

Guida Galattica per gli Analisti (come sopravvivere ai mostri di Analisi 2⁺)

Rocca Andrea e Sgubin Alessio

Lezioni di Pietro Majer e Nicola Visciglia - AA 2021-2022
Aggiornato al: 18 febbraio 2025

Indice

1	Spazi e Strutture	9
1.1	Strutture di Spazi	9
1.1.1	Spazio Topologico	9
1.1.2	Spazio Metrico	11
1.1.3	Spazio Normato	11
1.2	Proprietà di Spazi	13
1.2.1	Rapporto tra topologici, metrici e normati	13
1.2.2	Caratterizzazione tra topologici e metrici	13
1.2.3	Completezza	13
1.2.4	Compattezza	18
1.3	Spazi più importanti	23
1.3.1	Spazio \mathbb{R}^n	23
1.3.2	Spazio delle Successioni	26
1.3.3	Spazio delle Lineari Continue	26
1.4	Continuità	28
2	Teoremi su Spazi	29
2.1	Serie di Neumann	29
2.2	Teorema di Baire	31
2.3	Teoremi di Immersione	32
2.4	Teorema di Mazur - Ulam	35
2.5	Teorema delle Contrazioni	37
3	Calcolo Differenziale	41
3.1	Differenziale di Fréchet	41
3.1.1	Definizione	41
3.1.2	Proprietà di Calcolo	42
3.2	Differenziale Parziale	44
3.3	Teoremi sui Differenziali	46
3.4	Polinomio di Taylor	55
3.4.1	Definizione	55
3.4.2	Stime del Resto per Curve	56
3.4.3	Stime del Resto per Normati	58
3.5	Ottimizzazione di Funzioni	60
3.5.1	Punti di Minimo	60
3.5.2	Caratterizzazione di Minimo	60
3.5.3	Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange	61
3.6	Complenessificazione	67

4	Equazioni Differenziali	69
4.1	Esponenziale in $\mathcal{L}(E)$	69
4.1.1	Definizione	69
4.1.2	Proprietà	69
4.1.3	Regole di Calcolo	70
4.2	Equazioni Differenziali Ordinarie Lineari	73
4.2.1	E.D.O. Lineari a Coefficienti Costanti	73
4.2.2	E.D.O. Lineari a Coefficienti Variabili	76
4.2.3	E.D.O. Lineare a Coefficienti Periodici	82
4.3	Equazioni Differenziali Ordinarie	86
4.3.1	Definizione di E.D.O.	86
4.3.2	Teorema di Cauchy - Lipschitz - Picard - Lindelöf	87
4.3.3	Caratterizzazione di Successioni Massimalmente Definite	92
4.3.4	Dipendenza dai Dati Iniziali	94
4.4	Esercitazioni su E.D.O.	101
4.4.1	E.D.O. a Variabili Separabili	101
4.4.2	Equazioni di Bernoulli	102
4.4.3	Metodo del Wronskiano	102
4.4.4	E.D.O. con Teorema di Dini	104
4.4.5	Studio di Soluzioni globali e non	105
4.4.6	Stabilità dei Punti di Equilibrio - Teoria di Lyapunov	108
5	Teoremi di Densità	113
5.1	Equicontinuità e Ascoli-Arzelà	113
5.2	Semicontinuità	117
5.3	Lunghezza di Curve e Hopf-Rinow	118
5.4	Polinomi di Bernstein	121
5.4.1	Costruzione euristica	121
5.4.2	Interpretazione Probabilistica	127
5.5	Teorema di Stone-Weierstrass	128
5.6	Conseguenze	132
5.6.1	Sulla convergenza dei Polinomi di Bernstein	132
5.6.2	Sul Teorema di Stone-Weierstrass	133
5.7	Esercitazioni e Applicazioni	137
5.7.1	Equicontinuità	137
5.7.2	Teorema di Peano	137
5.7.3	Pennello di Peano	138
6	1-Forme Differenziali	141
6.1	1-Forma differenziale	141
6.2	Integrale di Linea	142
6.3	Caso di 1-forme su \mathbb{R}^n	144
7	Teoria della Misura	149
7.1	Definizioni sulla Misura	149
7.1.1	Fatti base sulle Misure	153
7.2	Costruzione di Misure	155
7.2.1	Funzioni d'insieme \rightarrow Misure Esterne	155
7.2.2	Misure Esterne \rightarrow Misure	156
7.2.3	Misure sugli Intervalli	158

7.2.4	Misura di Lebesgue (pt.1)	161
7.2.5	Misura Prodotto	161
7.2.6	Misura di Lebesgue (pt.2)	162
7.3	Funzioni Misurabili	165
7.4	Integrazione secondo Lebesgue	167
7.4.1	Teoremi di Integrazione	173
7.4.2	Teoremi di Calcolo	181
7.4.3	Mappe Lipschitz	189
7.4.4	Mappe Lineari	190
7.5	Tecniche di Calcolo e Applicazioni	193
7.5.1	Tecniche di Calcolo (Integrali Doppi)	193
7.5.2	Tecniche di Calcolo (Integrali Tripli)	193
7.5.3	Integrale di Eulero e Formula di Stirling	194
7.5.4	Confronto tra Integrale di Riemann e Lebesgue	196
7.6	Risultati Topologici	197
7.7	Problema dei Momenti	201
7.7.1	Teorema di Riesz-Markov-Kakutani	201
7.7.2	Problema dei Momenti	205
8	Sottovarietà Differenziali di \mathbb{R}^n	209
8.1	Sottovarietà Differenziali: definizioni	209
8.2	Misure Superficiali di Sottovarietà	212
8.2.1	Definizioni	212
8.2.2	Teoremi su Misure Superficiali	212
9	Amenità	221

Prefazione

L'universo di Analisi Matematica 2 è meraviglioso, ma al contempo bisogna fare attenzione. Riportiamo a tal proposito una citazione del nostro mentore, grande esperto dei viaggi intergalattici:

*”Detta così sembra che da una variabile a spazi di Banach tutto funziona un po' uguale. In parte è vero e bisogna riconoscere quello che funziona senza fatica, però poi si capisce che una funzione a più variabili, già in due variabili, può essere piuttosto complicata. Se uno è costretto a scendere lì è come nei... capito... Un conto è quando con l'astronave
fiuuuuuuu uno guarda dall'alto un pianetino, allora siamo tutti bravi poi se invece
bisogna scendere dove ci sono ahhhhh mostri orrendi no, giusto, quindi questo per dire
che in generale e quando uno scende...”*

Siamo consapevoli che un esploratore dilettante potrebbe ora spaventarsi quindi ricordate: DON'T PANIC, anche gli autori della Guida Galattica per gli Analisti sono impanicati. Il nostro team di scrittori scelti (poveracci capitati a caso al corso Analisi Matematica 2 dell'UniPi) è stato incaricato di descrivere i pianeti, i pericoli e le meraviglie di quest'universo, sotto l'illuminante guida dei professori Pietro Majer e Nicola Visciglia. A soccorrerli, i compagni di corso che con correzioni e annotazioni hanno portato alla luce le trappole più infami di quest'universo e vi garantiranno la sopravvivenza in questa avventura.

Non ci resta quindi che augurarvi... BUON VIAGGO!

Capitolo 1

Spazi e Strutture

1.1 Strutture di Spazi

1.1.1 Spazio Topologico

Definizione 1.1.1 - Spazio Topologico

Uno spazio topologico è una coppia (X, τ) , dove X insieme e τ famiglia di sottoinsiemi di X con le proprietà:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. se $A, B \in \tau$ allora $A \cap B \in \tau$
3. data una famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ si ha $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Definizione 1.1.2 - Spazio di Hausdorff

Uno spazio di Hausdorff è uno spazio topologico (X, τ) per cui:

$$\forall x, y \in X, x \neq y \quad \exists A, B \in \tau \text{ tale che } A \cap B = \emptyset : \quad x \in A, y \in B$$

Definizione 1.1.3 - Aperto e Chiuso

Sia (X, τ) spazio topologico. Allora:

- $A \in \tau$ si dice aperto della topologia.
- $C \subseteq X$ tale che $X \setminus C \in \tau$ si dice chiuso della topologia.

Definizione 1.1.4 - Parte Interna

Sia (X, d) spazio metrico con $S \subseteq X$. Allora il massimo aperto tra gli inclusi in S è la parte interna di S . In particolare:

$$int(S) = \overset{\circ}{S} = \bigcup_{\substack{A \subseteq S \\ \text{aperto}}} A$$

Definizione 1.1.5 - Chiusura

Sia (X, τ) spazio topologico con $S \subseteq X$. Allora il minimo chiuso tra quelli che contengono S è la chiusura di S . In particolare:

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{C \supseteq S \\ \text{chiuso}}} C$$

Definizione 1.1.6 - Denso

Sia (X, τ) spazio topologico con $S \subseteq X$. S si definisce denso se $\bar{S} = X$.

Definizione 1.1.7 - Intorno

Sia (X, τ) spazio topologico con $U \subseteq X$ e $x \in X$. U è un intorno di x se $\exists A \in \tau$ tale che $x \in A \subseteq U$.

Osservazione 1.1.1 - Caratterizzazione Aperti

Sia (X, τ) spazio topologico. Posso caratterizzare gli aperti:

$$A \in \tau \Leftrightarrow A \text{ è intorno di ogni suo punto}$$

Definizione 1.1.8 - Sottospazio Topologico

Sia (X, τ_X) spazio topologico con $Y \subseteq X$. Y è spazio topologico con la topologia di sottospazio:

$$\tau_Y = \{A \cap Y \mid A \text{ aperto di } X\}$$

Definizione 1.1.9 - Finezza

Siano τ_1 e τ_2 topologie dello stesso insieme X . τ_1 si dice più fine di τ_2 se e solo se $\tau_1 \supseteq \tau_2$.

Definizione 1.1.10 - Base di una Topologia

Sia (X, τ) uno spazio topologico. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ è una base della topologia se:

$$\forall A \in \tau \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} : A = \bigcup_{F \in \mathcal{B}'} F$$

Definizione 1.1.11 - Prodotto di Topologie

Siano (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) spazi topologici. La topologia prodotto è l'insieme $X_1 \times X_2$ con la topologia definita:

1. come la topologia meno fine che rende le proiezioni $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ e $\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ continue.
2. date \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 basi di X_1 e X_2 rispettivamente,

$$\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

è una base della topologia.

Definizione 1.1.12 - Connessione

Sia X spazio topologico. Allora:

- X non è connesso $\Leftrightarrow \exists A_1, A_2$ aperti non vuoti disgiunti tali che:

$$A_1 \cup A_2 = X$$

- X è connesso $\Leftrightarrow X$ e \emptyset sono gli unici chiusi e aperti
- X normato è connesso $\Leftrightarrow X$ è connesso per spezzate

1.1.2 Spazio Metrico

Definizione 1.1.13 - Spazio Metrico

Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione distanza tale che:

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0 \quad e \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definizione 1.1.14 - Palla Aperta

Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $x \in X$ e $r \in [0; +\infty[$, allora la palla aperta di centro x e raggio r è:

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

Definizione 1.1.15 - Aperto Metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subseteq X$. A si definisce aperto metrico per (X, d) se:

$$\forall x \in A \exists \varepsilon > 0 \mid B(x, \varepsilon) \subseteq A$$

Definizione 1.1.16 - Sottospazio Metrico

Sia (X, d_X) spazio metrico. Sia $Y \subseteq X$. Allora (Y, d_Y) è sottospazio metrico di (X, d_X) dove la distanza $d_Y = d_X|_{Y \times Y}$.

1.1.3 Spazio Normato

Definizione 1.1.17 - Seminorma

Sia V spazio vettoriale. Una sua seminorma è una funzione $\|\cdot\| : V \rightarrow [0; +\infty[$ tale che:

1. $\|\cdot\|$ positivamente omogenea. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

2. $\|\cdot\|$ subadditiva. $\forall x, y \in V$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Definizione 1.1.18 - Norma e Spazio Normato

Sia V uno spazio vettoriale con una seminorma $\|\cdot\|$. Allora $\|\cdot\|$ è una norma se:

$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

In questo caso, $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato.

Definizione 1.1.19 - Prodotto Scalare

Un prodotto scalare per lo spazio vettoriale V è una funzione $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ che sia:

- simmetrica: $\forall x, y \in V : \phi(x, y) = \phi(y, x)$
- bilineare: $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x_1 + \lambda x_2, y_1) = \phi(x_1, y_1) + \lambda \phi(x_2, y_1)$$

$$\phi(x_1, y_1 + \lambda y_2) = \phi(x_1, y_1) + \lambda \phi(x_1, y_2)$$

- positiva: $\forall x \in X : \phi(x, x) \geq 0$

Definizione 1.1.20 - Finezza

Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ norme di uno spazio vettoriale E .

Allora sono equivalenti:

1. $\|\cdot\|_1$ è più fine di $\|\cdot\|_2$
2. $id : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ è continua¹
3. $\exists c \leq 0$ tale che $\|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1 \quad \forall x \in E$

¹Vedere la Definizione 1.4.2.

1.2 Proprietà di Spazi

1.2.1 Rapporto tra topologici, metrici e normati

Proposizione 1.2.1 - Metrico è Topologico

Sia (X, d) uno spazio metrico. X è in modo naturale uno spazio topologico con gli aperti definiti dalla metrica.

Proposizione 1.2.2 - Normato è Metrico

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. V è in modo naturale uno spazio metrico con la distanza:

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\|$$

1.2.2 Caratterizzazione tra topologici e metrici

Sia (X, d) spazio metrico. Si possono definire nozioni topologiche in spazi metrici tramite una caratterizzazione sequenziale. In particolare:

Definizione	Spazio Topologico	Spazio Metrico
C chiuso	$X \setminus C$ aperto	$\forall \{x_k\} \subseteq C$ convergente a $x \in X$ allora $x \in C$
$x \in \bar{S}$	$\forall U$ intorno di x vale $U \cap S \neq \emptyset$	$\exists \{x_k\} \subseteq S$ tale che $x_k \rightarrow x$
f continua in x	$\forall U$ intorno di $f(x)$ $\exists V$ intorno di x tale che $f(V) \subseteq U$	$\forall \{x_k\}$ convergenti a x allora $f(x_k) \rightarrow f(x)$
X compatto	\forall ricoprimento aperto \exists sottoricoprimento finito	$\forall \{x_k\} \subseteq X$ convergente $\exists \{x_{k_j}\} \subseteq \{x_k\}$ convergente

1.2.3 Completezza

Definizione 1.2.1 - Successione di Cauchy

Sia (X, d) spazio metrico. Una successione $\{x_n\} \in X$ è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall p, q > N \quad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

Proposizione 1.2.3 - Proprietà delle Successioni di Cauchy

Valgono le seguenti proprietà:

- $\{x_n\}$ converge $\Rightarrow \{x_n\}$ è di Cauchy.
- $\{x_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ è limitata.
- $\{x_n\}$ è di Cauchy e ha sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ converge, allo stesso limite di $\{x_{n_k}\}$.
- $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ è uniformemente continua e $\{x_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow \{f(x_n)\}$ è di Cauchy in Y .

Dimostrazione. Dimostriamo le proprietà in ordine.

- Sia $\{x_n\}$ successione convergente, $x_n \rightarrow x$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, per definizione di limite per una successione, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n > N$. Allora per tale N vale che: $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Cioè la successione è di Cauchy.

2. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy. Allora per $\varepsilon = 1$ per definizione esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon = 1$$

Ciò significa che dato il numero reale $R = \max(\{d(x_N, x_k) \mid 0 \leq k < N\} \cup \{1\})$ vale:

- per ogni $k < N$: $x_k \in \overline{B}(x_N, R)$ per scelta di R come distanza massima dei primi N elementi della successione da x_N
- per ogni $n \geq N$: $x_n \in B(x_N, 1) \subseteq \overline{B}(x_N, R)$ per la proprietà di successione di Cauchy

e segue che $\{x_n\} \subseteq \overline{B}(x_N, R)$ cioè la successione è limitata.

3. Dimostro che se $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ per $k \rightarrow +\infty$, allora $x_n \rightarrow \bar{x}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Infatti dato $\varepsilon > 0$, esistono:

- $K \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n_k > K$
- $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n, m > N$

da cui prendendo il massimo $M = \max\{K, N\}$ vale: per ogni $n > M$ e per $n_k > N$:

$$d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x}) < \varepsilon$$

4. Nelle ipotesi della proprietà, sia $\varepsilon > 0$. Considero $\eta > 0$ tale che $\omega(\eta) < \varepsilon$. Tale numero esiste perchè ω è infinitesima in 0. Allora per definizione di successione di Cauchy esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \eta$ per ogni $n, m > N$. Allora per ogni $h, k > N$ vale:

$$d(f(x_h), f(x_k)) < \omega(d(x_n, x_y)) < \omega(\eta) < \varepsilon$$

da cui la tesi. ■

Definizione 1.2.2 - Spazio Metrico Completo

Uno spazio metrico (X, d) è completo se tutte le successioni di Cauchy in X convergono.

Definizione 1.2.3 - Spazio di Banach

Uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ che sia completo come spazio metrico, è detto spazio di Banach.

Proposizione 1.2.4 - Proprietà della Completezza

Valgono le seguenti proprietà:

1. se (X, d) è spazio metrico compatto, allora è completo
2. (X_1, d_1) e (X_2, d_2) sono spazi metrici completi $\Leftrightarrow X_1 \times X_2$ è spazio metrico completo
3. Siano (X, d) è spazio metrico completo e $Y \subseteq X$. Allora: Y chiuso $\Leftrightarrow Y$ è sottospazio metrico completo
4. Siano S un insieme e $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach.
Allora $\mathcal{B}(S, E) = \{f : S \rightarrow E \mid \|f\|_{\infty, S} < +\infty\}$ è completo

Dimostrazione. Dimostriamo le proprietà in ordine.

1. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ successione di Cauchy.
Dato che X è compatto, per la Caratterizzazione 1.2.2 vale che $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione convergente. Allora per la Proprietà 3, la successione $\{x_n\}$ converge allo stesso limite della sottosuccessione convergente.
Dunque, valendo la proprietà per tutte le successioni di Cauchy, X è completo.
2. Per definizione di distanza prodotto², si deduce subito che:

$$\{(x_n, y_n)\} \subseteq X_1 \times X_2 \text{ di Cauchy} \Leftrightarrow \{x_n\} \subseteq X_1 \text{ e } \{y_n\} \subseteq X_2 \text{ di Cauchy}$$

Ma allora, se X_1 e X_2 completi, allora per $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} x_n \rightarrow \bar{x} \in X_1 \\ y_n \rightarrow \bar{y} \in X_2 \end{cases}$$

Segue banalmente che $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ per $n \rightarrow +\infty$. Analogamente per l'implicazione opposta.

3. Usiamo la Caratterizzazione di chiuso 1.2.2.
(\Rightarrow) Se Y è chiuso, allora per caratterizzazione di chiuso se una successione $\{x_n\} \subseteq Y$ converge a $\bar{x} \in X$, allora $\bar{x} \in Y$. Presa una successione di Cauchy di Y , essa è di Cauchy in X completo. Allora, convergendo in X , converge nel sottospazio Y .
(\Leftarrow) Sia Y completo. Allora, se $\{x_n\} \subseteq Y$ è convergente in X completo, è anche di Cauchy in X (quindi in Y). Per completezza di Y , allora $x_n \rightarrow \bar{x} \in Y$. Il sottospazio Y verifica la caratterizzazione di chiuso.
4. Useremo la Proposizione 1.2.5. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{B}(S, E)$ successione di funzioni tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$. Proviamo allora che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge rispetto a $\|\cdot\|_{\infty, S}$.
Considerando la convergenza puntuale, costruiamo $F \in \mathcal{B}(S, E)$ a cui la somma convergerà. In particolare per ogni $x \in S$ si osserva che $\|f_n(x)\|_E \leq \|f_n\|_{\infty, S}$, quindi la seguente serie converge assolutamente in E :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = F(x)$$

Definendo con questo metodo la funzione F in ogni punto di S , dimostriamo che appartiene a $\mathcal{B}(S, E)$:

$$\|F(x)\|_{\infty, S} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n(x)\|_E \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\| < +\infty$$

Resta da dimostrare usando la norma $\|\cdot\|_{\infty, S}$ che:

$$\sum_{k=0}^n f_k \rightarrow F \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Si vede in particolare che:

$$\left\| F - \sum_{k=0}^n f_k \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{k>n} f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k>n} \|f_k\| = o(1)$$

²La distanza prodotto si può scegliere tra le distanze prodotto già note, tra di loro equivalenti.

per $n \rightarrow +\infty$ in quanto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ converge in E .

Dunque per ogni successione convergente in $\mathcal{B}(S, E)$, il limite sta in $\mathcal{B}(S, E)$ quindi lo spazio è completo. ■

Lemma 1.2.1 - Convergenza per Serie

Sia E spazio vettoriale. Ogni $\{x_n\} \subseteq E$ si può scrivere:

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

Allora vale che:

$$\{x_n\} \text{ è convergente} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} (x_{i+1} - x_i) \text{ è convergente}$$

Dimostrazione. Banalmente, data la scrittura in somma di x_n , valgono l'implicazione doppia: se il termine a sinistra converge, lo fa quello a destra e viceversa. ■

Proposizione 1.2.5 - Completezza per Serie

Sia $(E, \|\cdot\|)$ spazio normato. È completo se e solo se ogni serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ assolutamente (normalmente) convergente è convergente.

Dimostrazione. Dimostro le due implicazioni separatamente.

(\Rightarrow) Sia E uno spazio normato completo e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ assolutamente convergente.

Considerando le somme parziali assoluta e non:

$$\begin{cases} \sigma_n = \sum_{k=0}^n \|x_k\| \\ s_n = \sum_{k=0}^n x_k \end{cases}$$

dalla convergenza assoluta si sa che σ_n converge in \mathbb{R} completo, quindi $\{\sigma_n\}$ di Cauchy. Ne segue che anche $\{s_n\}$ è di Cauchy. Infatti siano $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che $|\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon$ per ogni $p > q > N$. Allora:

$$\|s_p - s_q\| = \left\| \sum_{k=q+1}^p x_k \right\| \leq \sum_{k=q+1}^p \|x_k\| = |\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon$$

cioè la definizione di successione di Cauchy. Essendo $\{s_n\}$ di Cauchy in E completo, è convergente.

(\Leftarrow) Sia E uno spazio normato tale che ogni serie assolutamente convergente, converge. Proviamo che E è completo.

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy, provo che essa converge in E . Essendo di Cauchy, in particolare posso considerare una successione di indici $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$$

Per costruire questa successione, basta considerare $\varepsilon_k = 2^{-k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per definizione di successione di Cauchy, prendo n_k tale che per ogni $p > n_k$:

$$\|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon_k$$

Tali n_k sono la successione cercata. A questo punto:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 2 < +\infty$$

cioè la serie converge assolutamente.

Per le ipotesi su E , allora la serie converge semplicemente e per il Lemma 1.2.1, anche la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ converge. Dato che $\{x_n\}$ di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, converge in E . ■

Proposizione 1.2.6 - Condizione per Completezza in Lineari

Siano E, F spazi normati, sia in particolare F completo. Allora $\mathcal{L}(E, F)$ è completo.

Dimostrazione. Consideriamo la palla $B = \overline{B_E(0, 1)}$ e la mappa restrizione:

$$\begin{aligned} j : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{B}(B, F) \\ T &\rightarrow T|_B \end{aligned}$$

Tale mappa j è lineare iniettiva e isometria con l'immagine (immersione isometrica):

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|T\|_{\infty, B}$$

Se dimostro che $Im(j)$ è un chiuso di $\mathcal{B}(B, F)$ (spazio completo per la Proposizione 4), allora $Im(j)$ è completo, quindi per isometria $\mathcal{L}(E, F)$ è completo.

Sia in particolare $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ una successione di mappe lineari tale che:

$$j(T_n) = T_n|_B \xrightarrow{unif} f$$

dove $f \in \mathcal{B}(B, F)$. Dimostro che $f \in Im(j)$.

Definiamo la mappa:

$$T(x) = \|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

e verifico che è lineare e controimmagine di f tramite j .

- T è lineare in quanto per $x, y \in E$ e per $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$T(\alpha x) = \|\alpha x\| \cdot f\left(\frac{\alpha x}{\|\alpha x\|}\right) = \alpha \|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \alpha T(x)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} T(x+y) &= \|x+y\| \cdot f\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x+y\| \cdot T_n|_B\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x+y\| \cdot T_n\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) + T_n(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\| \cdot T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|y\| \cdot T_n\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\| \cdot T_n|_B\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|y\| \cdot T_n|_B\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \|y\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = T(x) + T(y) \end{aligned}$$

- $j(T) = f$ infatti per ogni $x \in B$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n|_B(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\| \cdot T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = T(x) = T|_B(x) = j(T)(x) \end{aligned}$$

per cui effettivamente $f \in \text{Im}(j)$, segue la tesi. ■

1.2.4 Compattezza

Proprietà Topologiche

Definizione 1.2.4 - Compattezza (Heine-Borel)

Sia X spazio topologico. Allora X è compatto se per ogni ricoprimento aperto di X , esiste un sottoricoprimento finito.

Definizione 1.2.5 - Numerabile Compattezza

Sia X spazio topologico. Allora X ha la proprietà di numerabile compattezza se per ogni ricoprimento aperto numerabile di X , esiste un sottoricoprimento finito.

Definizione 1.2.6 - Proprietà di Lindelöf

Sia X spazio topologico. Allora X ha la proprietà di Lindelöf se per ogni ricoprimento aperto di X , esiste un sottoricoprimento numerabile.

Definizione 1.2.7 - Proprietà di Bolzano-Weierstrass

Sia X uno spazio topologico.

Definisco $x \in X$ punto di accumulazione per $A \subseteq X$ se per ogni intorno U di x vale che $|U \cap A| \geq \aleph_0$.

Allora X ha la proprietà di Bolzano-Weierstrass se ogni sottoinsieme infinito ha punti di accumulazione.

Definizione 1.2.8 - Compattezza Sequenziale

Sia X spazio topologico. Allora X è sequenzialmente compatto se ogni successione in X ha sottosuccessioni convergenti.

Definizione 1.2.9 - I-Numerabile (A_1)

Sia X spazio topologico. X è I-numerabile se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Definizione 1.2.10 - II-Numerabile (A_2)

Sia X spazio topologico. X è II-numerabile se ha una base numerabile per la sua topologia.

Definizione 1.2.11 - Separabile

Sia X spazio topologico. X è separabile se esiste un sottoinsieme denso numerabile.

Proprietà Metriche

Definizione 1.2.12 - Spazio Totalmente Limitato

Sia X uno spazio metrico. Allora X è totalmente limitato se equivalentemente:

- $\forall \varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di palle di raggio ε che ricopre X :

$$X = \bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, \varepsilon)$$

- $\forall \varepsilon > 0$ esiste una ε -rete finita³.

Compattezza in Metrici

Lemma 1.2.2 - Equivalenza Proprietà

Sia X uno spazio topologico. Allora sono equivalenti:

- X compatto secondo Heine-Borel
- X ha proprietà di Lindelöf e proprietà di numerabile compattezza

Dimostrazione. Banale, segue direttamente dalle definizioni. ■

Lemma 1.2.3

Sia X spazio topologico. Allora:

- X ha proprietà di Bolzano-Weierstrass
- X ha proprietà di numerabile compattezza

Dimostrazione. Sia X con proprietà di numerabile compattezza, sia $A \subseteq X$ infinito. Consideriamo l'insieme dei punti di accumulazione di A (derivato di A):

$$D(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} \overline{A \setminus F}$$

dove $\mathcal{F}(A) = \{F \subseteq A, F \text{ finito}\}$. Infatti: $x \in D(A) \stackrel{def}{\iff} \forall U \in \mathcal{I}(x), |U \cap A| \geq \aleph_0$ cioè $\forall U \in \mathcal{I}(x), \forall F \subseteq A$ finito $U \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ cioè $\forall F \in \mathcal{F}(A), x \in \overline{A \setminus F}$ dunque se e solo se $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} \overline{A \setminus F}$.

Se $A \subseteq X$ è infinito (senza perdere generalità numerabile) allora $D(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} \overline{A \setminus F}$ è

intersezione di una famiglia di chiusi $\{\overline{A \setminus F}\}_{F \in \mathcal{F}(A)}$, numerabili (se A è numerabile lo è anche $\mathcal{F}(A)$)

$$\overline{A \setminus F_1} \cap \overline{A \setminus F_2} \cap \dots \cap \overline{A \setminus F_k} \supseteq \overline{A \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_k)} \neq \emptyset$$

Viceversa: sia X con proprietà di Bolzano-Weierstrass; sia $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di chiusi con proprietà dell'intersezione finita. Senza perdere generalità, $C_{k+1} \subseteq C_k$ (basterebbe considerare $C'_k = \bigcap_{j \leq k} C_j$). Abbiamo due casi:

1. C_k è stazionario, allora

$$\bigcap_{k \geq 0} C_k = C_{k_0} \neq \emptyset$$

2. C_k non è stazionario, senza perdere generalità $C_{k+1} \neq C_k \forall k$.

Sia $x_k \in C_k \setminus C_{k-1}$, allora $\{x_k\}_{k \geq 0}$ è un insieme infinito (sono tutti differenti).

Sia x^* punto di accumulazione per $\{x_k\}_{k \geq 0}$. Allora $x^* \in \overline{C_k} = C_k$ (ogni intorno di x^* contiene almeno un x_j con $j \geq k$ dunque $x_j \in C_k$ e allora $x^* \in \bigcap_{k \geq 0} C_k \neq \emptyset$)

■

³Una ε -rete corrisponde all'insieme dei centri $\{x_i\}$ delle palle di raggio ε che ricoprono X nella versione precedente della definizione.

Lemma 1.2.4

Sia X spazio topologico. Allora:

$$\text{Sequenziale compattezza} \Rightarrow \text{Bolzano-Weierstrass}$$

Se X è I-numerabile, allora:

$$\text{Sequenziale compattezza} \Leftarrow \text{Bolzano-Weierstrass}$$

Dimostrazione. Dimostriamo i punti separatamente.

- $\text{SC} \Rightarrow \text{BW}$: sia X sequenzialmente compatto. Sia $A \subseteq X$ infinito, sia $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ iniettiva, cioè $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ con a_k distinti. Sia $a_{k_j} \rightarrow a^* \in X$ ($j \rightarrow \infty$). Allora a^* è punto di accumulazione: ogni intorno di a^* contiene x_{k_j} definitivamente, dunque infiniti punti di A .
- $\text{A}_1 + \text{BW} \Rightarrow \text{SC}$: sia X I-numerabile con proprietà di Bolzano-Weierstrass. Sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in X .
 1. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è finito: c'è una sottosuccessione costante (principio dei cassetti) e quindi convergente.
 2. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è infinito: sia x^* punto di accumulazione di $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Sia $\{B_r\}$ base di intorni numerabile e decrescente di x^* . Sia $\forall j, k_j \in \mathbb{N}$ tale che $x_{k_j} \in B_j$ e (per induzione) in modo che $k_{j+1} > k_j$. Allora $\forall i \geq j, x_{k_i} \in B_i \subseteq B_j$ e $\forall j x_{k_i} \in B_j$ definitivamente in i : dunque $x_{k_j} \rightarrow x^*$.

Questo conclude la dimostrazione. ■

Lemma 1.2.5

Sia X spazio topologico. Allora:

$$\text{II-numerabile} \Rightarrow \text{Lindelöf e Separabilità}$$

Sia X spazio metrico. Allora:

$$\text{Lindelöf} \Rightarrow \text{Separabilità} \Rightarrow \text{II-numerabile}$$

Dimostrazione. 1. Sia X II-numerabile. Sia \mathcal{A} un ricoprimento aperto di X . Sia \mathcal{B} una base numerabile di aperti ($\neq \emptyset$) di X . Sia:

$$B' = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ tale che } B \subseteq A\}$$

e per ciascuno dei $B \in B'$, sia $A_B \in \mathcal{A}$ tale che $B \subseteq A_B$. Allora la famiglia:

$$\mathcal{A}' := \{A_B\}_{B \in B'}$$

è una sottofamiglia numerabile di \mathcal{A} ed è ancora un ricoprimento di X (se $x \in X$, allora $\exists A \subseteq \mathcal{A}$ tale che $x \in A$ (\mathcal{A} è ricoprimento) ed $\exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq A$). Inoltre, sia $\forall B \in \mathcal{B}, x_B \in B$. Allora la famiglia $\{x_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ è un sottoinsieme numerabile denso: ogni aperto non vuoto contiene un $B \in \mathcal{B}$ che contiene x_B come elemento.

2. Sia X metrico e Lindelöf. Sia \mathcal{B}^n un ricoprimento numerabile di palle di raggio $\frac{1}{n}$ (estratta dalla famiglia delle palle di raggio $\frac{1}{n}$). Facciamo questo $\forall n \in \mathbb{N}_+$. Allora l'insieme dei centri di \mathcal{B}^n è una $\frac{1}{n}$ -rete, e l'unione di questi per $n \geq 1$ è un insieme denso (è $\frac{1}{n}$ -rete $\forall n \geq 1$).
Inoltre, sia $y \subseteq X$ numerabile denso e sia:

$$\mathcal{B} = \left\{ B \left(y, \frac{1}{n} \right) : y \in Y, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

allora \mathcal{B} è numerabile, ed è una base. Infatti dato A aperto di X , sia $a \in A$. Vale $a \in B(y_a, \frac{1}{n_a}) \subseteq A$ pur di prendere $d(a, y_a)$ e $\frac{1}{n_a}$ sufficientemente piccoli. Allora si ottiene l'aperto A come unione di aperti della base:

$$A = \bigcup_{a \in A} B \left(y_a, \frac{1}{n_a} \right)$$

Questo completa la dimostrazione. ■

Lemma 1.2.6

Sia X spazio metrico. Allora:

$$\text{Bolzano-Weierstrass} \Rightarrow \text{Totale limitatezza} \Rightarrow \text{Separabile}$$

Dimostrazione. Dimostriamo le implicazioni in ordine.

- BW \Rightarrow TL. Facciamo la contronominale: sia X non totalmente limitato, allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che X non possiede ε -reti finite. Possiamo definire induttivamente una successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tale che:

$$x_k \in X \setminus \bigcup_{0 \leq j < k} B(x_j, \varepsilon)$$

cioè $d(x_k, x_j) \geq \varepsilon, \forall 0 \leq j < k$.

Allora l'insieme infinito $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ non ha punti di accumulazione. Dunque X non ha proprietà di Bolzano-Weierstrass.

- TL \Rightarrow S sia F_n una $\frac{1}{n}$ - rete finita $\forall n \geq 1$. Allora $\bigcup_{n \geq 1} F_n$ è numerabile denso. ■

Citazione 1. *Che cosa ho appena dimostrato scusate? Ogni tanto mi succede di entrare in un loop...*

Teorema 1.2.1 - Compattezza in Metrici

Sia (X, d) spazio metrico. Allora sono equivalenti:

1. Compattezza secondo Heine-Borel
2. Numerabile compattezza
3. Proprietà di Bolzano-Weierstrass
4. Compattezza sequenziale

5. Completezza e Totale limitatezza

Dimostrazione. Riportiamo le implicazioni mancanti.

- SC \Rightarrow Completo Già visto: se (x_k) è successione di Cauchy in X sequenzialmente compatto, ha una sottosuccessione convergente (x_{k_j}) e allora x_k stessa converge allo stesso limite.
- TL \Rightarrow ogni successione ha una sottosuccessione di Cauchy. Sia X spazio metrico totalmente limitato. Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in X . Sia $(x(k, 1))$ una sottosuccessione di (x_k) che stia tutta in un'unica palla di raggio 1 (lo posso fare perchè vi è un ricoprimento finito di palle di raggio 1, e una di esse contiene x_k per infiniti indici, sempre per principio dei cassetti). Iteriamo: sia $(x(k, 2))$ una sottosuccessione della $(x(k, 1))_k$ che stia tutta in una unica palla di raggio $\frac{1}{2}$. Per induzione: $\forall n \exists x(k, n)$ successione che sta in una stessa palla di raggio $\frac{1}{n}$ e $x(k, n+1)$ è sottosuccessione di $x(k, n)$. Allora la successione $x(k, k)$ è una sottosuccessione di (x_k) tale che $\forall n$ appartiene definitivamente a una palla di raggio $\leq \frac{1}{n}$ cioè è di Cauchy. ■

1.3 Spazi più importanti

1.3.1 Spazio \mathbb{R}^n

Definizione 1.3.1 - Prodotto Scalare Standard

Un prodotto scalare è una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dove:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Proposizione 1.3.1 - Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia (\cdot, \cdot) prodotto scalare di \mathbb{R}^n . Allora $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

Ne esistono tre dimostrazioni:

1. Dimostrazione "scema", quadrato scalare.

$$\begin{aligned} 0 &\leq [(x \cdot y)x - (x \cdot x)y]^2 = (x \cdot y)^2(x \cdot x) - 2(x \cdot y)^2(x \cdot x) + (x \cdot x)^2(y \cdot y) \\ &= (x \cdot x)^2(y \cdot y) - (x \cdot x)(x \cdot y)^2 = (x \cdot x)[(x \cdot x)(y \cdot y) - (x \cdot y)^2] \end{aligned}$$

Qui si distinguono 3 casi:

- (a) $(x \cdot x) \neq 0$ quindi il tutto è > 0 e dunque $(x \cdot x)(y \cdot y) \geq (x \cdot y)^2$
- (b) $(y \cdot y) \neq 0$, allora scambio x & y e mi riduco a (a)
- (c) $(x \cdot x) = (y \cdot y) = 0$ allora anche $x \cdot y = 0$ perchè $0 \leq (x \pm y)^2 = \pm 2(x \cdot y)$

■

2. Dimostrazione "furba".

$$0 \leq (x + ty)^2 = (x \cdot x) + 2(x \cdot y)t + (y \cdot y)t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

che è un polinomio di grado 2 in t reale e quindi ha discriminante ≤ 0 perchè è una parabola in t a grafico non negativo (ovvero ha 0 o 1 soluzioni). Dunque:

$$(x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0$$

■

3. Dimostrazione "Identità di Lagrange". In \mathbb{R}^n , segue dalla seguente identità:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 \right) = \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che si stanno sommando dei quadrati. Mostriamo come ottenere l'identità. Infatti si ha:

$$\sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{i, j=1}^n (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j)$$

Si osserva che se $i = j$ i termini si annullano, dunque:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) &= \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) + \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i^2 - x_i^2 y_i^2) + \\ &\quad + \sum_{i>j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) \\ &= \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) + \sum_{i>j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) \end{aligned}$$

Il primo e il terzo elemento sono uguali a meno di scambiare il nome degli indici, dunque:

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) + \sum_{i>j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j) &= \\ = \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 - x_i y_i x_j y_j + x_j^2 y_i^2 - x_j y_j x_i y_i) &= \sum_{i<j} (x_i y_i - x_j y_j)^2 \end{aligned}$$

■

Definizione 1.3.2 - Norma Standard

Sia \mathbb{R}^n spazio vettoriale con prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si definisce la norma standard:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Definizione 1.3.3 - Norme Hölderiane

Sia \mathbb{R}^n spazio vettoriale. Una classe di norme di \mathbb{R}^n può essere definita per $1 \leq p \leq +\infty$:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < +\infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} & p = +\infty \end{cases}$$

Teorema 1.3.1 - Equivalenza delle norme $\|\cdot\|_p$

Le norme $\|\cdot\|_p$ della Definizione 1.3.3 sono equivalenti.

