GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE
– COMPITINO 2 –

ENRICO LE DONNE

Contents

Regole

- Questo compitino si svolge a casa.
- Potete discutere degli esercizi tra colleghi. Cercate di confrontare le idee, non i risultati.
- Le soluzioni devono essere scritte personalmente.
- You can write in Italian or in English.
- I compiti (anche se non completi) saranno ritirati il 26/11/2019 a lezione. In alternativa, potete mandare un PDF all'indirizzo: ledonne@msri.org con oggetto email *compitino 2 GTD 2019*.
- I voti saranno affissi su un foglio vicino all'ufficio del docente, con cognomi in chiaro (se siete contrari ditelo...)
- Non mandate email per chiedere il voto...

Date: Ottobre 15, 2019.

Exercise 1

Let $S \subseteq \mathbb{R}^3$ be the set given by

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + 3y^2\}.$$

(i) Prove that S is a regular surface.

(ii) Find the tangent plane to S at the point $(1, 1, 4)$.

(iii) Find a Gauss map for S.

Exercise 2

Let $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ be the map defined as

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \exp(v) \sin u, v).$$

Here, we are using the notation $\exp(v)$ for e^v to not create confusion with the first form coefficient e.

Let $S = \varphi((0, 2\pi) \times \mathbb{R})$.

(i) Check that φ is a local parametrization.

(ii) Determine the metric coefficients of S (with respect to the local parametrization φ).

(iii) Show that the form coefficients of S (with respect to the local parametrization φ) are

$$e = -\frac{\exp(v)}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}, \qquad f = \frac{\exp(v) \sin u \cos u}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}, \qquad g = \frac{\exp(v) \sin^2 u}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}.$$

(iv) Show that the Gaussian curvature of S is everywhere negative.

Exercise 3

A possible local parametrization for the unit sphere is given by

$$\psi(\theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta).$$

You don't need to check that such a map is a local parametrization.

(i) Show that the metric coefficients are

$$E \equiv 1, \qquad F \equiv 0, \qquad G = \sin^2\theta.$$

(ii) Calculate the Christoffell symbols (with respect to the local parametrization ψ).

(iii) Write the equation for the geodesics.

Exercise 4

A catenoid is the surface obtained by revolving a curve of the form $x = \frac{1}{a}\cosh az$ in the xz-plane around the z-axis, where a is a non-zero constant. We take $a = 1$ for simplicity. The catenoid can be parametrized by

$$\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u).$$

Siano $h > 0$ e $R = \cosh h$. Siano C_+ e C_- rispettivamente le intersezioni tra la catenoide e i piani $\{z = h\}$ e $\{z = -h\}$.

1) Scrivere i coefficienti metrici

2) Scrivere i coefficienti di forma

3) Controllare che C_+ e C_- sono circonferenze di raggio R e calcolare l'area dei due dischi che determinano.

4) Calcolare l'area della porzione di catenoide nell'insieme $\{|z| < h\}$.

5) Assumendo che R soddisfi

$$(\cosh R)^2 < R + \sinh R \cosh R,$$

quale delle due aree è più piccola? il pezzo di catenoide o la somma dei due dischi?

6) Verificare che la catenoide è una superficie minima.

Exercise 5

Siano S_1, S_2 due superfici in $\mathbb{R}^3$ diffeomorfe rispettivamente a una sfera e ad un toro (ma non necessariamente isometriche alla sfera e toro standard!).

1) Dimostrare che S_1 ha necessariamente un punto di curvatura strettamente positiva.

2) Dimostrare che S_2 ha necessariamente un punto di curvatura (gaussiana) strettamente positiva, un punto di curvatura strettamente negativa e un punto di curvatura nulla.

Exercise 6

A subset $S \subseteq \mathbb{R}^3$ is called a *slice of pizza* if it is isometric to some triangle in the plane $\mathbb{R}^2$. Among the following 8 pictures, 2 of them are NOT slices of pizza. Which ones? motivate your answer.

