

Fisica 3 - Formulario

Andrea Rocca e Alessio Sgubin

19 novembre 2023

1 Costanti Fisiche

Abbiamo qua raccolto le principali costanti fisiche:

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$	Costante di Boltzmann
$R = 8.31 \frac{J}{K \text{ mol}}$	Costante dei Gas Ideali
$0 \text{ } ^\circ C = 273.15 K$	Zero Assoluto
$\begin{cases} p = 100 \text{ kPa} \\ T = 0 \text{ } ^\circ C \end{cases}$	Condizioni Standard Temperatura-Pressione
$1 \text{ cal} = 4.186 J$	Conversione calorie/Joule

2 Compendio Matematico

Consideriamo una funzione di stato $f(x, y, z) = 0$ che mette in relazione tra loro le 3 variabili. Allora valgono le seguenti proprietà differenziali:

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z = \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_z \right)^{-1} \quad \text{”Inversione di Derivazione”}$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_x \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_y = -1 \quad \text{”Regola Ciclica”}$$

Definiamo la *trasformazione di Legendre* per una funzione $F(x, y)$. Data la scrittura $dF = u \cdot dx + v \cdot dy$ si può passare alla dipendenza da du e dy considerando la funzione:

$$G(u, y) = F - ux$$

con la quale ai differenziali si ottiene:

$$dG = v \cdot dy - x \cdot du$$

3 Termodinamica

3.1 Definizioni e Formule Generali

3.1.1 Principi della Termodinamica

I principi sono i seguenti:

- 0) **Principio zero:** Dati due sistemi in equilibrio termico con un terzo sistema, allora questi sono in equilibrio termico tra di loro.

1) **Principio uno:** il lavoro che devo fare sul sistema per passare dallo stato A allo stato B , in caso adiabatico, è lo stesso, indipendentemente dal modo in cui lo faccio. In generale in un sistema chiuso vale $\Delta U = Q + W$, che scritto in forma infinitesima diventa $dU = \delta Q - \delta W = \delta Q - pdV$.

2) **Principio due:** esistono diverse versioni:

- **Clausius:** non è possibile avere un processo fisico il cui *unico risultato* è il trasferimento di calore da un corpo più freddo a uno più caldo.
- **Kelvin:** non è possibile avere un processo fisico che trasforma *interamente* il calore in lavoro *senza altri risultati*.
- **Carnot:** Il ciclo che porta la temperatura T_H a quella T_L con la massima efficienza è necessariamente reversibile.
- **Disuguaglianza di Clausius:** Vale $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$
- **Entropia:** $\Delta S \geq 0$, dove S è l'entropia
- **Caratheodory:** In termodinamica attorno a qualsiasi stato di equilibrio esistono stati di equilibrio che non sono raggiungibili tramite processi adiabatici reversibili.

3.1.2 Trasferimento del Calore

Il trasferimento di calore avviene in 3 modalità.

- **Conduzione:** un ΔT determina uno scambio di calore tra sistemi a contatto. Ci sono le seguenti leggi¹ che determinano questo scambio:

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = -K \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{”Formula del Flusso di Calore”}$$

$$\vec{J}_Q = -K \cdot \vec{\nabla} T \quad \text{Legge di Fourier}$$

$$\delta Q = c m \delta T \quad \text{”Formula del Calore Specifico”}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T \quad \text{Legge di Propagazione del Calore}$$

dove abbiamo definito le seguenti grandezze:

A è l'area a contatto tra i sistemi

K conducibilità termica, con unità di misura $[K] = \frac{W}{mK}$

\vec{J}_Q flusso di calore attraverso una superficie (di contatto)

$\vec{\nabla} T$ gradiente termico

c calore specifico

e quelle non elencate sono altre costanti.

- **Convezione:** materia che si sposta nello spazio causa trasferimento di calore con una legge macroscopica:

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = h \Delta T \quad \text{”Legge della Convezione”}$$

dove h è una costante che dipende da diverse variabili del sistema.

¹Useremo la convenzione di scrivere tra virgolette i nomi da noi inventati per alcune formule. Che Newton non ce ne voglia, per favore.

- **Irraggiamento:** anche in assenza di materia avviene questo scambio con legge:

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = \varepsilon \sigma (T^4 - T_0^4) \quad \text{”Formula dell’Irraggiamento”}$$

3.1.3 Sistemi Idrostatici

Vale la seguente relazione differenziale:

$$dV = \alpha V dT - \beta V dp$$

dove si definiscono le proprietà del materiale:

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \quad \text{Coefficiente di Espansione Volumetrica}$$

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T \quad \text{Coefficiente di Compressibilità Isoterma}$$

dove indichiamo con ρ la densità volumetrica del materiale.