Dimostrazione. —————

■

Proposizione 1.3.2 - Disuguaglianza di Hölder

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e (\cdot, \cdot) un prodotto scalare. Allora $\forall p, q \in [1, +\infty]$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vale:

$$|(x, y)| \leq \|x\|_p + \|y\|_q$$

Dimostrazione. Serve prima mostrare la seguente disuguaglianza elementare (Disuguaglianza di Young): per $a \geq 0, b \geq 0$ e $p, q \in [1, \infty[$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Dimostrazione 1 di Young. Noto una questione di convessità

Citazione 2. *Qui fanno le nozze coi ficchi secchi, tutti vogliono tornare in presenza e poi non fanno niente!*

Poichè il logaritmo è una funzione concava noto che:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log(ab)$$

da cui la disuguaglianza ■

Dimostrazione 2 di Young. Considerando la funzione x^{p-1} noto che

$$\frac{a^p}{p} = \int_0^a x^{p-1} dx$$

$$\frac{b^q}{q} = \int_0^b y^{q-1} dy$$

che rappresentano rispettivamente la parte verde e quella blu dell'immagine:

INSERISCI IMMAGINE

e graficamente si vede la disuguaglianza. ■

Riprendiamo con la dimostrazione della Proposizione 1.3.2. Si applica la disuguaglianza precedente coordinata per coordinata

$$|(x \cdot y)| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q$$

Se x o y sono nulli non c'è nulla da dimostrare. Poichè $x, y \neq 0$ posso normalizzare e dunque posso applicare la disuguaglianza trovata a $\frac{x}{\|x\|_p}$ e $\frac{y}{\|y\|_q}$ in luogo di x e y , ottenendo:

$$\frac{(x \cdot y)}{\|x\|_p \|y\|_q} = \left(\frac{x}{\|x\|_p} \cdot \frac{y}{\|y\|_q} \right) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

cioè la tesi. ■

Proposizione 1.3.3 - Disuguaglianza di Minkowski

Sia $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ un spazio normato. Allora $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Dimostrazione. Supponiamo $p \in]1, \infty[$:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \|x\|_p \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} + \|y\|_p \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x + y\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Se $x + y = 0$ non c'è nulla da dimostrare, altrimenti si divide e ottengo la disuguaglianza voluta. ■

Osservazione 1.3.1

Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in [1, +\infty]$, con (\cdot, \cdot) prodotto scalare. Vale:

$$\|x\|_p = \max_{\|y\|_p \leq 1} (x, y) = \max_{y \neq 0} \frac{(x, y)}{\|y\|_p}$$

Dimostrazione. ————— ■

1.3.2 Spazio delle Successioni**Definizione 1.3.4 - Norma della Successione**

Sia $x = x_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione. Allora definisco una classe di norme come:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < +\infty \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i|\} & p = +\infty \end{cases}$$

Definizione 1.3.5 - Spazio delle Successioni

Definisco lo spazio delle successioni ℓ_p come:

$$\ell_p(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_p < +\infty\}$$

1.3.3 Spazio delle Lineari Continue**Proposizione 1.3.4 - Caratterizzazioni Lineari Continue**

Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ spazi normati. Sia $L : E \rightarrow F$ una mappa lineare. Allora sono equivalenti:

1. L limitata localmente in almeno un punto $x_0 \in E$
2. L limitata sulla palla unitaria chiusa, cioè:

$$\forall x \in E \mid \|x\|_E \leq 1 \quad \exists C \in \mathbb{R}^+ \mid \|Lx\|_F \leq C$$

3. L è Lipschitz

Dimostrazione. • $1 \Rightarrow 2$: se L è localmente limitato in x_0 significa: $\exists C \geq 0$ ed $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|Lx\|_F \leq C \forall x \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$. Allora L è limitata anche in ogni palla di raggio ε ; in particolare di centro 0, infatti

$$\overline{B}(0, \varepsilon) = \overline{B}(x_0, \varepsilon) - x_0$$

e

$$L(\overline{B}(0, \varepsilon)) = L(\overline{B}(x_0, \varepsilon)) - Lx_0$$

(il traslato di un limitato è limitato). E allora anche $L(\overline{B}(0, 1))$ è limitato:

$$\overline{B}(0, 1) = \frac{1}{\varepsilon} \overline{B}(0, \varepsilon) \quad L(\overline{B}(0, 1)) = \frac{1}{\varepsilon} L(\overline{B}(0, \varepsilon))$$

- 2 \Rightarrow 3: Se vale $\|Lx\| \leq C \forall \|x\| \leq 1$ allora L è C -Lipschitz: $\forall u, v \in E$ ($u \neq v$)

$$\begin{aligned} \|Lu - Lv\|_F &= \|L(u - v)\|_F = \left\| L \left(\|u - v\|_E \frac{u - v}{\|u - v\|_E} \right) \right\| \\ &= \|u - v\|_E \cdot \left\| L \left(\frac{u - v}{\|u - v\|_E} \right) \right\| \\ &\leq C \|u - v\|_E \end{aligned}$$

ossia L è C -Lipschitz

■

Definizione 1.3.6 - Spazio delle Lineari Continue

Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ spazi normati. Definisco lo spazio normato delle lineari continue come l'insieme:

$$\mathcal{L}(E, F) = \{L : E \rightarrow F \text{ lineari e continue}\} = \{L : E \rightarrow F \text{ tale che } \|L\|_{\mathcal{L}(E, F)} < +\infty\}$$

dove (definita la palla $\bar{B} = \bar{B}_E(0, 1)$) la norma è:

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|L|_{\bar{B}}\|_{\infty, \bar{B}} = \sup_{x \in \bar{B}} \|Lx\|$$

1.4 Continuità

Definizione 1.4.1 - Continuità puntuale

Siano X, Y spazi topologici. La mappa $f : X \rightarrow Y$ si dice continua in $x_0 \in X$ se:

$$\forall U \text{ intorno di } f(x_0) \quad \exists V \text{ intorno di } x \text{ tale che } f(V) \subseteq U$$

Definizione 1.4.2 - Continuità funzionale

Siano X, Y spazi topologici. La mappa $f : X \rightarrow Y$ si dice continua se equivalentemente:

- f continua in ogni punto $x \in X$
- $\forall A$ aperto di Y , $f^{-1}(A)$ è aperto di X

Proposizione 1.4.1 - Composizione di Continue

Composizione di funzioni continue è ancora continua.

Dimostrazione. Siano X, Y, Z spazi topologici. Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funzioni continue.

Voglio dimostrare che $g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua. Sia $x_0 \in X$, definisco $y_0 = f(x_0)$ e poi $z_0 = g(y_0)$.

Per continuità di g in y_0 , per ogni $W \subseteq Z$ intorno di $z_0 = g(y_0)$ esiste $V \subseteq Y$ intorno di y_0 tale che $g(V) \subseteq W$. Inoltre, per continuità di f in x_0 , esiste un intorno $U \subseteq X$ di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

Ma allora, per ogni W intorno di z_0 esiste U intorno di x_0 tale che $(g \circ f)(U) \subseteq g(V) \subseteq W$, cioè $g \circ f$ continua in x_0 . ■

Capitolo 2

Teoremi su Spazi

2.1 Serie di Neumann

Teorema 2.1.1 - Serie di Neumann

Siano $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e $H \in \mathcal{L}(E)$ tale che $\|H\| < 1$. Allora $I - H$ invertibile e vale che:

$$(I - H)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^j$$

Dimostrazione. Si osserva subito che la serie geometrica $\sum_{j=0}^{+\infty} H^j$ è normalmente convergente.

Infatti, per submoltiplicatività della norma, $\|H^j\| \leq \|H\|^j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Allora si ottiene¹:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|H^j\| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|H\|^j = \frac{1}{1 - \|H\|} < +\infty$$

Dato che lo spazio $\mathcal{L}(E)$ è completo, allora $\sum_{j=0}^{+\infty} H^j$ converge.

Ora, per continuità della funzione moltiplicazione a sinistra, posso fare il passaggio al limite:

$$\begin{aligned} H\left(\sum_{j=0}^{+\infty} H^j\right) &= H\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n H^j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} H \sum_{j=0}^n H^j \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n H^{j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^{j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^j - I \end{aligned}$$

da cui segue subito che:

$$(I - H)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} H^j\right) = I$$

Analogamente si dimostra che i due termini commutano. Dunque $I - H$ è invertibile con inversa:

$$(I - H)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^j$$

■

¹Usiamo l'ipotesi $0 \leq \|H\| < 1$

Corollario 2.1.1.1 - Addendum a Serie di Neumann

Nelle ipotesi del Teorema 2.1.1, la condizione $\|H\| < 1$ non è necessaria. La tesi è vera se $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $\|H^m\| < 1$.

Dimostrazione. Dalla serie di Neumann segue subito che $I - H^m = \sum_{j=0}^{+\infty} H^{mj}$ è invertibile.

Inoltre vale il prodotto:

$$I - H^m = (I - H) \left(\sum_{j=0}^{m-1} H^j \right)$$

da cui si deduce che $I - H$ è invertibile (se il prodotto di 2 fattori è invertibile, allora i fattori sono invertibili per le formule del rango). Posso allora scrivere:

$$\begin{aligned} (I - H)^{-1} &= \left(\sum_{j=0}^{m-1} H^j \right) (I - H^m)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{m-1} H^j \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} H^{mk} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{m-1} H^{mk+j} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n \end{aligned}$$

Resta da dimostrare che la sommatoria risultante converge. Ma (usando la notazione precedente dove $n = mk + j$):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \|H^n\| &\leq \sum_{0 \leq k < \infty} \sum_{0 \leq j < m} \|H^m\|^k \|H\|^j = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \|H^m\|^k \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|H\|^j \right) \\ &= \frac{1}{1 - \|H^m\|} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|H\|^j \right) < +\infty \end{aligned}$$

per cui la serie converge in $\mathcal{L}(E)$ completo. ■

2.2 Teorema di Baire

Teorema 2.2.1 - Teorema di Baire con Aperti

Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Siano $A_j \subseteq X$ una famiglia numerabile di aperti densi.

Allora $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$ è denso.

Teorema 2.2.2 - Teorema di Baire con Chiusi

Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Siano $F_j \subseteq X$ una famiglia numerabile di chiusi tali che $\text{int}(F_j) = \emptyset$.

Allora $\text{int}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\right) = \emptyset$.

Dimostrazione. Dimostriamo il Teorema di Baire con i chiusi.

Supponiamo per assurdo che non sia vera la tesi, cioè in particolare che $\text{int}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\right) \neq \emptyset$.

Allora per definizione di aperto in un metrico, esistono $x_0 \in X$ e $r_0 > 0$ tali che $B(x_0, r_0) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j$.

Per ipotesi, $\text{int}(F_1) = \emptyset$, quindi $B(x_0, r_0) \not\subseteq F_1$. Ne segue che esiste $x_1 \in B(x_0, r_0) \setminus F_1$. Essendo F_1 chiuso, esiste $r_1 > 0$ tale che la palla $B(x_1, r_1)$ ha le proprietà²:

- $B(x_1, r_1) \cap F_1 = \emptyset$
- $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0)$
- $r_1 \leq \frac{r_0}{2}$

Per le stesse ragioni, reitero la costruzione appena fatta per ogni indice $k \in \mathbb{N}$. Cioè trovo $x_k \in B(x_{k-1}, r_{k-1}) \setminus F_{k-1}$ e $r_k > 0$ tali che:

1. $B(x_k, r_k) \cap F_k = \emptyset$
2. $\overline{B(x_k, r_k)} \subseteq B(x_{k-1}, r_{k-1})$
3. $r_k \leq \frac{r_0}{2^k}$

Ora, osservo che le palle $B(x_k, r_k)$ sono incluse l'una nell'altra per costruzione (il punto 2). Ciò mi dice che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che: $x_h \in B(x_k, r_k)$ per ogni $h \geq k$.

Segue che la successione dei centri $\{x_k\}$ è di Cauchy perchè:

$$d(x_h, x_k) < r_k \leq \frac{r_0}{2^k}$$

e in particolare per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{r_0}{2^k} < \varepsilon$.

Dato che X è completo, segue che $x_k \rightarrow \bar{x}$ per $k \rightarrow +\infty$, con $\bar{x} \in X$.

Inoltre, essendo le code della successione $\{x_k\}$ contenute in ogni palla chiusa $\overline{B(x_k, r_k)}$ per costruzione, segue che $\bar{x} \in \overline{B(x_k, r_k)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Per il punto 1 e per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\bar{x} \in \overline{B(x_{k-1}, r_{k-1})} \subseteq B(x_k, r_k)$$

e dato che $B(x_k, r_k) \cap F_k = \emptyset$, $\bar{x} \in F_k^C$ per ogni k .

Assurdo, perchè per ipotesi $\bar{x} \in B(x_0, r_0) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j$. ■

²La terza condizione servirà per ottenere la successione di Cauchy tramite i centri.

2.3 Teoremi di Immersione

Definizione 2.3.1 - Completamento

Siano (M, d) spazio metrico e (\tilde{M}, \tilde{d}) spazio metrico completo.

La mappa $j : (M, d) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{d})$ si dice completamento se j è isometria e $j(M)$ denso in \tilde{M} .

Teorema 2.3.1 - Immersione di Fréchet - Kuratowski

Ogni spazio metrico (M, d) si immerge isometricamente in $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. In particolare³, $E = C_B(M)$.

Dimostrazione. L'idea fondamentale è usare la funzione distanza d per immergere M nello spazio delle funzioni continue limitate $C_B(M)$.

Bisogna però distinguere 2 casi:

- M ha "diametro finito", ossia la funzione distanza è superiormente limitata. Allora basta considerare:

$$\begin{aligned} \Phi : (M, d) &\longrightarrow (C_B(M), \|\cdot\|_\infty) \\ x &\longmapsto d(x, \cdot) \end{aligned}$$

Dimostriamo che è un'immersione isometrica.

E' iniettiva perchè se $d(x, \cdot) = d(y, \cdot)$, allora valutando in y ottengo che:

$$d(x, y) = d(y, y) = 0 \iff x = y$$

E' un'isometria in quanto:

$$\|d(x, \cdot) - d(y, \cdot)\|_\infty = d(x, y)$$

perchè per ogni $u \in M$ per disuguaglianza triangolare:

$$\begin{cases} d(x, u) - d(y, u) \leq d(x, y) \\ d(y, u) - d(x, u) \leq d(x, y) \end{cases}$$

per cui a sinistra posso considerare il valore assoluto e prendendo il sup ottengo:

$$\|d(x, \cdot) - d(y, \cdot)\|_\infty \leq d(x, y)$$

e in particolare per $u = x$ ho l'uguaglianza:

$$\|d(x, \cdot) - d(y, \cdot)\|_\infty = d(x, y)$$

- M non ha "diametro finito". Allora consideriamo per $x_0 \in M$ fissato:

$$\begin{aligned} j_{x_0} : (M, d) &\longrightarrow (C_B(M), \|\cdot\|_\infty) \\ x &\longmapsto d(x, \cdot) - d(x_0, \cdot) \end{aligned}$$

In particolare $j_{x_0}(x)$ è limitata per ogni $x \in M$ in quanto per il caso precedente:

$$\|j_{x_0}(x)\|_\infty = \|d(x, \cdot) - d(x_0, \cdot)\|_\infty \leq d(x, x_0)$$

Ora si conclude con una dimostrazione analoga, in particolare l'isometria deriva dal fatto che:

$$\|j_{x_0}(x) - j_{x_0}(y)\|_\infty = \|d(x, \cdot) - d(y, \cdot)\|_\infty = d(x, y)$$

³Indicheremo con C_B lo spazio delle funzioni "bounded", ovvero limitate.

Segue la tesi. ■

Corollario 2.3.1.1

Ogni spazio metrico si include come sottoinsieme denso in uno spazio completo.

Dimostrazione. Lasciata come esercizio, segue dalla costruzione "alternativa" dell'immersione di Frechét, nello spazio delle successioni di Cauchy in X metrico.

Alternativamente, basta considerare come spazio in cui il metrico si immerge la chiusura di $j(M)$. Infatti per proprietà della chiusura, il limite di ogni successione di Cauchy (convergenti nello spazio di Banach totale) sta in $\overline{j(M)}$. ■

Teorema 2.3.2 - Estensione per densità di funzioni uniformemente continue

Siano (X, d_x) spazio metrico e (Y, d_y) spazio metrico completo. Sia $D \subseteq X$ denso ed $f : D \rightarrow Y$ uniformemente continua (con modulo ω).

Allora $\exists!$ $F : X \rightarrow Y$ estensione continua di f . Inoltre, F è uniformemente continua con modulo ω .

Dimostrazione. Definiamo $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$. Preso $x \in X$, consideriamo una successione $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tale che $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Allora definiamo $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(d_n)$. Verifichiamo che:

- il limite esiste perchè $\{d_n\}$ converge, quindi è di Cauchy. Per continuità uniforme $\{F(d_n)\}$ è di Cauchy nello spazio Y completo. Segue che il limite esiste.
- presa un'altra successione $\{d'_n\} \subset D$ che converge a x , considero $\{d_1, d'_1, d_2, d'_2, \dots\}$ successione. Essa converge sempre ad x . Ma allora:

$$\{F(d_1), F(d'_1), F(d_2), F(d'_2), \dots\}$$

è convergente e per unicità del limite segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(d_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(d'_n)$.

- F ha lo stesso modulo di continuità di f . Sia $\delta > 0$. Dati $x_0, x_1 \in X$ tali che $d(x_0, x_1) < \delta$, allora siano $\{d_n\}$ e $\{d'_n\}$ successioni in D che convergono rispettivamente a x_0 e x_1 . Allora osservo che (essendo tutte le successioni di Cauchy posso passare ai limiti delle distanze):

$$\begin{aligned} d(F(x_0), F(x_1)) &= d\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F(d_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} F(d'_n)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(F(d_n), F(d'_n)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega(d(d_n, d'_n)) = \omega(d(x_0, x_1)) \leq \omega(\delta) \end{aligned}$$

per cui F ha modulo di continuità ω .

Segue la tesi. ■

Teorema 2.3.3 - Unicità del Completamento

Sia (M, d) spazio metrico. Esiste $j : (M, d) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{d})$ completamento di M a \tilde{M} spazio metrico completo.

Allora j è unico a meno di isomorfismi.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano due completamenti per lo spazio metrico M :

$$\begin{array}{ccc} (M, d) & \xrightarrow{j_1} & (\tilde{M}_1, \tilde{d}_1) \\ & \searrow j_2 & \\ & & (\tilde{M}_2, \tilde{d}_2) \end{array}$$

Sappiamo che M è denso in \tilde{M}_1 e \tilde{M}_2 . Applichiamo quindi il Teorema di Estensione 2.3.2 per estendere rispettivamente j_2 e j_1 alle isometrie ϕ e ψ :

$$\begin{array}{ccc} (M, d) & \xrightarrow{j_1} & (\tilde{M}_1, \tilde{d}_1) \\ & \searrow j_2 & \downarrow \phi \\ & & (\tilde{M}_2, \tilde{d}_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (M, d) & \xrightarrow{j_2} & (\tilde{M}_2, \tilde{d}_2) \\ & \searrow j_1 & \downarrow \psi \\ & & (\tilde{M}_1, \tilde{d}_1) \end{array}$$

In particolare sappiamo che: $j_2 = \phi \circ j_1$ e $j_1 = \psi \circ j_2$. Vogliamo provare che:

$$\begin{cases} \psi \circ \phi = id_{\tilde{M}_1} \\ \phi \circ \psi = id_{\tilde{M}_2} \end{cases}$$

Vediamo la prima delle due relazioni. La seconda è analoga. Si osserva che $id_{\tilde{M}_1}$ e $\psi \circ \phi$ estendono entrambe per densità la mappa j_1 :

$$\begin{array}{ccc} (M, d) & \xrightarrow{j_1} & (\tilde{M}_1, \tilde{d}_1) \\ & \searrow j_1 & \downarrow id_{\tilde{M}_1} \\ & & (\tilde{M}_1, \tilde{d}_1) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (M, d) & \xrightarrow{j_1} & (\tilde{M}_1, \tilde{d}_1) \\ & \searrow j_1 & \downarrow \psi \circ \phi \\ & & (\tilde{M}_1, \tilde{d}_1) \end{array}$$

Per unicità dell'estensione per densità, allora $\psi \circ \phi = id_{\tilde{M}_1}$. ■

Proposizione 2.3.1 - Estensione di normati

Sia $(E, \|\cdot\|_E)$ spazio normato. Essendo metrico, ha un completamento come spazio metrico \tilde{E} .

Allora estendendo la norma, \tilde{E} è normato.

Dimostrazione. Consideriamo la norma $\|\cdot\|_E$ e l'immersione $j : E \hookrightarrow \tilde{E}$. Dato che E è un denso di \tilde{E} posso applicare il Teorema di Estensione per Densità 2.3.2 e si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & \tilde{E} \\ & \searrow \|\cdot\|_E & \downarrow \|\cdot\|_{\tilde{E}} \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

dove $\|\cdot\|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$ risulta essere la norma dello spazio completo \tilde{E} . ■

2.4 Teorema di Mazur - Ulam

Definizione 2.4.1 - Mappa Affine

Siano E, F spazi normati. Sia $f : E \rightarrow F$ una mappa, si dice affine se:

1. $f(x) = Lx + v$ dove $v \in F$ e $L \in \mathcal{L}(E, F)$
2. $f(tx + (1-t)x') = tf(x) + (1-t)f(x')$ con $x, x' \in E$ e $t \in [0, 1]$
3. $f\left(\frac{x+x'}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x')$ con $x, x' \in E$

Proposizione 2.4.1

Le definizioni di mappa affine sono equivalenti.

Dimostrazione. Vediamo 4 implicazioni.

- (1 \Rightarrow 2): è banale e segue dalla linearità di L . Infatti per ogni $x, x' \in E$ e $t \in [0, 1]$:

$$f(tx + (1-t)x') = v + L(tx + (1-t)x') = t(v + Lx) + (1-t)(v + Lx') = tf(x) + (1-t)f(x')$$
- (1 \Leftarrow 2): supponiamo che f abbia la proprietà 2. Allora vediamo che:

$$L(x) = f(x) - f(0)$$

è una mappa lineare (verifiche per esercizio).

- (2 \Rightarrow 3): banale, calcolando per $t = \frac{1}{2}$.
- (2 \Leftarrow 3): reiterando la definizione 3, vale la proprietà per tutti i $t \in \mathcal{D}$ i razionali diadici in $[0, 1]$. Ma dato che \mathcal{D} è denso in $[0, 1]$, si ottiene la tesi.

Abbiamo così dimostrato l'equivalenza. ■

Teorema 2.4.1 - Teorema di Mazur - Ulam

Siano E, F spazi normati. Sia $f : E \rightarrow F$ isometria. Allora f è affine.

Dimostrazione. Basta provare che $\forall x, x' \in E$ vale la proprietà:

$$f\left(\frac{x+x'}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x')$$

Consideriamo la seguente quantità che chiamiamo "deficienza affine" rispetto a x, x' :

$$def(f) = \left\| f\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{f(x) + f(x')}{2} \right\|$$

e proviamo che è nulla per ogni $x, x' \in E$.

Osserviamo che data una f isometrica:

$$\begin{aligned} def(f) &\leq \left\| \frac{1}{2}f\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{1}{2}f(x) \right\| + \left\| \frac{1}{2}f\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{1}{2}f(x') \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{x-x'}{2} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \frac{x-x'}{2} \right\| \leq \frac{\|x-x'\|}{2} \end{aligned}$$

Definiamo la riflessione che scambia $f(x)$ e $f(x')$ come:

$$\begin{aligned} \rho: E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f(x) + f(y') - y \end{aligned}$$

Questa è un'isometria, quindi posso definire una nuova isometria:

$$\tilde{f} = f^{-1} \circ \rho \circ f$$

con la proprietà che $\tilde{f}(x) = x'$ e $\tilde{f}(x') = x$. Ma allora calcoliamo:

$$\begin{aligned} def(\tilde{f}) &= \left\| \tilde{f}\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x')}{2} \right\| = \left\| \tilde{f}\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{x'+x}{2} \right\| \\ &\stackrel{(a)}{=} \left\| f^{-1}\left(f(x) + f(x') - f\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right) - \frac{x+x'}{2} \right\| \\ &\stackrel{(a)}{=} \left\| f^{-1}\left(f(x) + f(x') - f\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right) - f^{-1}\left(f\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right) \right\| \\ &= \left\| f(x) + f(x') - 2f\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right\| \\ &= 2 \left\| \frac{f(x) + f(x')}{2} - f\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right\| = 2def(f) \end{aligned}$$

Ma deve valere anche per \tilde{f} la proprietà $def(\tilde{f}) \leq \frac{\|x-x'\|}{2}$, in quanto anch'essa è isometria. Supponiamo per assurdo $def(f) > 0$. Reiterando la costruzione di \tilde{f} si ottiene una successione di isometrie dove $f_0 = f$ ed $f_{k+1} = \tilde{f}_k$ per ogni $k > 0$. In particolare:

$$def(f_{k+1}) = 2def(f_k) = \dots = 2^{k+1}def(f)$$

Ma allora per un k sufficientemente grande si otterrebbe che:

$$def(f_k) > \frac{\|x-x'\|}{2}$$

che è un assurdo. Segue che $def(f) = 0$, da cui la tesi. ■

2.5 Teorema delle Contrazioni

Definizione 2.5.1 - Contrazione

Sia (M, d) spazio metrico. Sia $T : (M, d) \rightarrow (M, d)$ una mappa k -Lipschitz con $k < 1$. Allora T è una contrazione.

Teorema 2.5.1 - Teorema delle Contrazioni

Sia (M, d) spazio metrico non vuoto e completo. Sia $T : (M, d) \rightarrow (M, d)$ una k -contrazione. Allora:

1. T ha un unico punto fisso: $\exists! \bar{x} \in M \mid T(\bar{x}) = \bar{x}$
2. $\forall x_0 \in M, x_n = T^n(x_0)$ converge a \bar{x}

Dimostrazione. Dimostriamo l'esistenza del punto fisso con il punto (2). Siano $x_0 \in M$ ed $n \in \mathbb{N}$. Considerando $n \leq p < q$:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &= d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \\ &= \sum_{i=p}^{q-1} d(x_i, x_{i+1}) = \sum_{i=p}^{q-1} d(T^i(x_0), T^{i+1}(x_0)) \\ &= \sum_{i=p}^{q-1} k^i d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{+\infty} k^i = \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

quindi la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy perché $k < 1$.

Essendo M completo, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x} \in M$. Inoltre, dato che per $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow \bar{x} \\ T(x_n) = x_n \longrightarrow \bar{x} \end{cases}$$

segue dalla continuità di T che $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Segue direttamente il punto (2) e l'esistenza nel punto (1).

Manca l'unicità del punto fisso. Supponiamo che $\bar{x} = T(\bar{x})$ e che $\bar{y} = T(\bar{y})$. Segue che:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T(\bar{x}, \bar{y})) \leq k \cdot d(\bar{x}, \bar{y})$$

cioè per $k < 1$: $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Allora $\bar{x} = \bar{y}$. ■

Corollario 2.5.1.1 - Stime di Convergenza

Segue dal Teorema 2.5.1 che:

1. $d(\bar{x}, x_n) \leq k^n d(\bar{x}, x_0)$
2. $\forall x \in M \quad d(\bar{x}, x) \leq \frac{1}{1-k} d(x, T(x))$

Dimostrazione. Il punto (1) segue (nella notazione del Teorema 2.5.1) da:

$$d(\bar{x}, x_n) = d(T^n(\bar{x}), T^n(x_0)) \leq k^n d(\bar{x}, x_0)$$

Il punto (2) si prova osservando che $d(\bar{x}, x) \leq d(x, T(x)) + kd(\bar{x}, x)$. Segue dalla k -lipschitzianità e dalla disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, x) &\leq d(\bar{x}, T(x)) + d(T(x), x) = d(T(\bar{x}), T(x)) + d(T(x), x) \\ &\leq kd(\bar{x}, x) + d(T(x), x) \end{aligned}$$
■

Corollario 2.5.1.2 - Caso Affine

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Sia $T : E \rightarrow E$ con $T(x) = Lx + v$ contrazione affine, cioè $L \in \mathcal{L}(E)$, $\|L\| < 1$ e $v \in E$.

Allora il punto fisso sarà $x = (I - L)^{-1}v$.

Dimostrazione. Sia $x_0 = 0$. Ma allora:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = Lc + c \\ x_3 = L^2c + Lc + c \\ \dots \end{cases}$$

Ovvero in generale: $T^n(0) = \sum_{j=0}^n L^j c$. Al limite quindi ritroviamo la Serie di Neumann.

Infatti:

$$T(x) = x \quad \Rightarrow \quad (I - L)x = c$$

per cui:

$$x = (I - L)^{-1}c = \sum_{j=0}^{+\infty} L^j c$$

■

Corollario 2.5.1.3 - Generalizzazione

Nelle ipotesi del Teorema 2.5.1, sia T non una contrazione, ma $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che T^n contrazione.

Allora T ha un unico punto fisso in E .

Dimostrazione. Supponiamo che il punto fisso sia $\bar{x} = T^n(\bar{x})$. Osserviamo che:

$$T^n(T(\bar{x})) = T(T^n(\bar{x})) = T(\bar{x})$$

Ma allora $T(\bar{x})$ è punto fisso di T^n . Per unicità segue che $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Segue la tesi. ■

Corollario 2.5.1.4

Nelle ipotesi del Teorema 2.5.1, sia $C \subseteq M$ un chiuso T -invariante (cioè $T(C) \subseteq C$) non vuoto, allora $\bar{x} \in C$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in C$. Dato che l'insieme è T -invariante, segue che $x_n = T^n(x_0) \in C$. Ma $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ converge al punto fisso \bar{x} . Per chiusura di C segue che $\bar{x} \in C$. ■

Teorema 2.5.2 - Teorema delle Perturbazioni Lipschitziane dell'identità

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, sia $A \subseteq E$ un aperto.

Sia $g : A \rightarrow E$ k -Lipschitziana con $k < 1$. Allora la mappa $f = id + g$ verifica i fatti:

1. $f(A)$ aperto in E , localmente: $\forall a \in A, \forall r > 0$ tali che $\bar{B}(a, r) \subseteq A$ allora $f(\bar{B}(a, r)) \supseteq \bar{B}(f(a), (1-k)r)$.

2. $f : A \rightarrow f(A)$ è un omeomorfismo bilipschitziano, precisamente:

$$lip(f) \leq 1 + k \quad e \quad lip(f^{-1}) \leq \frac{1}{1-k}$$

Dimostrazione. Dimostriamo i punti separatamente.

1. Sia $a \in A$ ed $r > 0$ tali che $\overline{B(a, r)} \subseteq A$. Proviamo che:

$$f(\overline{B(a, r)}) \supseteq \overline{B(f(a), (1-k)r)}$$

ovvero: per ogni $p \in \overline{B(f(a), (1-k)r)}$ esiste $x \in \overline{B(a, r)}$ che risolve $f(x) = p$.
Riscrivo la tesi come:

$$(1-k)r \geq \|p - f(a)\| = \|p - a + g(a)\|$$

Considero la mappa $y \mapsto p - g(y)$ che è Lipschitz di costante k sulla palla $\overline{B(a, r)}$, infatti:

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|p - g(x) - p + g(y)\| = \|g(y) - g(x)\| \leq k\|x - y\|$$

Prendiamo $y \in A$ tale che $\|y - a\| \leq r$:

$$\begin{aligned} \|\psi(y) - a\| &= \|p - g(y) - a\| = \|p - (a + g(a)) + g(a) - g(y)\| \\ &\leq \|p - (a + g(a))\| + \|g(a) - g(y)\| \leq (1-k)r + kr = r \end{aligned}$$

Allora la palla $\overline{B(a, r)}$ è ψ -invariante. Applicando il Corollario 2.5.1.4⁴ esiste $x \in \overline{B(a, r)}$ tale che $x = p - g(x)$ e si conclude.

2. Siano $x, x' \in A$. Allora:

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &= \|x + g(x) - (x' + g(x')) + (g(x') - g(x))\| \\ &\leq \|f(x) - f(x')\| + \|g(x) - g(x')\| \\ &\leq \|f(x) - f(x')\| + k\|x - x'\| \end{aligned}$$

da cui segue che $\|f(x) - f(x')\| \geq (1-k)\|x - x'\|$. Ovvero f è iniettiva.

Quindi è ben definita la mappa bigettiva $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$. Chiamiamo $y = f(x)$ e $y' = f(x')$. Allora dalla disuguaglianza precedente:

$$\|y - y'\| \geq (1-k)\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\|$$

cioè:

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| \leq \frac{1}{1-k}\|y - y'\|$$

per cui f^{-1} è $\frac{1}{1-k}$ -Lipschitz. ■

Osservazione 2.5.1

Nelle ipotesi del Teorema 2.5.2, se $A = E$ allora $f(A) = E$.

⁴è per questo che in tutta la dimostrazione vengono considerate le palle chiuse

Capitolo 3

Calcolo Differenziale

3.1 Differenziale di Fréchet

3.1.1 Definizione

Definizione 3.1.1 - Funzione infinitesima in x_0

Siano E, F spazi normati, sia $f : A \subseteq E \rightarrow F$. Si dice che f è infinitesima in x_0 punto di accumulazione di A se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Definizione 3.1.2 - o piccolo

Siano $f, g : A \subseteq E \rightarrow F$.

Si scrive $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ quando $f(x) = \|g(x)\| \cdot o(1)$.

Definizione 3.1.3 - Differenziabilità secondo Fréchet

Siano E, F spazi normati e $\Omega \subseteq E$ aperto, $x_0 \in \Omega$. Una funzione $f : \Omega \rightarrow F$ è differenziabile secondo Fréchet se e solo se $\exists L \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (3.1)$$

In particolare, se tale L esiste, è unica.

Definizione 3.1.4 - Differenziale di Fréchet

Sia $f : \Omega \subseteq E \rightarrow F$ una funzione differenziabile in $x_0 \in \Omega$. Sia $L \in \mathcal{L}(E, F)$ come nella Definizione 3.1.3, esso si chiama differenziale di Fréchet e si indica: $Df(x_0)$

Definizione 3.1.5 - Classe C^k

Siano E, F spazi normati e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $f : \Omega \rightarrow F$ differenziabile in ogni punto $x \in \Omega$. E' ben definita:

$$\begin{aligned} Df : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\longmapsto Df(x) \end{aligned}$$

Allora f si dice di classe C^1 se e solo se Df è continua:

$$C^1(\Omega, F) = \{f : \Omega \rightarrow F \mid Df \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(E, F))\}$$

Per induzione, definisco:

$$C^k(\Omega, F) = \{f : \Omega \rightarrow F \mid Df \in C^{k-1}\}$$

3.1.2 Proprietà di Calcolo

Proposizione 3.1.1 - Somma

Siano E, F spazi normati e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \Omega$. Siano $f, g : \Omega \rightarrow F$ funzioni differenziabili in x_0 .

Allora $f + \lambda g$ è differenziabile in x_0 , con:

$$D(f + \lambda g)(x_0) = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0) \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Siano f e g come nelle ipotesi. Allora per $x \rightarrow x_0$:

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0) \\ g(x) = g(x_0) + M(x - x_0) + o(x - x_0) \end{cases}$$

Se considero la funzione $f + \lambda g$ ottengo lo sviluppo per $x \rightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x) &= f(x) + \lambda g(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \lambda g(x_0) + \lambda M(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= (f + \lambda g)(x_0) + (L + \lambda M)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

da cui per definizione di differenziale ho proprio che:

$$D(f + \lambda g)(x_0) = L + \lambda M = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$$

■

Proposizione 3.1.2 - Composizione

Siano E, F, G spazi normati e $U \subseteq E, V \subseteq F$ aperti.

- $f : U \rightarrow F$ funzione differenziabile in $x_0 \in U$, dove $Im(f) \subseteq V$.
- $g : V \rightarrow G$ funzione differenziabile in $y_0 = f(x_0) \in V$.

