

GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE
– **COMPITINO 1** –

ENRICO LE DONNE

CONTENTS

Regole	1
Exercise 1	1
Exercise 2	2
Exercise 3	2
Exercise 4	2
Exercise 5	2

Regole

- Questo compitino si svolge a casa.
- Potete discutere degli esercizi tra colleghi. Cercate di confrontare le idee, non i risultati.
- Le soluzioni devono essere scritte personalmente.
- You can write in Italian or in English.
- I risultati (anche se non completi) saranno ritirati il 22/10/2019 a lezione. In alternativa, potete mandare un PDF all'indirizzo: enrico.ledonne@unipi.it con oggetto email *compitino 1 GTD 2019*.

Exercise 1

Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^∞ function.

(i) Prove that the set

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(y), y \in [0, 1]\}$$

is the image of a regular and injective curve.

(ii) Find a formula for the length of such a curve (in term of the derivative of f).

Date: Ottobre 15, 2019.

Exercise 2

Considera la curva $\sigma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\sigma_1(t) := \begin{cases} (0, 0) & t \in [0, \pi], \\ (\cos(2t - 2\pi), \sin(2t - 2\pi)) & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Dimostra che σ_1 è omotopa alla parametrizzazione usuale $\sigma_0 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ della circonferenza data da $\sigma_0(t) = (\cos(t), \sin(t))$ costruendo esplicitamente una omotopia.

Exercise 3

Let $\sigma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the curve given by

$$\sigma(t) = (8 + \cos t, 3 \cos(t/3), 1 - \sin t).$$

- (i) Show that σ is a regular curve.
- (ii) Find the tangent line and the osculating plane of σ at $\sigma(0)$.

Exercise 4

Let $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the curve given by

$$\sigma(t) = (2\sqrt{2}t - \sin t, 2\sqrt{2} \sin t + t, 3 \cos t).$$

- (i) Calculate the curvature of σ .
- (ii) Calculate the torsion of σ .
- (ii) Find, if they exist, a rigid motion A of \mathbb{R}^3 and a helix $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ of the form

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

such that $A\sigma(t) = \gamma(t)$, for all $t \in \mathbb{R}$.

Exercise 5

Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma(t) = (4 + \sin t, \frac{3}{5} \cos t, 2 + \frac{4}{5} \cos t).$$

Determinare il riferimento di Frenet di σ .