Il **lavoro** (infinitesimale) viene in generale descritto da:

$$dW = -pdV \quad W = -\int_{V_i}^{V_f} pdV$$

Definiamo inoltre i coefficienti di espansione (con le formule alternative):

$$c_p = \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_p = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_p \quad \text{Coefficiente di Espansione Termica a } p \text{ costante}$$

$$c_V = \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_V = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_V \quad \text{Coefficiente di Espansione Termica a } V \text{ costante}$$

3.1.4 Entropia

Si definisce il differenziale esatto:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}_{\text{rev}} \quad \text{Entropia}$$

3.2 Potenziali Termodinamici

Le seguenti grandezze sono i *potenziali termodinamici*.

Nome	Definizione	Differenziale	Relazione (1)	Relazione (2)
Energia interna	$\Delta U = Q + W$	$dU(S, V) = TdS - pdV$	$T = \frac{\partial U}{\partial S} \Big _V$	$p = -\frac{\partial U}{\partial V} \Big _S$
Entalpia	$H = U + pV$	$dH(S, p) = TdS + Vdp$	$T = \frac{\partial H}{\partial S} \Big _p$	$V = \frac{\partial H}{\partial p} \Big _S$
Helmholtz	$F = U - TS$	$dF(T, V) = -SdT - pdV$	$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \Big _V$	$p = -\frac{\partial F}{\partial V} \Big _T$
Gibbs	$G = U + pv - TS$	$dG(T, s) = -SdT + Vdp$	$S = -\frac{\partial G}{\partial T} \Big _p$	$V = \frac{\partial G}{\partial p} \Big _T$

Essendo questi differenziali esatti seguono le *relazioni di Maxwell*:

Nome	Differenziale	Relazione di Maxwell
Energia interna	$dU(S, V) = TdS - pdV$	$\frac{\partial T}{\partial V} _S = -\frac{\partial p}{\partial S} _V$
Entalpia	$dH(S, p) = TdS + Vdp$	$\frac{\partial T}{\partial p} _S = \frac{\partial V}{\partial S} _p$
Helmholtz	$dF(T, V) = -SdT - pdV$	$\frac{\partial S}{\partial V} _T = \frac{\partial p}{\partial T} _V$
Gibbs	$dG(T, s) = -SdT + Vdp$	$\frac{\partial S}{\partial p} _T = -\frac{\partial V}{\partial T} _p$

3.3 Potenziale Chimico

In presenza di scambio di materia, si riscrive:

$$U = TS - pV + \mu n \quad \text{Energia Interna}$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dn \quad \text{Differenziale Energia Interna}$$

dove si definisce:

$$\mu = \frac{\partial U}{\partial n}|_{S,V} \quad \text{Potenziale Chimico}$$

Si trova una relazione tra le variabili intensive, ovvero:

$$SdT - Vdp + nd\mu = 0 \quad \text{Relazione di Gibbs-Duhem}$$

3.4 Macchine Termiche

Definiamo l'efficienza di una macchina termica come:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} \quad \text{Efficienza}$$

Nel caso del ciclo di Carnot (efficienza massima ottenibile):

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad \text{Efficienza di Carnot}$$

4 Formule non Generali

4.1 Formule per i Gas Ideali

La seguente formula è essenziale:

$$pV = nRT \quad \text{Legge dei Gas Ideali}$$

Dal primo principio segue la relazione differenziale:

$$\delta Q = nc_V dT + pdV = nc_P dT - Vdp$$

dove si riscrivono le proprietà del materiale:

$$c_V := \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \quad \text{Calore specifico a } V \text{ costante}$$

$$c_p := c_V + \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) V \alpha \quad \text{Calore specifico a } p \text{ costante}$$

Ci sono delle formule che legano tra loro i calori specifici:

$$C = c n \quad \text{Capacità Termica}$$

$$c_p - c_V = R \quad \text{Relazione di Mayer}$$

$$c_V = \frac{\nu}{2} R \quad \text{Calore Specifico per Gas Ideale}$$

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} \quad \text{Coefficiente Adiabatico}$$

$$dU = n c_V dT \quad \text{Correlazione } U \text{ con } T$$

dove ν indica i gradi di libertà delle molecole nel gas: in particolare $\nu = 3$ per i gas monoatomici e $\nu = 5$ per i gas biatomici.