Allora $g \circ f$ è differenziabile in x_0 , con:

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0) \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Siano f e g come nelle ipotesi. Allora in $x_0 \in X$:

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0) \\ g(y) = g(y_0) + M(y - y_0) + o(y - y_0) \end{cases}$$

Se considero la funzione $g \circ f$ ottengo lo sviluppo per $x \rightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + M(L(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(L(x - x_0) + o(x - x_0)) \end{aligned}$$

In particolare, vedo che in norma:

$$\|M(o(x - x_0))\| \leq \|M\| \cdot \|x - x_0\| \cdot o(1) \leq o(\|x - x_0\|)$$

e valutando l'ultimo termine:

$$\begin{aligned} \|o(L(x - x_0) + o(x - x_0))\| &\leq \|L(x - x_0) + o(x - x_0)\| \cdot o(1) \\ &\leq (\|L\| \cdot \|x - x_0\| + o(1)\|x - x_0\|) \cdot o(1) \\ &\leq O(\|x - x_0\|) \cdot o(1) = o(\|x - x_0\|) \end{aligned}$$

allora concludo lo sviluppo iniziale:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + M(L(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(x - x_0)$$

da cui la tesi. ■

Proposizione 3.1.3 - Inversione

Siano E, F spazi normati, siano $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ aperti. Sia $f : U \rightarrow V$ un omeomorfismo differenziabile in $x_0 \in U$, con $Df(x_0)$ invertibile e con inversa f^{-1} continua.

Allora $f^{-1} : V \rightarrow U$ è differenziabile in $y_0 = f(x_0)$, con:

$$Df^{-1}(y_0) = [Df(x_0)]^{-1} \quad (3.4)$$

Dimostrazione. Innanzitutto, considero senza perdere generalità¹ $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$. Allora posso scrivere lo sviluppo in $x_0 = 0$ come:

$$f(x) = Lx + \|x\|o(1) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Inoltre, sia $g = f^{-1}$, denoto $y = f(x)$. Posso riscrivere lo sviluppo come:

$$y = Lg(y) + \|g(y)\|o(1) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

Cioè applicando L^{-1} da entrambi i lati:

$$g(y) = L^{-1}y + \|g(y)\|o(1) \quad \text{per } y \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

Per ottenere la formula della definizione di differenziale, resta da vedere che:

$$\|g(y)\|o(1) = \|y\|o(1) \quad \text{per } y \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Basta dimostrare che $\|g(y)\| \leq C\|y\|$ dove $C \in \mathbb{R}$ costante. Dalla equazione 3.5, passando in norma:

$$\|g(y)\| = \left\| L^{-1}y + \|g(y)\|o(1) \right\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|y\| + \|g(y)\|o(1)$$

e manipolando la disuguaglianza, per $y \rightarrow 0$:

$$\|g(y)\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 + o(1)} \|y\| = O(1)\|y\| \rightarrow C\|y\|$$

Allora, provata l'uguaglianza 3.6, posso scrivere:

$$g(y) = L^{-1}y + \|g(y)\|o(1) = L^{-1}y + \|y\|o(1)$$

cioè la tesi, in quanto $Dg(y) = L^{-1}$. ■

Osservazione 3.1.1 - Differenziale di Lineare

Siano E, F spazi normati, $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Allora L è differenziabile $\forall x_0 \in E$, in particolare $DL(x_0) = L$.

Osservazione 3.1.2 - Differenziale in Spazi Prodotto

Siano E, F_1, F_2 spazi normati, sia $U \subseteq E$ aperto e $x_0 \in U$. Sia $f : U \rightarrow F_1 \times F_2$, allora sono equivalenti:

- f è differenziabile in x_0
- $\pi_{F_1} \circ f$ e $\pi_{F_2} \circ f$ sono differenziabili in x_0

In particolare, considerando la norma prodotto:

$$\|(v_1, v_2)\|_{F_1 \times F_2} = \max\{\|v_1\|_{F_1}, \|v_2\|_{F_2}\}$$

sono linearmente isometrici gli spazi:

$$\mathcal{L}(E, F_1 \times F_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E, F_1) \times \mathcal{L}(E, F_2)$$

¹Tramite una traslazione basterebbe considerare $\phi(x) = f(x - x_0) - f(x_0)$ che lascia il differenziale invariato

²So che $y \rightarrow 0$ in quanto f è omeomorfismo per ipotesi.

3.2 Differenziale Parziale

Definizione 3.2.1 - Derivata Direzionale

Siano E, F spazi normati con $\Omega \subseteq E$ e $x_0, v \in E$. Sia $f : \Omega \rightarrow F$.

Se esiste, la derivata su $t \in \mathbb{R}$ in 0 di $f(x_0 + tv)$ si dice derivata direzionale di f in direzione v . Si indica:

$$\partial_v f(x_0) = \left. \frac{d}{dt} f(x_0 + tv) \right|_{t=0} \quad (3.7)$$

Osservazione 3.2.1

Nelle ipotesi della Definizione 3.2.1, se f è differenziabile in x_0 allora:

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)[v]$$

Definizione 3.2.2 - Derivata Parziale

Sia E spazio normato e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $f : \Omega \rightarrow E$. Le derivate direzionali lungo i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n sono le derivate parziali di f . Si indica $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\partial_i f(x) = \left. \frac{d}{dt} (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \right|_{t=x_i} \quad (3.8)$$

Definizione 3.2.3 - Gradiente

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Allora il gradiente di f è:

$$\nabla f(x) = \text{grad}(f(x)) = \left(\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x) \right) \quad (3.9)$$

Proposizione 3.2.1

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$. Allora data $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ la base canonica di \mathbb{R}^n :

$$\partial_i f(x) = Df(x)[e_i]$$

Inoltre, dato $v \in \mathbb{R}^n$ ho:

$$Df(x)[v] = Df(x) \left[\sum_{i=1}^n v_i e_i \right] = \sum_{i=1}^n (v_i \cdot \partial_i f(x))$$

Proposizione 3.2.2

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$, vale che:

$$Df(x)[v] = \left(\nabla f(x) \cdot v \right)$$

Allora $Df(x)$ è una forma bilineare nel duale di \mathbb{R}^n .

Definizione 3.2.4 - Matrice Jacobiana

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$. Allora $Df(x)$ è rappresentata da un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ chiamata matrice Jacobiana di f in x , cioè:

$$J_f(x) = \left[\partial_1 f(x) \mid \partial_2 f(x) \mid \dots \mid \partial_n f(x) \right]$$

Definizione 3.2.5 - Differenziale Parziale

Siano E_1, E_2, F spazi normati, $\Omega \subseteq E_1 \times E_2$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Data l'applicazione $f : \Omega \rightarrow F$, sia $x \mapsto f(\cdot, y_0)$ applicazione differenziabile in x_0 . Tale differenziale è il differenziale parziale nella prima variabile:

$$D_1 f(x_0, y_0) = D[f(\cdot, y_0)](x_0)$$

Analogamente il differenziale parziale nella seconda variabile è:

$$D_2 f(x_0, y_0) = D[f(x_0, \cdot)](y_0)$$

Osservazione 3.2.2

Nelle ipotesi della Definizione 3.2.5, se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora per ogni $h \in E_1, k \in E_2$:

$$\begin{cases} D_1 f(x_0, y_0)[h] = Df(x_0, y_0)[(h, 0)] \\ D_2 f(x_0, y_0)[k] = Df(x_0, y_0)[(0, k)] \end{cases}$$

cioè:

$$Df(x_0, y_0)[(h, k)] = D_1 f(x_0, y_0)[h] + D_2 f(x_0, y_0)[k]$$

3.3 Teoremi sui Differenziali

Teorema 3.3.1 - Teorema del Differenziale Totale

Siano E_1, E_2, F spazi di Banach, $\Omega \subseteq E_1 \times E_2$ aperto e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $f : \Omega \rightarrow F$ tale che:

1. $\exists D_1 f(x_0, y_0)$
2. per ogni $(x, y) \in \Omega$ esiste $D_2 f(x, y)$ e in particolare l'applicazione $(x, y) \mapsto D_2 f(x, y)$ è continua in (x_0, y_0)

Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) e vale:

$$Df(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \circ \pi_{E_1} + D_2 f(x_0, y_0) \circ \pi_{E_2}$$

Dimostrazione. Si osserva subito che posso scrivere la tesi f differenziabile in (x_0, y_0) come:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)[(h, k)] + o(\|(h, k)\|) \quad (3.10)$$

per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Per ipotesi ho che per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$:

$$\begin{cases} f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)[h] + o(\|h\|) \\ f(x_0, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + D_2 f(x_0, y_0)[k] + o(\|k\|) \end{cases}$$

Usiamo queste nozioni per ottenere³ l'equazione 3.10:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)[(h, k)] = (*) = \\ & = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)[h] - D_2 f(x_0, y_0)[k] \\ & = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - \\ & \quad - D_1 f(x_0, y_0)[h] - D_2 f(x_0, y_0)[k] \\ & = \{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - D_2 f(x_0, y_0)[k]\} + \{f(x_0 + h, y_0) - \\ & \quad - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)[h]\} \\ & = [f(x_0 + h, y_0 + tk) - tD_2 f(x_0, y_0)k]_{t=0}^{t=1} + \{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - \\ & \quad - D_1 f(x_0, y_0)[h]\} \end{aligned}$$

Passando alle norme:

$$\begin{aligned} \|(*)\| & \leq \| [f(x_0 + h, y_0 + tk) - tD_2 f(x_0, y_0)k]_{t=0}^{t=1} \| + \| f(x_0 + h, y_0) - \\ & \quad - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)[h] \| \\ & \leq \sup_{0 < t < 1} \| D_2 f(x_0 + h, y_0 + tk)k - D_2 f(x_0, y_0)k \| + o(\|h\|) \\ & \leq \sup_{0 < t < 1} \| D_2 f(x_0 + h, y_0 + tk) - D_2 f(x_0, y_0) \| \cdot \|k\| + o(\|h\|) \\ & \leq o(\|h\| + \|k\|) \end{aligned}$$

cioè la tesi. ■

Corollario 3.3.1.1

Nelle ipotesi del Teorema 3.3.1, vale che:

$$D_1 f(x, y) \text{ e } D_2 f(x, y) \text{ sono continui} \quad \Leftrightarrow \quad f \in C^1(\Omega, F)$$

³Ci spiace tantissimo per le formule chilometriche, L^AT_EX non ce la fa...

Dimostrazione. Le ipotesi del Teorema 3.3.1 sono verificate per ogni punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Quindi $f \in C^1$. ■

Proposizione 3.3.1 - Interpretazioni di $D^2 f(x)$

Siano E, F spazi normati. Siano $\Omega \subseteq E$ e $x_0 \in \Omega$. Sia $f : \Omega \rightarrow F$ differenziabile 2 volte in x_0 . Si possono dare diverse interpretazioni⁴ a $D^2 f(x_0)$: $\forall u, v \in E$:

1. $D^2 f(x_0)[u, v] = \partial_t \partial_s f(x + tu + sv) \Big|_{s=0} \Big|_{t=0}$
2. $D^2 f(x_0)[u, v] = f(x + u + v) - f(x + u) - f(x + v) + f(x) + o(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Dimostrazione. Dimostriamo le due interpretazioni separatamente:

1. Per ogni $u, v \in E$ vale che per definizione:

$$\partial_s f(x + tu + sv) = D(x + tu + sv)[v]$$

quindi per valutare s in 0:

$$\partial_s f(x + tu + sv) \Big|_{s=0} = Df(x + tu)[v]$$

Sostituendo allora:

$$\partial_t (\partial_s f(x + tu + sv)) \Big|_{t=0} = D(Df)(x)[u, v] = D^2 f(x)[u, v]$$

2. Considero la differenza, e vedo che è un $o(\|u\|^2 + \|v\|^2)$:

$$\begin{aligned} & \|f(x+u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x) - D^2 f(x)[u, v]\| = \\ & = \left\| \left[f(x+u+tv) - f(x+tv) - tD^2 f(x)[u, v] \right]_{t=0}^{t=1} \right\| \\ & \leq \sup_{0 < t < 1} \left\| (Df(x+u+tv) - Df(x+tv) - D(Df(x))[u])v \right\| \\ & \leq \sup_{0 < t < 1} \left\| Df(x+u+tv) - Df(x+tv) - D(Df)(x)u \right\| \cdot \|v\| \\ & = \sup_{0 < t < 1} \left\| D(Df)(x)[u+tv] - D(Df)(x)[tv] - D(Df)(x)[u] + \right. \\ & \quad \left. + o(\|u\| + \|v\|) \right\| \cdot \|v\| \\ & = o(\|u\| + \|v\|) \cdot \|v\| = o((\|u\| + \|v\|)^2) \end{aligned}$$

■

Teorema 3.3.2 - Simmetria del Differenziale Secondo

Siano E, F spazi normati. Siano $\Omega \subseteq E$ e $x_0 \in \Omega$. Sia $f : \Omega \rightarrow F$ differenziabile 2 volte in x_0 . Allora $D^2 f(x_0)$ è simmetrico:

$$\forall u, v \in E : \quad D^2 f(x_0)[u, v] = D^2 f(x_0)[v, u]$$

Dimostrazione. Per l'interpretazione 2 della Proposizione 3.3.1, si ha che per ogni $u, v \in E$, per $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ vale la proprietà:

$$D^2 f(x)[u, v] - D^2 f(x)[v, u] = o((\|u\| + \|v\|)^2)$$

in quanto tutti i termini si cancellano.

Da ciò segue subito la tesi, per definizione di differenziale secondo. ■

⁴Viene usata la notazione: $D^2 f(x_0)[u, v] = \left[D^2 f(x_0)[u] \right][v]$.

Teorema 3.3.3 - Inversione dell'Ordine di Derivazione (Schwarz)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aperto ed $f : \Omega \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ una funzione tale che:

1. $\exists \partial_1 f, \partial_2 \partial_1 f$ in Ω , con $\partial_2 \partial_1 f$ continua su $(x_0, y_0) \in \Omega$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : (x, y_0) \in \Omega \exists \partial_2 f$

Allora $\exists \partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$.

Dimostrazione. Definiamo la funzione ausiliaria $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ come:

$$\omega(r) = \sup_{\substack{\|x-x_0\| \leq r \\ \|y-y_0\| \leq r}} \|\partial_2 \partial_1 f(x, y) - \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)\|$$

Ed in particolare, osserviamo che ω infinitesima per $r \rightarrow 0$ in quanto $\partial_2 \partial_1 f$ è continua in (x_0, y_0) per ipotesi. Proviamo allora che:

$$\left\| \frac{\partial_2 f(x, y_0) - \partial_2 f(x_0, y_0)}{x - x_0} - \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0) \right\| \leq \omega(|x - x_0|) \quad (3.11)$$

che segue dalla disuguaglianza: per ogni $(x, y) \in \Omega$ tali che $|x - x_0| \leq r$ e $|y - y_0| \leq r$ vale:

$$\left\| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} - \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} - \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0) \right\| \leq \omega(r) \quad (3.12)$$

Infatti a quel punto per $y \rightarrow y_0$ si risolve l'equazione 3.11. Dimostriamo la disequazione 3.12:

$$\begin{aligned} & \|f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0) - (x - x_0)(y - y_0)\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)\| = \\ & = \left\| [f(t, y) - f(t, y_0) - t(y - y_0)\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)]_{t=x_0}^{t=x} \right\| \\ & \stackrel{(*)}{\leq} |x - x_0| \cdot \sup_{|t-x_0| \leq r} \|\partial_1 f(t, y) - \partial_1 f(t, y_0) - (y - y_0)\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)\| \\ & = |x - x_0| \cdot \sup_{|t-x_0| \leq r} \left\| [\partial_1 f(t, s) - s\partial_2 \partial_1 f(x_0, t)]_{s=y_0}^{s=y} \right\| \\ & \stackrel{(*)}{\leq} |x - x_0| \cdot |y - y_0| \cdot \sup_{\substack{|t-x_0| \leq r \\ |s-y_0| \leq r}} \|\partial_2 \partial_1 f(t, s) - \partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0)\| = \omega(r) \end{aligned}$$

dove in (*) è stato usato il Teorema del Valor Medio. Segue la tesi. ■

Definizione 3.3.1 - Matrice Hessiana

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile 2 volte in $x \in \Omega$. Esiste quindi $D^2 f(x) \in \mathcal{L}_{simm}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ forma bilineare.

Per il Teorema 3.3.3 si definisce la matrice Hessiana, che rappresenta $D^2 f(x)$ in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{1,1} f(x) & \partial_{2,1} f(x) & \dots & \partial_{n,1} f(x) \\ \partial_{1,2} f(x) & \partial_{2,2} f(x) & \dots & \partial_{n,2} f(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{1,n} f(x) & \partial_{2,n} f(x) & \dots & \partial_{n,n} f(x) \end{bmatrix}$$

dove $\partial_{i,j} f(x) = \partial_i \partial_j f(x)$.

Teorema 3.3.4 - Limite sotto Segno di Derivata

Siano E, F spazi di Banach. Sia $\Omega \subseteq E$ aperto connesso. Siano $f_n : \Omega \rightarrow F$ una successione di funzioni tali che:

1. $\{f_n(x_0)\}$ converge in F per almeno un $x_0 \in \Omega$
2. $Df_n : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ convergono a $g : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ uniformemente e localmente, cioè:

$$\forall a \in \Omega \exists r_a > 0 : \|Df_n - g\|_{\infty, B(a, r_a)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Allora:

1. f_n convergono a $f : \Omega \rightarrow F$ localmente uniformemente.
2. f è differenziabile, $Df = g$.

Commento 1. Disperazione degli autori

Sedetevi. Preparatevi l'acqua calda per una camomilla.

Fatto? Bene. Prendete il telefono e mettete la modalità aereo, non sia mai che qualcuno vi importuni proprio ora che vi accingete a questa dimostrazione.

Vi servirà concentrazione per capire le righe e righe di formula che seguiranno.

Ma vi prego non ce ne vogliate, L^AT_EX non è molto clemente con la lunghezza delle formule, abbiamo fatto il meglio che potevamo con tutti questi a capo.

Dimostrazione. Dimostriamo i punti separatamente.

1. Proviamo che $f_n(x)$ convergente per ogni $x \in B(a, r_a) \subseteq \Omega$ se e solo se $f_n(a)$ convergente. Affinchè valga l'equivalenza, vediamo che la differenza $f_n(x) - f_n(a)$ è una successione di Cauchy. Allora la convergenza di una successione implica quella dell'altra. Per $p, q \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \|(f_p(x) - f_p(a)) - (f_q(x) - f_q(a))\| &\leq \|Df_p - Df_q\|_{\infty, B(a, r_a)} \cdot \|x - a\| \\ &\leq \|Df_p - Df_q\|_{\infty, B(a, r_a)} \cdot r_a = o(1) \end{aligned}$$

Quindi $\{f_n(x) - f_n(a)\}$ è di Cauchy e converge. Ma allora gli insiemi:

$$A = \{x \in \Omega \mid f_n(x) \text{ converge}\} \text{ e } B = \{x \in \Omega \mid f_n(x) \text{ non converge}\}$$

sono entrambi aperti in quanto se a vi appartiene, allora tutta la palla $B(a, r_a)$ vi appartiene. I due aperti sono tra di loro complementari in Ω connesso. Inoltre per l'ipotesi (1), $A \neq \emptyset$ quindi $A = \Omega$. Ovvero le funzioni convergono puntualmente per ogni $x \in \Omega$.

Dimostriamo che lo fanno localmente uniformemente, cioè uniformemente sulle palle $B(a, r_a)$. Prendendo $\lim_{q \rightarrow \infty}$ delle precedente espressione, essendo tutte operazioni continue, si ha:

$$\|(f_p(x) - f_p(a)) - (f(x) - f(a))\| \leq \|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} \cdot \|x - a\|$$

Inoltre vale che:

$$\begin{aligned} \|f_p(x) - f(x)\| &\leq \|f_p(a) - f(a)\| + \|f_p(x) - f(x) - f_p(a) + f(a)\| \\ &\leq \|f_p(a) - f(a)\| + \|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} \cdot r_a \end{aligned}$$

e passando al $\sup_{x \in B(a, r_a)}$:

$$\|f_p - f\|_{\infty, B(a, r_a)} \leq \|f_p(a) - f(a)\| + \|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} \cdot r_a$$

che prova la convergenza uniforme locale.

2. Vediamo che f è differenziabile con $Df = g$ per ogni $a \in \Omega$. In particolare vediamo che la seguente quantità è $o(\|x - a\|)$ per $x \rightarrow a$:

$$\begin{aligned} & \|f(x) - f(a) - g(a)[x - a]\| \leq \|f(x) - f(a) - f_p(x) + f_p(a)\| + \\ & + \|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x - a]\| + \|Df_p(a)[x - a] - g(a)[x - a]\| \\ & \leq \left[\|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} + \frac{\|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x - a]\|}{\|x - a\|} + \right. \\ & \left. + \|Df_p(a) - g(a)\| \right] \cdot \|x - a\| \\ & \leq \left[2\|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} + \frac{\|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x - a]\|}{\|x - a\|} \right] \|x - a\| \end{aligned}$$

Segue, riscrivendo la disuguaglianza, che per ogni $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - f(a) - g(a)[x - a]\|}{\|x - a\|} & \leq 2\|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} + \\ & + \frac{\|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x - a]\|}{\|x - a\|} \end{aligned}$$

passando allora ad $\inf_{p \in \mathbb{N}}$ all'ultimo termine:

$$\frac{\|f(x) - f(a) - g(a)[x - a]\|}{\|x - a\|} \leq 2\|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} + 0$$

e dato che per $p \rightarrow +\infty$ si ha $\|Df_p - g\|_{\infty, B(a, r_a)} = o(1)$ per cui si ottiene la tesi. ■

Commento 2. Amen.

Definizione 3.3.2 - Integrale in Spazio di Banach

Siano $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e $f : [a, b] \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ continua.

Definisco per notazione:

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$$

dove $g' = f$ esiste per il Teorema 3.3.4.

Definizione 3.3.3 - Diffeomorfismo

Siano E, F spazi di Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ aperti. La funzione $f : U \rightarrow V$ è diffeomorfismo se:

- f continua, differenziabile e invertibile
- f^{-1} differenziabile

Se f^{-1} è C^k , allora f è C^k -diffeomorfismo.

Teorema 3.3.5 - Inversione Locale

Siano E, F spazi di Banach, $\Omega \subseteq E$ aperto, $x_0 \in \Omega$. Sia $f : \Omega \rightarrow F$ di classe C^1 con $Df(x_0)$ invertibile in x_0 .

Allora f è diffeomorfismo locale in x_0 .

Dimostrazione. Sia per ipotesi $L = Df(x_0)^{-1} \in L(E, F)$. La mappa

$$(L \circ f) : x \mapsto Lf(x)$$

ha differenziale $LDf(x)$ che in $x = x_0$ è l'identità.

Consideriamo la palla $U = B(x_0, r) \subseteq \Omega$, su cui banalmente vale che:

$$Lf(x) = x + (Lf(x) - x)$$

dove in particolare $D(Lf(x) - x) = LDf(x) - I$. Prendendo la norma, per $r \rightarrow 0$:

$$\|D(Lf(x) - x)\| = \|LDf(x) - I\| = o(1)$$

perchè la funzione $LDf(x) - I$ è continua in x_0 dove vale I . Ma allora la mappa $x \mapsto Lf(x) - x$ ha costante di Lipschitz $\|LDf - I\|_{\infty, B(x_0, r)}$ sulla palla $B(x_0, r)$. Prendiamo $r > 0$ abbastanza piccolo così $\|LDf - I\|_{\infty, B(x_0, r)} \leq \frac{1}{2}$.

Allora per il Teorema delle Perturbazioni 1-Lipschitz 2.5.2 l'immagine di U tramite $Lf(x) = x + (Lf(x) - x)$ è aperta in E ed in particolare Lf è omeomorfismo tra U e la sua immagine. Dato che L è omeomorfismo (in quanto applicazione invertibile) allora applicando l'inversa ad Lf omeomorfismo si ottiene che f è omeomorfismo tra U e la sua immagine $f(U) = V$. Applicando la formula per il differenziale dell'inversa (la Proposizione 3.1.3) vale che $f^{-1} : V \rightarrow U$ è differenziabile con:

$$Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$$

Vale di più: $f^{-1} \in C^1$. Infatti Df^{-1} è composizione di continue⁵:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f^{-1}} & U & \xrightarrow{Df} & \text{InvLin}(E, F) & \xrightarrow{[\cdot]^{-1}} & L(F, E) \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) & \mapsto & Df(f^{-1}(y)) & \mapsto & [Df(f^{-1}(y))]^{-1} \end{array}$$

■

Definizione 3.3.4 - Luogo di Zeri e Grafico

Siano E, F, G spazi di Banach, $\Omega \subseteq E \times F$ aperto. Sia $f : \Omega \rightarrow G$.

Il luogo di zeri di f è: $Z(f) = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}$.

$Z(f)$ è il grafico di f come funzione da x in y nel punto $(x_0, y_0) \in Z(f)$ se $\exists \varepsilon, \delta > 0$ ed $\exists u : B_E(x_0, \varepsilon) \rightarrow B_F(y_0, \delta)$ tali che, equivalentemente:

- $\text{graf}(u) = Z(f) \cap (B_E(x_0, \varepsilon) \times B_F(y_0, \delta))$
- $\forall (x, y) \in B_E(x_0, \varepsilon) \times B_F(y_0, \delta) : (x, y) \in Z(f) \Leftrightarrow y = u(x)$

Teorema 3.3.6 - Funzione Implicita

Siano E, F, G spazi di Banach, $\Omega \subseteq E \times F$ aperto. Sia $f : \Omega \rightarrow G$ in classe C^1 . Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e $D_2f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(F, G)$ invertibile.

Allora:

⁵L'ultima freccia è continua in quanto l'inversa matriciale è una funzione continua nei coefficienti della matrice.

- $\exists U$ intorno aperto di x_0 , $\exists V$ intorno aperto di y_0 tali che $U \times V \subseteq \Omega$
- $\exists u : U \rightarrow V$ di classe C^1 tale che: $\{f = 0\} \cap \{U \times V\} = \text{graf}(u)$

In particolare, la funzione u è tale che

$$\forall x \in U : \begin{cases} Du(x) = -[D_2f(x, u(x))]^{-1} \circ D_1f(x, u(x)) \\ f(x, u(x)) = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo la mappa:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Omega &\longrightarrow E \times G \\ (x, y) &\longmapsto (x, f(x, y)) \end{aligned}$$

che è C^1 in quanto le componenti sono C^1 .

Verifichiamo che $D\Phi(x_0, y_0)$ è invertibile come mappa $E \times F \rightarrow E \times G$. Per $(x_0, y_0) \in \Omega$ ed $(h, k) \in E \times F$:

$$D\Phi(x_0, y_0)[h, k] = (h, D_1f(x_0, y_0)[h] + D_2f(x_0, y_0)[k])$$

Indichiamo i differenziali parziali come $L = D_1f(x_0, y_0)$ ed $M = D_2f(x_0, y_0)$. Allora:

$$D\Phi(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & M \end{bmatrix}$$

e con semplici calcoli si ottiene che l'inversa sarà:

$$D\Phi(x_0, y_0)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M^{-1}L & M^{-1} \end{bmatrix}$$

Applichiamo il Teorema di Inversione Locale: esistono W e V intorno aperti di x_0 ed y_0 rispettivamente tali che $\Phi(W \times V)$ sia aperto e $\Phi|_{W \times V}$ diffeomorfismo.

Definiamo allora il dominio U della funzione u come:

$$U = \{x \in E \mid (x, 0) \in \Phi(W \times V)\}$$

ed indicando con $\pi_F : E \times F \rightarrow F$ la proiezione, definiamo per ogni $x \in U$:

$$u(x) = \pi_F(\Phi^{-1}(x, 0))$$

Perché così per costruzione vale:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \Phi(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) \in \Phi^{-1}(x, 0) \\ &\Leftrightarrow y = \pi_F(\Phi^{-1}(x, 0)) \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che $u \in C^1(U, F)$ perché composizione di mappe C^1 :

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{j_1} & \Phi(U \times V) \subseteq U \times G & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & E \times F & \xrightarrow{\pi_F} & F \\ x & \longmapsto & (x, 0) & \longmapsto & \Phi^{-1}(x, 0) & \longmapsto & \pi_F(\Phi^{-1}(x, 0)) \end{array}$$

Calcoliamo quindi il differenziale di u . Partiamo dalla funzione $g(x) = f(x, u(x))$ che per definizione è la mappa nulla. Differenziando allora:

$$0 = Dg(x) = D_1f(x, u(x)) + D_2f(x, u(x)) \circ Du(x)$$

e riscrivendo:

$$Du(x) = -D_2f(x, u(x))^{-1} \circ D_1f(x, u(x))$$

ovvero la tesi. ■

Corollario 3.3.6.1 - Caso di \mathbb{R}^n

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Sia $x \in \Omega$ tale che $\nabla f(x) \neq 0$, in particolare suppongo per $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$ che $\partial_n f(x) \neq 0$.

Allora per $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ con U intorno di \mathbb{R}^{n-1} , $\exists u : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

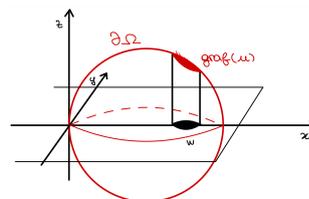
$$\exists \varepsilon > 0 : \{f = 0\} \cap (U \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[) = \text{graf}(u)$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 3.3.6. ■

Esempio 3.3.1

Consideriamo la funzione il cui luogo di zeri è la sfera n -dimensionale:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$$



Allora in Figura 3.1 si può osservare cosa si intende per funzione implicita locale della sfera.

Figura 3.1: Esempio di funzione implicita per la sfera S^2

Teorema 3.3.7 - Teorema di Dini

Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Sia:

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora il luogo di zeri di F in un intorno di (x_0, y_0) è il grafico di una funzione u nella variabile x .

Più precisamente:

$$\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \cap ([x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]) = \\ = \{(x, y) \mid x \in [x_0 - a, x_0 + a] \text{ e } y = u(x)\}$$

Ed inoltre $u \in C^1([x_0 - a, x_0 + a], \mathbb{R})$ dove:

$$u'(x) = -\frac{\partial_x F(x, u(x))}{\partial_y F(x, u(x))}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 3.3.6. ■

Definizione 3.3.5 - Funzione omogenea

Sia $\|\cdot\|$ spazio normato. Prendiamo $f : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f si dice p -omogenea se per ogni $t > 0$ ed $x \in E \setminus \{0\}$:

$$f(tx) = t^p f(x)$$

Teorema 3.3.8 - Teorema di Eulero

Sia $f : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile. Vale l'equivalenza:

$$f \text{ è } p\text{-omogenea} \iff Df(x)[x] = pf(x) \text{ per ogni } x \in E \setminus \{0\}$$

Dimostrazione. (\Rightarrow) : sia $f(tx) = t^p f(x)$ per ogni $x \in E$ e $t > 0$. Allora:

$$\frac{d}{dt} f(tx)[x] = pt^{p-1} f(x)$$

Vedendo la derivata direzionale come la derivata della funzione $f \circ \gamma$ dove $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ è la retta $\gamma(t) = tx$:

$$Df(tx)[x] = pt^{p-1} f(x)$$

e scelto $t = 1$ si ottiene l'implicazione.

(\Leftarrow): supponiamo che per ogni $x \in E \setminus \{0\}$:

$$Df(x)[x] = pf(x)$$

Ciò significa banalmente che anche per ogni $t > 0$:

$$Df(tx)[tx] = pf(tx)$$

Allora si ottiene:

$$\begin{aligned} tDf(tx)[x] &= pf(tx) \\ t^p \frac{d}{dt} (f(tx)) &= t^p Df(tx)[x] = pt^{p-1} f(tx) \\ t^p \frac{d}{dt} (f(tx)) - pt^{p-1} f(tx) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{f(tx)}{t^p} \right) t^{2p} &= 0 \end{aligned}$$

ovvero si ottiene che $\frac{f(tx)}{t^p}$ è costante. Valutando in $t = 1$:

$$\frac{f(tx)}{t^p} = f(x)$$

cioè la tesi. ■

3.4 Polinomio di Taylor

3.4.1 Definizione

Definizione 3.4.1 - Polinomio di Taylor per curve

Sia $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach, sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in I$.

Il polinomio di Taylor di centro x_0 e ordine n sarà:

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Proposizione 3.4.1 - Proprietà

Nelle ipotesi della Definizione 3.4.1, valgono le seguenti proprietà:

1. $T_n(x, x, f) = f(x)$
2. $\partial_1 T_n(x, x_0, f) = T_{n-1}(x, x_0, f^{(1)})$
3. $\partial_2 T_n(x, x_0, f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

Dimostrazione. Le identità seguono dal calcolo diretto delle quantità. ■

Definizione 3.4.2 - Polinomio di Taylor per Normati

Siano E, F spazi normati, sia $f : \Omega \subseteq E \rightarrow F$ una funzione differenziabile n volte in $x_0 \in \Omega$.

Il polinomio di Taylor di centro x_0 e ordine n sarà:

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k f(x_0) [x - x_0]^k$$

Notazione 3.1 - Multi-indice

Un multi-indice è $\alpha \in \mathbb{N}^m$ dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. In particolare si denota:

- la somma: $|\alpha|_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i$
- l'esponente: $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}$
- il binomiale: $\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} = \binom{k}{\alpha_1} \binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \dots \binom{k-\alpha_1-\dots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m}$

Proposizione 3.4.2 - Polinomio di Taylor con Multi-indice

Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile n volte in $x_0 \in U$. Allora:

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{|\alpha|_1 \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha$$

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, completiamo i calcoli combinatorici pensando a polinomi in $k \times m$ variabili, che indichiamo con la famiglia di variabili $\{x_{i,j}\}_{\substack{i \in [k] \\ j \in [m]}}$. In particolare, vogliamo calcolare⁶:

$$\prod_{i \in [k]} \left(\sum_{j \in [m]} x_{i,j} \right) = \sum_{j: [k] \rightarrow [m]} \left(\prod_{i \in [k]} x_{i,j(i)} \right)$$

⁶Il trucco è pensare all'indice j che varia come ad una funzione $j : [k] \rightarrow [m]$.

nel caso particolare in cui per ogni $i \in [j]$ si ha $x_{i,j} = x_j$. Infatti allora:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in [m]} x_j \right)^k &= \prod_{i \in [k]} \left(\sum_{j \in [m]} x_j \right) = \sum_{j: [k] \rightarrow [m]} \left(\prod_{i \in [k]} x_{j(i)} \right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha|_1 = k}} \left(\sum_{\substack{j: [k] \rightarrow [m] \\ |j^{-1}(l)| = \alpha_l \forall l}} x^\alpha \right) = \sum_{|\alpha|_1 = k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha \end{aligned}$$

Si può ripetere lo stesso conto formale con la valutazione della mappa lineare $L \in L_S^k((\mathbb{R}^m)^k)$ nel punto $[x]^k$ dove $x = \sum_{j=1}^m x_j e_j$. Si ottiene che:

$$L[x]^k = L \left[\sum_{j \in [m]} x_j e_j \right]^k = \cdots = \sum_{|\alpha|_1 = k} \binom{k}{\alpha} L_\alpha \cdot x^\alpha$$

dove in particolare $L_\alpha = L[e^\alpha] = L[e_1^{\alpha_1}, \dots, e_m^{\alpha_m}]$ è un vettore.

Considerando $L = Df$, si ottiene che $L_\alpha = \partial^\alpha$ da cui segue la scrittura, con $h = x - x_0$:

$$T_n(x_0 + h, x_0, f) = \sum_{|\alpha|_1 \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) h^\alpha$$

ovvero la tesi. ■

3.4.2 Stime del Resto per Curve

Siano $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$ derivabile n volte in $x_0 \in I$.

Proposizione 3.4.3 - Stima di Peano

Se $\exists f^{(n)}(x_0)$, allora per $x \rightarrow x_0$:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| = o(|x - x_0|^n)$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione, come nel caso scalare, usando il Teorema del Valor Medio vettoriale.

Nel caso $n = 1$ osserviamo che per la definizione di derivata si scrive:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| = \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| = o(\|x - x_0\|)$$

Trovato che la tesi è vera per $n = 1$, si reitera il procedimento con $n > 1$: infatti possiamo scrivere per Teorema del Valor Medio:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| = \|f(x) - T_n(x, x_0, f)\| \leq |x - x_0| \sup_{t \in [x_0, x]} \|f'(x) - T_{n-1}(x, x_0, f')\|$$

e per ipotesi induttiva allora si ottiene:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| = |x - x_0| \cdot o(|x - x_0|^{n-1}) = o(|x - x_0|^n)$$

cioè la tesi. ■

Proposizione 3.4.4 - Stima di Lagrange

Se $\exists f^{(n+1)}(x) \forall x \in I$, allora:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} \|f^{(n+1)}(t)\| \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dimostrazione. Si usa il Teorema del Valor Medio nella variante di Cauchy, con le funzioni $f(t) = T_n(x, t)$ e $g(t) = |x-t|^{n+1}$. Infatti si trova che:

$$\frac{\|R_n(x, x_0, f)\|}{|x-x_0|^{n+1}} = \frac{\|[T_n(x, t)]_{t=x_0}^{t=x}\|}{\|[x-t]_{t=x_0}^{t=x}\|} \leq \sup_{t \in [x_0, x]} \left\| \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} \right\| = \sup_{t \in [x_0, x]} \frac{\|f^{(n+1)}(t)\|}{(n+1)!}$$

da cui la tesi. ■

Commento 3. Come aiuto mnemonico per la definizione di φ nella prossima Proposizione basta ricordare che la sua derivata n -esima si deve annullare in x_0 , in modo da avere $T_{n-1}(x, x_0, \varphi) = T_n(x, x_0, \varphi)$.

