\frac{1}{3}, 0), \langle\sigma''(0), \sigma'(0)\rangle = 0, \|\sigma''(0)\| = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{n}}(0) = \frac{3}{\sqrt{10}}\sigma''(0) = \frac{3}{\sqrt{10}}(-1, -\frac{1}{3}, 0)$$

Da cui:

$$\Omega = \sigma(0) + Span\{\underline{\mathbf{t}}(0), \underline{\mathbf{n}}(0)\} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + Span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{3}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Esercizio 4

1. La curva è liscia; $\sigma'(t) = (2\sqrt{2} - \cos t, 2\sqrt{2}\cos t + 1, -3\sin t) \Rightarrow \|\sigma'(t)\| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sigma$ è regolare ma non è parametrizzata in lunghezza d'arco (PRLA). Scelgo $t_0 = 0$,

$$s(t) = \int_0^t \|\sigma'(x)\|dx = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow t = t(s) = \frac{s}{3\sqrt{2}}$$

Parametrizzo σ in lunghezza d'arco, cioè

$$\sigma(s) = \sigma(t(s)) = (-\frac{2}{3}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}} + \frac{s}{3\sqrt{2}}, 3\cos\frac{s}{3\sqrt{2}})$$

Detta $k(s)$ curvatura di $\sigma(s)$, vale $k(s) = \|\ddot{\sigma}(s)\|$. Calcoliamo le derivate.

$$\dot{\sigma}(s) = \underline{\mathbf{t}}(s) = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}}, \frac{2}{3}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}})$$

$$\ddot{\sigma}(s) = (\frac{1}{18}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}}, -\frac{2}{9\sqrt{2}}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{6}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow k(s) \equiv \frac{1}{6}$$

2. Come evidenziato dal punto (1), la curva è biregolare, quindi il versore normale ben definito. Con le notazioni precedenti, detto $\underline{\mathbf{b}} := \underline{\mathbf{t}} \wedge \underline{\mathbf{n}}$ il versore binormale, la torsione della curva è

$$\tau(s) = -\langle \dot{\underline{\mathbf{b}}}(s), \underline{\mathbf{n}}(s)\rangle$$

Ora:

$$\underline{\mathbf{n}}(s) = \frac{\ddot{\sigma}(s)}{\|\ddot{\sigma}(s)\|} = 6(\frac{1}{18}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{9}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{6}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}})$$

$$\underline{\mathbf{b}}(s) = \underline{\mathbf{t}}(s) \wedge \underline{\mathbf{n}}(s) = \dot{\sigma}(s) \wedge \underline{\mathbf{n}}(s) = 6det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \underline{\mathbf{t}}(s)_1 & \underline{\mathbf{t}}(s)_2 & \underline{\mathbf{t}}(s)_3 \\ \underline{\mathbf{n}}(s)_1 & \underline{\mathbf{n}}(s)_2 & \underline{\mathbf{n}}(s)_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 6(-\frac{1}{9} - \frac{1}{18\sqrt{2}}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{9}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{18\sqrt{2}}, -\frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}})$$

$$\dot{\underline{\mathbf{b}}}(s) = 6(\frac{1}{108}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{27\sqrt{2}}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{36}\cos\frac{s}{3\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow \tau(s) \equiv -\frac{1}{6}$$

3. Torno a considerare σ non PRLA, cioè $\sigma = \sigma(t)$. Se un movimento rigido come nelle richieste esiste, allora curvatura e torsione k_γ, τ_γ di γ devono essere uguali a quelli di σ (*). Con conti analoghi ai precedenti, si trova che

$$k_\gamma(t) \equiv \frac{|a|}{a^2+b^2}$$

$$\tau_\gamma(t) \equiv \frac{b}{a^2+b^2}$$

Imponendo

$$\begin{cases} \mathrm{k}_\gamma = k \\ \tau_\gamma = \tau \end{cases} \tag{3}$$

si trova $|a| = 3, b = -3$. La scelta $a > 0$ comporta che il verso di percorrenza dell'elica sia antiorario, mentre quella $a < 0$ orario. Scegliendo $a > 0$, si ha $a = 3, b = -3$. Si verifica che la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

è una rotazione nel gruppo speciale ortogonale ($AA^t = I, detA = 1$) tale che l'applicazione $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ sia un movimento rigido dello spazio con la proprietà

$$L(\sigma(t)) = A\sigma(t) = \gamma(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

Se invece si sceglie $a < 0$, ossia $a = -3, b = -3$, basta considerare

$$B := RA$$

dove

$$R := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

(*) Mostriamo che curvatura e torsione sono invarianti per composizione con movimento rigido.
Sia $\alpha(s) : I \to \mathbb{R}^n$ curva regolare parametrizzata liscia PRLA di curvatura e torsione k, τ rispettivamente, $\nu(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ movimento rigido dello spazio, con $A \in SO(3)$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\beta(s) := \nu(\alpha(s))$.