Per il calcolo dell'**entropia** vale la seguente formula generale:

$$\Delta S = n c_p \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - n R \ln \left(\frac{p_f}{p_i} \right)$$

4.1.1 Tabella Riassuntiva per i Gas Ideali

Trasformazione isobara

$W = -nR\Delta T$	Lavoro
$Q = nc_p\Delta T$	Calore
$\Delta U = Q + W = nc_V\Delta T$	Differenza Energia
$pV^0 = \text{cost.}$	Equazione curva isobara
$dS = nc_p\frac{dT}{T}$	Entropia

Trasformazione isocora

$W = 0$	Lavoro
$Q = nc_V\Delta T$	Calore
$\Delta U = Q = nc_V\Delta T$	Differenza Energia
$pV^\infty = \text{cost.}$	Equazione curva isocora
$dS = nc_v\frac{dT}{T}$	Entropia

Trasformazione isoterma

$\Delta U = 0$	Differenza Energia
$W = -nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	Lavoro
$Q = -W$	Calore
$pV^1 = \text{cost.}$	Equazione curva isoterma
$dS = nR\frac{dV}{V} = -nR\frac{dp}{p}$	Entropia

Trasformazione adiabatica

$Q = 0$	Calore
$\Delta U = W$	Differenza Energia
$pV^\gamma = \text{cost.}$	Equazione curva adiabatica
$\Delta S = 0$	Entropia

4.2 Gas Reale

Un'approssimazione più realistica della legge dei gas è:

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right) (V - nb) = nRT \quad \text{Equazione di Van der Waals}$$

4.3 Transizione di Fase

La transizione di fase avviene a p, T costanti. Usando Gibbs si trova:

$$G(n, p, T) = G_L(p, T, n_L) + G_V(p, T, n_V) = n_L \cdot g_L(p, T) + n_V \cdot g_V(p, T)$$

segue la condizione $g_L = g_V$. Nel caso di più fasi contemporanee vale:

$$\#\text{var. indep.} = 2 + N - F \quad \text{Regola delle Fasi di Gibbs}$$

Scriviamo $V = n_L \cdot v_L(T) + n_V \cdot v_V(T)$ e $U = n_L \cdot u_L(T) + n_V \cdot u_V(T)$. Allora:

$$\lambda = \frac{\delta Q}{\delta n} = (u_V - u_L) + p(v_V - v_L) \quad \text{Calore Latente di Vaporizzazione}$$

Sperimentalmente vale che:

$$\Delta Q_{\text{lat}} = m \cdot \lambda \quad \text{Formula del Calore Latente}$$

dove m è la massa.

Infine, altre formule note che considerano i coefficienti volumetrici delle fasi sono:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_V - v_L)} \quad \text{Equazione di Clapeyron}$$

$$p \propto e^{-\frac{\lambda}{RT}} \quad \text{Equazione di Clausius-Clapeyron}$$

5 Relatività

5.1 Cinematica

Introduciamo le costanti che giocheranno un ruolo cruciale in questa parte:

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \beta(u) = \frac{u}{c}$$

La teoria si basa su due enunciati fondamentali:

1. *Principio relatività*: Tutti i sistemi inerziali sono tra di loro equivalenti
2. La velocità della luce è costante e vale $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Dato S' un sistema di riferimento in movimento con velocità costante $\mathbf{v} = \mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$ rispetto a S allora si verificano i seguenti fenomeni:

1. *Dilatazione dei tempi*: Detto Δt_0 il tempo proprio, ossia l'intervallo di tempo misurato nel sistema di riferimento fermo rispetto all'orologio, si ha che $\Delta t = \gamma \Delta t_0$
2. *Contrazione delle lunghezze*: Detta ΔL_0 la lunghezza propria, ossia la lunghezza di un oggetto misurata in un sistema di riferimento fermo rispetto all'oggetto, si ha $L = \frac{L_0}{\gamma}$.

In generale valgono le *trasformazioni di Lorentz*

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y - u}{\gamma(u) \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \\ v'_z = \frac{v_z - u}{\gamma(u) \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

dove per (ct, x, y, z) si intendono *differenze* di coordinate tra eventi. Se invece è S a muoversi con velocità $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$ rispetto S' , è come se S' si muovesse di velocità $\mathbf{u} = -u\hat{\mathbf{x}}$ rispetto a S , si ottengono quindi le formule scrivendo $-\mathbf{u}$ in luogo di \mathbf{u} .

$$s^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{Intervallo tra eventi}$$

si conserva per trasformazioni di Lorentz.