Proposizione 3.4.5 - Variazione di Lagrange 1

Se $\exists f^{(n)}(x) \forall x \in I$, allora:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} \|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)\| \cdot \frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

Dimostrazione. Sotto le ipotesi più deboli, applichiamo la stima precedente con $n-1$ alla funzione:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

che è derivabile n volte in x_0 .

Infatti osserviamo che:

$$T_{n-1}(x, x_0, \varphi) = T_n(x, x_0, \varphi) = T_n(x, x_0, f) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = T_{n-1}(x, x_0, f)$$

per cui:

$$R_n(x, x_0, f) = f(x) - T_n(x, x_0, f) = \varphi(x) - T_{n-1}(x, x_0, \varphi) = R_{n-1}(x, x_0, \varphi)$$

Applichiamo la stima di Lagrange a $R_{n-1}(x, x_0, \varphi)$ per ottenere:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} \|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)\| \frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

questo conclude. ■

Proposizione 3.4.6 - Variazione di Lagrange 2

Se $\exists f^{(n-1)}(x) \forall x \in I$ e $\exists f^{(n)}(x_0)$, allora:

$$\|R_n(x, x_0, f)\| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} \|f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(x_0) - (t-x_0)f^{(n)}(x_0)\| \cdot \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Dimostrazione. Utilizziamo la stessa idea della Variazione precedente. Definiamo:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Quindi analogamente otteniamo che $R_{n-2}(x, x_0, \varphi) = R_n(x, x_0, f)$ ed in particolare φ è derivabile $n - 1$ volte:

$$\varphi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(t - x_0)$$

quindi applicando la stima di Lagrange a φ :

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} \|f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(x_0) - (t - x_0)f^{(n)}(x_0)\| \cdot \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

ovvero la tesi. ■

Proposizione 3.4.7 - Stima Integrale

Se $f \in C^{n+1}$, allora:

$$R_n(x - x_0) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proprietà del polinomio di Taylor:

$$\partial_2 T(x, x_0, f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Infatti a quel punto:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= f(x) - T_n(x, x_0) = [T_n(x, t)]_{t=x_0}^{t=x} \\ &= \int_{x_0}^x \partial_t T_n(x, t) dt = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \end{aligned}$$

che è la tesi. ■

3.4.3 Stime del Resto per Normati

Siano E, F spazi normati, sia $f : \Omega \subseteq E \rightarrow F$ una funzione differenziabile n volte in $x_0 \in \Omega$.

Le seguenti Proposizioni si riconducono direttamente alle stime per curve, prendendo:

$$\gamma : t \mapsto f(x_0 + t(x - x_0))$$

Infatti si osserva che:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} f(x_0 + t(x - x_0)) &= D^k f(x_0 + t(x - x_0)) [x - x_0, \dots, x - x_0] \\ &= D^k f(x_0 + t(x - x_0)) [x - x_0]^k \end{aligned}$$

e con questa scrittura dei differenziali D^k con curve, si ottengono i prossimi risultati.

Proposizione 3.4.8 - Stima di Lagrange

Se $\exists D^{n+1} f(x) \forall x \in \Omega$ convesso, allora:

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \|D^{n+1} f\|_{\infty, \Omega} \cdot \frac{\|x - x_0\|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Proposizione 3.4.9 - Variazione di Lagrange 1

Se $\exists D^n f(x) \forall x \in \Omega$ e $D^n f(x)$ continua in x_0 , allora:

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \|D^n f - D^n f(x_0)\|_{\infty, \Omega} \cdot \frac{\|x - x_0\|^n}{n!}$$

Proposizione 3.4.10 - Variazione di Lagrange 2

Se $\exists D^{n-1}f(x) \forall x \in \Omega$ e $\exists D^n f(x_0)$, allora:

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \sup_{y \in \Omega} \|D^{n-1}f(t) - D^{n-1}f(x_0) - (y - x_0)D^n f(x_0)\|_{\infty, \Omega} \cdot \frac{\|x - x_0\|^{n-1}}{(n-1)!}$$

3.5 Ottimizzazione di Funzioni

3.5.1 Punti di Minimo

Definizione 3.5.1 - Valore di Minimo e Punto di Minimo

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme e $x \in S$, sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$:

- x è punto di minimo di f se: $f(x) \leq f(y) \forall y \in S$
- $f(x)$ è in tal caso valore di minimo (o minimo)

3.5.2 Caratterizzazione di Minimo

Siano E spazio di Banach e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposizione 3.5.1 - Proprietà Necessaria 1

Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo allora:

$$\forall v \in E \quad \partial_v f(x_0) = 0$$

purchè $\partial_v f(x_0)$ esista.

Dimostrazione. Infatti

$$\partial_v f(x_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)|_{t=0} = 0$$

in quanto $t = 0$ è punto di minimo locale per $f(x_0 + tv)$. ■

Proposizione 3.5.2 - Proprietà Necessaria 2

Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo ed f è differenziabile 2 volte in x_0 (cioè $\exists D^2 f(x_0) \in \mathcal{L}_{sim}^2(E \times E)$) allora:

$$\forall v \in E \quad D^2 f(x_0)[v, v] \geq 0$$

ovvero $D^2 f(x_0)$ è positiva.

Dimostrazione. Infatti per ogni $v \in E$:

$$D^2 f(x_0)[v, v] = \frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + tv)|_{t=0} \geq 0$$

poichè $t = 0$ è minimo di $f(x_0 + tv)$ definita in un intorno di $0,] - \varepsilon, \varepsilon[$. ■

Proposizione 3.5.3 - Proprietà Sufficiente

Sia $x_0 \in \Omega$ ed f è differenziabile 2 volte in x_0 .

In particolare $Df(x_0) = 0$; $D^2 f(x_0)$ bilineare simmetrica e definita positiva. Allora: $\exists B(x_0, r) \subseteq \Omega$ tale che x_0 è unico punto di minimo per $f|_{B(x_0, r)}$.

Dimostrazione. Infatti: $\forall v \in E, \|v\| < r$ dallo sviluppo al secondo ordine con resto di Peano:

$$\begin{aligned} f(x_0 + v) &= f(x_0) + Df(x_0)v + \frac{1}{2}D^2 f(x_0)[v, v] + o(\|v\|^2) \\ &\geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 + o(\|v\|^2) = f(x_0) + \left(\frac{\alpha}{2} + o(1)\right)\|v\|^2 \end{aligned}$$

Perciò esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ e $\forall r, 0 < \|v\| < r$ vale $f(x_0 + v) > f(x_0)$, cioè x_0 è l'unico punto di minimo di $f|_{B(x_0, r)}$. ■

Osservazione 3.5.1

In particolare queste proprietà sono analoghe al Principio Variazionale di Fermat (vedi Analisi Matematica 1).

Le ipotesi di queste proposizioni si trovano allora in contrasto con le ipotesi del Teorema di Weierstrass: una richiesta del primo principio è Ω aperto, mentre nel secondo Ω compatto. Il prossimo metodo, sotto ipotesi di Ω chiuso, ci dà informazioni su massimi/minimi su $\partial\Omega$ (dove Fermat è applicabile solo su $\overset{\circ}{\Omega}$).

Proposizione 3.5.4 - Caratterizzazione variazionale degli autovettori/autovalori di matrici simmetriche reali

Sia $A \in M_n^{sim}(\mathbb{R})$, definiamo il quoziente di Rayleigh $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$q_A(x) = \frac{(Ax \cdot x)}{(x \cdot x)}$$

Questa è una funzione 0-omogenea. Risulta la seguente proprietà.

Una coppia $(\nu, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ è una coppia di autovettore/autovalore di A se e solo se è una coppia punto critico/valore critico di q_A .

Dimostrazione. Infatti: q_A è differenziabile ovunque, anzi C^∞ ; $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\nabla q_A(x) = \nabla \left(\frac{(Ax \cdot x)}{(x \cdot x)} \right) = \frac{(x \cdot x) \cdot \nabla(Ax \cdot x) - (Ax \cdot x) \nabla(x \cdot x)}{(x \cdot x)^2}$$

ma $\nabla(Ax \cdot x) = 2Ax$ infatti, visto che A è simmetrica:

$$\begin{aligned} (A(x+h) \cdot (x+h)) &= (Ax \cdot x) + (Ax \cdot h) + (Ah \cdot x) + (h \cdot h) \\ &= (Ax \cdot x) + 2(Ax \cdot h) + \|h\|^2 \end{aligned}$$

cioè $\nabla(Ax \cdot x) = 2Ax$. In particolare per $A = I$, $\nabla(x \cdot x) = 2x$, dunque:

$$\nabla q_A(x) = 2 \frac{(u \cdot x)Ax - (Ax \cdot x)x}{(x \cdot x)^2} = \frac{2}{\|x\|^2} (Ax - q_A(x) \cdot x)$$

che è nullo se e solo se $Ax = q_A(x) \cdot x$, cioè se e solo se x è autovettore e $q_A(x)$ il corrispondente autovalore.

In particolare, ogni $A \in M_n^s(\mathbb{R})$ ha autovalori reali; il minimo e il massimo sono:

$$\min_{x \neq 0} q_A(x) = \min_{\|x\|=1} (Ax \cdot x) \quad \text{e} \quad \max_{x \neq 0} q_A(x) = \max_{\|x\|=1} (Ax \cdot x)$$

■

Osservazione 3.5.2

Dopo di che si osserva che se u è autovettore di $A = A^T$ allora $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = 0\}$ è un sottospazio A -invariante⁷ e allora la decomposizione in spazio ortogonale $\mathbb{R}^n = (Ru) \oplus u^\perp$ è A -invariante e gli autovalori di A sono quelli relativi a u e quelli di $A|_{u^\perp} : u^\perp \rightarrow u^\perp$

3.5.3 Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange**Definizione 3.5.2 - Sottovarietà Differenziabili**

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, sia $M \subseteq E$. M si dice sottovarietà differenziabile di E di classe C^m se $\forall p \in M$:

⁷ $x \cdot u = 0 \Rightarrow x \cdot \lambda u = 0 \Rightarrow (x \cdot Au) = (Ax \cdot u)$ cioè $Ax \in u^\perp$

- $\exists U$ intorno di p in E .
- $\exists F_1, F_2$ spazi normati.
- $\exists \varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U)$ diffeomorfismo di classe C^m dove $\varphi(U)$ aperto di $F_1 \times F_2$ tale che $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (F_1 \times \{0\})$.

Osservazione 3.5.3

Nelle ipotesi della Definizione 3.5.2 $D\varphi(p)^{-1}(F_1 \times \{0\})$ non dipende dalla scelta del diffeomorfismo φ .

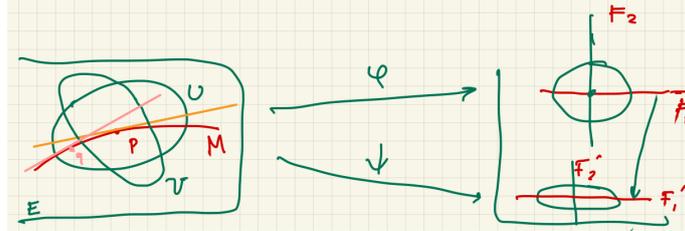


Figura 3.2: Diverse parametrizzazioni

Dimostrazione. Sia $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ un altro diffeomorfismo locale tale che esistano F'_1 e F'_2 spazi normati tali che:

$$\psi(V \cap M) = \psi(V) \cap (F'_1 \times \{0\})$$

Siano senza perdere generalità $U = V$ (a meno di prendere $U \cap V$). Ma allora è ben definito il diffeomorfismo:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \cap (F_1 \times \{0\}) \longrightarrow \psi(U) \times (F'_1 \times \{0\})$$

Quindi segue che:

$$\begin{aligned} D\psi^{-1}(p) [F'_1 \times \{0\}] &= D\psi^{-1}(p) [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[F_1 \times \{0\}]] \\ &= D\psi^{-1}(p) \circ D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[F_1 \times \{0\}] \\ &= D\psi^{-1}(p) \circ D\psi(p) \circ D\varphi^{-1}(\varphi(p))[F_1 \times \{0\}] \\ &= D\varphi^{-1}(\varphi(p))[F_1 \times \{0\}] \end{aligned}$$

ovvero la tesi. ■

Le seguenti definizioni sono ben definite grazie all'Osservazione 3.5.3.

Definizione 3.5.3 - Spazio Tangente $T_p M$

Lo spazio $F_1 \times \{0\}$ si chiama spazio tangente a M di p . Si indica $T_p M$.

Definizione 3.5.4 - Fibrato Tangente TM

Il fibrato tangente di M è:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M) \subseteq E \times E$$

Proposizione 3.5.5

Siano E, F spazi normati, $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $u : \Omega \rightarrow F$ un diffeomorfismo C^m . Allora $\Gamma = \text{graf}(u)$ è una sottovarietà differenziabile di $E \times F$. Inoltre:

$$T_{(x, u(x))} \text{graf}(u) = \text{graf}(Du(x))$$

Dimostrazione. Basta definire un'unica carta locale:

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \times F &\longrightarrow \Omega \times F \\ (x, y) &\longmapsto (x, y - u(x)) \end{aligned}$$

Allora, per ogni $(x, u(x)) \in \Gamma$ si calcola che:

$$T_{(x, u(x))}\Gamma = D(\varphi^{-1}(x, u(x)))[E \times \{0\}] = \text{graf}(Du(x))$$

ovvero la tesi. ■

Fatterello 3.5.1

Sia E spazio normato, $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $M \subseteq \Omega$ sottovarietà differenziabile C^m . Sia Ω' aperto di E' . Considero $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ diffeomorfismo C^m . Allora:

- $M' = \varphi(M)$ è sottovarietà differenziabile C^m di E'
- $\forall p \in M : T_{\varphi(p)}\varphi(M) = D\varphi(x)[T_pM]$

Dimostrazione. Segue dagli stessi calcoli fatti nell'Osservazione 3.5.3. ■

Proposizione 3.5.6 - Grafico di funzione è sottovarietà

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa C^m tale che $\forall x \in g^{-1}(p)$ allora $Dg(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ surgettiva. Allora $g^{-1}(p)$ è una sottovarietà di \mathbb{R}^n di classe C^m . Inoltre, per ogni $x \in g^{-1}(p)$ lo spazio tangente è dato da:

$$T_x g^{-1}(p) = \ker Dg(x)$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio: rimandiamo alla discussione sui grafici di funzione come sottovarietà con il Fatto 8.2.1. ■

Teorema 3.5.1 - Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Siano $f_0 \in C^1(\Omega)$ la funzione "obiettivo" e le funzioni "vincolo" $f_1, \dots, f_r \in C^1(\Omega)$. Sia $\Sigma = \{x \in \Omega \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$. Se $x^* \in \Sigma$ è un punto di minimo per $f_0|_{\Sigma}$ allora:

$$\nabla f_0(x^*), \nabla f_1(x^*), \dots, \nabla f_r(x^*)$$

sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (di Ennio de Giorgi)

Approssimiamo il problema di minimo vincolato con problemi di minimo libero con opportune penalizzazioni⁸: consideriamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione $g_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$g_k(x) = f_0(x) + \|x - x^*\|^2 + k \sum_{i=1}^r f_i(x)^2 \quad (3.13)$$

Sia $R > 0$ tale che $B = \overline{B(x^*, R)} \subseteq \Omega$ e sia x_k punto di minimo di g_k su B (c'è per il Teorema di Weierstrass). Seguono 3 passi.

⁸l'idea è di costruire la g_k dove guardo le $f_i(x)$ quando sono $\neq 0$, questo porta, prendendo i quadrati, ad un aumento della quantità. Si vuole dunque calcolare il minimo di g_k in seguito alle penalità

1. Dico che $g_k(x_k)$ è limitata. Sia $x^* \in B$. Allora:

$$\min_{x \in B} f_0(x) \leq f_0(x_k) \stackrel{3.13}{\leq} g_k(x_k) \leq g_k(x^*) = f_0(x^*)$$

Quindi esiste una successione $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tale che per $j \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} x_{k_j} \longrightarrow \xi \in B \\ g_{k_j}(x_{k_j}) \longrightarrow c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Dico che $\xi \in \Sigma$. Osserviamo:

$$0 \leq k_j \sum_{i=1}^r f_i^2(x_{k_j}) \leq g_{k_j}(x_{k_j}) \leq g_{k_j}(x^*) = f_0(x^*)$$

Quindi dividendo per k_j segue che:

$$0 \leq \sum_{i=1}^r f_i^2(x_{k_j}) \leq \frac{1}{k_j} f_0(x^*) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

Ma per continuità, da $x_{k_j} \rightarrow \xi$, segue allora anche

$$\sum_{i=1}^r f_i^2(\xi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r f_i^2(x_{k_j}) = 0$$

cioè $f_i(\xi) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Segue che $\xi \in \Sigma$.

3. Dico che $\xi = x^*$. Infatti:

$$f_0(x_{k_j}) + \|x_{k_j} - x^*\|^2 \leq g_{k_j}(x_{k_j}) \leq g_{k_j}(x^*) = f_0(x^*) \leq f_0(\xi)$$

Passando al limite per $j \rightarrow +\infty$ si trova che:

$$f_0(\xi) + \|\xi - x^*\|^2 \leq f_0(\xi)$$

e quindi che $\|\xi - x^*\| = 0$, ovvero $\xi = x^*$.

Commento 4. Quindi la $\{x_k\}_k$ stessa converge a x^* .

Ciò segue dalla proprietà di Urysohn: se ogni sottosuccessione arbitraria di $\{x_k\}_k$ ha una sotto-sottosuccessione convergente a x^* , allora la successione $\{x_k\}_k$ converge a x^* .

In particolare: gli $\{x_k\}$ sono minimi che appartengono a $\overset{\circ}{B} = B(x^*, R)$ definitivamente (in quanto $x_k \rightarrow x^*$), quindi vale (definitivamente) che:

$$\nabla g_k(x_k) = 0$$

per definizione di x_k come punti di minimo di g_k . Deriviamo l'equazione 3.13:

$$\nabla g_k(x) = \nabla f_0(x) + 2(x - x^*) + 2k \sum_{i=1}^r f_i(x) \nabla f_i(x)$$

ottenendo così una combinazione lineare dei $\nabla f_i(x)$. Valutandolo per $x = x_k$ è nulla si ottiene:

$$0 = \nabla g_k(x_k) = \nabla f_0(x_k) + 2(x_k - x^*) + 2k \sum_{i=1}^r f_i(x_k) \nabla f_i(x_k)$$

Cambiamo notazione per i coefficienti dei vettori nella combinazione lineare definita per $k \in \mathbb{N}$:

- si definisce $\lambda_{0,k} = 1$ per $\nabla f_0(x_k)$.
- si definisce $\lambda_{i,k} = 2kf_i(x_k)$ per $\nabla f_i(x_k)$ (dove $i = 1, \dots, r$).

Così la combinazione lineare si può riscrivere:

$$\sum_{i=0}^r \lambda_{i,k} \nabla f_i(x_k) = -2(x_k - x^*)$$

Per passare al limite $k \rightarrow +\infty$, bisogna normalizzare in quanto per definizione dei coefficienti $\lambda_{i,k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$.

Dividiamo per $\sqrt{1 + 4k^2 \sum_{i=1}^r f_i^2(x_k)}$, cioè la norma di $(\lambda_{0,k}, \lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{r,k}) \in \mathbb{R}^{r+1}$. Così facendo:

$$\sum_{i=1}^r \tilde{\lambda}_{i,k} \nabla f_i(x_k) = -\frac{2(x_k - x^*)}{\mu_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} o(1)$$

con:

$$\sum_{i=1}^r |\tilde{\lambda}_{i,k}|^2 = 1 \quad (3.14)$$

Rifrasando, vuol dire che la successione di vettori $(\tilde{\lambda}_{0,k}, \dots, \tilde{\lambda}_{r,k})_k \subseteq S^r$ compatto⁹. Quindi a meno di sottosuccessione, $(\tilde{\lambda}_{0,k}, \dots, \tilde{\lambda}_{r,k})_k$ converge a una $(r+1)$ -upla non nulla di coefficienti $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ (che ha norma euclidea = 1 per continuità della funzione norma). In conclusione:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0$$

che è una relazione di dipendenza lineare fra $\nabla f_0(x_0), \nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_r(x_0)$. Questo dimostra la tesi. ■

Commento 5. La seguente dimostrazione alternativa utilizza il fatto che l'insieme Σ si parametrizza come sottovarietà differenziabile, dove $\{\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_r(x_0)\}$ generano lo spazio ortogonale al tangente. Dato che g_0 ha minimo in $x_0 \in \Sigma$ per $f|_{\Sigma}$, le coordinate di ∇g_0 che identificano lo spazio tangente dovranno annullarsi (per le proprietà dei punti di minimo).

Dimostrazione alternativa. Distinguiamo la notazione dalla dimostrazione precedente. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, siano $\{g_0, g_1, \dots, g_r\} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mappe tali che:

$$x_0 \in \Sigma = \bigcap_{i=1}^r \{g_i = 0\}$$

e che x_0 è minimo di $g_0|_{\Sigma}$.

Se $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_r(x_0)$ sono linearmente dipendenti, abbiamo finito.

Supponiamo quindi che $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_r(x_0)$ siano linearmente indipendenti. Equivalentemente, ciò significa che data la funzione:

$$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r \\ x \longmapsto (g_1(x), \dots, g_r(x))$$

⁹Per $S^r \subseteq \mathbb{R}^{r+1}$ si intende il bordo della sfera $r+1$ -dimensionale, che ha come equazione proprio l'equazione 3.14.

vale che il suo differenziale è surgettivo in x_0 :

$$J_g(x_0) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla g_r(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(x_0) & \dots & \partial_n g_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_r(x_0) & \dots & \partial_n g_r(x_0) \end{bmatrix}$$

Siamo quindi nelle ipotesi della Proposizione 3.5.6: il luogo di zeri di g è (localmente in x_0) una sottovarietà.

Consideriamo un caso elementare prima di generalizzare (ovvero la sottovarietà "rad-drizzata"): sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mappa C^1 . Sia $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tale che $(x_0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ è un punto di minimo sull'insieme $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Ovvero:

$$(x_0, 0, \dots, 0) = \min_{x \in (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \Omega} f(x)$$

Ma allora, essendo $x_0 \in \mathbb{R}^k$ un punto di minimo per la mappa $f(\cdot, 0, \dots, 0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\partial_i f(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

cioè in termini di differenziali:

$$\nabla f(x_0, 0, \dots, 0) \perp (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

Useremo questa proprietà con la sottovarietà parametrizzata in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Torniamo al caso generale, ovvero Σ sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n ed $x_0 \in \Sigma$ punto di minimo per la mappa C^1 :

$$g_0 : \Sigma \subseteq \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Consideriamo la mappa $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ della definizione di sottovarietà differenziabile. Ci riconduciamo dunque al caso precedente dato che $\varphi(\Sigma \cap U) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$:

$$\nabla(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \perp (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

In particolare il termine a sinistra, valutato in qualsiasi $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \cdot h \rangle &= D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0))[h] = Df(x_0)[D\varphi^{-1}(\varphi(x_0))[h]] \\ &= \langle \nabla f(x_0) \cdot D\varphi^{-1}(\varphi(x_0))[h] \rangle = \langle D\varphi(x_0)[\nabla f(x_0)] \cdot h \rangle \end{aligned}$$

ovvero si ottiene che:

$$D\varphi(x_0)[\nabla f(x_0)] = \nabla(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \perp (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

e applicando $D\varphi(x_0)^T$:

$$\nabla f(\varphi(x_0)) \perp T_{\varphi(x_0)}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

cioè in termini di appartenenza: $\nabla f(\varphi(x_0)) \in (T_{\varphi(x_0)}(\mathbb{R}^k \times \{0\}))^\perp$.

Ma dato che $\Sigma = g^{-1}(0)$ per la Proposizione 3.5.6 lo spazio tangente si definisce:

$$T_{x_0}\Sigma = \ker Dg(x) = \text{Span}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_r(x_0))^\perp$$

Quindi ho la tesi in quanto:

$$\nabla f(x_0) \in (T_{x_0}\Sigma)^\perp = \text{Span}(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_r(x_0))$$

quindi $\{\nabla g_0(x_0), \nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_r(x_0)\}$ non sono linearmente indipendenti. ■

3.6 Complessificazione

Osservazione 3.6.1 - Restrizione ai Reali

Sia E uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . In particolare, esso è anche spazio vettoriale su \mathbb{R} con la restrizione degli scalari sui reali. Denoto questa restrizione con E_0 .

Vi è un endomorfismo $j : E_0 \rightarrow E_0$ tale che $j(x) = ix \quad \forall x \in E_0$.

Tale endomorfismo è radice quadrata di $-id : E_0 \rightarrow E_0$.

Definizione 3.6.1 - Spazio vettoriale Complessificato

Sia E_0 uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Il suo complessificato è:

$$E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E = \left\{ \sum_{i=1}^{\dim(E)} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, v_i \in E \right\}$$

$$= E \times E \quad \text{dove } i \cdot (x, 0) = (0, x)$$

Definizione 3.6.2 - Applicazione Lineare in senso Complesso

Siano E, F spazi vettoriali reali. Un'applicazione $L : E_{\mathbb{C}} \rightarrow F_{\mathbb{C}}$ si dice lineare in senso complesso se e solo se:

- $L : E \rightarrow F$ è lineare in senso reale
- L e j commutano

Definizione 3.6.3 - Norma Complessa

Sia E spazio complesso. L'applicazione $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$ è una norma complessa di E se:

- $\|\cdot\|$ è norma su E_0
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Definizione 3.6.4 - Funzione Differenziabile in senso complesso

Siano E, F spazi normati complessi, sia $\Omega \subseteq E$ aperto.

L'applicazione $f : \Omega \rightarrow F$ si dice \mathbb{C} -differenziabile in $x_0 \in \Omega$ se per $x \rightarrow x_0$:

$$\exists L \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, F) : f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Osservazione 3.6.2

Nelle ipotesi della Definizione 3.6.4, sono equivalenti:

- f è \mathbb{C} -differenziabile
- f è \mathbb{R} -differenziabile e $L \circ j = j \circ L$

Capitolo 4

Equazioni Differenziali

4.1 Esponenziale in $\mathcal{L}(E)$

In questo capitolo lavoreremo sempre con spazi normati completi. Quando si troverà indicato lo spazio E , considereremo quindi uno spazio di Banach.

4.1.1 Definizione

Definizione 4.1.1 - Esponenziale sui Lineari

Sia E spazio di Banach. Sia $A \in \mathcal{L}(E)$, si definisce:

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

4.1.2 Proprietà

Proposizione 4.1.1 - Convergenza in Norma

La serie esponenziale definita è normalmente convergente. $\forall A \in \mathcal{L}(E)$:

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

Dimostrazione. Osserviamo che per $A, B \in \mathcal{L}(E)$ vale che $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Quindi per $k \in \mathbb{N}$ ho $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Segue che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

■

Proposizione 4.1.2 - Scrittura al limite

La serie esponenziale ha una scrittura al limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n = e^A$$

Dimostrazione. Dato per esercizio: ricalcare la dimostrazione dell'esponenziale complesso. ■

Proposizione 4.1.3 - Continuità e Differenziabilità

L'applicazione $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ definita dall'esponenziale è continua e differenziabile.

Dimostrazione. Sia $B_R = B(0, R) \subseteq \mathcal{L}(E)$. Denotiamo le somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$. Vediamo che $s_n \rightarrow e^A$ uniformemente per $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \|exp - s_n\|_{\infty, B_R} &= \sup \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sup \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \sup \left(\frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|A\|} \right) \\ &\leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} e^R = o(1) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Quindi per ogni $R > 0$: exp è limite uniforme (sulle palle B_R) di s_n continue. Segue che exp è una funzione continua.

La differenziabilità è lasciata per **esercizio**: trovare $Dexp(A)[H]$. ■

Proposizione 4.1.4 - Curva Esponenziale

Sia $A \in \mathcal{L}(E)$. Si definisce la curva:

$$\gamma : t \mapsto e^{tA}$$

Essa è derivabile, con derivata:

$$(e^{tA})' = A e^{tA}$$

Dimostrazione. Siano le funzioni delle somme parziali:

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} t^k$$

Esse hanno derivate:

$$s_n'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} = A \cdot s_{n-1}(t)$$

Osserviamo che sui limitati $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ le funzioni appena definite convergono uniformemente (in modo analogo alla dimostrazione della Proposizione precedente):

$$s_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{tA} \quad e \quad s_n'(t) = A s_{n-1}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A e^{tA}$$

per cui essendo $s_n(t)$ continue, lo è il loro limite e^{tA} .

La derivabilità segue direttamente usando il Teorema del Limite Sotto Segno di Derivata con $\{s_n'\}$. ■

4.1.3 Regole di Calcolo

Proposizione 4.1.5 - Commutazione e Somma

Siano $A, B \in \mathcal{L}(E)$ che commutano, cioè $AB = BA$. Allora:

$$Ae^B = e^B A \quad \text{ed} \quad e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

Dimostrazione. Dato che A e B commutano è banale osservare che:

$$A \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{AB^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{B^k A}{k!} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right) A$$

ma allora passando al limite $n \rightarrow +\infty$ si ottiene che $Ae^B = e^B A$.

Consideriamo l'equazione differenziale $u'(t) = (A+B)u(t)$ e vediamo che $e^{tA}e^{tB}$ ed $e^{t(A+B)}$

la risolvono. Allora, dato che per $t = 0$ valgono entrambe I , devono coincidere per unicità della soluzione:

$$(e^{tA}e^{tB})' = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A + B)e^{tA}e^{tB}$$

e pure

$$\left(e^{t(A+B)}\right)' = (A + B)e^{t(A+B)}$$

Infine, segue subito per commutatività della somma matriciale:

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)} = e^{t(B+A)} = e^{tB}e^{tA}$$

■

Proposizione 4.1.6 - Coniugazione

Siano $A \in \mathcal{L}(E)$, $P \in GL(E)$. Allora:

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$$

Dimostrazione. La coniugazione è un omomorfismo di algebre ed è un'applicazione continua. Per cui applicando la coniugazione alle somme parziali $s_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$:

$$Ps_n(A)P^{-1} = s_n(PAP^{-1})$$

Facendo il limite per $n \rightarrow +\infty$, grazie alla continuità della coniugazione ottengo la tesi. ■

Proposizione 4.1.7 - Diagonale a Blocchi

Siano E_1, E_2 spazi di Banach. Siano $A_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ e $A_2 \in \mathcal{L}(E_2)$.

Definisco:

$$A_1 \oplus A_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right] \quad (4.1)$$

Allora: $\exp(A_1 \oplus A_2) = \exp(A_1) \oplus \exp(A_2)$

Dimostrazione. Consideriamo $A = A_1 \oplus A_2$ e $B = B_1 \oplus B_2$ matrici con blocchi rispettivamente di stesse dimensioni. Allora

- $A + B = (A_1 + B_1) \oplus (A_2 + B_2)$
- $AB = (A_1B_1) \oplus (A_2B_2)$

per cui le operazioni usate nella serie esponenziale preservano la forma a blocchi. Segue la tesi. ■

Proposizione 4.1.8 - Blocchi di Jordan

Considero la matrice nilpotente di dimensioni $m \times m$:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Allora per $t \rightarrow +\infty$ ho che:

$$e^{tN} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} (1 + o(1))$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora dato il blocco di Jordan $B = \lambda I + N$:

$$e^{tB} = e^{t\lambda} e^{tN}$$

e per $t \rightarrow +\infty$:

$$\|e^{tB}\| = |e^{t\lambda}| \cdot \|e^{tN}\| = e^{t \operatorname{Re} \lambda} \cdot \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot (1 + o(1))$$

Dimostrazione. Calcoliamo la serie esponenziale per tN , con $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} e^{tN} &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \frac{N^k}{k!} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & tN & \frac{t^2 N^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1} N^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & tN & \cdots & \frac{t^{m-2} N^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & tN \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = t^{m-1} \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

da cui segue la tesi (le altre osservazioni sono implicazioni dirette). ■

Corollario 4.1.0.1

Sia B blocco di Jordan di dimensione $m \times m$. Allora per $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \|e^{tB}\| = o(1) &\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0 \\ \|e^{tB}\| = O(1) &\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0 \quad \text{oppure} \quad \operatorname{Re} \lambda = 0 \wedge m = 1 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Proposizione precedente. ■

Teorema 4.2.2 - Esistenza e Unicità della soluzione

Il problema di Cauchy della Definizione 4.2.3 ha una unica soluzione:

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot u_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

Dimostrazione. Sia $u : I \rightarrow E$ soluzione di classe C^1 . Con lo stesso argomento del caso omogeneo, si ottiene:

$$e^{-tA} (u'(t) - Au(t)) = e^{-tA} b(t)$$

per cui:

$$(e^{-tA} u(t))' = e^{-tA} b(t)$$

Integrando la funzione:

$$e^{-tA} u(t) = e^{-t_0 A} u_0 + \int_{t_0}^t e^{-sA} b(s) ds$$

per cui l'unica scrittura della soluzione sarà:

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

■

Proposizione 4.2.1 - Casi Particolari

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Ho 3 casi, ognuno con 3 proposizioni equivalenti.

Caso A

1. Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono $o(1)$ per $t \rightarrow +\infty$
2. $\|e^{tA}\| = o(1)$
3. $\text{Spec}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} | \text{Re}(z) < 0\}$

Caso B

1. Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono $O(1)$ per $t \rightarrow +\infty$
2. $\|e^{tA}\| = O(1)$
3. $\text{Spec}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} | \text{Re}(z) \leq 0\}$ e $\text{Spec}(A) \cap i\mathbb{R}$ è semisemplice¹

Caso C

1. Le soluzioni di $u' = Au$ sono limitate in \mathbb{R}
2. $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{tA}\| < +\infty$
3. $\text{Spec}(A) \subset i\mathbb{R}$ e $\text{Spec}(A)$ è semisemplice

¹Lo $\text{spec}(A)$ si definisce "semisemplice" se $\forall \lambda \in \text{spec}(A)$ si ha $m_{\text{geom}}(\lambda) = m_{\text{alg}}(\lambda)$

Dimostrazione. Dalla decomposizione in forma di Jordan della matrice A , ovvero per $P \in GL(n, \mathbb{C})$:

$$A = P \left[\bigoplus_{j=1}^r (\lambda_j I_{m_j} + N_{m_j}) \right] P^{-1}$$

dove I_{m_j} è la matrice identità di dimensione m_j ed N_{m_j} la matrice nilpotente di dimensione m_j con coefficienti non-nulli 1. Per le proprietà dell'esponenziale allora:

$$e^{tA} = P \left[\bigoplus_{j=1}^r (e^{\lambda_j t} e^{tN_{m_j}}) \right] P^{-1}$$

dove per la Proposizione 4.1.8 vale che per $t \rightarrow +\infty$:

$$\|e^{tN_{m_j}}\| = \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} (1 + o(1))$$

Mostriamo in particolare che:

- (1) \Leftrightarrow (2): scriviamo la matrice e^{tA} evidenziando le colonne:

$$e^{tA} = [u_1(t) | \dots | u_n(t)]$$

dove quindi $u_j(t) = e^{tA}[e_j]$ sono le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) \\ u(0) = e_j \end{cases}$$

quindi $\|e^{tA}\| = \max_{1 \leq j \leq n} \{u_j(t)\}$ è $o(1)/O(1)$ /limitata se e solo se lo è la soluzione, che

possiamo scrivere come $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$.

- (2) \Leftrightarrow (3): vediamo i 3 casi separatamente, applicando il Corollario 4.1.0.1:

1. $\|e^{tA}\| = o(1)$ per $t \rightarrow +\infty$ se e solo se per ogni blocco di Jordan vale $\|e^{\lambda_j t} e^{tN_{m_j}}\| = o(1)$ ciò equivale $Re\lambda_j < 0$ per ogni $1 \leq j \leq r$.
2. $\|e^{tA}\| = O(1)$ per $t \rightarrow +\infty$ se e solo se per ogni blocco di Jordan vale $\|e^{\lambda_j t} e^{tN_{m_j}}\| = O(1)$ ciò equivale a " $Re\lambda_j \leq 0$ e se $Re\lambda_j = 0$ allora $m_j = 1$ " per ogni $1 \leq j \leq r$.
3. $\|e^{tA}\|$ è limitato se e solo se per $t \rightarrow +\infty$ vale che:

$$\begin{cases} \|e^{tA}\| = O(1) \\ \|e^{-tA}\| = O(1) \end{cases}$$

Ma ciò succede se e solo se $Re(\pm\lambda_j) \leq 0$, ovvero se e solo se $spec(A) \subset i\mathbb{R}$. Ma in questo caso per il punto (2): $m_j = 1$ per $1 \leq j \leq n$, ovvero A è diagonalizzabile.

Segue la tesi. ■

4.2.2 E.D.O. Lineari a Coefficienti Variabili

Definizione 4.2.4 - E.D.O. a Coefficienti Variabili

Un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti variabili è:

$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$$

dove la funzione $u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$ è derivabile su tutto I , $b \in C^0(I, E)$ e il cammino $A \in C^0(I, \mathcal{L}(E))$.

Definizione 4.2.5 - Problema di Cauchy

Il problema di Cauchy legato alla E.D.O. lineare a coefficienti variabili è trovare $u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$ tale che:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $u_0 \in E$.

Lemma 4.2.1

Sia $u \in C^1(I, E)$ soluzione di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$. Allora:

$$u(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \quad \text{oppure} \quad u(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che il luogo di zeri di u è un aperto in I . Infatti, dato che I è connesso e che $\{u \neq 0\} = u^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$ è aperto, deve per forza valere che $\{u = 0\} = I$ o $\{u = 0\} = \emptyset$, ovvero la tesi.

