Geometria e Topologia Differenziale
Secondo Compitino

Francesca Pratali

Esercizio 1

1. Considero
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \to x^3 + 3y^2 - z$$
Osservo che $F = S^{-1}(0)$. Per un risultato noto, basta verificare che F sia di classe C^∞, 0 valore regolare per F, e infine che S sia connesso per avere che S è una superficie regolare. Verifichiamo allora che le condizioni sono soddisfatte.

   (a) F è di classe C^∞, in quanto polinomiale nelle tre variabili;

   (b) $0 \in Im(F)$, giacché $0 = F((0, 0, 0))$, e, per definizione, 0 è un valore regolare se e solo se non è critico: osserviamo che $\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $dF_v = (3x^2, 6y, -1) \neq (0, 0, 0)$, dunque surgettivo, ed in particolare lo è $\forall v$ tale che $F(v) = 0$

   (c) S è connessa, dato che immagine di un connesso attraverso una funzione continua, nello specifico $S = Im\phi$, con $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $f(x, y) = (x, y, x^3 + 3y^2)$.

2. Sia $p := (1, 1, 4)$.Come osservato (mantendendo le notazioni), $S = F^{-1}(0)$, con 0 regolare, e per quanto visto a lezione, denotando con T_pS il piano tangente ad S nel punto p (intendendolo come spazio vettoriale) si ha che
$$T_pS = (dF_P)^\perp$$
Dunque:
$$dF_p = (3, 6, -1)$$

$$(dF_P)^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \langle (x,y,z), p \rangle = 0\}$$

$$(x,y,z) \in (dF_P)^{\perp} \iff z = 3x + 6y$$

Da cui, per contenimento, lineare indipendenza e motivi dimensionali ($dim(dF_P)^{\perp} = 2 = 3 - rnk(dF_p)$) si ha che

$$TpS = Span\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}\}$$

Il piano tangente affine a S nel punto p è

$$T := p + Span\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}\}$$

3. Si è visto che

$$\forall p \in S T_pS = (dF_P)^{\perp}$$

Una mappa di Gauss per S è

$$N : S \to \mathbb{S}^2$$

continua tale che $T_pS \perp N(p)$ unitario. Ma allora una mappa di Gauss è data dalla normalizzazione del gradiente di F

$$N(p) = N(x,y,x^3+3y^2) = \frac{(3x^2, 6y, -1)}{\sqrt{9x^4 + 36y^2 + 1}}$$

ben definita proprio perchè 0 è un valore regolare di F e inoltre evidentemente continua.

Esercizio 2

1. (a) ϕ è C^{∞} dato che ogni componente è una funzione C^{∞}

   (b) $\forall (u,v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ $d\phi_{(u,v)}$ ha rango massimo. Infatti, il differenziale di ϕ è dato da

$$d\phi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \exp v \cos u & \exp v \sin u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   e per l'identità fondamentale della trigonometria $\cos u^2 + \sin u^2 = 1$ si ha che seno e coseno non si annullano mai contemporaneamente, per cui, grazie anche al fatto che $\exp v \neq 0 \; \forall v \in \mathbb{R}$, almeno uno dei due minori 2×2 dati dalla prima e seconda riga o seconda e terza riga sono invertibili.

(c) Sia $D \coloneqq (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, allora $\forall (u, v) \in D$ esiste $U = U_{(u,v)} \subseteq D$ tale che $\phi_{|U}$ sia un omeomorfismo con l'immagine. Un possibile atlante è costituito da $\bigcup_{i=1}^{3} \{U_i, \phi_i\}$, con

$$U_1 = (0, \pi) \times \mathbb{R}, U_2 = (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \times \mathbb{R}, U_3 = (\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

$$\phi_i = \phi_{|U_i} : U_i \to S$$

Le ϕ_i sono parametrizzazioni locali, per i punti precedenti basta verificare che siano un omeomorfismo con l'immagine: questo è vero, infatti sono iniettive con inverse continue rispettivamente date da

$$\phi_1^{-1}(x, y, z) = (\arccos x, z)$$

$$\phi_2^{-1}(x, y, z) = (\pi + \arcsin(ye^{-z}), z)$$

$$\phi_3^{-1}(x, y, z) = (2\pi - \arccos x, z)$$

2. I coefficienti metrici di S rispetto a ϕ sono $E, F, G : U_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, definiti con

$$E(u, v) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\phi(u,v)}$$

$$F(u, v) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\phi(u,v)}$$

$$G(u, v) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\phi(u,v)}$$

Nel seguito, anche nei punti successivi, si ometterà la dipendenza da (u, v) per alleggerire la notazione.

