Sfera di Riemann

Francesca Pratali

Giugno 2019

Prima di analizzare la Sfera di Riemann, ho pensato di dare una serie di definizioni per inserire l'argomento in quadro più generale.

1 Carte e Varietà topologiche

Definizione 1.1. Sia X un insieme. Una *n-carta* su X è una coppia (U, j), dove $U \subset X$ è un sottinsieme di X e $j : U \to V$ è un omeomorfismo da U a un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.2. Siano $(U_1, j_1), (U_2, j_2)$ due carte su X. Il *cambio di carta* da U_1 a U_2 è la funzione $\phi : j_1(U_1 \cap U_2) \to j_2(U_1 \cap U_2)$, definita da $\phi = j_2 \circ j_1^{-1}$.

Definizione 1.3. Sia X un insieme. Un *atlante* su X è una collezione di carte $\{(U_i, j_i)_{i \in I}\}$ tali che $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Si può dare la definizione di varietà.

Definizione 1.4. X è una *varietà topologica di dimensione* n, o più semplicemente una *n-varietà*, se è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile munito di un atlante.

Essenzialmente, una n-varietà è uno spazio topologico (T2 e N2) in cui ogni punto ammette un aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.
Introduciamo ora le varietà complesse:

Definizione 1.5. Sia X una varietà topologica su $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Allora X è una *varietà complessa di dimensione 1* se i cambi di carta sono applicazioni olomorfe. Una 1-varietà complessa è detta anche *superficie di Riemann*.

2 Punto all'infinito e Sfera di Riemann

Si vuole adesso mettere sulla sfera una struttura di varietà complessa 1-dimensionale. Questo permetterà inoltre di giustificare lo studio del comportamento all'infinito di una funzione olomorfa come lo studio in $z = 0$ di $f(\frac{1}{z})$.
Sappiamo di avere un omeomorfismo tra S^2 e la compattificazione a un punto di $\mathbb{C}$. *ci starebbe digressione minima su compattificazione Alexandroff*

Ricordando che la topologia che si pone sulla compattificazione di Alexandroff di uno spazio topologico X é quella generata dagli aperti costituiti dagli X e dagli insiemi
$$A \subset \widehat{X} : \infty \in A, X \setminus A = K,$$
con K compatto e chiuso (quest'ultima richiesta é ridondante se lo spazio é di Hausdorff), si deduce allora la definizione di *intorno di infinito*:

Definizione 2.1. Un intorno di ∞ in $\mathbb{C}$ è un aperto U tale che $\exists R > 0$ per cui $\mathbb{C} \setminus \overline{D(R,0)} \subset U$.

Forti di questa identificazione, vediamo di porre una struttura analitica su S^2. Siano $N = (0,0,1), S = -N$. Le proiezioni stereografiche rispetto ai due poli, rispettivamente $\pi_N : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e $\pi_S : S^2 \setminus S \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ sono due omeomorfismi; vale inoltre che $\pi_N(S) = 0$, $\pi_S(N) = 0$. Riconduciamoci alla notazione usata precedentemente:

$$S^2 = \{x^2 + y^2 + u^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3, N = (0,0,1)$$

$$U_0 = S^2 \setminus N, j_0 = \pi_N : U_0 \to \mathbb{C}$$

con $\mathbb{C} = Imm\chi$, $\chi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\} \to \mathbb{C}, \chi(x,y,0) = x + iy$ omeomorfismo.
$$j_0(x,y,u) = \frac{x+iy}{1-u}$$
Allo stesso modo, detto $U_1 = S^2 \setminus S$, sia
$$j_1 = \pi_S : U_1 \to \mathbb{C}$$
con $\mathbb{C} = Imm\psi$, $\psi(x,y,0) = x - iy$: la carta che si ottiene è
$$j_1(x,y,u) = \frac{x-iy}{1+u}.$$
Osserviamo che
$$\pi_S = \pi_N \circ \rho,$$
dove
$$\rho(x,y,u) = (x,-y,-u)$$
è la rotazione di S^2 che scambia S e N (che, notare, ristretto a $\mathbb{C}$ corrisponde al coniugio).
Per quanto riguarda il cambio di carte:
$$j_0(S^2 \setminus \{N,S\}) = j_1(S^2 \setminus \{N,S\}) = \mathbb{C}^*$$
$$\forall (x,y,u) \in S^2 \setminus \{N,S\} \cong \mathbb{C}^*, \left(\frac{x+iy}{1-u}\right)\left(\frac{x-iy}{1+u}\right) = \frac{x^2+y^2}{1-u^2} = \frac{1-u^2}{1-u^2} = 1$$

cioé su $\mathbb{C}^*$ π_N e π_S sono una l'inversa dell'altra (!), ovvero definendo

$$z := \frac{x+iy}{1-u}, z' := \frac{x-iy}{1+u},$$

vale

$$zz' = 1.$$

Dunque osserviamo che con queste scelte di j_0 ej_1 il cambio di carta

$$\phi = j_0 \circ j_1^{-1} : j_0(U_0 \cap U_1) \to j_1(U_0 \cap U_1)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{z}$$

è un biolomorfismo da $\mathbb{C}^*$ in sé.

Definizione 2.2. Si chiama **Sfera di Riemann** $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$, con la struttura analitica appena definita.

Osservazione 2.1. La sfera di Riemann è stata ottenuta da $\mathbb{C}$ aggiungendogli un unico punto. In S^2 perciò si identifica $\mathbb{C}$ con U_0 o con U_1, grazie proprio alle carte j_0, j_1.

Adesso anche la definizione di intorno di infinito assume un significato ulteriore: ∞ in una carta non è altro che 0 nell'altra (di nuovo, $j_1(N) = 0, j_0(S) = 0$), e vale il fatto che, se uno spazio X è una varietà con l'atlante $\{(U_i, j_i)_{i \in I}\}$, allora $V \subset X$ è aperto se e solo se $j_i(U_i \cap V)$ è aperto per ogni carta.

Definizione 2.3. Sia $D \subset S^2$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$ un'applicazione, allora f è olomorfa se sono olomorfe entrambe f_N e f_S così definite:
$f_N : \pi_N(D \setminus N) \xrightarrow[\pi_N^{-1}]{} D \xrightarrow[f]{} \mathbb{C}$, e $f_S : \pi_S(D \setminus S) \xrightarrow[\pi_S^{-1}]{} D \xrightarrow[f]{} \mathbb{C}$.
Similmente si definiscono le funzioni meromorfe su D.

Achtung!! A questo punto, siamo in grado di dare una spiegazione al perchè lo studio di una funzione olomorfa $f(z)$ all'infinito (in $z = \infty$), dove per infinito si intende un complesso di modulo arbitrariamente grande, si riconduca allo studio di $f(\frac{1}{z})$ in $z = 0$, ovvero del perché, dato $D \subset \mathbb{C}$ intorno di ∞, e data $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, il tipo di singolarità di $f(z)$ all'infinito è il tipo di singolarita di $f(\frac{1}{z})$ in 0. Infatti, fissato $\mathbb{C} \cong S^2 \setminus N$, $N = \infty$, si ha che in $S^2 \setminus \{N, S\} = \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C} \subset S^2$ vi sono due diverse parametrizzazioni di un punto. Il punto $z = \infty$ è parametrizzato da π_S come $\frac{1}{z'}$, dunque a z arbitrariamente grande corrisponde uno z' arbitrariamente piccolo.. zero!