Sia $t_0 \in \{u = 0\}$. Sia $J \subseteq I$ intorno di t_0 ed intervallo tale che:

$$|J| \cdot \|A\|_{\infty, J} < 1$$

(condizione che viene verificata da qualche J in quanto A è continua e localmente limitata). Ma allora per ogni $t \in J$ vale che:

$$u(t) = u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t A(s)u(s) ds$$

quindi per il Teorema del Valor Medio integrale:

$$\|u(t)\| \leq |t - t_0| \cdot \|A\|_{\infty, J} \cdot \|u\|_{\infty, J}$$

Passando quindi al sup:

$$\|u\|_{\infty, J} \leq |J| \cdot \|A\|_{\infty, J} \cdot \|u\|_{\infty, J}$$

ma per ipotesi avevamo $|J| \cdot \|a\|_{\infty, J} < 1$ per cui deve per forza valere $\|u\|_{\infty, J} = 0$ ovvero $J \subseteq \{u = 0\}$. Quindi $\{u = 0\}$ è aperto. ■

Teorema 4.2.3 - Unicità della soluzione

Due soluzioni del Problema di Cauchy 4.2.5 coincidono sull'intersezione dei loro domini.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Lemma 4.2.1: date infatti u, v soluzioni dello stesso problema di Cauchy su uno stesso dominio I , allora la funzione $u - v : I \rightarrow \mathbb{R}$ risolve il problema omogeneo.

Per il Lemma, $u - v = 0$ su tutto I in quanto $(u - v)(t_0) = u_0 - u_0 = 0$, cioè u e v coincidono. ■

Proposizione 4.2.2 - Operatore di Transizione

Sia $A \in C^0(I, \mathcal{L}(E))$. Allora esiste $W = W_A \in C^0(I \times I, \mathcal{L}(E))$ tale che:

- esista $\partial_1 W \in C^0(I \times I, \mathcal{L}(E))$
- per ogni $t, s \in I$ vale
$$\begin{cases} \partial_1 W(t, s) = A(t) \cdot W(t, s) \\ W(s, s) = id_E \end{cases}$$

Dimostrazione. Costruiamo l'operatore $W(t, s)$ con la Serie di Peano-Baker.

Consideriamo la successione $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^0(I \times I, \mathcal{L}(E))$ definita per induzione come:

$$\begin{cases} v_0(t, s) = id_E \\ v_{k+1}(t, s) = \int_s^t A(\tau) v_k(\tau, s) d\tau \end{cases}$$

Definisco allora $W_A(t, s) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t, s)$.

Proviamo che la serie è normalmente convergente sui compatti $J \times J \subseteq I \times I$ dove J intervallo chiuso limitato. Sappiamo che:

$$v_k(t, s) = \int_s^t \int_s^{\tau_k} \int_s^{\tau_{k-1}} \dots \int_s^{\tau_2} A(\tau_k) A(\tau_{k-1}) \dots A(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{\infty, J \times J} &\leq \left| \int_s^t \int_s^{\tau_k} \int_s^{\tau_{k-1}} \dots \int_s^{\tau_2} \|A\|_{\infty, J}^k d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \right| \\ &= \|A\|_{\infty, J}^k \cdot \left| \int_s^t \int_s^{\tau_k} \int_s^{\tau_{k-1}} \dots \int_s^{\tau_2} 1 d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \right| \\ &= \|A\|_{\infty, J}^k \frac{|t-s|^k}{k!} \leq \|A\|_{\infty, J}^k \frac{|J|^k}{k!} \end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\|W_A\|_{\infty, J \times J} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|J|^k \|A\|_{\infty, J}^k}{k!} = e^{|J| \cdot \|A\|_{\infty, J}} < +\infty$$

Ma allora la serie di funzioni continue converge uniformemente sui compatti a W_A che apparterrà a $C^0(I \times I, \mathcal{L}(E))$.

Inoltre, si osserva subito che $\partial_1 v_{k+1}(t, s) = A(t) v_k(t, s)$ quindi:

$$\partial_1 \left[\sum_{k=0}^{m+1} v_k(t, s) \right] = \sum_{k=0}^m A(t) v_{k+1}(t, s) = A(t) \sum_{k=0}^m v_{k+1}(t, s)$$

e per il Teorema del Limite Sotto Segno di Derivata per $m \rightarrow +\infty$ si ha la convergenza uniforme sui compatti. Segue che:

$$\partial_1 W(t, s) = A(t) W(t, s)$$

■

Teorema 4.2.4 - Esistenza della soluzione nel caso omogeneo

Considero il Problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t) \cdot u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Allora la sua soluzione sarà $u(t) = W(t, t_0)[u_0]$.

Dimostrazione. Dato l'operatore di transizione W definito nella Proposizione 4.2.2, si verifica subito che:

$$u'(t) = \partial_1 W(t, t_0)[u_0] = A(t) \cdot W(t, t_0)[u_0] = A(t)u(t)$$

e che:

$$u(t_0) = W(t_0, t_0)[u_0] = id_E[u_0] = u_0$$

dunque la funzione $u(t)$ così definita risolve il Problema di Cauchy omogeneo. ■

Proposizione 4.2.3 - Proprietà dell'operatore W_A

L'operatore di transizione W definito nella Proposizione 4.2.2 ha le seguenti proprietà:

1. $\partial_1 W_A(t, s) = A(t) \cdot W_A(t, s) \quad \forall t, s \in I$
2. $W(s, s) = id_E \quad \forall s \in I$
3. $W(t, s) \cdot W(s, r) = W(t, r) \quad \forall t, s, r \in I$
4. $W(t, s) \cdot W(s, t) = id_E \quad \forall t, s \in I$
5. Esiste il differenziale parziale: $\partial_2 W_A(t, s) = -W_A(t, s) \cdot A(s) \quad \forall t, s \in I$
6. L'operatore W_A è di classe $C^1(I \times I, \mathcal{L}(E))$
7. Se E è uno spazio di dimensione finita, allora $W_{-A^T} = W_A^{-T}$

Dimostrazione. Dimostriamo le proprietà separatamente.

1. Segue direttamente dalla Proposizione 4.2.2, in quanto è una proprietà richiesta nella costruzione dell'operatore W_A .
2. Come al caso precedente, è una proprietà richiesta nella costruzione di W_A .
3. Osserviamo che fissato $s \in I$, sia $W(t, s) \cdot W(s, r)$ che $W(t, r)$ risolvono la stessa E.D.O. lineare $u'(t) = A \cdot u(t)$.
4. Consideriamo $u_0 \in E$ e fissiamo $r, s \in I$. Allora $u(r) = W(r, s)[u_0]$ è soluzione (unica) del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

Sia allora $u_1 = u(r) = W(r, s)[u_0]$. Osserviamo che $v(s) = W(s, r)[u_1]$ è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) \\ v(r) = u_1 \end{cases}$$

quindi per unicità, so che $u = v$, quindi in particolare:

$$W(s, r)W(r, s)[u_0] = W(s, r)[u_1] = v(s) = u(s) = u_0$$

Dato che vale per ogni $u_0 \in E$, segue che $W(s, r)W(r, s) = id_E$.

Segue che $W(t, s) = W(s, t)^{-1}$.

5. Osserviamo subito che $W(s, t)$ è differenziabile per il punto (4) (dato che id_E è differenziabile). Sia la composizione di mappe:

$$s \longmapsto W(s, t) \xrightarrow{inv} W(t, s)$$

Ricordiamo che l'operatore $inv(L) : L \longmapsto L^{-1}$ è C^∞ e il suo differenziale² è $Dinv(L)[H] = -L^{-1}HL^{-1}$.

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}W(t, s) &= \frac{d}{ds}invW(s, t) = Dinv(W(s, t))[\partial_1 W(s, t)] \\ &= -W(s, t)^{-1} \cdot A(s) \cdot W(s, t) \cdot W(s, t)^{-1} = -W(s, t)^{-1} \cdot A(s) \end{aligned}$$

che è la tesi.

6. Per il Teorema del Differenziale Totale 3.3.1 (con il Corollario 3.3.1.1) dato che $\partial_1 W_A(t, s)$ e $\partial_2 W_A(t, s)$ sono continui, segue che $W_A(t, s) \in C^1$.

7. Consideriamo la seguente uguaglianza:

$$\partial_t W_A(t, s)^{-1} = \partial_t W_A(s, t) = -A(t) \cdot W_A(s, t)$$

da cui segue direttamente, trasponendo:

$$[\partial_t W_A(t, s)^{-1}]^T = \partial_t W_A(s, t)^T = -A^T(t) \cdot W_A(s, t)^T = -A^T(t) \cdot W_A(t, s)^{-T}$$

Ma allora, dato che $\partial_t W_A(s, t)^T = -A^T(t) \cdot W_A(t, s)^{-T}$, l'operatore $W_A(t, s)^{-T}$ è soluzione del sistema $u'(t) = -A^T(t)u(t)$ per cui:

$$W_A(t, s)^{-T} = W_{-A^T}(t, s)$$

cioè la tesi. ■

Teorema 4.2.5 - Esistenza della soluzione nel caso non omogeneo

Considero il Problema di Cauchy non omogeneo:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Allora la sua soluzione sarà $u(t) = W(t, t_0)[u_0] + \int_{t_0}^t W(t, \tau)b(\tau)d\tau$.

²Deriva dal fatto che $(L + H)^{-1} = (L^{-1}(I + L^{-1}H))^{-1} = (I + L^{-1}H)^{-1}L^{-1} = I - L^{-1}HL^{-1} + o(H)$ per la serie di Neumann.

Dimostrazione. Considerando la E.D.O. riarrangiamo i termini e moltiplichiamo per $W(t, \tau)$:

$$W(t, \tau)u'(\tau) - A(\tau)W(t, \tau)u(\tau) = W(t, \tau)b(\tau)$$

Ma il termine a sinistra è nella forma di derivata ∂_τ :

$$\partial_\tau [W(t, \tau)u(\tau)] = W(t, \tau)b(\tau)$$

quindi integrando sull'intervallo $[s, t]$ vale:

$$W(t, t)u(t) - W(t, s)u(s) = \int_s^t W(t, \tau)b(\tau)d\tau$$

ovvero, sapendo che $W(t, t) = id_E$, si può scrivere:

$$u(t) = W(t, s)u_0 + \int_s^t W(t, \tau)b(\tau)d\tau$$

in modo che $u(s) = u_0$. ■

Osservazione 4.2.2 - W_A costruito in una variabile

Sia il punto iniziale $t_0 \in I$ fissato. Allora $\forall t, s \in I$ posso costruire $W(t, s)$ come funzione in una variabile:

$$W(t, s) = W(t, t_0) \cdot W(s, t_0)^{-1}$$

Infatti, basta usare le proprietà 3 e 4 della Proposizione 4.2.3:

$$W(t, s) = W(t, t_0) \cdot W(t_0, s) = W(t, t_0) \cdot W(s, t_0)^{-1}$$

Proposizione 4.2.4 - Mappa W

Considero la mappa:

$$\begin{aligned} W : C^0(I, \mathcal{L}(E)) &\rightarrow C^0(I \times I, \mathcal{L}(E)) \\ A &\mapsto W_A \end{aligned}$$

Tale mappa è C^∞ da $(C^0(I, \mathcal{L}(E)), \|\cdot\|_{\infty, I})$ a $(C^0(I \times I, \mathcal{L}(E)), \|\cdot\|_{\infty, I \times I})$.

In particolare, si ha che

$$DW(A)[H] = \int_{t_0}^t W_A(t, \tau) \cdot H(\tau) \cdot W_A(\tau, t_0)d\tau$$

Dimostrazione. Cerchiamo una scrittura per il differenziale di W . Considerata la matrice A , consideriamo la perturbazione H . Allora possiamo scrivere la Formula delle Variazioni a Costante Arbitraria:

$$\partial_1 W_{A+H}(t, s)u_0 = (A(t) + H(t))W_{A+H}(t, s)u_0 = A(t)W_{A+H}(t, s) + H(t)W_{A+H}(t, s)$$

considerando $u(t) = W_{A+H}(t, s)$ allora si riscrive proprio:

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

Quindi per il Teorema 4.2.5, l'equazione differenziale ha soluzione:

$$\begin{aligned} u(t) = W_{A+H}(t, s) &= W_A(t, s) + \int_s^t W_A(t, \tau)b(\tau)d\tau \\ &= W_A(t, s) + \int_s^t W_A(t, \tau)H(\tau)W_{A+H}(\tau, s)d\tau \end{aligned}$$

Sostituendo nell'integrando il termine $W_{A+H}(\tau, s)$ con la formula stessa si ottiene:

$$\begin{aligned} W_{A+H}(t, s) &= W_A(t, s) + \int_s^t W_A(t, \tau)H(\tau)W_A(\tau, s)d\tau + \\ &+ \int_s^t \int_s^\tau W_A(t, \sigma)H(\tau)W_A(\tau, \sigma)H(\sigma)W_{A+H}(\sigma, s)d\sigma d\tau \end{aligned}$$

Vogliamo vedere che l'ultimo termine è $o(1)$ in norma $\|\cdot\|_{\infty, J \times J}$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t \int_s^\tau W_A(t, \sigma)H(\tau)W_A(\tau, \sigma)H(\sigma)W_{A+H}(\sigma, s)d\sigma d\tau \right\| &\leq \\ &\leq |J|^2 \cdot \|W_A\|_{\infty, J \times J}^2 \cdot \|W_{A+H}\| \cdot \|H\|_{\infty, J \times J}^2 = O(\|H\|^2) = o(\|H\|) \end{aligned}$$

Quindi si ottiene che: $DW(A)[H] = \int_s^t W_A(t, \tau)H(\tau)W_A(\tau, s)d\tau$. ■

Lemma 4.2.2 - Sviluppo di $\det(I + H)$

Sia $H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. Per $H \rightarrow 0$ vale:

$$\det(I + H) = 1 + \text{tr}H + o(H)$$

Dimostrazione. Usando lo sviluppo di Leibnitz di $\det(I + H)$ si trova:

$$\begin{aligned} \det(I + H) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (I + H)_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{i, \sigma(i)} + h_{i, \sigma(i)}) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + h_{i, i}) + O(\|H\|^2) = 1 + \sum_{i=1}^n h_{i, i} + O(\|H\|^2) \\ &= 1 + \text{tr}(H) + O(\|H\|^2) = 1 + \text{tr}H + o(\|H\|) \end{aligned}$$
■

Teorema 4.2.6 - Formula del Determinante Wronskiano

Sia $A \in C^0(I, \mathcal{M}(n, \mathbb{C}))$. Per ogni $t, s \in I$ definisco $w(t, s) = \det W_A(t, s)$.

Vale la seguente proprietà:

$$\begin{cases} \partial_t w(t, s) = \text{tr}A(t) \cdot w(t, s) \\ w(s, s) = 1 \end{cases}$$

Si ottiene allora che:

$$w(t, s) = e^{\int_s^t \text{tr}A(\tau)d\tau}$$

Dimostrazione. Sia $\delta > 0$. Posso scrivere la derivata parziale di $W(t, s)$ nella prima variabile come:

$$\begin{aligned} W(t + \delta, s) &= W(t, s) + \partial_1 W(t, s) \cdot \delta + o(\delta) = W(t, s) + \delta A(t)W(t, s) + o(\delta) \\ &= (I + \delta A(t) + o(\delta)) \cdot W(t, s) \end{aligned}$$

Passando ai determinanti allora:

$$\begin{aligned} \det(W(t + \delta, s)) &= \det(I + \delta A(t) + o(\delta)) \cdot \det(W(t, s)) \\ &= (1 + \delta \text{tr}(A(t))) \det(W(t, s)) + o(\delta) \end{aligned}$$

grazie al Lemma 4.2.2. Nella notazione introdotta nel Teorema:

$$w(t + \delta, s) = w(t, s) + \delta \text{tr}(A(t)) \cdot w(t, s) + o(\delta)$$

che è la definizione di derivata parziale: $\partial_1 w(t, s) = \text{tr}(A(t)) w(t, s)$. ■

Commento 6. *Al caro lettore verrà da chiedersi: "cosa mi significa sta roba?" Ce lo siamo chiesti pure noi. Dopo una approfondita ricerca (seguita da crisi esistenziale e pausa di riflessione) il metodo derivante da questo Teorema effettivamente può tornare utile per la soluzione di E.D.O. della forma:*

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

Per approfondire si rimanda alla Sottosezione 4.4.3.

4.2.3 E.D.O. Lineare a Coefficienti Periodici

Considereremo in questa Sezione 4.2.3 $E = \mathbb{R}^n$ oppure \mathbb{C}^n , distinguendo i due casi ove necessario.

Definizione 4.2.6 - Sistema con soluzione periodica

Sia $A \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$ un cammino T -periodico. Consideriamo il sistema:

$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) \quad \longleftrightarrow^3 \quad u(t) = W(t, 0) \cdot u(0)$$

Esso ammette una soluzione periodica se esiste $x_0 \in E$ tale che:

$$x_0 = u(T) = W_A(T, 0)[x_0]$$

cioè equivalentemente l'operatore $W_A(t, 0)$ ha autovalore 1.

Osservazione 4.2.3 - Sistema equivalente

Nella pratica, invece di esprimere la soluzione con $W_A(t, 0)$, si può descrivere una soluzione di:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) \\ X(0) \in GL(n, \mathbb{C}) \end{cases}$$

dove $X \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}(n, \mathbb{C}))$.

Data tale soluzione, allora $X(t) = W(t, 0) \cdot X(0)$ ed è invertibile $\forall t \in \mathbb{R}$ (in quanto $X(0)$ e $W(t, 0)$ invertibili). Il particolare, posso scrivere le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ come:

$$u(t) = X(t) \cdot u_0$$

e la condizione di periodicità, definita nella Definizione 4.2.6, diventa:

$$X(T) \cdot u_0 = X(0) \cdot u_0$$

cioè 1 è autovalore di $X(0)^{-1} \cdot X(T)$.

A conferma di questo, $X(0)^{-1} \cdot X(T)$ e $W(T, 0)$ sono coniugate:

$$X(0)^{-1} \cdot X(T) = X(0)^{-1} \cdot W(T, 0) \cdot X(0)$$

Osservazione 4.2.4 - Periodicità di $W(t, s)$

Nelle ipotesi della Definizione 4.2.6, vale che per ogni $t, s \in \mathbb{R}$:

$$W_A(t+T, s+T) = W_A(t, s)$$

Infatti entrambe risolvono l'equazione differenziale $\partial_t W(t, s) = A(t) \cdot W(t, s)$:

$$\partial_t W(t+T, s+T) = A(t+T) \cdot W(t+T, s+T) = A(t) \cdot W(t+T, s+T)$$

³Per quanto visto nella Sezione 4.2.2, il sistema equivale alla seconda scrittura.

quindi per unicità della soluzione di $u'(t) = A(t)u(t)$ entrambe sono l'unico operatore di transizione.

In particolare, sfruttando questa proprietà, per $m \in \mathbb{N}$:

$$W(mT, 0) = W(mT, (m-1)T) \cdots W(2T, T) \cdot W(T, 0) = W(T, 0)^m$$

La condizione di periodicità per $W(mT, 0)$ è che abbia autovalore 1. Data l'uguaglianza $W(mT, 0) = W(T, 0)^m$, equivalentemente $W(T, 0)$ ha autovalori che sono radici m -esime dell'unità.

Definizione 4.2.7 - Matrice di Monodromia

Definisco come Matrice di Monodromia del sistema $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ come:

$$M_T(X) = X(0)^{-1} \cdot X(T) = X(0)^{-1} \cdot W_A(T, 0) \cdot X(0)$$

Fatterello 4.2.1 - Invertibili come Esponenziali in \mathbb{C}^n

Ogni matrice $M \in GL(n, \mathbb{C})$ è l'esponenziale per una matrice $L \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Considero la forma di Jordan⁴ per la matrice M :

$$M = P \cdot \left[\bigoplus_{1 \leq j \leq r} \lambda_j \left(I + \frac{1}{\lambda_j} N_{m_j} \right) \right] \cdot P^{-1}$$

dove $P \in GL(n, \mathbb{C})$.

Allora senza perdere generalità si restringe lo studio ai singoli blocchi diagonali: proviamo che una matrice nella forma $I + N$ con $N^n = 0$ (cioè N nilpotente) si può scrivere in forma esponenziale.

Definisco per $z \in \mathbb{C}$ il polinomio $Q(z)$:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!}$$

ossia come polinomio di Taylor di $\log(1+z)$ all'ordine $n-1$, cioè:

$$\log(1+z) = Q(z) + O(z^n)$$

da cui:

$$e^{Q(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q(z)^k}{k!} = 1 + z + z^n H(z)$$

dove $H(z)$ è una serie di potenze in z .

Considero allora $Q(z)$ come polinomio di N , definisco $L = Q(N)$:

$$e^L = e^{Q(N)} = I + N + N^n \cdot H(N) = I + N$$

ossia la tesi. ■

Proposizione 4.2.5 - Scrittura per Soluzioni fondamentali in \mathbb{C}^n

Sia $X(t) \in GL(n, \mathbb{C})$ soluzione fondamentale dell'equazione $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$. Essa si può riscrivere come:

$$X(t) = P(t) \cdot e^{tB}$$

dove $P(t)$ è T -periodica e $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.

⁴Uso la notazione di matrice diagonale a blocchi definita in 4.1.

Dimostrazione. Per il Fatto 4.2.1, esiste $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ tale che $e^{TB} = M_T$ matrice di monodromia del sistema $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$. Allora:

$$e^{TB} = M_T = X(0)^{-1} \cdot X(T)$$

$$X(0) = X(T) \cdot e^{-TB}$$

Posso allora considerare l'esponenziale e^{tB} al variare di $t \in \mathbb{R}$.

In particolare, definisco il cammino $P(t) \in GL(n, \mathbb{C})$:

$$P(t) = X(t) \cdot e^{-tB} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Con questa definizione, si dimostra che $P(t)$ è T -periodica, infatti:

$$P(0) = X(0) = X(T) \cdot e^{-TB} = P(T)$$

che è proprio la condizione di T -periodicità. ■

Fatterello 4.2.2 - Invertibili come Esponenziali in \mathbb{R}^n

Per ogni matrice $M \in GL(n, \mathbb{R})$, M^2 è l'esponenziale per una matrice $L \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

Ne segue una discussione analoga a quella della Proposizione 4.2.5: data $X(t) \in GL(n, \mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale del sistema $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ allora è possibile scrivere:

$$X(t) = P(t) \cdot e^{tB}$$

dove $P(t)$ è $2T$ -periodica e $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Chi ben comincia, è a metà dell'opera...

Citazione 3. E' solo una "curiosità" per il lettore.

...ok, iniziamo sul serio.

No, scherziamo, lasciata per esercizio. ■

Proposizione 4.2.6 - Proprietà di M_T

La matrice di monodromia M_T del sistema $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ ha le seguenti proprietà:

1. $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ ha soluzione T -periodica $\Leftrightarrow M_T$ ha autovalore 1.
In particolare, ha k soluzioni indipendenti se l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica k .
2. $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ ha soluzione mT -periodica $\Leftrightarrow M_T$ ha come autovalore una radice m -esima dell'unità.
In particolare, ha k soluzioni indipendenti se gli autovalori radici m -esime dell'unità hanno molteplicità geometrica totale k .
3. M_T è coniugata a $W(T, 0)$.

Dimostrazione. Dimostriamo i punti separatamente.

1. La soluzione $u(t) = W_A(t, 0)[x_0]$ è T -periodica se e solo se:

$$u(T) = W_A(T, 0)[x_0] = x_0$$

ovvero se la matrice $W_A(T, 0)$ ha autovalore 1.

Se vi sono k soluzioni T -periodiche distinte, allora ci devono essere k autovettori con autovalore 1: la matrice $W_A(T, 0)$ ha autovalore 1 con molteplicità geometrica k .

2. Se la soluzione $u(t) = W_A(t, 0)[x_0]$ è mT -periodica, per il punto precedente $W(mT, 0)$ ha autovalore 1.

Osservando che $W(mT, 0) = W(T, 0)^m$, allora $W(T, 0)$ ha autovalore che è radice m -esima dell'unità.

Come nel caso precedente, se ci sono k soluzioni mT -periodiche, allora gli autovalori radici m -esime dell'unità hanno molteplicità totale k .

3. Sia $X(t)$ soluzione dell'equazione differenziale $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$. Allora vale che:

$$X(T) = W_A(T, 0)X(0)$$

e moltiplicando a sinistra per $X(0)^{-1}$ si ottiene:

$$M_T = X(0)^{-1}X(T) = X(0)^{-1}W_A(T, 0)X(0)$$

ovvero la matrice $W_A(T, 0)$ è coniugata a M_T . ■

Definizione 4.2.8 - Moltiplicatori di Floquet

Gli autovalori di $M_T(X)$ (o equivalentemente del coniugato $W_A(T, 0)$) vengono chiamati moltiplicatori di Floquet.

Proposizione 4.2.7 - Casi Particolari

Sia $A \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$ un cammino T -periodico. Ho 3 casi, ognuno con 3 proposizioni equivalenti.

Caso A

1. Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono $o(1)$ per $t \rightarrow +\infty$
2. $\|X(t)\| = o(1)$
3. $\text{Spec}(M_T(X)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Caso B

1. Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono $O(1)$ per $t \rightarrow +\infty$
2. $\|X(t)\| = O(1)$
3. $\text{Spec}(M_T(X)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ e $\text{Spec}(M_T(X)) \cap \{|z| = 1\}$ è semisemplice⁵

Caso C

1. Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono limitate su \mathbb{R}
2. $\|X(t)\|_{\infty, \mathbb{R}} < +\infty$
3. $\text{Spec}(M_T(X)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e $\text{Spec}(M_T(X))$ è semisemplice

Dimostrazione. Vediamo le implicazioni:

- (1) \Leftrightarrow (2): è banale, $X(t)$ è proprio⁶ la soluzione del sistema $u'(t) = A(t)u(t)$.
- (2) \Leftrightarrow (3): lasciata per esercizio. ■

⁵Lo $\text{spec}(A)$ si definisce "semisemplice" se $\forall \lambda \in \text{spec}(A)$ si ha $m_{\text{geom}}(\lambda) = m_{\text{alg}}(\lambda)$

⁶Perché sprecare inchiostro per delle implicazioni ovvie? Mah, in nome del *senso estetico*, ora la Proposizione 4.2.1 e questa sono simmetriche!

4.3 Equazioni Differenziali Ordinarie

In questa Sezione 4.3, considereremo $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach, con particolare attenzione per $E = \mathbb{R}^n$.

4.3.1 Definizione di E.D.O.

Definizione 4.3.1 - Equazione Differenziale Ordinaria

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ un aperto. Un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale, si definisce come:

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

dove $f : \Omega \rightarrow E$ e l'incognita è $u : \mathbb{R} \rightarrow E$.

Un'equazione differenziale di ordine k si definisce come:

$$u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t))$$

Proposizione 4.3.1 - Riformulazione ad E.D.O. di primo ordine

Considero l'equazione differenziale di ordine k :

$$u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t))$$

Essa si può ricondurre ad un'equazione di primo ordine sullo spazio E^{k-1} . Considero infatti $x(t) \in E^{k-1}$ come:

$$x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^{(1)}(t) \\ \dots \\ u^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Allora l'equazione differenziale si può scrivere $x'(t) = F(t, x(t))$ dove:

$$F(t, x(t)) = F \left(t, \begin{pmatrix} u(t) \\ u^{(1)}(t) \\ \dots \\ u^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u^{(1)}(t) \\ u^{(2)}(t) \\ \dots \\ f(t, u(t), u^{(1)}(t), \dots, u^{(k-1)}(t)) \end{pmatrix}$$

Affronteremo quindi il caso delle E.D.O. di primo ordine, da cui si può ricavare poi un metodo di soluzione generale.

Definizione 4.3.2 - Soluzione Locale

Una soluzione locale dell'equazione $u'(t) = f(t, u(t))$ definita come sopra è una funzione $u : I \rightarrow E$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto ed u derivabile su I . In particolare deve valere:

$$\begin{cases} \text{graf}(u) \subseteq \Omega \\ u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I \end{cases}$$

Osservazione 4.3.1 - u' continua

Dato che f ed u continue, allora $u'(t) = f(t, u(t))$ composizione di continue, quindi è continua. Segue che $u \in C^1$.

Osservazione 4.3.2

In generale, le soluzioni possono non ricoprire interamente il dominio di f , ossia $\mathbb{R} \times E$. Ad esempio, prendiamo per $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f(t, x(t)) = 1 + x(t)^2$$

Allora una soluzione a questa equazione è $x(t) = \tan(t - c)$ con $c \in \mathbb{R}$, infatti:

$$f(t, x(t)) = f(t, \tan(t - c)) = 1 + \tan^2(t - c) = \frac{1}{\cos^2(t - c)} = (\tan(t - c))' = x'(t)$$

ovvero il dominio di $x(t)$ sarà il solo intervallo $]c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}[$.

Definizione 4.3.3 - Problema di Cauchy

Il problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria di primo grado è:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $(t_0, x_0) \in \Omega$ e l'incognita è $u : I \in \mathbb{R} \rightarrow E$ con $t_0 \in I$.

4.3.2 Teorema di Cauchy - Lipschitz - Picard - Lindelöf

Definizione 4.3.4 - Ipotesi di Lipschitz (IdL)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto. La funzione $f : \Omega \rightarrow E$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz se f è continua e per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$ esistono $L, \varepsilon, \delta > 0$ tali che:

- $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$
- per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e per ogni $x, x' \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ vale:

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L\|x - x'\|$$

Equivalentemente, f soddisfa le ipotesi di Lipschitz se e solo se:

- f continua
- f localmente⁷ Lipschitziana nella seconda variabile

Osservazione 4.3.3 - Condizione sufficiente per Ipotesi di Lipschitz
Se $f \in C^0$ tale che $D_2f \in C^0$ allora f soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema del Valor Medio. ■

Osservazione 4.3.4 - Caso f lineare

Sia $\Omega = I \times E \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto. Sia $A \in C^0(I, L(E))$ cammino continuo. Sia $f : \Omega \rightarrow E$ dove $f(t, x) = A(t) \cdot x$.

Allora per ogni $J \in I$ chiuso, $x, x' \in E$:

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq \|A(t)\|_{\infty, J} \cdot \|x - x'\|$$

ovvero f soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

Proposizione 4.3.2 - Caso di dimensione finita

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ una mappa che soddisfa le ipotesi di Lipschitz. Sia $K \subseteq \Omega$ un compatto tale che per ogni $t \in I$ sia convesso⁸:

$$K_t = \{x \in E \mid (t, x) \in K\} = j_t^{-1}(K)$$

Allora $f|_{K_t}$ è Lipschitziana nella seconda variabile.

⁷Per "localmente" si intende in un intorno di $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$, non solo in un intorno della seconda variabile $x_0 \in E$

⁸Consideriamo in particolare $j_t : E \rightarrow \mathbb{R} \times E$ l'immersione tale che $j_t(x) = (t, x)$

Dimostrazione. Per la proprietà di Heine-Borel per i compatti, K è ricoperto da un insieme finito di aperti $\{J_i \times B_i\}_{i=1}^m$ dove $J_i =]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$ e $B_i = B(x_i, \varepsilon_i)$ e sui quali vale che:

$$f|_{J_i \times B_i} \text{ è } L_i\text{-lipschitziana nella } 2^{\text{a}} \text{ variabile}$$

perchè sotto ipotesi di Lipschitz f è localmente lipschitziana nella seconda variabile. Ma allora $f|_K$ è L -lipschitziana con $L = \max_{1 \leq i \leq m} L_i$. Infatti per ogni $(t, x) \neq (t, x') \in K$ consideriamo il vettore $v = \frac{x-x'}{\|x-x'\|}$. Così posso definire la curva-segmento:

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, \|x - x'\|] & \longrightarrow & K \\ s & \longmapsto & (t, x + sv) \end{array}$$

che localmente appartiene allo stesso aperto $J_i \times B_i$ per qualche $1 \leq i \leq m$. Ma allora:

$$\tilde{\alpha} : \begin{array}{ccc} [0, \|x - x'\|] & \longrightarrow & E \\ s & \longmapsto & f(t, x + sv) \end{array}$$

è una mappa L -lipschitz. Ne segue che f è L -lipschitziana nella seconda variabile. ■

Osservazione 4.3.5

Nel caso $E = \mathbb{R}^n$ la Proposizione 4.3.2 è particolarmente rilevante.

Supponiamo $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfi le ipotesi di Lipschitz. Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$.

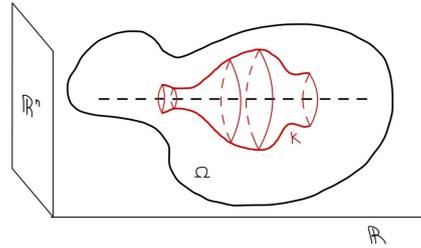
Allora (data la natura dello spazio normato \mathbb{R}^n) esistono $\varepsilon, \delta > 0$ per cui i compatti saranno nella forma:

$$K = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}(x_0, \varepsilon)$$

Più in generale, data $g \in C^0([a, b], [0, +\infty])$ si potranno considerare compatti nella forma:

$$K = \{(t, x) \in \Omega \mid t \in [a, b] \text{ e } \|x - x_0\| \leq g(t)\}$$

come disegnati nella figura a lato.



Proposizione 4.3.3 - Unicità locale della soluzione sotto IdL

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto ed $f : \Omega \rightarrow E$ funzione che soddisfa le ipotesi di Lipschitz. Allora due soluzioni locali u_1 e u_2 del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

coincidono in un intorno di t_0 .

Dimostrazione. Siano dalle ipotesi di Lipschitz: $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ ed L costante di Lipschitz per la seconda variabile.

Consideriamo quindi $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e $B = \bar{B}(x_0, \varepsilon)$, con $J \times B \subseteq \Omega$ in modo che $f|_{J \times B}$ sia L -lipschitziana.

Date u_1 ed u_2 soluzioni del problema di Cauchy, senza perdere generalità (a meno di prendere δ più piccolo) si vuole che $u_1(J) \subseteq B$ e $u_2(J) \subseteq B$ e che $\delta \cdot L < 1$.

Ma allora, siccome $u_1(t_0) = u_2(t_0) = x_0$:

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_{t_0}^t (u_1'(\tau) - u_2'(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^t (f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau))) d\tau$$

Ma allora, siccome $(\tau, u_i(\tau)) \in J \times B$ per ogni $\tau \in J$ e $i = 1, 2$:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq |t - t_0| \cdot L \cdot \|u_1 - u_2\|_{\infty, J} \leq \delta L \cdot \|u_1 - u_2\|_{\infty, J}$$

Prendendo il sup si ottiene che:

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty, J} \leq \delta L \|u_1 - u_2\|_{\infty, J}$$

e siccome $\delta L < 1$ allora $\|u_1 - u_2\|_{\infty, J} = 0$. Cioè $u_1 = u_2$ su tutto J . ■

Corollario 4.3.0.1 - Uguaglianza sull'intersezione di domini

Nelle ipotesi della Proposizione 4.3.3, date due soluzioni u_1 e u_2 , esse coincidono sull'intersezione dei loro domini:

$$I = \text{dom}(u_1) \cap \text{dom}(u_2)$$

Dimostrazione. Il corollario segue dal fatto che $J = \{t \in I \mid u_1(t) = u_2(t)\}$:

- J è aperto, in quanto intorno di ogni suo punto.
- J è chiuso in quanto luogo degli zeri di $u_1(t) - u_2(t) = 0$ ($u_1 - u_2$ è una funzione continua, quindi la controimmagine di $\{0\}$ chiuso, è chiusa).

Allora, essendo I un compatto, $I = J$. ■

Corollario 4.3.0.2 - Soluzione Massimale

Nelle ipotesi di Lipschitz, un problema di Cauchy ha soluzione massimale, data per inclusione sul dominio.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Corollario 4.3.0.1. ■

Teorema 4.3.1 - Esistenza e Unicità della soluzione sotto IdL

Siano $E, \|\cdot\|$ uno spazio di Banach e $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$. Siano:

- $(t_0, x_0) \in \Omega$
- $\delta, \varepsilon > 0$ e siano $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e $B = \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ tali che $J \times B \subseteq \Omega$
- $f : \Omega \rightarrow E$ una funzione L -Lipschitz su $J \times B$ nella seconda variabile
- $\delta \cdot \|f\|_{\infty, J \times B} \leq \varepsilon$

Allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $u : J \rightarrow E$.

Osservazione 4.3.6 - Enunciato più debole

La dimostrazione del Teorema diventa più semplice supponendo che $\delta L < 1$. Questo rende però il risultato più debole.

Dimostrazione. Riformuliamo la tesi come un problema di Punto Fisso, osservando l'equivalenza tra:

1. il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2. il problema di Punto Fisso, indicando $B_\infty = C^0(J, B) = \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq C^0(J, E)$:

$$\begin{cases} u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ u \in B_\infty \end{cases}$$

Infatti:

- 2 \Rightarrow 1: se $u \in C^0(J, B) = B_\infty$ risolve il problema (2) allora la funzione $u'(t) = f(t, u(t))$ è continua (composizione di continue) quindi $u \in C^1(J, B)$ e vale

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau = x_0$$

cioè u risolve (1).

- 1 \Rightarrow 2: se u risolve il problema (1), vale che:

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(\tau) d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

ed inoltre $u(J) \subseteq B$. Supponendo che entrambe le proprietà vengano verificate, u risolverebbe (2). Dimostriamo l'inclusione $u(J) \subseteq B$. Se per assurdo esistesse $t^* \in J$ tale che $\|u(t^*) - x_0\| > \varepsilon$. Senza perdere generalità, sia $t^* \in [t_0, t_0 + \delta[$. Possiamo considerare:

$$t_1 = \min \{t \in [t_0, t^*] \mid \|u(t) - x_0\| = \varepsilon\}$$

che esiste perché u continua e l'insieme di cui prendiamo il minimo è chiuso non vuoto.