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} -\sin u & exp(v)\cos u & 0 \end{pmatrix}, \partial_2 = \begin{pmatrix} 0 & exp(v)\sin u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E = \sin u^2 + exp(2v)\cos u^2$$

$$G = 1 + exp(2v)\sin u^2$$

$$F = exp(2v)cos(u)sin(u)$$

3. Sia $N : S \to \mathbb{S}^2$ una mappa di Gauss, definita da

$$N = N \circ \phi = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\| \partial_1 \wedge \partial_2 \|}$$

Detti e, f, g i coefficienti di forma di S rispetto a ϕ, si ha che

$$\langle N \circ \phi, \partial_j \rangle = 0 \forall j \in \{1, 2\} (*)$$

implica

$$e = \langle N \circ \phi, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \rangle$$
$$f = \langle N \circ \phi, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \rangle$$
$$g = \langle N \circ \phi, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \rangle$$

(basta infatti derivare (*) rispetto ad una delle due variabili e ricordare che i coefficienti di forma sono definiti, detta $Q_p : T_pS \to \mathbb{R}$ la seconda forma fondamentale di S, come $e = Q_p(\partial_{1|p}), f = -\langle dN_p(\partial_{1|p}), \partial_{2|p} \rangle, g = Q_p(\partial_{2|p})$). Calcoliamo allora i termini necessari.

$$\partial_1 \wedge \partial_2 = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin u & exp(v) \cos u & 0 \\ 0 & exp(v) \sin u & 1 \end{pmatrix} = (exp(v) \cos u, \sin u, -exp(v) \sin u^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \phi = (-\cos u, -exp(v) \sin u, 0)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \phi = (0, exp(v) \sin u, 0)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \phi = (o, exp(v) \cos u, 0)$$
$$\Rightarrow e = -\frac{1}{\| \partial_1 \wedge \partial_2 \|} exp(v)$$
$$f = \frac{1}{\| \partial_1 \wedge \partial_2 \|} exp(v) \sin u \cos u$$
$$g = \frac{1}{\| \partial_1 \wedge \partial_2 \|} exp(v) \sin u^2$$

4. Sia A la matrice che rappresenta dN_p nella base $\{\partial_{1|p}, \partial_{2|p}\}$, per quanto visto si ha che

$$A = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

da cui, detta $\mathbb{K}$ la curvatura gaussiana di S,

$$\mathbb{K} = detA = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Calcolando numeratore e denominatore,

$$eg - f^2 = -\frac{1}{\parallel \partial_1 \wedge \partial_2 \parallel} exp(2v) \sin u^2 (1 + \cos u^2)$$

$$EG - F^2 = exp(2v)(\sin u^4 + \cos u^2) + \sin u^2$$

osservo che il denominatore è sempre positivo , per cui

$$\mathbb{K} \leq 0 \iff -exp(2v) \sin u^2 (1 + \cos u^2)) \leq 0$$

Questo prova che la curvatura gaussiana è ovunque non positiva, e anzi, che

$$K = 0 \iff \sin u^2 = 0 \iff u = \pi$$

Esercizio 3

1.
$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(\theta, \phi) = (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta)$$
$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(\theta, \phi) = (-\sin\theta \sin\phi, \sin\theta \cos\phi, 0)$$

   Dunque, applicando la definizione, detto U un dominio in cui ψ è un omeomorfismo con l'immagine si trovano i coefficienti metrici $E, F, G : U \to \mathbb{R}$, tali che (di nuovo omettendo la dipendenza da (θ, ϕ))

$$E = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_p = \cos\theta^2 + \sin\theta^2 \equiv 1$$

$$F = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_p \equiv 0$$

$$G = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_p = \sin\theta^2$$

2. Come noto, i simboli di Christoffel sono le soluzioni (che esistono, uniche) dei seguenti sistemi lineari, scritti tenendo conto che $F \equiv 0$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} E \\ -\frac{\partial}{\partial \theta} E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} E \\ \frac{\partial}{\partial \theta} G \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \theta} G \\ \frac{\partial}{\partial \phi} G \end{pmatrix}$$

Ora, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

è diagonale di rango 2 (*), dunque facilmente invertibile, con inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix}$$

per cui si ha:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cot\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ricordando che i simboli di Christoffel sono simmetrici rispetto agli indici in basso, li ho determinati tutti.

(*) infatti, sto restringendo la mappa ψ a un dominio in cui è un omeomorfismo con l'immagine, come $(0,\pi) \times (-\pi,\pi)$, dunque ho la certezza che $EG - F^2 \neq 0$, in quanto determinante di matrice che rappresenta prodotto scalare non degenere (quello standard ristretto al tangente).

