Modello dell'aritmetica di Robinson con somma e prodotto non commutativi e senza distributività a destra

Considero $T = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_3$ (i pedici indicano differenti copie di questi insiemi) e pongo:

- $0 := 0_1$ (lo 0 di $\mathbb{N}_1$)
- $S(a_i) := (a+1)_i$ per $i = 1, 2, 3$
- $a_i + b_j := \begin{cases} (a+b)_i & \text{se } j = 1 \\ (a+b)_j & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $a_i \cdot b_j := \begin{cases} (ab)_j & \text{se } i = 1 \text{ o } b_j = 0_1 \\ (ab)_i & \text{altrimenti} \end{cases}$

Verifico che le definizioni siano ben poste, ovvero che non ottengo mai numeri negativi in $\mathbb{N}_1$.
Considero la somma $a_i + b_j$. Se $i, j = 1$, allora $a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$. Se $j = 1$ e $i \neq 1$, allora $a_i + b_j = (a+b)_i \in \mathbb{Z}_i$. Se $j \neq 1$, allora $a_i + b_j = (a+b)_j \in \mathbb{Z}_j$.
Considero il prodotto $a_i \cdot b_j$. Se $i, j = 1$ allora $a, b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$. Se $i = 1$ e $j \neq 1$, allora $a_i \cdot b_j = (ab)_j \in \mathbb{Z}_j$. Se $i \neq 1$ e $b_j \neq 0_1$, allora $a_i \cdot b_j = (ab)_i \in \mathbb{Z}_i$. Se $b_j = 0_1$, $a_1 \cdot b_j = 0_1$.
Verifico che T è un modello di Q.

- $0 = 0_1$ non è successore di nessun elemento di T perché dovrebbe essere successore di un elemento in $\mathbb{N}_1$ ma i naturali non hanno predecessore di 0
- Se $x = a_i \neq 0 = 0_1$, allora $x = S((a-1)_i)$ è ben definito
- $S(a_i) = S(b_j) \Rightarrow (a+1)_i = (b+1)_j \Rightarrow i = j \wedge a = b$
- $a_i + S(b_j) = a_i + (b+1)_j = \begin{cases} (a+b+1)_i = S((a+b)_i) = S(a_i + b_j) & \text{se } j = 1 \\ (a+b+1)_j = S((a+b)_j) = S(a_i + b_j) & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $a_i \cdot 0 = a_i \cdot 0_1 = (a \cdot 0)_1 = 0_1 = 0$
- $a_i \cdot S(b_j) = a_i \cdot (b+1)_j = \begin{cases} (a(b+1))_j = (ab+a)_j = (ab)_j + a_1 = a_1 \cdot b_j + a_1 & \text{se } i = 1 \\ (a(b+1))_i = (ab+a)_i = (ab)_i + a_i = a_i \cdot b_j + a_i & \text{se } i \neq 1 \wedge b_j \neq 0_1 \\ a_i \cdot 1_1 = a_i = 0_1 + a_i = a_i \cdot 0_1 + a_i & \text{se } i \neq 1 \wedge b_j = 0_1 \end{cases}$

Non commutatività della somma: $0_2 + 0_3 = 0_3 \neq 0_2 = 0_3 + 0_2$
Non commutatività del prodotto: $1_2 \cdot 1_3 = 1_2 \neq 1_3 = 1_3 \cdot 1_2$
Mancanza di distributività a destra:

$$(1_2 + 1_1) \cdot 1_3 = 2_2 \cdot 1_3 = 2_2 \neq 2_3 = 1_2 + 1_3 = 1_2 \cdot 1_3 + 1_1 \cdot 1_3$$