Allora per ogni $\tau \in [t_0, t_1[$ vale che $(\tau, u(\tau)) \in J \times B$ quindi

$$\|u'(\tau)\| = \|f(\tau, u(\tau))\| \leq \|f\|_{\infty, J \times B}$$

Ma allora, per il Teorema del Valor Medio per Curve:

$$\varepsilon = \|u(t_1) - u(t_0)\| \leq |t_1 - t_0| \cdot \sup_{\tau \in [t_0, t_1]} \|u'(\tau)\| < \delta \|f\|_{\infty, J \times B} \leq \varepsilon$$

che è assurdo (l'ultima disuguaglianza vale per ipotesi).

Dimostriamo che vi è un'unica soluzione al problema (2) di Punto Fisso. Consideriamo la mappa:

$$T : \begin{array}{ccc} B_\infty = \overline{B}_\infty(x_0, \varepsilon) & \longrightarrow & C^0(J, E) \\ v & \longmapsto & Tv \end{array}$$

dove per ogni $t \in J$:

$$Tv(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, v(\tau)) d\tau$$

Allora osserviamo che $T(B_\infty) \subseteq B_\infty$ in quanto se $v \in B_\infty$ allora per ogni $(\tau, v(\tau)) \in J \times B$ vale che $\|f(\tau, v(\tau))\| \leq \|f\|_{\infty, J \times B}$ e allora:

$$\begin{aligned} \|Tv(t) - x_0\|_{\infty, E} &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, v(\tau)) d\tau \right\|_{\infty, E} \leq \left| \int_{t_0}^t \|f\|_{\infty, J \times B} d\tau \right| \\ &\leq |t - t_0| \cdot \|f\|_{\infty, J \times B} \leq \delta \cdot \|f\|_{\infty, J \times B} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

quindi passando a \limsup :

$$\sup_{t \in J} \|Tv - x_0\|_{\infty, J} \leq \varepsilon$$

cioè $Tv \in B_\infty$.

Si conclude allora in diversi modi:

1. assumendo l'ipotesi $\delta L < 1$, risulta che T è una contrazione di costante δL rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty, J}$. Infatti per ogni $v, w \in B_\infty$ e per ogni $t \in J$:

$$\begin{aligned} \|Tv(t) - Tw(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, w(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq |t - t_0| \cdot L \cdot \|v - w\|_{\infty, J} \leq \delta L \|v - w\|_{\infty, J} \end{aligned}$$

passando a \sup :

$$\|Tv - Tw\|_{\infty, J} \leq \delta L \cdot \|v - w\|_{\infty, J}$$

cioè T è δL -lipschitziana. Il Teorema delle Contrazioni garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione al problema del Punto Fisso (e quindi al problema di Cauchy).

2. nel caso generale, dimostriamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $T^{\bar{n}}$ sia contrazione su B_∞ . Questo basta per dare l'esistenza e unicità della soluzione al problema di Punto Fisso.

Siano $v, w \in B_\infty$, $t \in J$ ed $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che:

$$\|T^n v(t) - T^n w(t)\| \leq \frac{L^n}{n!} |t - t_0|^n \cdot \|v - w\|_{\infty, J}$$

per induzione su $n \in \mathbb{N}$:

- $n = 0$: è banale in quanto $\|v(t) - w(t)\| \leq \|v - w\|_{\infty, J}$
- $n \geq 0$: supponiamo che la disuguaglianza valga per $n - 1$. Allora:

$$\begin{aligned} \|T^n v(t) - T^n w(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(\tau, T^{n-1}v(\tau)) - f(\tau, T^{n-1}w(\tau))) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, T^{n-1}v(\tau)) - f(\tau, T^{n-1}w(\tau))\| d\tau \\ &\leq L \cdot \int_{t_0}^t \|T^{n-1}v(\tau) - T^{n-1}w(\tau)\| d\tau \\ &\leq \frac{L^n}{(n-1)!} \|v - w\|_{\infty, J} \int_{t_0}^t |\tau - t_0|^{n-1} d\tau \\ &= \frac{L^n}{(n-1)!} \|v - w\|_{\infty, J} \int_0^{|t-t_0|} s^{n-1} ds \\ &\leq \frac{L^n}{n!} |t - t_0|^n \|v - w\|_{\infty, J} \end{aligned}$$

Passando a sup:
 $t \in J$

$$\|T^n v - T^n w\|_{\infty, J} \leq \frac{(\delta L)^n}{n!} \|v - w\|_{\infty, J}$$

e per andamento asintotico di $\frac{(\delta L)^n}{n!}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{(\delta L)^{\bar{n}}}{\bar{n}!} < 1$. Allora $T^{\bar{n}}$ è contrazione e questo conclude la dimostrazione. ■

4.3.3 Caratterizzazione di Successioni Massimalmente Definite

Proposizione 4.3.4 - Estensione di Dominio delle soluzioni (limiti)

Sia $u :]a, b[\rightarrow E$ una soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

Supponiamo che $\exists \lim_{t \rightarrow b} u(t) = x$ tale che $(b, x) \in \Omega$.

Allora esiste $\delta > 0$ tale che u ammette un'estensione propria ad una soluzione con dominio $]a, b + \delta[$.

Dimostrazione. Sia v una soluzione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(b) = x \end{cases}$$

dove $v :]b - \delta, b + \delta[\rightarrow E$. Definiamo quindi la funzione $u_* :]a, b + \delta[\rightarrow E$ tale che:

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & a < t < b \\ v(t) & b \leq t < b + \delta \end{cases}$$

Per costruzione u_* è continua su $]a, b + \delta[$ ed u'_* è continua su $]a, b[$ e su $]b, b + \delta[$. Vale inoltre che $u'_*(t) = f(t, u_*(t))$ per ogni $t \in]a, b + \delta[\setminus \{b\}$. Per ipotesi esiste il limite:

$$\lim_{t \rightarrow b} u'_*(t) = \lim_{t \rightarrow b} f(t, u_*(t)) = f(b, x)$$

in quanto sia per il limite sinistro che destro $u'(t)$ e $v'(t)$ sono continue. Quindi per il Principio della rimozione di singolarità per funzioni derivabili u_* è derivabile in $t = b$ con $u'(b) = f(b, u(b))$. ■

Proposizione 4.3.5 - Estensione di Dominio delle soluzioni (successioni)

Sia $u :]a, b[\rightarrow E$ una soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

Supponiamo che $\exists \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq]a, b[$ tale che:

- $t_k \rightarrow b$ e $u(t_k) \rightarrow x$

- $(b, x) \in \Omega$

Allora esiste $\delta > 0$ tale che u ammette un'estensione propria ad una soluzione con dominio $]a, b + \delta[$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.3.4 basta provare che esiste $\lim_{t \rightarrow b} u(t)$.

Siccome f è continua, è localmente limitata in $(b, x) \in \Omega$: esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $R = [b - \varepsilon_0] \times \overline{B}(x, \varepsilon_0) \subseteq \Omega$ vale $\|f\|_{\infty, R} = M < \infty$.

Supponiamo per assurdo che non esista il limite $\lim_{t \rightarrow b} u(t)$ o che $\lim_{t \rightarrow b} u(t) \neq x$. Equivalentemente, ciò significa che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$u([t_k, b]) \not\subseteq B(x, \varepsilon) \quad (4.2)$$

e si può supporre senza perdere generalità che $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Definiamo:

$$t_k^* = \min \{t \in [t_k, b[\mid \|u(t) - x\| \geq \varepsilon\}$$

ben definito in quanto è un insieme non vuoto per l'osservazione 4.2.

Quindi per ogni $t \in [t_k, t_k^*]$ vale che $\|u(t) - x\| \leq \varepsilon$ perciò:

$$\|u'(t)\| = \|f(t, u(t))\| \leq \|f\|_{\infty, [t_k, b] \times \overline{B}(x, \varepsilon)} \leq \|f\|_{\infty, R} = M$$

Ma allora per $k \rightarrow +\infty$:

$$\|u(t_k^*) - u(t_k)\| \leq (t_k^* - t_k)M = o(1)$$

e al contempo:

$$\|u(t_k^*) - u(t_k)\| \geq \|u(t_k^*) - x\| + \|x - u(t_k)\| \geq \varepsilon \neq o(1)$$

che è un assurdo. Segue che esiste il limite $\lim_{t \rightarrow b} u(t) = x$ e questo conclude. ■

Proposizione 4.3.6 - "Fuga dai Compatti"

Sia $u :]a, b[\rightarrow E$ una soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz. Sia $K \subseteq \Omega$ un compatto. Allora $\exists \alpha, \beta$ tali che $a < \alpha \leq \beta < b$ tali che:

$$(t, u(t)) \notin K \quad \forall t \in]a, b[\setminus [\alpha, \beta]$$

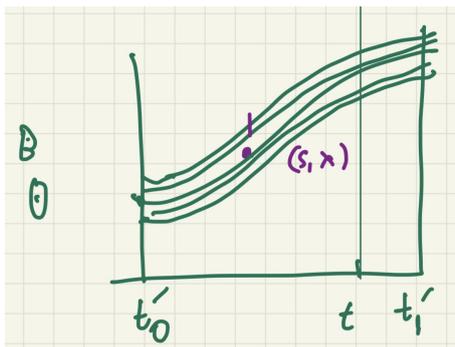
Dimostrazione. Supponiamo che la tesi sia falsa.

Esisterebbe una successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq]a, b[$ convergente ad a o b (supponiamo che converga a b , l'altro caso è analogo) tale che $\{(t_k, u(t_k))\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$.

A meno di estrarre una sottosuccessione, per compattezza di K supponiamo che:

$$(t_k, u(t_k)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (b, x) \in \Omega$$

Ma allora per la Proposizione 4.3.5 il dominio di definizione della soluzione u non è massimale, assurdo. ■



4.3.4 Dipendenza dai Dati Iniziali

Teorema 4.3.2 - Dipendenza continua da $u(t_0) = x_0$

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto e $f \in C^0(\Omega, E)$ una funzione che soddisfi le ipotesi di Lipschitz. Sia $u : I \rightarrow E$ soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e sia $t_1 \in I, t_0 < t_1$

Allora esistono $\rho > 0$ e $c \geq 0$ tali che per ogni problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_0) = y_0 \\ \|x_0 - y_0\| < \rho \end{cases}$$

ha soluzione massimalmente definita $v : J \rightarrow E$ tale che:

- $t_1 \in J$
- $\|v - u\|_{\infty, [t_0, t_1]} \leq c \cdot \|x_0 - y_0\|$

Osservazione 4.3.7

In altre parole, perturbando il dato iniziale x_0 del problema di Cauchy, la soluzione varia in modo continuo e localmente Lipschitziano.

Dimostrazione. Possiamo ricoprire il compatto $\text{graf}(u|_{[t_0, t_1]})$ (compatto in quanto immagine continua di $[t_0, t_1]$ compatto) con un numero finito di aperti della forma $\{J_i \times B_i\}_{i \in I}$ dove per ogni $i \in I$ vale che $J_i \times B_i \subseteq \Omega$ e che $f|_{J_i \times B_i}$ sia L_i -lipschitziana (per Ipotesi di Lipschitz).

Sia a questo punto⁹:

$$\varepsilon = \min_{t_0 \leq t \leq t_1} d \left((t, u(t)), \Omega \setminus \bigcup_{i \in I} (J_i \times B_i) \right)$$

Allora definisco:

$$T_\varepsilon = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times E \mid \|x - u(t)\| < \varepsilon\}$$

⁹Considero la distanza d punto-insieme che si vede essere continua.

Per costruzione allora $T_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i \in I} (J_i \times B_i) \subseteq \Omega$.

Ponendo $L = \max_{i \in I} L_i$ otteniamo che $f|_{T_\varepsilon}$ è L -lipschitziana nella seconda variabile. Inoltre osserviamo che f è limitata su T_ε da:

$$M := \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \|f(t, u(t))\| + \varepsilon L \geq \|f\|_{\infty, T_\varepsilon}$$

Dimostriamo che le richieste del teorema sono soddisfatte ponendo:

$$\begin{cases} \rho = \varepsilon \cdot e^{-L(t_1 - t_0)} \\ c = e^{L(t_1 - t_0)} \end{cases}$$

Sia $y_0 \in E$ tale che $\|x_0 - y_0\| < \rho$ e consideriamo la soluzione massimale $v :]a, b[\rightarrow E$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dico¹⁰ che $\text{graf}(v|_{[t_0, b[}) \not\subseteq T_\varepsilon$. Infatti se per ogni $t \in [t_0, b[$ valesse che $(t, v(t)) \in T_\varepsilon$, allora:

$$\|v'(t)\| = \|f(t, v(t))\| \leq M$$

cioè $v|_{[t_0, b[}$ sarebbe M -lipschitziana quindi esisterebbe $\lim_{t \rightarrow b} v(t)$ e per la Proposizione 4.3.4 la soluzione v non sarebbe massimale.

Ci sono due alternative su come $\text{graf}(v|_{[t_0, b[})$ possa uscire:

1. $\text{graf}(v)$ si allontana da $\text{graf}(u)$ più di ε , ovvero esce lateralmente da T_ε .
2. $\text{graf}(v)$ esce alla fine del "tunnel", ovvero raggiunge il tempo t_1 .

In altre parole, esiste $t \in [t_0, b[$ tale che $(t, v(t)) \notin T_\varepsilon$, cioè:

1. $\|u(t) - v(t)\| > \varepsilon$
2. $t > t_1$

In particolare sia:

$$t_* = \min \{t \in [t_0, b[\mid \|u(t) - v(t)\| \geq \varepsilon\} \cup \{t_1\}$$

il primo istante in cui $\text{graf}(v)$ esce da T_ε .

Per costruzione $t_0 \leq t_* \leq t_1$ ed in particolare noto che se $t_* < t_1$ per continuità della soluzione v vale per forza che:

$$\|u(t_*) - v(t_*)\| = \varepsilon$$

Vediamo che questa uguaglianza è assurda, allora per forza $t_* = t_1$ (ovvero ci troviamo nel caso (2)).

Definiamo $r = \|u(t_0) - v(t_0)\|$. Per ogni $t \in [t_0, t_*]$ vale:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|u(t_0) - v(t_0)\| + \|u(t) - v(t) - u(t_0) + v(t_0)\| \\ &= r + \left\| \int_{t_0}^t (u'(\tau) - v'(\tau)) d\tau \right\| \leq r + \int_{t_0}^t \|u'(\tau) - v'(\tau)\| d\tau \\ &= r + \int_{t_0}^t \|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\| d\tau \leq r + L \int_{t_0}^t \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

¹⁰ovvero il $\text{graf}v$ per tempi $> t_0$ uscirà dal "tunnel" T_ε .

Definiamo $\phi(t) = \int_{t_0}^t \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau$. Allora questa funzione risolve il sistema:

$$\begin{cases} \phi'(t) \leq r + L\phi(t) \\ \phi(t_0) = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando per il fattore derivante e^{-tL} la prima disequazione del sistema si ottiene:

$$0 \geq e^{-tL} (\phi'(t) - L\phi(t)) - re^{-tL} = [e^{-tL}\phi(t)]' + \left[\frac{re^{-tL}}{L} \right]' = \left[e^{-tL} \left(\phi(t) + \frac{r}{L} \right) \right]'$$

Quindi la funzione $e^{-tL} \left(\phi(t) + \frac{r}{L} \right)$ è decrescente su $[t_0, t_*]$ quindi in particolare per ogni $t \in [t_0, t_*]$:

$$e^{-tL} \left(\phi(t) + \frac{r}{L} \right) \leq e^{-t_0L} \frac{r}{L}$$

cioè riscrivendo:

$$r + L\phi(t) \leq e^{L(t-t_0)} r$$

Ma a questo punto vediamo che:

$$\|u(t) - v(t)\| = \phi'(t) \leq r + L\phi(t) \leq e^{L(t-t_0)} r < e^{L(t-t_0)} \rho = \varepsilon$$

e per $t = t_*$ la disequazione diventa:

$$\|u(t_*) - v(t_*)\| < \varepsilon$$

che è un assurdo per costruzione di t_* . Quindi $t_* = t_1$. Ma allora:

$$\|u - v\|_{\infty, [t_0, t_1]} \leq e^{L(t_1-t_0)} \|x_0 - y_0\| = c \|x_0 - y_0\|$$

ovvero la tesi. ■

Definizione 4.3.5 - Flusso o Soluzione Generale

Sia $u'(t) = f(t, u(t))$ una E.D.O. che soddisfa le ipotesi di Lipschitz (dove $f : \Omega \rightarrow E$). Sia $\Xi \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ sottoinsieme dove $\forall (t_1, t_0, x_0) \in \Xi$ vale che:

- $u : I \in \mathbb{R} \rightarrow E$ soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- $t_1 \in I$ e $(t_0, x_0) \in \Omega$

La mappa $\xi : \Xi \rightarrow E$ definita come:

$$\xi(t_1, t_0, x_0) = u(t_1)$$

si chiama flusso o soluzione generale.

Definizione 4.3.6 - Mappe τ_* e τ^*

Nelle ipotesi della Definizione 4.3.5, definisco per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \tau_*(t_0, x_0) &= \inf (dom(u)) \in [-\infty, +\infty[\\ \tau^*(t_0, x_0) &= \sup (dom(u)) \in]-\infty, +\infty] \end{aligned}$$

Osservazione 4.3.8 - Proprietà di ξ

Valgono in particolare le seguenti proprietà:

- $\xi(t, t, x) = x$ per ogni $(t, x) \in \Omega$
- $\xi(t_2, t_1, \xi(t_1, t_0, x_0)) = \xi(t_2, t_0, x_0)$

Dimostrazione. Seguono dalla definizione di ξ . ■

Teorema 4.3.3 - Teoremi sulle mappe τ_* e τ^*

Considero le ipotesi della Definizione 4.3.5. Allora Ξ è aperto e il flusso $\xi : \Xi \rightarrow E$ è una funzione continua nella prima e terza variabile. Inoltre:

- $\tau_* : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ è semicontinua superiormente
- $\tau^* : \Omega \rightarrow]-\infty, +\infty]$ è semicontinua inferiormente

Dimostrazione. La continuità di $\xi : \Xi \rightarrow \Omega$ nella prima variabile segue dal fatto che le soluzioni ai problemi di Cauchy sono continue, nella terza variabile dal Teorema 4.3.2.

Dimostriamo la semicontinuità inferiore di τ^* vedendo che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $\{\tau^* > c\}$ aperto.

Sia $(t_0, x_0) \in \{\tau^* > c\} \subseteq \Omega$. Consideriamo $t^* \in \mathbb{R}$ tale che $\max(c, t_0) < t^* < \tau^*(t_0, x_0)$, allora la soluzione massimalmente definita al problema di Cauchy con dati iniziali $u(t_0) = x_0$ sarà ben definita su tutto $[t_0, t^*]$.

Per il Teorema 4.3.2, esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $y_0 \in B(x_0, \rho)$ la soluzione massimale v al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è tale che $t^* \in \text{dom}(v)$. In altre parole, $[t_0, t^*] \times \{t_0\} \times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$. Con un analogo argomento per τ_* si ottiene che esiste $\tau_*(t_0) < t_* < t_0$. Quindi:

$$[t_*, t^*] \times \{t_0\} \times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$$

Inoltre, sappiamo che $t_0 \in [t_*, t^*]$. Per continuità di ξ nella prima variabile esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$\xi(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, t_0, x_0) \subseteq B(\xi(t_0, t_0, x_0), \rho) = B(x_0, \rho)$$

Ma allora osservo che per ogni $\bar{t} \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(\bar{t}) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_0) = \xi(t_0, \bar{t}, x_0) \end{cases}$$

coincidono ed in particolare coincidono i loro domini: $\text{dom}(u) = \text{dom}(v)$. Ma per il Teorema 4.3.2, in particolare $t_* \in \text{dom}(v)$, quindi $t^* \in \text{dom}(u)$.

Per cui per ogni $\bar{t} \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ vale che

$$[t_*, t^*] \times \{\bar{t}\} \times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$$

Quindi in particolare:

$$[t_*, t^*] \times]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi \tag{4.3}$$

Ma allora per ogni $(t_1, x_1) \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \rho)$ vale che $\tau^*(t_1, x_1) \geq t^* > c$, ovvero:

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \rho) \subseteq \{\tau^* > c\}$$

Questo implica che $\{\tau^* > c\}$ è intorno di ogni suo punto (t_0, x_0) , ovvero $\{\tau^* > c\}$ è aperto. Con un ragionamento analogo si vede che τ_* è semicontinua superiormente.

Osserviamo che in questo modo abbiamo dimostrato Ξ è un aperto.

Ciò segue sempre dal fatto che per $(t_1, t_0, x_0) \in \Xi$ si possono scegliere $t_*, t^* \in \mathbb{R}$ affinché $\tau_*(t_0) < t_* < t_1 < t^* < \tau^*(t_0)$ ed $\varepsilon, \rho > 0$ tali che:

$$[t_*, t^*] \times]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$$

con lo stesso risultato di prima 4.3. Così Ξ è intorno di ogni suo punto, aperto. ■

Osservazione 4.3.9

La dimostrazione potrebbe sembrare a prima lettura molto contorta. Tuttavia un'idea utile per motivare i passaggi può essere pensare al fatto che:

” Ξ aperto” e ” τ^*, τ_* semicontinue inferiore e superiore rispettivamente”

sono nozioni equivalenti. Entrambi i fatti, poi, sono giustificati interamente dai risultati del Teorema 4.3.2. Riportiamo una rappresentazione di questo insieme nella Figura 4.1.

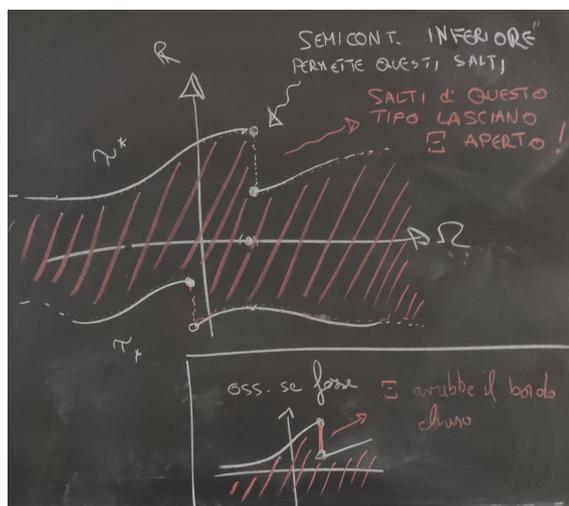


Figura 4.1: Rappresentazione di Ξ in modo che sia aperto.

Teorema 4.3.4 - Dipendenza Differenziabile dai Dati

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto e sia $f : \Omega \rightarrow E$ tale che:

$$\begin{cases} f \in C^0(\Omega, E) \\ D_2 f \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(E)) \end{cases}$$

Allora f soddisfa le ipotesi di Lipschitz e il flusso $\xi : \Xi \rightarrow E$ è una funzione C^1 .

Dimostrazione. Per il Teorema del Differenziale Totale 3.3.1 è sufficiente provare che che siano continui:

1. esiste $\partial_1 \xi \in C^0(\Omega, E)$
2. esiste $\partial_2 \xi \in C^0(\Omega, E)$
3. esiste $D_3 \xi \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(E))$

Infatti vediamo che:

1. dalla definizione di ξ segue che $\partial_1 \xi(t, s, x) = f(t, \xi(t, s, x))$ quindi per continuità della composizione:

$$(t, s, x) \longrightarrow (t, \xi(t, s, x)) \xrightarrow{f} f(t, \xi(t, s, x))$$

anche $\partial_1 \xi$ è continua.

2. supponendo che valgano (1) e (3), prendiamo l'identità valida per ogni terna $(t, s, x) \in \Xi$:

$$x = \xi(s, t, \xi(t, s, x))$$

Denotiamo per t, x fissati: $u(s) = \xi(t, s, x)$. Ma allora l'identità si riscrive:

$$x = \xi(s, t, u(s))$$

Siccome per il punto (3) la funzione ξ ha differenziale nella terza variabile continuo (cioè invertibile), per il Teorema della Funzione Implicita 3.3.6 si ottiene che $u \in C^1$.

3. proviamo che esiste $D_3 \xi(t, s, x) \in GL(E)$.

L'idea è ricondursi ad una E.D.O. lineare a coefficienti variabili. Infatti supponendo che esista il differenziabile nella terza variabile, partiamo dall'identità:

$$\partial_1 \xi(t, s, x) = f(t, \xi(t, s, x))$$

Differenziando in x (assumendo che i differenziali parziali commutino $\partial_1 D_3 = D_3 \partial_1$) segue:

$$\partial_1 D_3 \xi(t, s, x) = D_3 \partial_1 \xi(t, s, x) = D_2 f(t, \xi(t, s, x)) \circ D_3 \xi(t, s, x)$$

e dato che $\xi(t, t, x) = x$, allora $D_3 \xi(t, t, x) = I_E$.

Ma allora formuliamo un problema di Cauchy la cui soluzione sia proprio il differenziale $D_3 \xi(t, s, x)$. Indichiamo $A(t) = D_2 f(t, \xi(t, s, x))$, allora:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(s) = I_E \end{cases}$$

Il "candidato" differenziale è $D_3 \xi(t, s, x) = W_A(t, s)$, l'operatore di transizione che risolve il problema di Cauchy.

Dimostriamo che $W_A(t, s)$ verifica la definizione di differenziale, ovvero per $y \rightarrow x$:

$$\xi(t, s, y) - \xi(t, s, x) - W_A(t, s)[y - x] = o(\|x - y\|)$$

Chiamiamo $z(t) = \xi(t, s, y) - \xi(t, s, x) - W_A(t, s)[y - x]$. Allora:

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, \xi(t, s, y)) - f(t, \xi(t, s, x)) - A(t)W_A(t, s)[y - x] \\ &= A(t) [\xi(t, s, y) - \xi(t, s, x) - W_A(t, s)[y - x]] + f(t, \xi(t, s, y)) - \\ &\quad - f(t, \xi(t, s, x)) - A(t) [\xi(t, s, y) - \xi(t, s, x)] \\ &= A(t)z(t) + h(t) \end{aligned}$$

dove:

$$h(t) = f(t, \xi(t, s, y)) - f(t, \xi(t, s, x)) - A(t) [\xi(t, s, y) - \xi(t, s, x)]$$

Per la Formula di Variazione con Costante Arbitraria:

$$z(t) = \int_s^t W_A(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

per cui passando alla norma:

$$\|z(t)\| \leq |t - s| \cdot \|W_A\|_{\infty, [s, t] \times [s, t]} \cdot \|h\|_{\infty, [s, t]}$$

Concludiamo provando che $\|h\|_{\infty, [s, t]} = o(\|x - y\|)$, denotando i punti $X = \xi(t, s, x)$ e $Y = \xi(t, s, y)$. Per ogni $\tau \in [s, t]$:

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t, Y) - f(t, s, X) - A(t)[Y - X] \\ &= f(t, Y) - f(t, X) - D_2 f(t, X)[Y - X] \end{aligned}$$

Si applica il Teorema del Valor Medio¹¹ alla funzione $f(t, \cdot)$ tra X ed Y :

$$\begin{aligned} \|h(\tau)\| &\leq \|\xi(\tau, s, y) - \xi(\tau, s, x)\| \cdot \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|D_2 f(\tau, \xi(\tau, s, x) + \\ &\quad + \lambda[\xi(\tau, s, y) - \xi(\tau, s, x)] - D_2 f(\tau, \xi(\tau, s, x))\| \end{aligned}$$

Passando alla norma $\|\cdot\|_{\infty, [s, t]}$, dato che $D_2 f \in C^0$:

$$\begin{aligned} \|h\|_{\infty, [s, t]} &\leq \|\xi(\cdot, s, y) - \xi(\cdot, s, x)\|_{\infty, [s, t]} \cdot \sup_{\substack{0 \leq \lambda \leq 1 \\ \tau \in [s, t]}} \|D_2 f(\cdot, \xi(\cdot, s, x) + \\ &\quad + \lambda[\xi(\cdot, s, y) - \xi(\cdot, s, x)]) - D_2 f(\cdot, \xi(\cdot, s, x))\| \\ &= O(\|y - x\|) \cdot \omega(\|y - x\|) = o(\|y - x\|) \end{aligned}$$

che implica la tesi. ■

¹¹Il TVM applicato all'operatore $X \mapsto F(X) - LX$ si scrive come:
 $\|F(Y) - F(X) - L(X)[Y - X]\| \leq \|Y - X\| \cdot \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|DF(X + \lambda(Y - X)) - L\|$

4.4 Esercitazioni su E.D.O.

4.4.1 E.D.O. a Variabili Separabili

Definizione 4.4.1 - E.D.O. a Variabili Separabili

Una E.D.O. a variabili separabili è del tipo:

$$f(t, x) = h(t) \cdot g(x)$$

Fatterello 4.4.1 - Metodo di Integrazione

Sia lo spazio di Banach¹² $E = \mathbb{R}$.

Un metodo utile per risolvere il problema di Cauchy relativo alle E.D.O. a variabili separabili

$$\begin{cases} \dot{x} = h(t) \cdot g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è utilizzare la seguente identità:

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{g(s)} ds = \int_{t_0}^t h(s) ds$$

In particolare, è possibile ricavare informazioni qualitative sulle soluzioni del problema di Cauchy o, individuando delle primitive, trovare la soluzione stessa al problema.

Dimostrazione. Divido la discussione in 2 casi:

- il caso $g(x_0) = 0$ è banale. Infatti allora $x(t) = x_0$ costante è soluzione:

$$\dot{x} = h(t) \cdot g(x) = h(t) \cdot g(x_0) = 0$$

- se $g(x_0) \neq 0$, allora almeno in un intorno I di x_0 la funzione g non si annulla. In questo intorno si può allora dividere per $g(x)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = h(t) \cdot g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$$

Posso dividere l'equazione differenziale per $g(x(t))$ e ottengo:

$$\frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = h(t)$$

e integrando rispetto a t ottengo:

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t h(s) ds$$

Basta ora fare la sostituzione $\tau = x(s)$ e si ottiene la tesi in quanto il termine a sinistra diventa:

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)}$$

■

¹²Questa condizione è necessaria in quanto è necessario il buon ordinamento dello spazio.

4.4.2 Equazioni di Bernoulli

Definizione 4.4.2 - Equazione di Bernoulli

Un problema di Cauchy legato ad un'equazione di Bernoulli è della forma:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $\alpha \in [0, +\infty)$.

Fatterello 4.4.2 - Metodo di risoluzione

Da un'equazione di Bernoulli è possibile ricondursi ad una E.D.O. lineare con il metodo seguente.

Il caso $y(x_0) = 0$ ha come soluzione banale $y(x) = 0$ costante.

Se $y(x_0) \neq 0$, allora y non si annullerà in un intorno I di x_0 . In questo caso è lecito dividere per y^α l'equazione di Bernoulli:

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{a(x)}{y^{\alpha-1}} + b(x)$$

e se chiamo $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ ottengo l'equazione differenziale lineare:

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(x)z + b(x)$$

4.4.3 Metodo del Wronskiano

Quanto segue non è stato visto nelle lezioni.

Consideriamo l'equazione differenziale non omogenea del secondo ordine:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

Caso Omogeneo

Consideriamo il problema omogeneo:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \tag{4.4}$$

risolvibile come una E.D.O. lineare a coefficienti variabili nella forma:

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Tramite l'operatore di transizione $W_A(t, t_0)$, si ottiene che:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = W_A(t, t_0) \cdot \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

Scrivendo esplicitamente l'operatore di transizione¹³ e il vettore iniziale come:

$$W_A(t, t_0) = \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ v_1'(t) & v_2'(t) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

allora la soluzione del problema omogeneo è data da:

$$y(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)$$

¹³Osserviamo che in questo caso particolare la prima riga sarà data dalle derivate degli elementi della seconda, in quanto la seconda riga descrive y' e la prima descrive y . Quando l'operatore di transizione ha questa forma, ovvero la i -esima riga è data dalle derivate i -esime della prima, esso si chiama Wronskiano.

Caso Non Omogeneo

Supponiamo di aver risolto l'equazione omogenea associata, ottenendo la soluzione:

$$\tilde{y}(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)$$

Vogliamo trovare una soluzione del tipo:

$$y(t) = c_1(t)v_1(t) + c_2(t)v_2(t)$$

per cui si otterrebbe che la derivata è:

$$y'(t) = c_1(t)v_1'(t) + c_1'(t)v_1(t) + c_2(t)v_2'(t) + c_2'(t)v_2(t)$$

Possiamo¹⁴ scegliere $c_1(t)$ e $c_2(t)$ in modo che:

$$0 = c_1'(t)v_1(t) + c_2'(t)v_2(t)$$

per cui allora:

$$y'(t) = c_1(t)v_1'(t) + c_2(t)v_2'(t)$$

e derivando ulteriormente:

$$y''(t) = c_1'(t)v_1'(t) + c_1(t)v_1''(t) + c_2'(t)v_2'(t) + c_2(t)v_2''(t)$$

Se questa fosse una soluzione all'equazione differenziale, allora (ometto l'argomento t delle funzioni per alleggerire la notazione):

$$\begin{aligned} f(x) &= y'' + a(t)y' + b(t)y \\ &= c_1'v_1' + c_1v_1'' + c_2'v_2' + c_2v_2'' + a(t)(c_1v_1' + c_2v_2') + b(t)(c_1v_1 + c_2v_2) \\ &= c_1'v_1' + c_2'v_2' + c_1(v_1'' + a(t)v_1' + b(t)v_1) + c_2(v_2'' + a(t)v_2' + b(t)v_2) = c_1'v_1' + c_2'v_2' \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dalla definizione di v_1 e di v_2 come soluzione dell'equazione 4.4.

Allora possiamo determinare le funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ come soluzione del sistema:

$$\begin{cases} c_1'(t)v_1(t) + c_2'(t)v_2(t) = 0 \\ c_1'(t)v_1'(t) + c_2'(t)v_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

ovvero con Cramer:

$$\begin{cases} c_1'(t) = -f(t) \frac{v_1(t)}{w(t, t_0)} \\ c_2'(t) = f(t) \frac{v_2(t)}{w(t, t_0)} \end{cases}$$

con $w(t, t_0) = \det W_A(t, t_0)$ determinante Wronskiano. Allora la soluzione generale sarà:

$$y(t) = -v_1(t) \int f(\tau) \frac{v_1(\tau)}{w(\tau, t_0)} d\tau + v_2(t) \int f(\tau) \frac{v_2(\tau)}{w(\tau, t_0)} d\tau$$

Dal Teorema 4.2.6 si può sostituire $w(\tau, t_0)$, osservando che $\text{tr}A(t) = a(t)$:

$$y(t) = -v_1(t) \int f(\tau) \frac{v_1(\tau)}{\exp(\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds)} d\tau + v_2(t) \int f(\tau) \frac{v_2(\tau)}{\exp(\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds)} d\tau$$

¹⁴Non chiedeteci perché, funziona e basta.

4.4.4 E.D.O. con Teorema di Dini

Supponiamo di voler risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{A(x,y)}{B(x,y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dico che se la forma differenziale $A(x,y)dx - B(x,y)dy$ è esatta (nell'intorno di (x_0, y_0)) e se $F(x,y)$ è una sua primitiva tale che $F(x_0, y_0) = 0$, allora si può applicare il Teorema di Dini 3.3.7 l'equazione differenziale si scrive come segue:

$$y' = -\frac{\partial_x F(x,y)}{\partial_y F(x,y)}$$

e quindi $y(x)$ in un intorno di x_0 non può che essere la funzione implicita associata a F nelle vicinanze di (x_0, y_0) .

Caso in cui $Adx - Bdy$ non è esatta

(che si verifica \iff non è chiusa se mi restringo in un intorno di (x_0, y_0))

In questo caso potrebbe essere utile ricorrere alla tecnica del fattore integrante.

Data la forma $Adx - Bdy$ posso trovare $M(x,y)$ tale che $AMdx - BMdy$ è esatta? Se ci riesco e se F è una sua primitiva locale, allora il luogo di zeri risolverà $y' = \frac{AM}{BM} = \frac{A}{B}$. Per capire se $\exists M$ che renda la forma $MAdx - MBdy$ esatta (localmente)¹⁵ è equivalente a capire se trovo M tale che

$$\partial_y(MA) + \partial_x(MB) = 0 \iff \partial_y MA + M\partial_y A + \partial_x MB + M\partial_x B = 0$$

(questa è quella che si chiama una forma del trasporto). Vediamo ora una serie di casi particolari:

- $\frac{\partial_y A + \partial_x B}{B}$ dipende solo da x . Dico che in questo caso trovo un fattore integrante $M = M(x)$. Infatti se scelgo M dipendente solo da x allora l'equazione per M diventa:

$$M\partial_y A + \partial_x MB + M\partial_x B = 0 \iff \partial_x M = M \left(\frac{-\partial_y A - \partial_x B}{B} \right)$$

quindi posso scegliere $M = e^{-\int_{x_0}^x \left(\frac{\partial_y A + \partial_x B}{B} \right) d\tau}$

- $\frac{\partial_y A + \partial_x B}{A}$ dipende solo da y . Sto assumendo qui $A(x_0, y_0) \neq 0$. In questo caso cerco $M = M(y)$. Quindi l'equazione su M si riduce a:

$$\partial_y MA + M\partial_y A + M\partial_x B = 0$$

quindi posso scegliere $M(y) = e^{-\int_{y_0}^y \left(\frac{\partial_y A + \partial_x B}{A} \right) d\tau}$

¹⁵Commento su chiusura min 28 da scrivere lezione 30/03

4.4.5 Studio di Soluzioni globali e non

Proposizione 4.4.1 - Condizioni sufficienti per Soluzioni globali

Sia $f(t, x) : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ tale che:

$$\|f(t, x)\| \leq A(t) + B(t)\|x\|$$

dove $A, B \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Allora le soluzioni di $\dot{x} = f(t, x)$ sono globali su \mathbb{R} .