La proprietà fondamentale che useremo è che A, essendo ortogonale, è invertibile e preserva la norma euclidea. Osserviamo intanto che α PRLA $\Rightarrow \beta$ PRLA, in quanto $\frac{d}{ds}\beta(s) = A\frac{d}{ds}\alpha(s) = A\dot{\alpha}(s) \Rightarrow \|\frac{d}{ds}\beta(s)\| = \|\dot{\alpha}(s)\| = 1 \forall s$.
Constatato poi che $\ddot{\beta}(s) = A\ddot{\alpha}(s) \Rightarrow \underline{\mathbf{n}}_\beta(s) = A\underline{\mathbf{n}}(s)$, dove $\underline{\mathbf{n}}$ è il versore normale di α, si ha:

$$k_\beta(s) = \|\ddot{\beta}(s)\| = \|A\ddot{\alpha}(s)\| = \|\ddot{\alpha}(s)\| = k(s)$$

$$\tau_\beta(s) = -\langle \dot{\underline{\mathbf{b}}}_\beta(s), \underline{\mathbf{n}}_\beta(s)\rangle = -\langle A\dot{\underline{\mathbf{t}}}(s) \wedge \underline{\mathbf{n}}(s), A\underline{\mathbf{n}}(s)\rangle - \langle A\underline{\mathbf{t}}(s) \wedge \dot{\underline{\mathbf{n}}}(s), A\underline{\mathbf{n}}(s)\rangle =$$

$$-\langle \dot{\underline{\mathbf{t}}}(s) \wedge \underline{\mathbf{n}}(s), \underline{\mathbf{n}}(s)\rangle - \langle \underline{\mathbf{t}}(s) \wedge \dot{\underline{\mathbf{n}}}(s), \underline{\mathbf{n}}(s)\rangle = \tau(s)$$

Nel nostro caso poi, dove k, τ sono costanti, si ha che

$$k(s) = k(t) \forall t, \forall s \, \tau(s) = \tau(t) \forall t \forall s]$$

Esercizio 5

σ è parametrizzata in lunghezza d'arco, infatti il suo vettore tangente è unitario.

$$\sigma'(t) = (\cos t, -\frac{3}{5}\sin t, -\frac{4}{5}\sin t)$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{\cos t^2 + \frac{9}{25}\sin t^2 + \frac{16}{25}\sin t^2} = 1$$

Il riferimento di Frenet di σ è

$$\{\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{b}}\}$$

dove $\underline{\mathbf{t}} = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}$ è il versone tangente della curva, $\underline{\mathbf{n}} = \frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}$ quello normale e $\underline{\mathbf{b}} := \underline{\mathbf{t}} \wedge \underline{\mathbf{n}}$ il versore binormale. Dato che σ è PRLA, $\underline{\mathbf{t}}(t) = \sigma'(t)$. Per la buona definizione della normale, bisogna verificare che σ sia biregolare, cioè di curvatura k non nulla. Dato che siamo in PRLA, $k(t) = \|\sigma''(t)\|$, da cui:

$$\sigma''(t) = (-\sin t, -\frac{3}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\cos t) \Rightarrow \|\sigma''(t)\| = 1 \neq 0$$

da cui $\underline{\mathbf{n}}(t) = \sigma''(t)$. Per la binormale:

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \underline{\mathbf{t}}(t) \wedge \underline{\mathbf{n}}(t) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos t & -\frac{3}{5}\sin t & -\frac{4}{5}\sin t \\ -\sin t & -\frac{3}{5}\cos t & -\frac{4}{5}\cos t \end{pmatrix} = (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

In sostanza, il riferimento di Frenet di σ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{3}{5}\sin t \\ -\frac{4}{5}\sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\frac{3}{5}\cos t \\ -\frac{4}{5}\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Si osserva che il versore binormale è costante, ovvero il supporto della curva è contenuto in un piano.