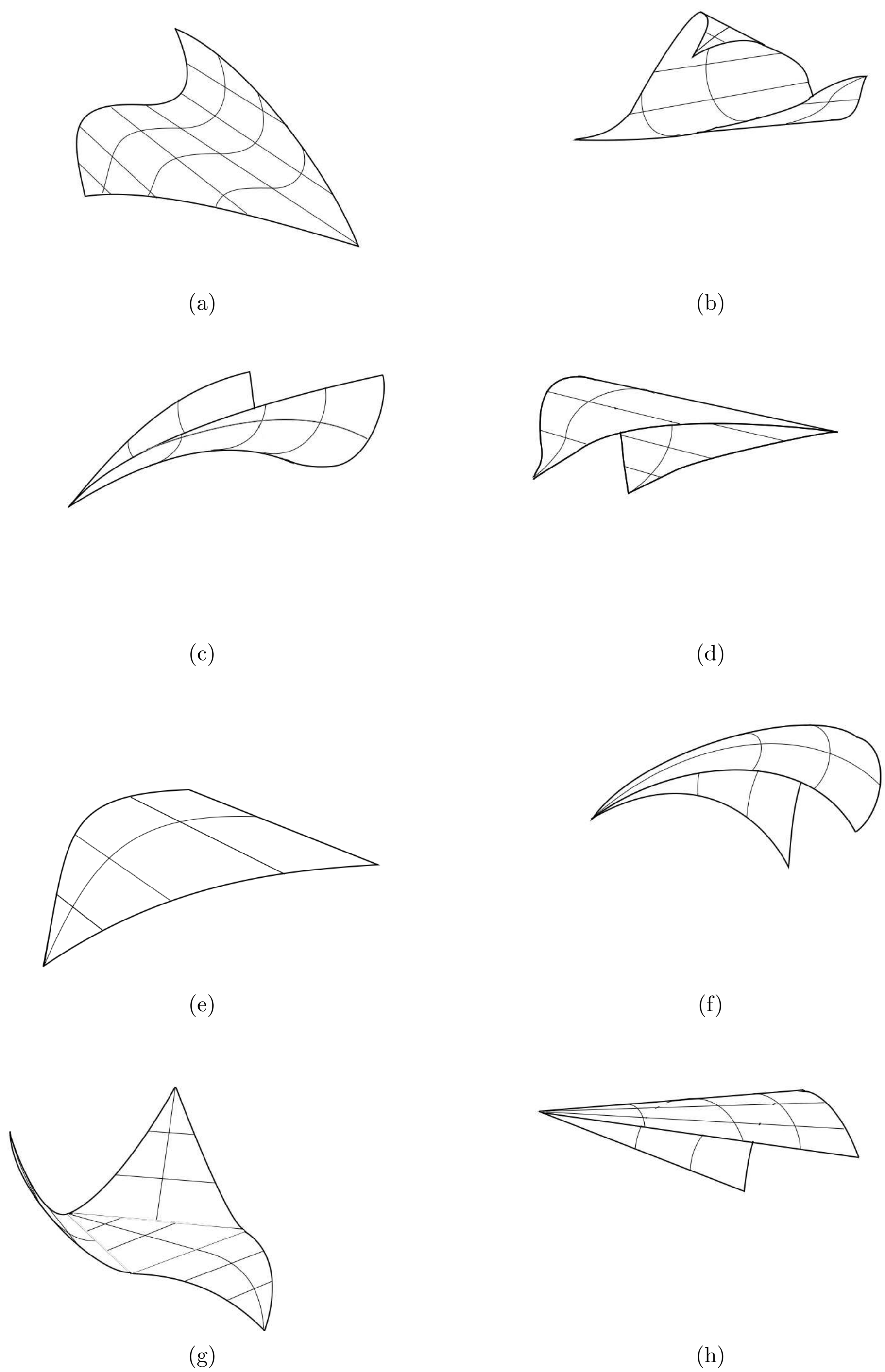

Figure 1. Which are slices of pizza?