3. Si ha che $\sigma : I \to S$ è geodetica se e solo se in carte per S (vale a dire $\sigma(t) = \psi(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$) soddisfa la seguente equazione delle geodetiche

$$\sigma_k^{''} + \sum_{i,j=1}^{2} (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma)\sigma_i'\sigma_j' = 0, k = 1, 2$$

Esplicitando le formule, si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{cases} \sigma_1^{''}(t) - \sin\sigma_1\cos\sigma_1(\sigma_2')^2 = 0 \\ \sigma_2'' + 2\cot\sigma_1\sigma_1'\sigma_2' = 0 \end{cases}$$

Alternativamente, è possibile determinare esplicitamente le geodetiche della sfera. Sostengo infatti che le geodetiche siano (contenute in) tutte e sole le intersezioni di un piano passante per il centro di S parametrizzate rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco (che chiameremo cerchi massimi), oltre che le curve costanti. Sia $R_{\theta,\phi}$ matrice che rappresenta una rotazione rispetto all'origine di angoli θ, ϕ in $\mathbb{R}^3$, $\gamma_\alpha(t) = (\cos\alpha t, \sin\alpha t, 0), \alpha \in \mathbb{R}$. Un cerchio massimo σ è parametrizzato da $R_{\theta,\phi}\gamma_\alpha(t)$ per qualche α, θ, ψ. Dunque ogni cerchio massimo $\sigma = R_{\theta,\phi}\gamma_\alpha$è una geodetica, giacchè $\sigma''(t) = -\alpha^2\sigma \in Span(\sigma) = Span(N(\sigma)) = (T_\sigma S)^\perp$ (in una sfera la normale ad un punto è il punto stesso, a meno del segno). Viceversa, sia σ una geodetica, che a meno di riparametrizzazione posso supporre definita in un intorno di 0: detto $p \coloneqq \sigma(0), v \coloneqq \sigma'(0)$ esiste un cerchio massimo passante per p e tangente a v al tempo 0, e dal teorema di esistenza e unicità locale di Cauchy (teoria ODE) segue le due curve coincidono in un intorno di 0.

Esercizio 4

1. I coefficienti metrici E, F, G sono dati da:

$$E = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\phi(u,v)}$$

$$F = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\phi(u,v)}$$

$$G = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\phi(u,v)}$$

Per cui:

$$\partial_1 = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$$

$$\partial_2 = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

dunque, ricordando che $\cosh u^2 - \sinh u^2 = 1$,

$$E = \cosh u^2, F \equiv 0, G = \cosh u^2$$

2. Sia $N = N \circ \phi = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$, calcoliamo i termini necessari.

$$\partial_1 \wedge \partial_2 = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sinh u \cos v & \sinh u \sin v & 1 \\ -\cosh u \sin v & \cosh u \cos u & 0 \end{pmatrix} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u \cosh u)$$

$$\| \partial_1 \wedge \partial_2 \| = \sqrt{\cosh u^2 (1 + \sinh u^2)} = \cosh u^2$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u)$$

Useremo nuovamente le formule per i coefficienti di forma viste nel punto (iii) dell'esercizio (2). Dunque calcoliamo le derivate seconde di σ:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\sigma(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\sigma(u,v)) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\sigma(u,v) = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

Da cui:

$$e \equiv -1, f \equiv 0, g \equiv 1$$

3.
$$(x,y,z) \in C^+ \iff z = h \wedge (x,y,z) \in S \iff (x,y,z) = (R\cos v, R\sin v, h)$$

con v che varia tra 0 e 2π. Per cui C^+ è una circonferenza di raggio R e centro $(0,0,h)$ che giace nel piano $z = h$, parametrizzata da

$$\gamma(v) \coloneqq \sigma(h,v) = (R\cos v, R\sin v, h)$$

. Allo stesso modo si verifica che C^- è una circonferenza nel piano $z = -h$ di centro $(0,0,-h)$ raggio $R' = \cosh -h = \cosh h = R$ per la parità del coseno iperbolico (parametrizzata da $\eta(v) \coloneqq \sigma(-h,v)$.
Di conseguenza, l'area di ciascun disco è πR^2.

4. $S \cap \{|z| < h\} = \sigma(U)$, con $U = (-h,h) \times (0,2\pi)$.
$$Area(\sigma(U)) = \int_U \parallel \partial_{1|\sigma(u,v)} \wedge \partial_{2|\sigma(u,v)} \parallel dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_U \cosh u^2 dudv = 2\pi(\sinh h \cosh$$
avendo usato il teorema di Fubini Tonelli e la parità del coseno iperbolico.

5.
$$Area(S \cap \{|z| < h\}) > Area(C^+ \cup C^-) \iff 2\pi h + 2\pi \sinh hR > 2\pi R^2 \iff h + \sinh hR > R^2$$

che è proprio ciò che stiamo assumendo per ipotesi.