Si definisce

$$\xi = \operatorname{arctanh}(-\beta) \quad \text{Rapidità}$$

Con le trasformazioni di Lorentz si vede che non esiste più un concetto di tempo assoluto e si rende quindi necessario introdurre una quarta coordinata, si definisce

$$(ct, x, y, z) \quad \text{Evento}$$

e il luogo di zeri

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{Cono di Luce}$$

Visto che il segno dell'intervallo è invariante per le trasformazioni di Lorentz, indipendentemente da S , si hanno tre tipi di punti:

1. $\Delta s > 0$: tipo *tempo*
2. $\Delta s < 0$: tipo *spazio*
3. $\Delta s = 0$: tipo *luce*

Si definisce un prodotto scalare per quadrivettori: se $\tilde{x}_A = (ct_A, \mathbf{x}_A)$ e $\tilde{x}_B = (ct_B, \mathbf{x}_B)$, allora

$$\tilde{x}_A \cdot \tilde{x}_B := ct_A ct_B - \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B$$

5.2 Dinamica

Detto ds^2 l'intervallo infinitesimo, si definisce

$$d\tau^2 := \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2} \quad \text{Tempo Proprio}$$

Una relazione importante è la seguente:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(v)}$$

Sia $m = M(0)$ la massa propria di un oggetto:

$$M(v) = \gamma(u)M(0) = \gamma(u)m \quad \mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{v}$$

Introduciamo i quadrivettori (4-uple invarianti per trasformazioni di Lorentz):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \gamma(v)(c, \mathbf{v}) && \text{Quadrivelocità} \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \gamma^4(v) \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c}, \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{c^2} \right) && \text{Quadriaccelerazione} \\ \tilde{\mathbf{p}} &= (m\gamma c, \mathbf{p}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) && \text{Quadriimpulso} \\ \tilde{\mathbf{F}} &= m\tilde{\mathbf{a}} && \text{Quadriforza} \\ \tilde{\mathbf{J}} &= (\rho c, \mathbf{J}) && \text{Quadricorrente } (\rho \text{ carica}) \\ \tilde{\nabla} &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) && \text{Operatore Quadrigradiente} \end{aligned}$$

Parlando di energia:

$$\begin{aligned} E^2 &= c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4 && \text{Energia totale} \\ K &= E - mc^2 && \text{Energia cinetica (per } V = 0) \\ \beta &= \frac{v}{c} = \frac{pc}{E} && \text{Formula alternativa} \\ \gamma &= \frac{E}{mc^2} && \text{Formula alternativa} \end{aligned}$$

Le trasformazioni di Lorentz per impulso e energia sono le seguenti:

$$\begin{cases} p'_x = \gamma(u) \left(p_x - \frac{u}{c^2} E \right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(u) (E - up_x) \end{cases}$$

La seconda equazione di Newton si riscrive:

$$\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a} + \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{v}$$

e se $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$ allora

$$\mathbf{F} = m\gamma^3\mathbf{a}$$

5.3 Esercizi particelle

Nel caso di un urto tra particelle lungo l'asse x , detto CM il sistema di riferimento del centro di massa e LAB il sistema di riferimento del laboratorio, si ha:

$$\begin{cases} E_x^{LAB} = \gamma(E_x^{CM} + \beta \mathbf{p}_x^{CM} c) \\ \mathbf{p}_x^{LAB} = \gamma \left(\mathbf{p}_x^{CM} + \beta \frac{E_x^{CM}}{c} \right) \end{cases}$$

Nel caso in cui l'urto non fosse unidimensionale, abbiamo dunque una componente lungo l'asse x , coincidente con la direttrice del movimento della particella che va a scontrarsi, e una lungo l'asse y vale, detto θ l'angolo di riflessione rispetto all'asse x :

$$\begin{cases} p_x = p \cos(\theta) \\ p_y = p \sin(\theta) \\ \tan(\theta) = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \end{cases}$$