Dimostrazione. ————— ■

Definizione 4.4.3 - Soprasoluzioni e Sottosoluzioni

Sia un'equazione differenziale $\dot{y} = f(x, y)$ e sia $z(x)$ una funzione definita su un intervallo I . Allora:

- z è una soprasoluzione dell'equazione differenziale quando:

$$\dot{z}(x) \geq f(x, z(x)) \quad \forall x \in I$$

- z è una sottosoluzione dell'equazione differenziale quando:

$$\dot{z}(x) \leq f(x, z(x)) \quad \forall x \in I$$

Teorema 4.4.1 - Confronto sottosoluzioni e soprasoluzioni

Considero un'equazione differenziale $\dot{y} = f(x, y)$ che soddisfi le ipotesi di Lipschitz.

Siano $z(x)$ una soprasoluzione e $w(x)$ una sottosoluzione definite su un intervallo I . Segue che:

- Se $z(x_0) \geq w(x_0)$ per un certo $x_0 \in I$ allora:

$$z(x) \geq w(x) \quad \forall x \in I \cap [x_0, +\infty)$$

- Se $z(x_0) \leq w(x_0)$ per un certo $x_0 \in I$ allora:

$$z(x) \leq w(x) \quad \forall x \in I \cap (-\infty, x_0]$$

Dimostrazione. Trattiamo il caso $z(x_0) \geq w(x_0)$. L'altro caso sarà analogo.

Per ipotesi vale che:

$$\begin{cases} \dot{z}(x) \geq f(x, z(x)) \\ \dot{w}(x) \leq f(x, w(x)) \\ z(x_0) \geq w(x_0) \end{cases}$$

da cui facendo la differenza:

$$\begin{cases} \dot{w}(x) - \dot{z}(x) \leq f(x, w(x)) - f(x, z(x)) \\ z(x_0) - w(x_0) \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre possiamo considerare senza perdere generalità I intervallo compatto. Infatti se fosse I illimitato, potremmo suddividere l'intervallo in sottointervalli compatti, verificare la tesi e ottenere in questo modo che la disuguaglianza vale su tutto I .

Allora per compattezza di I , la Lipschitzianità di f nella seconda variabile è globale (e non solo locale, come garantiscono le ipotesi di Lipschitz). Scriviamo allora:

$$\begin{cases} \dot{w}(x) - \dot{z}(x) \leq L \cdot |w - z| \\ w(x_0) - z(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

Ora per concludere usiamo il seguente lemma, con $u(x) = w(x) - z(x)$, da cui segue subito la tesi. ■

Lemma 4.4.1

Considero il sistema, per I intervallo e $x_0 \in I$:

$$\begin{cases} \dot{u}(x) \leq L \cdot |u(x)| & \forall x \in I \\ u(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

Allora $u(x) \leq 0$ per ogni $x \in I \cap [x_0, +\infty)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $\bar{x} > x_0$ tale che $u(\bar{x}) > 0$. Allora sicuramente esisterebbe $\xi \in [x_0, \bar{x})$ tale che $u(\xi) = 0$ e posso garantire che:

$$\{x \in [x_0, \bar{x}] \mid u(x) = 0\} \neq \emptyset$$

Posso allora trovare $x_1 = \max\{x \in [x_0, \bar{x}] \mid u(x) = 0\}$. Ma allora per $x \in [x_1, \bar{x}]$ il valore assoluto della condizione 1 scompare, e rimane il sistema:

$$\begin{cases} \dot{u}(x) \leq Lu(x) & \forall x \in [x_1, \bar{x}] \\ u(x_1) = 0 \end{cases}$$

Per cui si ottiene moltiplicando per e^{-Lx} :

$$e^{-Lx} \dot{u}(x) \leq e^{-Lx} Lu(x)$$

da cui:

$$\frac{d}{dt}(e^{-Lx} u(x)) \leq 0$$

e per monotonia, confrontando gli estremi:

$$e^{-L\bar{x}} u(\bar{x}) \leq e^{-Lx_1} u(x_1) = 0$$

da cui ho un assurdo perchè per ipotesi $u(\bar{x}) > 0$. ■

Teorema 4.4.2 - Lemma di Gromwall

Supponiamo che $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e soddisfi la condizione:

$$y(x) \leq A + B \int_{x_0}^x y(s) ds$$

per ogni $x \in [x_0, x_1]$ e dove $A, B > 0$.

Allora per ogni $x \in [x_0, x_1]$ vale la stima:

$$y(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}$$

Dimostrazione. Considero la funzione ausiliaria:

$$F(x) = A + B \int_{x_0}^x y(s) ds$$

Allora in particolare vale che $F'(x) = By(x)$. Ma per ipotesi, abbiamo che:

$$\begin{cases} F'(x) \leq B \cdot F(x) \\ F(x_0) = A \end{cases}$$

da cui moltiplicando per e^{-Bx} la prima disuguaglianza si ottiene:

$$e^{-Bx} F'(x) \leq B e^{-Bx} F(x)$$

che riscrivo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (e^{-Bx} F(x)) \leq 0 \\ F(x_0) = A \end{cases}$$

e per monotonia, agli estremi risulta:

$$e^{-Bx} F(x) \leq e^{-Bx_0} A$$

da cui ottengo che $F(x) \leq A e^{B(x-x_0)}$. Visto che, per ipotesi, $y(x) \leq A + B \int_{x_0}^x y(s) ds = F(x)$ si ha la tesi. ■

Corollario 4.4.2.1

Sia lo spazio di Banach X . Supponiamo che:

$$\|f(x, y)\|_X \leq C(x) + D(x) \cdot \|y\|_X$$

dove $C, D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funzioni continue.

Allora ogni soluzione di $\dot{y}(x) = f(x, y)$ è definita globalmente su \mathbb{R} .

Dimostrazione. Proviamo che le soluzioni sono definite globalmente sulle semirette a destra. Fatto questo, basta ripetere l'argomento per la soluzione $y(-x)$ della corrispondente equazione differenziale (si nota che l'ipotesi resta verificata) per ottenere la tesi.

Supponiamo per assurdo che esista $x^* > 0$ tale che $\lim_{x \rightarrow (x^*)^-} \|y(x)\|_X = +\infty$.

Allora posso definire $C^* = \max_{[0, x^*]} C(x)$ e $D^* = \max_{[0, x^*]} D(x)$ per cui:

$$\|f(x, y(x))\|_X \leq C(x) + D(x) \|y(x)\|_X \leq C^* + D^* \|y(x)\|_X$$

Posso d'altra parte scrivere la versione integrale di $\dot{y} = f(x, y(x))$ come:

$$y(x) \leq y(0) + \int_0^x f(s, y(s)) ds$$

e passando alle norme, per ogni $x \in [0, x^*]$:

$$\begin{aligned} \|y(x)\| &\leq \|y(0)\| + \int_0^x \|f(s, y(s))\| ds \leq \|y(0)\| + \int_0^x (C^* + D^* \|y(s)\|_X) ds \\ &\leq (\|y(0)\| + C^* x^*) + D^* \int_0^x \|y(s)\| ds \end{aligned}$$

che soddisfa le ipotesi del Lemma 4.4.2 per cui per ogni $x \in [0, x^*]$:

$$\|y(x)\| \leq (\|y(0)\| + C^* x^*) e^{D^* x}$$

e passando al superiore:

$$\sup_{x \in [0, x^*]} \|y(x)\| \leq (\|y(0)\| + C^* x^*) e^{D^* x^*} < +\infty$$

da cui ho un assurdo. Dato che non esiste tale x^* , allora la soluzione è definita su tutta la semiretta destra. ■

4.4.6 Stabilità dei Punti di Equilibrio - Teoria di Lyapunov

Definizione 4.4.4

x_0 si dice punto di equilibrio per $\dot{x} = f(x)$ se $x \equiv x_0$ è soluzione

Definizione 4.4.5 - Punto di Equilibrio Stabile

Sia $x^* \in \mathbb{R}^d$ uno zero di $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Si dice che x^* è un punto di equilibrio stabile (per tempi positivi) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

soddisfa la condizione: $\sup_{t>0} \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$ se $\|x_0 - x^*\| < \delta$.

Osservazione 4.4.1

Il Teorema 4.3.2 di Dipendenza Continua dai dati iniziali ci garantisce che per ogni $T > 0$ fissato, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\sup_{t \in (0, T)} \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \|x_0 - x^*\| < \delta$$

Tuttavia questo non basta, in quanto $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ dipende da T e potrebbe succedere che:

$$\delta(\varepsilon, T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

Definizione 4.4.6 - Punto di Equilibrio Asintoticamente Stabile

Il punto di equilibrio x^* si dice asintoticamente stabile se è un punto di equilibrio stabile per cui:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

Definizione 4.4.7 - Funzionale di Lyapunov

Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che $f(x^*) = 0$. Si chiama funzionale di Lyapunov una qualsiasi funzione $V : B^d(x^*, r) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che:

1. $V(x) = 0$ se e solo se $x = x^*$
2. per ogni $x \in B^d(x^*, r)$ vale che $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$

Teorema 4.4.3 - Funzionale di Lyapunov \Rightarrow Stabilità

Se esiste un funzionale di Lyapunov associato ad f con x^* punto di equilibrio, allora x^* è stabile.

Dimostrazione. Supponiamo senza perdere generalità che $x^* = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$ introduciamo la quantità:

$$m_\varepsilon = \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x)$$

dove l'ipotesi (1) per il funzionale di Lyapunov implica che $m_\varepsilon > 0$.

Per continuità in 0 del funzionale $V(x)$, possiamo considerare $\delta > 0$ tale che valga:

$$\max_{\|x\|\leq\delta} V(x) \leq \frac{m_\varepsilon}{2}$$

Considerato il sistema per il problema di equilibrio dato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

osserviamo che data la soluzione $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0$$

Quindi la funzione $V(x(t))$ è decrescente in t , inoltre abbiamo che se $\|x(0)\| < \delta$ allora $V(x(0)) \leq \frac{m_\varepsilon}{2}$. Da questo segue che:

$$V(x(t)) \leq \frac{m_\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } t > 0 \quad (4.5)$$

Quindi per forza viene rispettata la condizione di equilibrio, ovvero:

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

in quanto se ad un istante $\bar{t} > 0$ valesse $\|x(\bar{t})\| = \varepsilon$, allora per costruzione:

$$V(x(\bar{t})) = \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = m_\varepsilon$$

il che contraddice la proprietà 4.5. ■

Teorema 4.4.4 - Funzionale di Lyapunov \Rightarrow Stabilità Asintotica

Sia V un funzionale di Lyapunov associato a x^ ed f che soddisfi per ogni $x \neq x^*$:*

$$\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$$

Allora x^ è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Come nel Teorema precedente, assumiamo senza perdere generalità che $x^* = 0$. Dobbiamo provare che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ se $\|x(0)\| \leq \bar{r}$.

Dalla dimostrazione del teorema precedente segue che esiste $\bar{r} > 0$ tale che (per $r > 0$):

$$\|x(0)\| \leq \bar{r} \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0 \quad \|x(t)\| \leq \frac{r}{2}$$

Voglio dire che questo \bar{r} soddisfa la condizione iniziale per la stabilità asintotica.

Supponiamo per assurdo che esista un $x(0) \in B_d(0, \bar{r})$ tale che $x(t) \not\rightarrow 0$. Esiste una sottosuccessione monotona $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\|x(t_k)\| \geq \delta_0 > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (questo perchè la successione $x(t)$ dovrebbe stare frequentemente fuori da una palla $B(0, \delta_0)$).

Ma allora dimostriamo di più, ovvero che questa disuguaglianza vale su tutto \mathbb{R}^+ : deve esistere $\varepsilon_0 > 0$ tale che:

$$\forall t > 0 \quad \|x(t)\| \geq \varepsilon_0 \quad (4.6)$$

Infatti dal Teorema precedente $V(x(t))$ è decrescente, quindi esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t))$ ed in particolare che il limite è $\neq 0$ in quanto, a meno di sottosuccessione, per costruzione di $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ possiamo supporre che $x(t_k) \rightarrow \bar{x} \neq 0$ e quindi che per ipotesi¹⁶:

$$V(x(t_k)) \rightarrow V(\bar{x}) \neq 0$$

Questa supposizione è giustificata dal fatto che se esistesse una sottosuccessione $\{\tilde{t}_k\}$ con $\tilde{t}_k \rightarrow +\infty$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(\tilde{t}_k) = 0$, allora varrebbe:

$$V(x(\tilde{t}_k)) \rightarrow 0$$

Ma per unicità del limite avevamo che $V(x(\tilde{t}_k)) \rightarrow V(\bar{x}) \neq 0$, contraddizione.

Ne segue che non c'è sottosuccessione $\{\tilde{t}_k\} \subseteq \{t_k\}$ tale che $x(\tilde{t}_k) \rightarrow 0$. Ma allora $\{t_k\}$ è definitivamente fuori da un certo intorno $B(0, \varepsilon_0)$ di $x^* = 0$. Abbiamo provato la disuguaglianza 4.6.

Con questa proprietà concludiamo: abbiamo infatti provato che:

$$\varepsilon_0 \leq \|x(t)\| \leq \frac{r}{2}$$

Consideriamo la quantità:

$$m = \max_{\varepsilon_0 \leq \|x\| \leq \frac{r}{2}} \nabla V(x) \cdot f(x) < 0$$

Allora osserviamo che:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq m < 0$$

per cui si ottiene:

$$0 \leq V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \frac{d}{ds} V(x(s)) ds \leq V(x(0)) + mt \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

che è assurdo. Ovvero $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ come volevamo. ■

Teorema 4.4.5 - Stabilità Asintotica e Jacobiano

Sia x^* punto di equilibrio per $x' = f(x)$. Se si ha che

$$\text{Spec}(Jf(x^*)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z < 0\}$$

allora x^* è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Supponiamo senza perdere generalità che $x^* = 0$ ed indichiamo $A = Jf(0)$. Per ipotesi allora:

$$\text{Spec}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z < 0\}$$

Scrivendo lo sviluppo di Taylor al 1° ordine:

$$f(x) = f(0) + Ax + o(\|x\|) = Ax + o(\|x\|)$$

Cerchiamo un funzionale di Lyapunov $V(x)$ che abbia la forma:

$$V(x) = \langle Px, x \rangle$$

dove $P \in \text{Sym}(d \times d)$ e tale che:

¹⁶L'ipotesi che $V(x) = 0$ se e solo se $x = x^* = 0$.

1. $\langle Px, x \rangle \geq \varepsilon_0 \|x\|^2$
2. per ogni $x \neq 0$ vale $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$

In questo caso si avrebbe che $\nabla V(x) = 2Px$, pertanto la condizione di stabilità asintotica del Teorema 4.4.4 diventa:

$$\langle 2Px, Ax + o(\|x\|) \rangle < 0 \quad \forall x \in B_d(0, r) \setminus \{0\}$$

In realtà basta trovare una matrice P simmetrica tale che esista $\delta_0 > 0$ per il quale:

$$\langle Px, Ax \rangle \leq -\delta_0 \|x\|^2$$

in modo che, per $\|x\| \ll 1$:

$$\langle 2Px, Ax \rangle + \langle Px, o(\|x\|) \rangle \leq -2\delta_0 \|x\|^2 + o(\|x\|) \leq -\delta_0 \|x\|^2$$

Abbiamo ricondotto la ricerca del funzionale di Lyapunov giusto ad un problema matriciale: per ogni matrice A tale che $\text{Spec}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z < 0\}$ esiste una matrice simmetrica $P > 0$ tale che:

$$\langle Px, Ax \rangle \leq -\delta_0 \|x\|^2$$

Vediamo che le richieste vengono tutte soddisfatte dalla matrice:

$$P = \int_0^{+\infty} e^{tA^T} e^{tA} dt$$

infatti:

- $P \in \text{Sym}(d \times d)$ perchè l'integrando $e^{tA^T} e^{tA}$ è simmetrico.
- $P > 0$ poiché:

$$\langle e^{tA^T} e^{tA} x, x \rangle = \langle e^{tA} x, e^{tA} x \rangle = \|e^{tA} x\|^2 > 0$$

- Vediamo che:

$$\begin{aligned} \langle Px, Ax \rangle &= \int_0^{+\infty} \langle e^{tA^T} e^{tA} x, Ax \rangle dt = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA} x, e^{tA} Ax \rangle dt \\ &= \int_0^{+\infty} \langle e^{tA} x, A e^{tA} x \rangle dt = \int_0^{+\infty} \left\langle e^{tA} x, \frac{d}{dt} (e^{tA} x) \right\rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} \|e^{tA} x\|^2 \right) dt = \frac{1}{2} [e^{tA} x]_{t=0}^{t=+\infty} = -\frac{1}{2} \|x\|^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene la proprietà cercata con $\delta_0 = \frac{1}{2}$.

■

Capitolo 5

Teoremi di Densità

5.1 Equicontinuità e Ascoli-Arzelà

Seguono ora 3 definizioni equivalenti di equicontinuità.

Definizione 5.1.1 - Insiemi Equicontinui di Mappe tra Metrici (1)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Un insieme $\Lambda \subseteq Y^X$ si dice equicontinuo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, x' \in X$ e per ogni $f \in \Lambda$ vale:

$$d_X(x, x') < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Definizione 5.1.2 - Insiemi Equicontinui di Mappe tra Metrici (2)

L'insieme Λ definito come sopra è equicontinuo se la mappa valutazione

$$\begin{aligned} \text{val} : Y^X \times X &\longrightarrow Y \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è uniformemente continua su $\Lambda \times X$ rispetto alla distanza¹ $d_\infty + d_X$.

Definizione 5.1.3 - Insiemi Equicontinui di Mappe tra Metrici (3)

Nelle ipotesi precedenti, tutte le $f \in \Lambda$ hanno stesso modulo di continuità.

Proposizione 5.1.1

Le definizioni appena enunciate sono equivalenti.

Dimostrazione. Infatti:

1 \Rightarrow 2: $\forall f, f' \in \Lambda, \forall x, x' \in X$:

$$\begin{aligned} d_Y(\text{val}(f, x'), \text{val}(f, x)) &= d_Y(f'(x'), f(x)) \leq d_Y(f'(x'), f(x')) + d_Y(f(x'), f(x)) \\ &\leq d_\infty(f, f') + d_Y(f(x'), f(x)) \end{aligned}$$

Se vale (1), questa quantità si può rendere minore di ogni preassegnato $\varepsilon > 0$ con la sola condizione:

$$\begin{cases} d_\infty(f, f') \leq \delta \\ d_X(x, x') \leq \delta \end{cases} \quad \text{opportuno}$$

2 \Rightarrow 3 Se $\text{val} : \Lambda \times X \rightarrow Y$ è uniformemente continua ha un modulo di continuità ω :

$$d_Y(f'(x'), f(x)) \leq \omega(d_\infty(f, f') + d_X(x, x'))$$

¹dove, supponendo senza perdere generalità d_Y limitata, poniamo $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$

In particolare se $f = f'$:

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \omega(d_X(x, x')) \quad \forall f \in \Lambda, \forall x, x' \in X$$

3 \Rightarrow 1 Dato $\varepsilon > 0$ poniamo $\delta > 0$ tale che $\omega(\delta) < \varepsilon$. ■

Lemma 5.1.1 - Convergenze in Equicontinui

Siano (X, d) spazio metrico e $(E, \|\cdot\|)$ spazio normato. Sia $f_n : X \rightarrow E$ una successione di funzioni equicontinue² con modulo di continuità ω . Allora:

1. l'insieme $C = \{x \in X \mid f_n(x) \text{ è di Cauchy}\}$ è chiuso in X .
2. se f_n converge puntualmente a $f : X \rightarrow E$, allora f è ω -continua (cioè equicontinua a $\{f_n\}$) e il limite è uniforme sui compatti.

Dimostrazione. La tecnica è sempre quella di aggiungere e togliere termini misti.

1. Sia $x \in \overline{C}$. Sia $c \in C$. Per $p, q \in \mathbb{N}$ voglio vedere che $f_n(x)$ è di Cauchy:

$$\begin{aligned} \|f_p(x) - f_q(x)\| &\leq \|f_p(x) - f_p(c)\| + \|f_p(c) - f_q(c)\| + \|f_q(c) - f_q(x)\| \\ &\leq 2\omega(d(x, c)) + \|f_p(c) - f_q(c)\| \end{aligned}$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Siccome $x \in \overline{C}$ allora esiste $c \in C$ tale che $d(x, c) \leq \delta$. Dato c , essendo $f_n(c)$ di Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall p, q \geq n_0$ valga $\|f_p(c) - f_q(c)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ma allora per ogni $p, q > n_0$ vale che:

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$$

quindi $x \in C$: ovvero $C = \overline{C}$.

2. $\forall x, x' \in X$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n(x) - f_n(x')\| \leq \omega(d(x, x'))$$

e per $n \rightarrow \infty$

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \omega(d(x, x'))$$

cioè f è ω -continua. Verifichiamo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente sui compatti.

Sia $K \subseteq X$ compatto, senza perdere generalità $f = 0$ su K (in quanto basta considerare $g_n = f_n - f$, allora $g_n \rightarrow 0$ puntualmente ed è equicontinua su K).

Sia $x_k \in K$ tale che $\|f_k\|_{\infty, K} = \|f_k(x_k)\|$ (ovvero x_k realizza il massimo di $f_k|_K$).

Per compattezza esiste una sottosuccessione x_{k_j} convergente a $x^* \in K$

$$\begin{aligned} \|f_{k_j}(x_{k_j})\| &\leq \|f_{k_j}(x^*)\| + \|f_{k_j}(x^*) - f_{k_j}(x_{k_j})\| \\ &\leq \|f_{k_j}(x^*)\| + \omega(d(x^*, x_{k_j})) = o(1) \quad \text{per } j \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Quindi, per argomento di Urysohn, $\|f_n(x_n)\| \rightarrow 0$ cioè $\|f_n\|_{\infty, K} \rightarrow 0$. ■

Teorema 5.1.1 - Teorema di Ascoli-Arzelà

Siano (X, d) spazio metrico compatto e $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach.

Sia $\Lambda \subseteq (C^0(X, E), \|\cdot\|_{\infty})$. Allora Λ è compatto se e solo se:

²Ossia l'insieme $\{f_n\}$ è equicontinuo

1. Λ è chiuso
2. Λ è equicontinuo
3. esiste $S \subseteq X$ denso tale che per ogni $x \in S$ l'insieme

$$\Lambda(x) = \{f(x) \mid f \in \Lambda\} = \text{val}(\Lambda \times \{x\})$$

è relativamente compatto³ in E .

(Oppure, una condizione più forte (3.a) è $\Lambda(X) = \text{val}(\Lambda \times X)$ è compatto)

Dimostrazione. \Rightarrow : Sia Λ compatto. Allora:

1. Λ è chiuso (un compatto di uno spazio di Hausdorff è sempre chiuso).
2. siccome $\text{val} : C(X, E) \rightarrow E$ è continua (verifica per esercizio) per il Teorema di Heine-Cantor è anche uniformemente continua, quindi Λ è equicontinuo.
3. vale addirittura (3.a): siccome val è continua e $\Lambda \times X$ è compatto (prodotto di due compatti), l'immagine $\Lambda(X) = \text{val}(\Lambda \times X)$ è compatto.

\Leftarrow : Per questa implicazione, usiamo il Lemma 5.1.1.

Sia $\Lambda \subseteq C^0(X, E)$ con le proprietà (1),(2),(3). Proviamo che Λ è sequenzialmente compatto. Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in Λ . X è compatto quindi separabile e dato che $S \subseteq X$, S è separabile. Sia $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso $\subseteq S$, ovvero $\overline{\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}} = S$. Facciamo allora un argomento diagonale: esiste sottosuccessione di $\{f_k\}_k$ che indico $\{f_{k,1}\}_k$ tale che $\{f_{k,1}(s_1)\}_k$ converge (semplicemente perchè $\{f_k(s_1)\} \subseteq \Lambda(s_1)$ relativamente compatto).

Esiste analogamente una sottosuccessione $\{f_{k,2}\}_k$ di $\{f_{k,1}\}_k$ che converge valutata in s_2 . Costruisco similmente $\forall n \{f_{k,n}\}_k$ convergente in s_n .

Più formalmente: per induzione segue che esiste una successione di sottosuccessioni consecutive $\{f_{k,n}\}$ tale che:

$$\begin{cases} \{f_{k,n+1}\}_k \text{ è sottosuccessione di } \{f_k\} \\ \{f_{k,n}(s_n)\}_k \text{ converge per } k \rightarrow +\infty \text{ (da } \Lambda(s_k) \text{ relativamente compatto)} \end{cases}$$

dunque $f_{k,n}$ converge nei punti s_1, \dots, s_n . Allora la $(f_{k,k})_k$ è definitivamente sottosuccessione di ciascuna $(f_{k,n})$ e quindi converge puntualmente su tutto l'insieme $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

A questo punto per il Lemma 5.1.1, essendo le f_k equicontinue e puntualmente convergenti su tutto X , convergono uniformemente e il limite appartiene a Λ (che era chiuso). ■

Dimostrazione alternativa per $\Lambda = C_\omega$. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Siano $\{x_j\}_{1 \leq j \leq m} \subseteq X$, $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq Y$, rispettivamente una δ -rete di X e una ε -rete di Y finite. Sia ω un modulo di continuità, e

$$C_\omega := \{f : X \rightarrow Y \mid \omega - \text{continua}\}$$

Ora $\forall \alpha \in [n]^m$ (α multiindice) sia

$$S_\alpha := \{f \in C_\omega : d_Y(f(x_j), y_{\alpha(j)}) \leq \varepsilon \forall j \in [m]\}$$

perchè ogni $f \in C_\omega$ appartiene a S_α per qualche $\alpha \in [n]^m$.

³Un insieme è relativamente compatto se la sua chiusura è compatta. Se X è spazio metrico completo (esercizio) allora Y relativamente compatto $\Leftrightarrow Y$ totalmente limitato

ovvero l'insieme delle funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ che passano a distanza $< \varepsilon$ dai punti individuati con il multiindice α (funzioni come nella Figura 5.1). Allora:

$$C_\omega = \bigcup_{\alpha \in [n]^m} S_\alpha$$

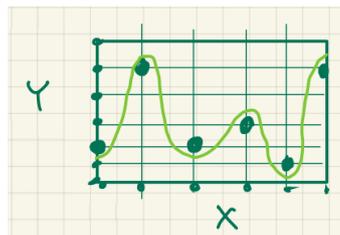


Figura 5.1: Esempio di una funzione $f \in S_\alpha$

Osserviamo che S_α ha "diametro" finito, maggiorato da $2(\varepsilon + \omega(\delta))$ perchè se $f, g \in S_\alpha$ e $x \in X$, $d(x, x_j) \leq \delta$ per qualche $j \in \{1, \dots, m\}$.

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), y_{\alpha(j)}) + d(y_{\alpha(j)}, g(x_j)) + d(g(x_j), g(x)) \\ &\leq \omega(d(x, x_j)) + \varepsilon + \varepsilon + \omega(d(x, x_j)) \leq 2(\varepsilon + \omega(\delta)) \end{aligned}$$

Se scelgo $f_\alpha \in S_\alpha, \forall \alpha \in [n]^m$ ho trovato una η -rete finita, con $\eta = 2(\varepsilon + \omega(\delta))$, precisamente di $\leq n^m$ elementi.

Di conseguenza se (X, d_X) e (Y, d_Y) sono spazi metrici totalmente limitati e ω è un modulo di continuità, anche $C_\omega \subseteq C(X, Y)$ è totalmente limitato. Inoltre è completo per il Lemma 5.1.1. Segue la dimostrazione dell'implicazione \Leftarrow di 5.1.1 con l'ipotesi (3.a) considerando $Y = \overline{\Lambda(X)}$ compatto. ■

5.2 Semicontinuità

Definizione 5.2.1 - Topologia della Semicontinuità inferiore

La topologia della semicontinuità inferiore su $\overline{\mathbb{R}}$ è data dagli aperti:

$$\tau_{\text{inf}} = \{]c, +\infty] \mid c \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{\overline{\mathbb{R}}\}$$

Osservazione 5.2.1 - Compattezza in τ_{inf}

Un insieme $C \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ non vuoto è compatto in τ_{inf} se e solo se ha minimo.

Definizione 5.2.2 - Semicontinuità inferiore

Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dove X è spazio topologico. f è semicontinua inferiore se è continua rispetto a τ_{inf} su $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 5.2.3 - Semicontinuità inferiore sequenziale

Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. È semicontinua inferiore sequenzialmente se lo è rispetto a τ_{inf} . Cioè se per ogni $x_k \rightarrow x^*$:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_*)$$

Proposizione 5.2.1

Siano $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua inferiore (sequenzialmente⁴) ed X spazio topologico compatto (sequenzialmente). Allora f ha minimo.

Dimostrazione. $f(X)$ è compatto in $(\overline{\mathbb{R}}, \tau_{\text{inf}})$ che è non vuoto visto che X stesso è non vuoto e quindi ha minimo.

Sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ una successione minimizzante: $f(x_k) \rightarrow \inf f(X)$. Per compattezza sequenziale si può assumere senza perdere generalità che x_k convergente in X a un punto $x^* \in X$.

Allora per l'ipotesi di semicontinuità inferiore sequenziale:

$$\inf f = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \geq f(x^*)$$

quindi x^* è minimo. ■

Proposizione 5.2.2

Sia $\{f_\lambda : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di funzioni semicontinue inferiori. Allora l'involuppo superiore $f(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ è semicontinua inferiore.

Dimostrazione. Infatti: $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $\sup A > c$ se e solo se esiste $a \in A$ tale che $a > c$. Quindi per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e per ogni $x \in X$:

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) > c \iff \exists \lambda \in \Lambda : f_\lambda(x) > c$$

cioè

$$\left\{ \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda > c \right\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{f_\lambda > c\}$$

che è aperto di τ_{inf} . ■

⁴La proposizione vale equivalentemente nel caso sequenziale.

5.3 Lunghezza di Curve e Hopf-Rinow

Definizione 5.3.1

Si dice suddivisione, o partizione, di un intervallo $[a, b]$ una n -upla finita di numeri reali $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ e si indica $P \in \mathbb{P}[a, b]$.

Definizione 5.3.2 - Lunghezza di curve in metrici

Sia (X, d) spazio metrico. Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva e $P = \{x_k\}_{k=0}^n \in \mathbb{P}[a, b]$ una suddivisione.

Definiamo la lunghezza parziale di γ su P come:

$$l(\gamma, P) = \sum_{k=1}^n d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k-1}))$$

La lunghezza della curva γ allora è:

$$l(\gamma, [a, b]) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a, b]} l(\gamma, P)$$

Proposizione 5.3.1 - Proprietà

Valgono le seguenti proprietà:

1. **additività:** siano $a < c < b$ numeri reali e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva. Allora:

$$l(\gamma, [a, b]) = l(\gamma, [a, c]) + l(\gamma, [c, b])$$

2. **invarianza per riparametrizzazione:** sia $\sigma : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una funzione bigettiva monotona tra intervalli e sia $\gamma : [c, d] \rightarrow (X, d)$. Allora:

$$l(\gamma \circ \sigma, [a, b]) = l(\gamma, [c, d])$$

3. **scrittura con limite:** supponendo $\gamma \in C^0([a, b], X)$, allora:

$$l(\gamma, [a, b]) = \lim_{|P| \rightarrow 0} l(\gamma, P)$$

dove $|P| = \max_k d(x_k, x_{k+1})$

4. **scrittura con integrale:** supponendo $\gamma \in C^1([a, b], E)$, dove $(E, \|\cdot\|)$ spazio normato. Allora:

$$l(\gamma, [a, b]) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(x)\| dx$$

Dimostrazione. Per le relative dimostrazioni si consiglia di riguardare i propri appunti di Analisi 1, sperando che non siano già stati bruciati ■

Proposizione 5.3.2 - Continuità del funzionale lunghezza rispetto all'intervallo

Siano $\gamma \in C([a, b], X)$ e $L = l(\gamma, [a, b])$. Allora il funzionale:

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow [0, L] \\ x &\longmapsto l(\gamma, [a, x]) \end{aligned}$$

è continuo e crescente su $[a, b]$.

Dimostrazione. La crescenza è ovvia.

Proviamo che è continua (a sinistra) in b : Sia $L' < L = \ell(\gamma, [a, b])$. Proviamo che esiste $b' < b$ tale che $\ell(\gamma, [a, b']) > L'$

DISEGNO

Per definizione esiste $P \in \mathbb{P}[a, b]$ tale che

$$L' < \sum_{k=1}^{n-1} d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k-1})) = \ell(\gamma, P) - d(\gamma(x_{n-1}), \gamma(b))$$

(si può sempre prendere P in modo che l'ultimo addendo, $d(\gamma(x_{n-1}), \gamma(b))$ sia piccolo, perchè γ è continua in b) E poichè il termine a destra è

$$\ell(\gamma, P \setminus \{b\}) \leq \ell(\gamma, [a, x_{n-1}])$$

si è trovato $b' := x_{n-1}$ tale che $L' < \ell(\gamma, [a, b'])$. Ciò prova la continuità in b . Allora considerando $\gamma|_{[a, c]}$ si ha che γ è continua a sinistra in ogni $c \in [a, b]$. Considerando

$$\tilde{\gamma} : x \rightarrow \gamma(b - a + x) \in C([a, b], X)$$

(ripercorre γ alla rovescia) si ha che è continua a destra la $x \rightarrow \ell(\gamma, [x, b])$; poichè

$$\ell(\gamma, [a, x]) = \ell(\gamma, [a, b]) - \ell(\gamma, [x, b])$$

anche $x \rightarrow \ell(\gamma, [a, x])$ è continua a destra. ■

Proposizione 5.3.3 - Continuità del funzionale lunghezza rispetto a γ

Il funzionale:

$$\begin{array}{ccc} C([a, b], X) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ \gamma & \longmapsto & \ell(\gamma, [a, b]) \end{array}$$

è *semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme (e sequenzialmente semicontinuo inferiore rispetto alla convergenza puntuale.)*

Dimostrazione. Immediata dalla definizione:

$$\ell(\gamma, [a, b]) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a, b]} \ell(\gamma, P)$$

ed inoltre la funzione $\gamma \mapsto \ell(\gamma, P) = \sum_{k=1}^n d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k-1}))$ è continua e, come ricordato, inviluppo superiore di funzioni semicontinue inferiori è semicontinua inferiore. ■

Osservazione 5.3.1

In altre parole $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ continua di lunghezza L si può riparametrizzare su $[0, L + 1]$ (o $[0, L + \varepsilon]$) in modo che sia 1-Lip o anche riparametrizzare su $[0, 1]$ in modo che sia $(L + 1)$ -Lip

Teorema 5.3.1 - Teorema di Hopf-Rinow

Sia (X, d) spazio metrico compatto e siano $x_0, x_1 \in X$ collegati da un cammino di lunghezza finita. Allora esiste un cammino di lunghezza minima tra quanti collegano x_0 e x_1 .

In altre parole, se l'insieme

$$C_{x_0, x_1} = \{ \gamma \in C([0, 1], X) \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1 \text{ e } \ell(\gamma, [0, 1]) < \infty \}$$

è non vuoto, allora il funzionale "lunghezza" $\gamma \mapsto \ell(\gamma, [0, 1])$ ammette minimo in C_{x_0, x_1} .

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una curva continua fra x_0, x_1 di lunghezza finita L . Allora:

$$\inf_{\gamma \in C_{x_0 x_1}} \ell(\gamma, [0, 1]) = \inf_{\substack{\gamma \in C_{x_0 x_1} \\ \ell(\gamma([0, 1])) \leq L}} \ell(\gamma, [0, 1]) = {}^5 \inf_{\substack{\gamma \in C_{x_0 x_1} \\ \text{lip}(\gamma) \leq L+1}} \ell(\gamma, [0, 1])$$

e l'estremo inferiore è un minimo perché la funzione è semicontinua inferiormente e perché l'insieme $\{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \text{lip}(\gamma) \leq L + 1\}$ è compatto per Ascoli-Arzelà. La curva che realizza il minimo è quella cercata. ■

⁵È un insieme più piccolo che ha lo stesso estremo inferiore: stiamo infatti prendendo le stesse curve ma riparametrizzate per essere L -Lipschitz (sappiamo che ogni curva con lunghezza finita può essere riparametrizzata per l'Osservazione 5.3.1).

5.4 Polinomi di Bernstein

Definizione 5.4.1 - Polinomi di Bernstein

Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Il suo polinomio di Bernstein di ordine $n \in \mathbb{N}$ è:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

5.4.1 Costruzione euristica

Partendo dall'operatore derivata, dove $I \subset \mathbb{R}$ intervallo:

$$\begin{aligned} D : C^1(I) &\longrightarrow C^0(I) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

si può considerare la sua approssimazione discreta D_n definita:

$$D_n f(x) = \frac{f\left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}x\right)}{\frac{1}{n}}$$

Si può riscrivere questa approssimazione usando altri operatori lineari "traslazione" e "moltiplicazione" definiti su $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$:

$$\begin{cases} \tau_h(f(\cdot)) = f(\cdot + h) \\ \delta_h(f(\cdot)) = f(h\cdot) \end{cases}$$

e in particolare si ottiene:

$$D_n = n \delta_{\frac{1}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right) \quad (5.1)$$

A questo punto, si possono definire i polinomi di Bernstein tramite una successione in $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} B_0 f = f(0) \\ B_n f(0) = f(0) \\ DB_n = B_{n-1} D_n \end{cases} \quad (5.2)$$

ed in particolare, usando l'operatore di valutazione: $ev_x(f) = f(x)$:

$$\begin{cases} ev_x B_0 = ev_0 = ev_0 B_n \\ DB_n = B_{n-1} D_n \end{cases} \quad (5.3)$$

Citazione 4. *Naturalmente se volete questoo... è un divertimento!*

Ecco, quasi sempre quello che si fa in una trattazione è, per risparmiare tempo, semplicemente cacare lì la formula dell'operatore di... del polinomio di Bernstein e dopo studiarne le proprietà e va benissimo, insomma. Però dato... visto che siamo matematici vogliamo capire cosa c'è dietro!