6. Per definizione, una superficie è minima se la sua curvatura media $\mathbb{H}$ è nulla. Come visto a lezione, si ha la seguente formula per $\mathbb{H}$:
$$\mathbb{H} = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + E}{EG - F^2}$$
e sostituendovi i valori trovati nei punti precedenti si trova che $\mathbb{H} = 0$

Esercizio 5

Osserviamo innanzitutto che connessione,compattezza e orientabilità sono proprietà invarianti per diffeomorfismo. Infatti, se prendiamo come definizione di orientabilità di una varietà l'ammettere un atlante orientato, dove cioè il differenziale dei cambi di carta ha determinante positivo (cosa che per le varietà di codimensione 1 come le superfici equivale all'usuale definizione con il campo vettoriale liscio normale), è immediato verificare che il determinante dei cambi di carta sia invariante per diffeomorfismo. Indichiamo con $\mathbb{K}$ la curvatura gaussiana (della superficie in esame) e con χ la caratteristica di Eulero.

1. Osservo innanzitutto che la sfera $\mathbb{S}^2$ è compatta orientabile, quindi anche S_1 è una superficie compatta orientabile. Per il teorema di Gauss-Bonnet globale, prendendo $R = S_1$ (da cui $\partial R = \emptyset$), si ha

   $$\int_{S_1} \mathbb{K} dA = 2\pi\chi(S_1) = 2\pi\chi(\mathbb{S}^2)$$

   dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la caratteristica di Eulero è un invariante topologico. É noto che $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, da cui:

   $$\int_{S_1} \mathbb{K} dA = 4\pi > 0$$

   Supponiamo per assurdo che $\mathbb{K}(p) \leq 0 \ \forall p \in S_1$: allora, per la monotonia dell'integrale di Lebesgue, si avrebbe

   $$\int_{S_1} \mathbb{K} dA \leq 0$$

   risultato evidentemente assurdo per quanto osservato precedentemente.

2. Il toro $\mathbb{T}^2$ è compatto orientabile, per cui anche S_2 lo è. Applicando Gauss-Bonnet globale ($R = S_2$) e ricordando che $\chi(S_2) = \chi(\mathbb{T}^2) = 0$, si ha

   $$\int_{S_2} \mathbb{K} dA = 0$$

   Per un risultato visto a lezione, per la compattezza di S_2, $\exists p \in S_2$ ellittico dunque $\{ \ \mathbb{K} > 0\} \neq \emptyset$ e per continuità di $\mathbb{K}0$ contiene un intorno di p di misura non nulla. Inoltre per continuità di $\mathbb{K}$, $\{\mathbb{K} > 0\}$ e $\{\mathbb{K} < 0\}$ sono aperti di S_2, per cui sono anch'essi superfici regolari (basta prendere le restrizioni delle parametrizzazioni locali). La seguente uguaglianza tra integrali è allora ben definita

   $$\int_{S_2} \mathbb{K} dA = \int_{\{\mathbb{K}>0\}} \mathbb{K} dA + \int_{\{\mathbb{K}<0\}} \mathbb{K} dA$$

e

$$\int_{S_2} \mathbb{K} dA = 0, \int_{\{\mathbb{K}>0\}} \mathbb{K} dA > 0$$

$$\Rightarrow \int_{\{\mathbb{K}<0\}} \mathbb{K} dA < 0$$

da cui necessariamente $\exists q \in S_2 : \mathbb{K}(q) > 0$.
Per finire $\mathbb{T}^2$ quindi S_2 è connesso, e $\mathbb{K}$, essendo continua, manda connessi in connessi, che in $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli: allora deve esistere necessariamente $r \in S_2$ tale che $\mathbb{K}(r) = 0$, come voluto.

Esercizio 6

La curvatura gaussiana è una proprietà intrinseca delle superfici, dunque invariante per isometria. Il triangolo T, essendo contenuto in R^2, ha curvatura gaussiana nulla. Per definizione, la curvatura gaussiana $\mathbb{K}$ è il prodotto delle due curvature principali $k_1 \leq k_2$. Allora se S è una superficie isometria a T dovrà necessariamente avere almeno una curvatura principale nulla. Assumendo che le curve sulle superfici in figura siano le sezioni normali in un punto p lungo le direzioni principali (cosa giustificata dal fatto che nei punti di intersezione tra una curva "orizzontale" e una "verticale" le due direzioni sono ortogonali), osservo che la figura (c) e la figura (f)hanno punti le cui direzioni principali sono entrambe diverse da 0, in particolare nella figura (f) c'è almeno un punto parabolico, nella (c) uno ellittico, dunque sicuramente non possono essere isometriche a un triangolo, i cui punti sono tutti planari.