Seguono alcune caratteristiche particolari dei *fotoni*, particelle con $m = 0$ e velocità sempre $= c$:

$$\{E = |\mathbf{p}|c$$

6 Meccanica Quantistica

6.1 Fisica Moderna

6.1.1 Corpo Nero ed Emissione

Definiamo delle grandezze legate all'irraggiamento:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dE}{dA_{\perp} dt} && \text{Irraggiamento} \\ w &= \frac{I}{c} && \text{Intensità di irraggiamento} \\ I_{\nu} &= \frac{dI}{d\nu} && \text{Intensità specifica per frequenza} \\ I_{\Omega} &= \frac{dI}{d\nu} && \text{Intensità specifica per angolo con } d\Omega = \frac{dA}{r^2} \end{aligned}$$

La potenza emessa e ricevuta da un corpo sono rispettivamente:

$$M = \frac{\text{potenza emessa}}{\text{superficie area}} \quad \text{Emittanza} \quad I = \frac{\text{potenza ricevuta}}{\text{superficie area}} \quad \text{Irradianza}$$

Si ottiene la *legge di Kirkov* che uguaglia grandezze:

$$\begin{aligned} a(\nu) &= \frac{\text{potenza non riflessa}}{\text{irraggiamento}} && \text{Coefficiente di assorbimento} \\ e &= \frac{M(\text{corpo considerato})}{M(\text{corpo nero})} && \text{Emissività} \\ a &= e && \text{Legge di Kirkov} \end{aligned}$$

Gradualmente si ottengono risultati che portano alla quantizzazione.

$$\begin{aligned} M &= \sigma T^4 && \text{Equazione di Stefan-Boltzmann} \\ \lambda_{\max} &= \frac{2.9 \text{ mm}}{T} && \text{Legge dello spostamento di Wien} \\ \frac{dw}{d\nu} &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT && \text{Equazione di Rayleigh - Jeans} \\ \varepsilon &= h\nu && \text{Quanto di energia} \\ \frac{dw}{d\nu} &= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} && \text{Formula di Planck v.1} \\ \frac{dw}{d\lambda} &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} && \text{Formula di Planck v.2} \end{aligned}$$

dove valgono le seguenti costanti:

$$\begin{aligned} \sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} && \text{Costante di Boltzmann} \\ h &= 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} && \text{Costante di Planck} \end{aligned}$$

6.1.2 Effetto Fotoelettrico

Quando luce colpisce certi materiali emette elettroni. Ci sono problemi:

- l'effetto è istantaneo, gli elettroni vengono emessi appena acceso il raggio di luce.
- l'energia cinetica massima degli elettroni non dipende dall'intensità della luce.
- l'energia cinetica massima degli elettroni dipende dalla frequenza della luce.

Viene risolto da Einstein che spiega l'effetto con i fotoni quantizzati.

$$E_\gamma = h\nu \quad \text{Energia di un fotone}$$

$$E_{\text{tot}} = nE_\gamma \quad \text{Energia irradiata}$$

$$\tilde{k} = \left(\nu, \frac{1}{\lambda} \mathbf{k}\right) \quad \text{Quadrivettore per onde}$$

6.1.3 Effetto Compton

La luce che si riflette a frequenze molto alte cambia lunghezza d'onda. (Con ' si indica la grandezza dopo l'urto)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{Costante di Planck ridotta}$$

$$\lambda = \frac{\hbar}{m_e c} \quad \text{Lunghezza d'onda di Compton ridotta}$$

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad \text{Formula di Compton}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad \text{Differenze lunghezze d'onda}$$

6.2 Meccanica Ondulatoria

6.2.1 Dualità Onda - Particella

Dualità onda - particella di De Broglie:

$$\begin{array}{ccc} \text{Particella} & & \text{Onda} \\ p & \leftrightarrow & \lambda = \frac{\hbar}{p} \end{array}$$

Vediamo di studiare l'equazione dell'onda.

$$E_\gamma = \hbar\omega \quad \omega = 2\pi\nu \quad \text{Energia fotone}$$

$$\mathbf{p}_\gamma = \hbar\mathbf{k} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Impulso fotone}$$

$$f(x, t) = \sin(kx \pm \omega t) \quad \text{Equazione d'onda reale}$$

$$f(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad \text{Equazione d'onda complessa}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad \text{Velocità di fase}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{Velocità di gruppo}$$

L'effetto combinato della somma di sinusoidi fa sì che la velocità d'onda sia la velocità di gruppo e non di fase:

$$\frac{dE}{dp} = v_{\text{onda}} = v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

6.2.2 Equazione di Schrödinger

Per il caso *non relativistico*, vale l'equazione di Schrödinger, che in generale è:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \quad \text{Equazione di Schrödinger}$$

$$|\psi(x, t)|^2 \quad \text{Densità di probabilità di misurare la particella}$$

Troviamo le soluzioni all'equazione.

