Definizione 1. Una funzione continua $f : X \to Y$ fra due spazi topologici si dice *propria* se:

Def1) $K \subseteq Y$ compatto in Y $\Rightarrow f^{-1}(K)$ compatto in X

Def2) f è chiusa $\wedge$ ($y \in Y \Rightarrow f^{-1}(y)$ compatto in Y)

Lemma 1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e chiusa tra due spazi topologici. Allora, per ogni $y \in Y$ e U intorno aperto di $f^{-1}(y)$, esiste V intorno aperto di y tale che $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Dimostrazione. ${}^cU$ è chiuso in X perché complementare di un aperto. $f({}^cU)$ è un chiuso in Y perché f è una funzione chiusa. $y \in \ {}^cf({}^cU)$. Quest'ultimo insieme è un aperto perchè complementare di un chiuso. Mostriamo che è il V che cercavamo:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}({}^cf({}^cU) \\ &= {}^c(f^{-1}(f({}^cU))) && \text{Il complementare commuta con } f^{-1} \\ &\subseteq {}^c({}^cU) && f^{-1}(f(A)) \supseteq A \\ &= U \end{aligned}$$

□

Teorema 1. Def2 $\Rightarrow$ Def1.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $f^{-1}(K)$. Fissato $y \in K$, $f^{-1}(y)$ è compatto e $\mathcal{A}$ ne costituisce un ricoprimento aperto. Possiamo quindi estrarre un ricoprimento finito $\tilde{\mathcal{A}}_y$ di $f^{-1}(y)$. Per il lemma 1 (la funzione è chiusa), possiamo trovare un aperto $V_y \ni y$ con $f^{-1}(V_y) \subseteq \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{A}}_y} A$.
$\mathcal{B} = \{V_y | y \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K. Essendo quest'ultimo compatto, possiamo estrarre da $\mathcal{B}$ un sottoricoprimento finito $\tilde{\mathcal{B}} = \{V_y | y \in C\}$ (per un opportuno insieme finito $C \subseteq K$).
Sia ora $\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{y \in C} \tilde{\mathcal{A}}_y$. Osserviamo che $\tilde{\mathcal{A}}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{A}$ ed è finito perché unione finita di insiemi finiti.
Per concludere mostriamo che $\tilde{\mathcal{A}}$ è un ricoprimento di $f^{-1}(K)$:

$$f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{y \in C} V_y) = \bigcup_{y \in C} f^{-1}(V_y) \subseteq \bigcup_{y \in C} \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{A}}_y} A = \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{A}}} A \tag{1}$$

□

Lemma 2. Un compatto K, in uno spazio Y T2, è sempre chiuso.

Dimostrazione. Consideriamo $y \in Y - K$. Siano poi, per ogni $k \in K$, B_k e A_k intorni aperti, rispettivamente, di y e k con $B_k \cap A_k = \emptyset$ (è sempre possibile trovarne perché lo spazio è T2). L'insieme $\mathcal{A} = \{A_k | k \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K. Per definizione di compatto ne possiamo estrarre un sottoinsieme finito $\tilde{\mathcal{A}} = \{A_k | k \in C\}$ (per un opportuno insieme finito $C \subseteq K$). Sia $V = \cap_{k \in C} B_k$. V è un'intersezione finita di aperti contenenti

y, quindi è un intorno aperto di y. Inoltre non interseca alcun elemento di $\mathcal{A}$ per come sono stati scelti questi insiemi, quindi non interseca la loro unione e, pertanto, neppure K. Quindi, poiché per ogni $y \in Y - K$ è possibile costruire un intorno aperto contenuto interamente in $Y - K$, allora $Y - K$ è aperto e K è chiuso.

□

Teorema 2. Se Y è T2 e localmente compatto, allora (Def1 $\Rightarrow$ Def2).

Dimostrazione. Se $y \in Y$, allora $f^{-1}(y)$ è l'immagine inversa di un compatto, quindi è compatta.
Per mostrare che f è chiusa, consideriamo un chiuso $F \subseteq X$. Siano $y \in Y$ e K_y un intorno compatto di y. Per l'ipotesi, $f^{-1}(K_y)$ è compatto, quindi anche $F \cap f^{-1}(K_y)$ lo è, in quanto intersezione di un chiuso e di un compatto. f è continua e manda compatti in compatti, quindi $f(F \cap f^{-1}(K_y))$ è compatto. Ma $f(F \cap f^{-1}(K_y)) = f(F) \cap K_y$ è anche chiuso per il lemma 2. Sia ora $A_y \subseteq K_y$ un aperto contenente y e supponiamo $y \notin f(F)$. Allora $y \in A_y \cap ({}^c(f(F) \cap K_y)) = A_y - f(F)$, che ne è un intorno aperto (intersezione di due aperti) contenuto in ${}^c(f(F))$. Abbiamo appena mostrato che ${}^c(f(F))$ è aperto, quindi $f(F)$ è chiuso.

□