- *Variabili separabili*: scriviamo $\psi(x, t) = g(t)f(x)$ e si ottiene:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + V(x)f = Ef \quad \text{Equazione di Schrödinger indipendente da } t$$

La soluzione nel caso separabile risulta:

$$\psi(x, t) = Cf(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad \text{Stato stazionario}$$

- *Caso generale*: si ottiene che le soluzioni generali sono

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \quad \text{Stato generico}$$

Specializzando le formule per 3 tipologie di potenziali:

- *Potenziale costante*: sia $V = V_0$ allora la soluzione generica sarà:

$$\psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)} \quad k = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

- *Buca di potenziale infinito*: supponiamo che il potenziale sia infinito all'infuori di $[0, L]$. Allora le soluzioni, per $n \in \mathbb{N}$ saranno:

$$\psi_n(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} & 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{dove } E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

e osserviamo che le funzioni $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ sono una base ortonormale per il prodotto scalare. Le soluzioni generali si scrivono:

$$f(x) = \sum_n c_n f_n(x) \quad \text{Soluzione generale}$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) f(x) dx \quad \text{Coefficienti della soluzione}$$

- *Buca di potenziale reale*: consideriamo potenziale nullo in $[0, L]$ e pari a V_0 altrove. La soluzione generale sarà:

$$f(x) = \begin{cases} A_1 e^{k'x} + B_1 e^{-k'x} & x < -L \\ A_2 \sin(kx) + B_2 \cos(kx) & x \in [0, L] \\ A_3 e^{k'x} + B_3 e^{-k'x} & x > L \end{cases}$$

dove le costanti si pongono per continuità di ψ , ψ' , finitezza all'infinito e normalizzazione. Le costanti saranno:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

7 Meccanica Quantistica

Per poter formalizzare al meglio i concetti fisici è necessario utilizzare un po' di teoria degli *spazi di Hilbert*. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale completo dotato di un prodotto scalare. Nel nostro caso:

- lo *stato di un sistema* è un vettore unitario in questo spazio
- ogni valore di un'osservabile (oggetto che sappiamo misurare) corrisponde ad una dimensione nello spazio
- considereremo il prodotto scalare:

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x)\psi(x)dx$$

Vale che $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle^*$

- le *quantità fisiche* sono *operatori autoaggiunti* A , hanno dunque *autovalori reali*. I possibili valori misurabili della grandezza A sono gli autovalori.
- Due operatori A, B hanno gli stessi autovettori $\iff [A, B] = 0$, dove $[A, B]$ è il *commutatore*: $[A, B] = AB - BA$.

7.1 Operatori

- *Operatore Hamiltoniano*: è definito come

$$H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad \text{Operatore Hamiltoniano}$$

Le autofunzioni sono gli stati stazionari, per i quali l'autovalore è la corrispondente energia:

$$H\psi = E\psi$$

Nel caso generale si trova:

$$H\psi = \sum_n c_n E_n f_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \quad \langle H \rangle_\psi = \sum_n |c_n|^2 E_n$$

- *Operatore Posizione*: è definito con la proprietà

$$X\psi(x) = x\psi(x) \quad \text{Operatore posizione}$$

L'autofunzione per l'operatore posizione corrispondente all'autovalore λ sarà:

$$\delta_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-\lambda)} \quad \text{Delta di Dirac}$$

- *Operatore Impulso*: viene definito come

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{Operatore impulso}$$

L'autofunzione corrispondente all'autovalore λ sarà:

$$\psi(x) = A e^{\frac{i\lambda x}{\hbar}}$$

7.2 Principio di Indeterminazione di Heisenberg

Si definisce la varianza di un osservabile come:

$$\sigma_{A\psi}^2 = \langle (A - \langle A \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi$$

Ne segue la seguente proprietà:

$$\sigma_a^2 \sigma_B^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right]^2 \quad \text{Principio di Indeterminazione di Heisenberg}$$

Nel caso degli operatori posizione e impulso, si ottiene che:

$$[X, P_x] = i\hbar \quad \sigma_X \sigma_{P_x} \geq \frac{\hbar}{2}$$