Vediamo come le relazioni di ricorrenza di parentesi portino alla formula di B_n . Dalla terza equazione del sistema 5.2 si ha, per $f \in C^0([0, 1])$ (essendo $B_n f(0) = f(0)$):

$$B_n f(x) = f(0) + \int_0^x B_{n-1} D_n f(t) dt$$

e per induzione è quindi un polinomio in x di grado $\leq n$. Quindi in particolare coincide con il suo polinomio di Taylor in 0 di ordine n .

Iterando abbiamo che:

$$D^k B_n = B_{n-k} \cdot D_{n-k+1} \cdot \dots \cdot D_{n-1} \cdot D_n$$

Ora, valgono le proprietà tra operatori:

$$\begin{aligned}\tau_{a+b} &= \tau_a \tau_b \\ \delta_{ab} &= \delta_a \delta_b \\ \tau_{ab} &= \delta_b^{-1} \tau_a \delta_b \iff \delta_b \tau_a = \tau_{ab} \delta_b\end{aligned}$$

dove l'ultima è: $f(x) \rightarrow f(x+ab) = f\left(b\left(\frac{x}{b} + a\right)\right)$.

Citazione 5. *E' quello che ci dice come si scambiano... come diciamo... cosa succede quando la dilatazione incontra una traslazione per strada e dice: "Buongiorno, buongiorno!" e poi "Uh!" un treno col corridoio stretto... va bene. Il... si! La dilatazione mette la mano nel portafoglio della traslazione e "FIU", e ab come non è rimane solo con a. Va bene.*

Dalla scrittura dell'equazione 5.1 si riscrive:

$$D_n = n \left(\tau_{\frac{1}{n-1}} - I \right) \delta_{\frac{n-1}{n}}$$

Dimostriamo per induzione su n che possiamo scrivere:

$$D_{n-k+1} \dots D_{n-1} D_n = (n-k+1) \dots (n-1) n \delta_{\frac{n-k}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right)^k$$

e moltiplicando la formula a sinistra per:

$$D_{n-k} = (n-k) \delta_{\frac{n-k-1}{n-k}} \left(\tau_{\frac{1}{n-k}} - I \right)$$

si trova:

$$\begin{aligned}D_{n-k} (D_{n-k+1} \dots D_{n-1} D_n) &= n(n-1) \dots (n-k) \delta_{\frac{n-k-1}{n-k}} \left(\tau_{\frac{1}{n-k}} - I \right) \delta_{\frac{n-k}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right)^k \\ &= n(n-1) \dots (n-k) \delta_{\frac{n-k-1}{n-k}} \delta_{\frac{n-k}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right) \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right)^k \\ &= n(n-1) \dots (n-k) \delta_{\frac{n-k-1}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right)^{k+1}\end{aligned}$$

Citazione 6. *Quindi c'è questo abominio, va bene...*

Quindi per calcolare la derivata abbiamo che:

$$D^k B_n = B_{n-k} D_{n-k+1} \dots D_n = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k} \delta_{\frac{n-k}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right)^k$$

Dalla definizione ricorsiva 5.3, $B_0 f$ ha grado 0 quindi, ricorsivamente, dato che $DB_n = B_{n-1} D_n$ ha grado $n-1$, B_n ha grado n . Quindi il polinomio di Taylor di ordine n in 0 di $B_n f$ è proprio $B_n f$ perchè $D^k B_n f = 0$ per $k > n$ e si ha:

$$ev_x B_n = ev_0 \left[\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} D^k B_n \right] = ev_0 \left[\sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} B_{n-k} \delta_{\frac{n-k}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right)^k \right]$$

dove stiamo indicando $ev_0 : f \rightarrow T_n(x, 0, f)$ il funzionale valutazione in 0 ed invece x è un parametro. Dato che $ev_0 B_k = id$ e $ev_0 \delta_\alpha = id$:

Citazione 7. *Ora si semplifica tutto magicamente...*

$$ev_x B_n = ev_0 \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right)^k \right] =$$

Citazione 8. *A questo punto dico (in falsetto) TOP!! e allora...*

...per la formula del binomio di Newton:

$$\begin{aligned} &= ev_0 \left[I + x \left(\tau_{\frac{1}{n}} - I \right) \right]^n = val_0 \left[x \tau_{\frac{1}{n}} + (1-x)I \right]^n \\ &= ev_0 \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tau_{\frac{k}{n}} \right] \end{aligned}$$

Da qui viene l'espressione per $B_n f$:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

cioè $B_n f$ è una *combinazione convessa* dei valori di f nei nodi $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}$.

Citazione 9. *Volendo ora ci siamo divertiti ma se volessimo fare in modo più standard...*

Proposizione 5.4.1 - Proprietà di B_n

Valgono le seguenti proprietà:

1. *l'operatore B_n verifica le proprietà definite da 5.3.*
2. *B_n ha valori sulle funzioni polinomiali di grado $\leq n$ e non aumenta il grado di tali polinomi.*
3. *si verifica per i monomi $1, x$ e x^2 che:*

$$\begin{cases} B_n 1 = 1 \\ B_n x = x \\ B_n x^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n} \end{cases}$$

4. *l'operatore B_n è positivo per funzioni $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$:*

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad B_n f \geq 0$$

e lineare:

$$f \geq g \quad \Rightarrow \quad B_n f \geq B_n g$$

5. *in norma degli operatori $\|\cdot\|: \|B_n\| = 1$*

Dimostrazione. Dimostriamo i fatti separatamente.

1. Segue dalla costruzione appena fatta dei polinomi di Bernstein, in particolare dal fatto che $B_n f$ è il suo polinomio di Taylor di grado n . Infatti a quel punto, il differenziale $D^n B_n$ è proprio nella forma cercata.
2. Segue sempre dall'osservazione precedente.
3. Calcoliamo separatamente questi polinomi.
 - $B_n 1 = 1$ è banale.
 - Derivando il polinomio $B_n x$ si ottiene:

$$(B_n x)' = B_{n-1} D_n x = B_{n-1} 1 = 1$$

ed in 0 vale 0. Per cui $B_n x = x$.

- Derivando il polinomio $B_n x^2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} (B_n x^2)' &= B_{n-1} (D_n x^2) = n B_{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{n} x + \frac{1}{n} \right)^2 - \left(\frac{n-1}{n} x \right)^2 \right] \\ &= B_{n-1} \left[2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) x + \frac{1}{n} \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) x + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

quindi come nel caso precedente, conoscendo il punto iniziale segue:

$$B_n x^2 = \left(1 - \frac{1}{n} \right) x^2 + \frac{x}{n}$$

4. Segue direttamente dalla definizione del polinomio di Bernstein.
5. Dato $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tale che $\|f\|_\infty \leq 1$ segue che $\|B_n f\|_\infty \leq 1$. Ma allora $\|B_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, ovvero $\|B_n\| \leq 1$. In particolare, $\|B_n 1\| = 1$ quindi la norma dell'operatore è proprio 1. ■

Teorema 5.4.1 - Teorema di Bernstein

Gli operatori $B_n : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ di Bernstein convergono puntualmente all'identità. In altre parole, per ogni $f \in C^1(I)$ si ha che $B_n f \rightarrow f$ uniformemente per $n \rightarrow +\infty$.

Precisamente, dato ω modulo di continuità concavo⁶ per f e dato $x \in I$:

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \omega \left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right)$$

cioè

$$\|f - B_n f\|_{\infty, I} \leq \omega \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)$$

Dimostrazione. Sia $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ con modulo di continuità concavo ω ; sia $x \in I$

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &= |f(x) B_n 1 - B_n f(x)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq (*) \end{aligned}$$

⁶Si può sempre considerare senza perdere generalità un modulo di continuità concavo.

per subadditività della norma ed ω modulo di continuità:

$$(*) \leq \sum_{k=0}^n \omega \left(\left| x - \frac{k}{n} \right| \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (**)$$

per la disuguaglianza di concavità della funzione concava⁷ $t \rightarrow \omega(\sqrt{t})$:

$$(**) \leq \omega \left(\sqrt{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 x^k (1-x)^{n-k}} \right)$$

l'espressione sotto radice è il polinomio di Bernstein della funzione:

$$t \mapsto |x - t|^2 = x^2 - 2tx + t^2$$

calcolato in x (x è parametro). Cioè⁸:

$$x^2 B_n 1 - 2x B_n(x) + B_n(x^2) = x^2 - 2x^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Dunque:

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \omega \left(\sqrt{\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)} \right)$$

e prendendo⁹ il sup si ha:

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \omega \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)$$

che è infinitesima per $n \rightarrow +\infty$. ■

Osserviamo che il Teorema di Bernstein segue dal fatto che per $p \in \{1, x, x^2\}$ si può vedere che $B_n p \rightarrow p$ uniformemente. Questo fatto può essere generalizzato con il seguente teorema.

Teorema 5.4.2 - Teorema di Korovkin

Siano L_n operatori lineari positivi su $C^0(I)$ tali che per $p \in \{1, x, x^2\}$ valga:

$$L_n p \rightarrow p \quad \text{uniformemente}$$

Allora per ogni $f \in C^0(I)$ vale che:

$$L_n f \rightarrow f \quad \text{uniformemente}$$

cioè $L_n \rightarrow I$ puntualmente come mappe $C^0(I) \rightarrow C^0(I)$.

Commento 7. (dire essere lineare positivo implica essere continuo come abbiamo già osservato). Questo prova il teorema di Bernstein, considerando B_n come operatore, che effettivamente è lineare positivo

⁷ $|x - \frac{k}{n}| = \sqrt{(x - \frac{k}{n})^2}$

⁸La notazione (x) indica la funzione identica.

⁹Usiamo il fatto che $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ per $x \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Sia $f \in C^0(I)$, sia $\varepsilon > 0$ e $\forall a \in I$, sia $m_a \in \mathbb{R}$ tale che valga:

$$p_a(x) = f(a) + \varepsilon + m_a(x - a)^2 \geq f(x) \quad \forall x \in I$$

Basta per esempio prendere

$$m_a = \max_{\substack{x \in I \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a) - \varepsilon}{(x - a)^2}$$

Perchè abbiamo massimo? Perchè una funzione continua che su a assume valore $-\infty$ e dunque anche se non è continuo Weierstrass si applica lo stesso l'esistenza del massimo.

Vale allora che:

$$0 < p_a(a) - f(a) = \varepsilon < 2\varepsilon$$

quindi c'è un intorno U_a di a in I tale che

$$0 < p_a(a) - f(a) < 2\varepsilon \quad \forall x \in U_a$$

Per Heine-Borel vi sono $a_1, a_2, \dots, a_m \in I$ tali che U_{a_1}, \dots, U_{a_m} ricoprono I compatto. Poichè ogni p_{a_j} è un polinomio di grado ≤ 2 , $L_n p_{a_j} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} p_{a_j}$ $j = 1, 2, \dots, m$ e quindi

$$L_n p_{a_j} \leq p_{a_j} + \varepsilon$$

definitivamente ($\forall n \geq n_0, j = 1, 2, \dots, m$) Inoltre essendo $f \leq p_{a_j}$ anche

$$L_n f \leq L_n p_{a_j} \leq p_{a_j} + \varepsilon$$

definitivamente, quindi

$$L_n f \leq \min_{1 \leq j \leq m} p_{a_j} + \varepsilon \leq f + 2\varepsilon + \varepsilon$$

dove l'ultimo \leq segue perchè $\forall x \in I$ vi è un j_0 tale che $x \in U_{a_{j_0}}$ e $p_{a_{j_0}} \leq f(x) + 2\varepsilon$. Lo stesso argomento applicato alla funzione $-f$ dice che $L_n f \geq f - 3\varepsilon$ definitivamente, e quindi

$$|L_n f - f| \leq 3\varepsilon \text{ su } I$$

cioè $\|L_n f - f\|_{\infty, I} \leq 3\varepsilon$ ■

Teorema 5.4.3 - Teorema di Temple

Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora la successione $B_n f$ è decrescente.

Dimostrazione. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convessa; $n \in \mathbb{N}$.

Si osserva che $\forall k = 1, \dots, n$ vale che:

$$\frac{k-1}{n} < \frac{k}{n+1} < \frac{k}{n}$$

e quindi il termine centrale si può scrivere come combinazione convessa dei due estremi:¹⁰

$$\frac{k}{n+1} = \frac{k}{n+1} \cdot \frac{k-1}{n} + \frac{n+1-k}{n+1} \cdot \frac{k}{n}$$

¹⁰Se ho $a < c < b$ posso scrivere c come combinazione convessa: $c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b$

Applichiamo la disuguaglianza di convessità per f

$$f\left(\frac{k}{n+1}\right) \leq \frac{k}{n+1} \cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) + \frac{n+1-k}{n+1} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

questo è valido anche per $k=0$ oppure $k=n+1$. Moltiplico per $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$:

$$\binom{n+1}{k} \cdot f\left(\frac{k}{n+1}\right) \leq \binom{n}{k-1} \cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) + \binom{n}{k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Moltiplico per $x^k(1-x)^{n+1-k}$, sommo per $k=0, 1, \dots, n+1$:

$$B_{n+1}f(x) \leq xB_n f(x) + (1-x)B_n f(x) = B_n f(x)$$

■

5.4.2 Interpretazione Probabilistica

Possiamo dare un'interpretazione probabilistica ai polinomi di Bernstein e al teorema di Bernstein.

Polinomi di Bernstein

Siano $f \in C^0(I)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\omega_1, \dots, \omega_n$ variabili aleatorie di Bernoulli di parametro¹¹ $x \in [0, 1]$. Posso identificare il cammino randomico composto da n passi di lunghezza $\frac{1}{n}$ come:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{n}$$

Allora, il valore atteso di $f(\bar{x})$ è proprio:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{n}\right) = B_n f(x)$$

Teorema di Bernstein

Il Teorema di Bernstein può essere allora interpretato come la Legge Debole dei Grandi Numeri, ossia: per ogni $\varepsilon > 0$ vale che per $n \rightarrow +\infty$:

$$\mathbb{P}\left[\left|f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \rightarrow 0$$

¹¹cioè tale che $\mathbb{P}[\omega_i = 1] = x$

5.5 Teorema di Stone-Weierstrass

Teorema 5.5.1 - Teorema di Dini

Sia X topologico compatto, e sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione monotona di funzioni continue $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo $f_k \rightarrow f$ puntualmente. Allora la successione converge uniformemente a f .

Dimostrazione. Senza perdere generalità, consideriamo $f(x) = 0$ per ogni $x \in X$. Supponiamo $f_k(x) \geq 0$ ed $f_{k+1} \leq f_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Fissato $\varepsilon > 0$, dato $x \in X$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che:

$$f_{n_x}(x) < \varepsilon$$

e vale di più, vi è un intorno U_x di x tale che $f_{n_x}(y) < \varepsilon$ per ogni $y \in U_x$. Per compattezza, esistono x_1, \dots, x_m tali che U_{x_1}, \dots, U_{x_m} ricoprono X . Ma allora per $N = \max(n_{x_1}, \dots, n_{x_m})$ vale:

$$f_N(x) < \varepsilon$$

per ogni $x \in X$. Dato che questo vale per ogni $\varepsilon > 0$, allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente. ■

Definizione 5.5.1 - Algebra di funzioni

Un'algebra di funzioni sul campo \mathbb{K} e sull'insieme S è un sottospazio vettoriale $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{K}^S$ tale che:

$$f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow fg \in \mathcal{A}$$

In particolare l'algebra è unitaria se la funzione costante $1 \in \mathcal{A}$.

Notazione 5.1 - Max e Min

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora denoto:

$$\begin{cases} a \vee b = \max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \\ a \wedge b = \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) \end{cases}$$

Definizione 5.5.2 - Reticolo

Un reticolo di funzioni reali sull'insieme S è un sottoinsieme $R \subseteq \mathbb{R}^S$ tale che per ogni $f, g \in R$:

$$f \vee g, f \wedge g \in R$$

Proposizione 5.5.1

Ogni \mathbb{R} -algebra di funzioni limitate, chiusa uniformemente, è un reticolo.

Dimostrazione. Sia¹² $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(S, \mathbb{R})$ un'algebra di funzioni chiusa per $\|\cdot\|_{\infty, S}$.

È sufficiente provare che per ogni $f \in \mathcal{A}$ si ha $|f| \in \mathcal{A}$.

Siccome per ogni $\delta > 0$ vale che $|f| = \frac{1}{\delta} |\delta f|$, basta verificarlo per $f \in \mathcal{A}$ tali che $\|f\|_{\infty} \leq 1$.

Sia $\{p_n\} \subseteq x\mathbb{R}[x]$ una successione di polinomi convergente uniformemente su $[0, 1]$ a \sqrt{x} .

Ma allora $p_n \circ f^2 \in \mathcal{A}$ (perché \mathcal{A} è algebra, quindi chiusa per le operazioni $+$ e \cdot) e converge uniformemente a $\sqrt{f^2} = |f|$. Infatti, siccome $\{f^2(s) : s \in S\} \subseteq [0, 1]$

$$\|p_n \circ f^2 - |f|\|_{\infty, S} = \sup_{s \in S} |p_n(f^2(s)) - |f(s)|| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |p_n(t) - \sqrt{t}| = \|p_n - \sqrt{\cdot}\|_{\infty, [0, 1]}$$

dunque $p_n \circ f^2 \xrightarrow{\text{unif}} |f|$ e siccome \mathcal{A} è chiusa uniformemente si ha $|f| \in \mathcal{A}$. Segue la tesi. ■

¹²Indichiamo $\mathcal{B}(S, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ limitate (bounded).

Proposizione 5.5.2

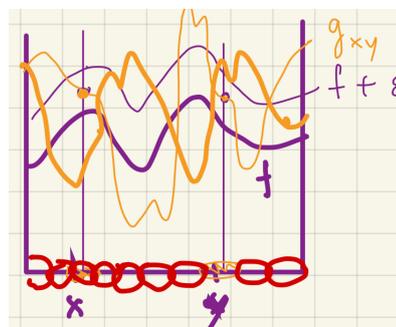
Un reticolo \mathcal{R} di funzioni continue su uno spazio compatto X è uniformemente denso in $C(X, \mathbb{R})$ se ogni "problema di interpolazione"¹³ su 2 punti" ha soluzione.

Dimostrazione. Sia X compatto, $\mathcal{R} \subseteq C(X)$ reticolo con la proprietà di risolvere il problema di interpolazione su 2 punti.

Sia $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$. Per ogni $x, y \in X$ esiste una funzione $g_{x,y} \in \mathcal{R}$ tale che:

$$f(z) < g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$$

valga per i punti $z = x$ e per $z = y$, quindi per conservazione del segno (f continua) anche in un intorno $U_{x,y}$ di $\{x, y\}$.



Dato che X compatto, per ogni x fissato vi sono $y_1, \dots, y_m \in X$ tali che $\{U_{x,y_i}\}_{1 \leq i \leq m}$ sia un ricoprimento finito di X . Consideriamo la funzione:

$$g_x = g_{x,y_1} \vee g_{x,y_2} \vee \dots \vee g_{x,y_m} \in \mathcal{R}$$

Ora, per ogni $z \in X$ c'è un indice j_z tale che $z \in U_{x,y_{j_z}}$. Per definizione di g_x allora per ogni $z \in X$:

$$f(z) < g_x(z)$$

Inoltre, considerando l'intorno aperto di x definito $V_x = \bigcap_{i=1, \dots, m} U_{x,y_i}$ osserviamo che

$$g_x(z) < f(z) + \varepsilon \text{ per ogni } z \in V_x.$$

Facendo variare il punto fissato $x \in X$ otteniamo che $\{V_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X .

Per compattezza esistono x_1, \dots, x_n tali che $X = \bigcup_{i=1, \dots, n} V_{x_i}$.

Definiamo allora la funzione:

$$g = g_{x_1} \wedge g_{x_2} \wedge \dots \wedge g_{x_n}$$

Per costruzione, $g \in \mathcal{R}$ è tale che per ogni $x \in X$:

$$f(x) \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

da cui segue che \mathcal{R} è uniformemente denso in $C(X)$. ■

Definizione 5.5.3 - Insieme Separante

Un insieme di funzioni $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^S$ è separante se:

$$\forall s, s' \in S \text{ distinti} \quad \exists f \in \mathcal{F} : f(s) \neq f(s')$$

Definizione 5.5.4 - Completamente Regolare

Sia X topologico. X si dice completamente regolare se per ogni $x \in X$ ed $F \subseteq X$ chiuso tale che $x \notin F$ esiste $f \in C(X)$ per cui:

$$f(x) = 1 \quad f|_F = 0$$

¹³Formalmente, il problema si può definire: per ogni $x, y \in X$ distinti e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ esiste $f \in \mathcal{R}$ tale che $f(x) = a$ ed $f(y) = b$

Definizione 5.5.5 - Spazio di Tychonoff

Sia X spazio topologico. X si dice di Tychonoff se è completamente regolare e Hausdorff.

Teorema 5.5.2 - Teorema di Stone - Weierstrass

Sia \mathcal{A} un'algebra chiusa e separante di funzioni continue su uno spazio compatto X .

Allora vale una delle seguenti:

1. $\mathcal{A} = C(X)$
2. esiste $x_0 \in X$ per cui $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{x_0}$ ideale massimale definito:

$$\mathcal{M}_{x_0} = \{f \in C(X) \mid f(x_0) = 0\}$$

Dimostrazione. Sia X spazio compatto e sia \mathcal{A} un'algebra chiusa di $C(X)$ e separante. Quindi un reticolo per la Proposizione 5.5.1 (quindi X è T_2). Vi sono 2 casi:

1. Non vi è alcun zero comune delle $f \in \mathcal{A}$:

$$\forall x \in X \exists f \in \mathcal{A} \mid f(x) \neq 0$$

Allora ogni problema di interpolazione su due punti ha soluzione in \mathcal{A} . Infatti dati $x \neq y$ in X , siccome \mathcal{A} è separante esiste $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

Inoltre, si può prendere f in modo che $f(x) \neq 0, f(y) \neq 0$. Posso farlo perchè per esempio se fosse $f(x) = 0$ (quindi $f(y) \neq 0$) posso usare invece di f , $f + \varepsilon g$ con $g \in \mathcal{A}$ tale che $g(x) \neq 0$ ed $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo affinché $f + \varepsilon g$ non si annulla nè in x nè in y e ha valori diversi in x e y .

L'insieme di coppie $\{(u(x), u(y)) : u \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale. In particolare gli elementi $(f(x), f(y))$ e $(f^2(x), f^2(y))$ sono linearmente indipendenti:

$$\det \begin{bmatrix} f(x) & f(y) \\ f^2(x) & f^2(y) \end{bmatrix} = f(x)f^2(y) - f^2(x)f(y) = f(x)f(y)(f(y) - f(x)) \neq 0$$

dunque lo spazio generato dai due vettori è tutto \mathbb{R}^2 : come dire che ogni problema di interpolazione su $\{x, y\}$ ha soluzione. Allora, per la Proposizione 5.5.2, \mathcal{A} è denso. Dato che è chiuso, $\mathcal{A} = C(X)$.

2. Vi è un $x_0 \in X$ zero comune a tutte le $f \in \mathcal{A}$ (che è anche l'unico, altrimenti l'algebra non sarebbe separante).

In questo caso la mappa:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} + \mathcal{A} \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda + f \end{aligned}$$

è un omeomorfismo lineare con inversa¹⁴:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} + \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{A} \\ g &\longmapsto (g(x_0), g - g(x_0)) \end{aligned}$$

Questo implica che $\mathbb{R} + \mathcal{A} \subseteq C(X)$ è completo perchè¹⁵ lo è $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$ (a cui è omeomorfo). Quindi è chiuso; è un'algebra; separa i punti (già lo faceva \mathcal{A} e $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} + \mathcal{A}$), contiene le costanti dunque cade nel caso precedente: $\mathbb{R} + \mathcal{A} = C(X)$. Segue che:

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_{x_0} := \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$$

che è un ideale massimale.

¹⁴Dato che $f(x_0) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{A}$, c'è solo una possibilità per λ , dato un elemento dell'immagine della funzione $+$.

¹⁵essendo \mathbb{R} completo e \mathcal{A} chiuso

■

Proposizione 5.5.3 - Ideali massimali di $C(X)$

Sia X compatto. Allora gli insiemi \mathcal{M}_x con $x \in X$ sono gli unici ideali massimali di $C(X)$.

Dimostrazione. Osservo che innanzitutto che gli insiemi \mathcal{M}_x con $x \in X$ sono tutti massimali, in quanto sono iperpiani di $C(X)$ ¹⁶.

Viceversa sia \mathcal{M} ideale massimale di $C(X)$, dimostro che vi è uno zero comune a tutte le funzioni di \mathcal{M} . Se così non fosse, per ogni $x \in X$ considero $g_x \in \mathcal{M}$ tale che $g_x(y) = 0$ per ogni $y \in U_x$ intorno di x . Per Heine-Borel vi sono x_1, \dots, x_n tali che U_{x_1}, \dots, U_{x_n} ricoprono X . Definisco allora:

$$g = g_{x_1}^2 + \dots + g_{x_n}^2$$

e osservo che $g(x) > 0$ per ogni $x \in X$. Allora è ben definita $\frac{1}{g} \in C(X)$ reciproco. Ne segue che $g \in \mathcal{M}$ e g invertibile, ovvero $\mathcal{M} = C(X)$, assurdo. ■

¹⁶Consideriamo $C(X)$ come spazio vettoriale delle funzioni continue $X \rightarrow \mathbb{R}$. Denotando $f = 1$ la funzione costante ad 1, si può scrivere $C(X) = \mathcal{M}_{x_0} \oplus \text{span}\{f\}$ (verificando che ogni funzione $g \in C(X)$ si può decomporre nella somma diretta, dato che $g - g(x_0) \in \mathcal{M}_{x_0}$). Ma $\dim \text{Span}\{f\} = 1$ quindi \mathcal{M}_{x_0} è un iperpiano.

5.6 Conseguenze

5.6.1 Sulla convergenza dei Polinomi di Bernstein

Definizione 5.6.1 - Norma $\|\cdot\|_{C^r}$

Consideriamo lo spazio $C^r(I)$. Allora si definisce la norma:

$$\|f\|_{C^r} = \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty + \cdots + \|f^{(r)}\|_\infty$$

Proposizione 5.6.1 - Convergenza B_n

Sia $f \in C^r(I)$, allora risulta che per $n \rightarrow +\infty$ ed in norma $\|\cdot\|_{C^r}$:

$$B_n f \longrightarrow f$$

cioè il Teorema di Bernstein implica il Teorema di Weierstrass¹⁷.

Dimostrazione. Se $f \in C^r(I)$, risulta che $B_n f \xrightarrow{\|\cdot\|_{C^r}} f$ dove per ogni $g \in C^r$ vale:

$$\|g\|_{C^r} = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \cdots + \|g^{(r)}\|_\infty$$

quindi migliora non tanto la velocità di convergenza, quanto la qualità della convergenza. Si era osservato che se $A_n \rightarrow A$ puntualmente, $A_n \in L(E, F)$, E, F spazi normati e $C_n \rightarrow C$ puntualmente $\in L(F, G)$ e C_n sono limitati ($\|C_n\| \leq K$) allora anche $C_n A_n \rightarrow CA$ puntualmente; infatti

$$\begin{aligned} \|C_n A_n v - C A v\| &\leq \|C_n A_n v - C_n A v\| + \|C_n A v - C A v\| \\ &\leq \|C_n\| \|A_n v - A v\| + \|C_n(A v) - C(A v)\| = o(1) \end{aligned}$$

Nel nostro caso: $DB_n = B_{n-1}D_n$ e $D_n : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ sono lineari, convergono puntualmente a $D : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$. Infatti $\forall f \in C^1(I)$ e $\forall x \in I$:

$$D_n f(x) = \frac{f(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}) - f(\frac{n-1}{n}x)}{\frac{1}{n}} = f'(\xi)$$

con $\frac{n-1}{n}x < \xi < \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}$ quindi $|x - \xi| \leq \frac{1}{n}$ e se ω è modulo di continuità di $f \in C^0(I)$

$$\|D_n f - f'\|_{\infty, I} \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

cioè $D_n \rightarrow D$ puntualmente su $C^1(I)$.

Quindi: $\forall f \in C^1(I)$

$$DB_n f = B_{n-1} D_n f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f'$$

cioè $\begin{cases} B_n f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \\ (B_n f)' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f' \end{cases}$ e più in generale, se $f \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}$,

$$D^k B_n f = B_{n-k} D_{n-k+1} \cdots D_n f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f^{(k)}$$

dunque se $f \in C^r(I)$ la successione $B_n f$ converge a f nella norma $\|\cdot\|_{C^r}$:

$$(B_n f)^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f^{(k)} \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, r$$

■

¹⁷I polinomi sono un insieme denso su $C^0([a, b])$, $\|\cdot\|_{\infty, [a, b]}$.

Vale anche il viceversa:

Proposizione 5.6.2

Il Teorema di Weierstrass implica il Teorema di Bernstein.

Dimostrazione. Infatti dico che $B_n f \xrightarrow{\text{unif}} f$ per ogni polinomio f , per induzione su $\deg(f)$:

- $\deg f \leq 0$: allora f è costante, ovvero $B_n f = f$.
- $\deg f > 0$: dato che $(B_n f)' = B_{n-1} D_n f$, siccome $\deg D_n f = \deg f - 1$, per ipotesi induttiva, per ogni f polinomio abbiamo che $(B_n f)' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f'$. Siccome $B_n f(0) = f(0)$, per il Teorema di Limite sotto il Segno di Derivata, $B_n f \rightarrow f$. Ovvero $B_n f \rightarrow f$ uniformemente per ogni f polinomiale.

Gli operatori B_n come applicazioni $C^0(I) \rightarrow C^0(I)$ sono una successione equicontinua (sono 1-Lipschitz in quanto $\|B_n\| = 1 \forall n$). Quindi l'insieme:

$$\{f \in C^0(I) : B_n f \text{ converge in } \|\cdot\|_\infty\}$$

è chiuso in $C^0(I)$ (applicando il punto (1) del Lemma 5.1.1), ma contenendo l'insieme dei polinomi, denso per Weierstrass, è tutto: $B_n f$ converge $\forall f \in C^0(I)$. Il limite $B_n \rightarrow L$ è uniforme sui compatti quindi è sequenzialmente continuo. Dato che L è l'identità quando è valutato sull'insieme dei polinomi (che è un insieme denso), è l'identità su tutto $C^0(I)$. ■

Definizione 5.6.2 - Polinomi di Bernstein Vettoriali

Sia $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Possiamo definire formalmente gli operatori B_n , D e D_n per curve:

$$f : [0, 1] \longrightarrow E$$

Osservazione 5.6.1

Valgono tutti i risultati già dimostrati nella Sezione 5.4 (a meno della positività di B_n).

5.6.2 Sul Teorema di Stone-Weierstrass

Sia X spazio topologico compatto ed $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ un'algebra chiusa.

Consideriamo il seguente insieme (che individua una relazione di equivalenza per i punti di X):

$$R_{\mathcal{A}} = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x') \forall f \in \mathcal{A}\}$$

e la proiezione al quoziente (compatto per continuità di π):

$$\pi : X \longrightarrow X/R_{\mathcal{A}}$$

Per costruzione dell'insieme $R_{\mathcal{A}}$, per ogni $f \in C(X, \mathbb{R})$ vi è $\tilde{f} : X/R_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

Si può allora definire l'algebra:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{g \in C(X/R_{\mathcal{A}}) \mid g \circ \pi \in \mathcal{A}\}$$

Vi è quindi l'isomorfismo algebrico:

$$\begin{aligned} \pi^* : \tilde{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ g &\longmapsto g \circ \pi \end{aligned}$$

che è anche isometria dato che¹⁸:

$$\|\pi^*(g)\|_{\infty, X} = \max_{x \in X} |g(\pi(x))| = \max_{y \in X/R_{\mathcal{A}}} |g(y)| = \|g\|_{\infty, X/R_{\mathcal{A}}}$$

Inoltre vale che:

1. $\tilde{\mathcal{A}}$ chiuso in $C(X)$, infatti \mathcal{A} chiuso in $C(X)$ completo, quindi \mathcal{A} completo, da cui segue per isomorfismo $\tilde{\mathcal{A}}$ completo, chiuso.
2. $\tilde{\mathcal{A}}$ separante per costruzione.

Si può applicare il Teorema di Stone-Weierstrass: $\tilde{\mathcal{A}}$ è l'ideale generato da $1 \in C(X/R_{\mathcal{A}})$ o un ideale massimale di $C(X/R_{\mathcal{A}})$.

Corollario 5.6.0.1 - Corollario di Stone-Weierstrass (reale)

Sia X spazio compatto, $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ algebra chiusa. Allora vi è una partizione \mathcal{F} in chiusi di X tale che valga una delle seguenti:

1. $\mathcal{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f|_C \text{ costante } \forall C \in \mathcal{F}\}$
2. esiste un chiuso $C_0 \in \mathcal{F}$ tale che:

$$\mathcal{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f|_C \text{ costante } \forall C \in \mathcal{F} \text{ e } f|_{C_0} = 0\}$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla discussione precedente, considerando \mathcal{F} come l'insieme delle fibre della funzione π (ogni fibra infatti corrisponde a $f^{-1}(x)$ chiuso, dove $x \in \mathbb{R}$):

1. se $\mathcal{A} = C(X/R_{\mathcal{A}})$ allora è soddisfatto il caso (1).
2. se $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{x_0}$ ideale massimale di $C(X/R_{\mathcal{A}})$ con $x_0 \in X$, allora è soddisfatto il caso (2) dove $C_0 = f^{-1}(x_0)$.

■

Corollario 5.6.0.2 - Corollario di Stone-Weierstrass (complesso)

Sia X spazio compatto, $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{C})$ algebra chiusa uniformemente, separante ed autoconiugata¹⁹. Allora vi è una partizione \mathcal{F} in chiusi di X tale che valgano:

1. $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$
2. esiste $x \in X$ tale che $\mathcal{A} = \mathcal{M}_x$

Dimostrazione. Dato che l'algebra è autoconiugata posso scrivere (definito l'insieme $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A} \mid f = \bar{f}\}$):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$$

dove in particolare:

1. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ è un'algebra: se f, g a valori reali allora $f + g, f \cdot g$ a valori reali.
2. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ è separante: dati $x, x' \in X$ elementi distinti, esiste $f \in \mathcal{A}$ separante tale che $f(x) \neq f(x')$. Allora $Re f(x) \neq Re f(x')$ oppure $Im f(x) \neq Im f(x')$, dove $Re f, Im f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$.

¹⁸Questo vale perchè π è surgettiva.

¹⁹Un'algebra è autoconiugata quando per ogni $f \in \mathcal{A}$ vale $\bar{f} \in \mathcal{A}$ o equivalentemente $Re(f) \in \mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ è chiuso in $C(X, \mathbb{R})$: visti come spazi vettoriali vi è un isomorfismo lineare $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Dato che \mathcal{A} è chiuso, è completo. Allora $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ completo, per cui $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \cong \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \times \{0\}$ completo (e chiuso).

Applicando il Corollario 5.6.0.1, segue che:

1. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = C(X, \mathbb{R})$ per cui $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$
2. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M} \cap C(X, \mathbb{R})$ cioè $\mathcal{A} = \mathcal{M}$

che è la tesi. ■

Teorema 5.6.1 - Teorema di Müntz-Szász

Sia $I = [0, 1]$. Data una successione non negativa (λ_k) tale che $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_k \rightarrow +\infty$ vale che:

$$\text{Span}(x^{\lambda_k} \mid k \in \mathbb{N}) \text{ è denso in } C([0, 1], \mathbb{R}) \text{ se e solo se } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$$

Dimostrazione. (Golitschek, 1980)

Sia $q > 0$. Mostriamo che $x^q \in \overline{\text{span}(x^{\lambda_k})}$. Allora nella chiusura vi sono tutti i polinomi (che sono sottoinsieme denso in $C([0, 1], \mathbb{R})$, quindi la chiusura è tutto $C([0, 1], \mathbb{R})$).

Consideriamo la successione $\{Q_n\} \subseteq C(I, \mathbb{R})$ definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} Q_0(x) = x^q \\ Q_n(x) = (\lambda_n - q)x^{\lambda_n} \int_x^1 Q_{n-1}(t)t^{-1-\lambda_n} dt \end{cases}$$

Citazione 10. *successione tirata fuori dal CAPPELLO!!*



Allora seguono 2 considerazioni:

- vale la scrittura (con $a_{k,n} \in \mathbb{R}$):

$$Q_n(x) := x^q - \sum_{k=1}^n a_{k,n} x^{\lambda_k}$$

Infatti per induzione:

- $n = 0$: banalmente verificato.

– $n > 0$: per ogni termine t^a dell'espressione di Q_{n-1} (ovvero dall'ipotesi induttiva per $a = q$ oppure $a = \lambda_k, 1 \leq k < n$) vale:

$$(\lambda_n - q)x^{\lambda_n} \int_x^1 t^a t^{-1-\lambda_n} dt = (\lambda_n - q)C x^{\lambda_n} [t^{a-\lambda_n}]_x^1 = (\lambda_n - q)C(x^{\lambda_n} - x^a)$$

con $C = \frac{1}{a-\lambda_n}$. Quindi per ipotesi induttiva, Q_n è combinazione lineare di x^q e $x^{\lambda_k}, 1 \leq k \leq r$ (con coefficienti = 1 per x^q).

• vale la stima:

$$\begin{aligned} |Q_n(x)| &\leq |\lambda_n - q| \cdot \|Q_{n-1}\|_{\infty, I} \int_x^1 t^{-1-\lambda_n} dt \\ &\leq |\lambda_n - q| \cdot \|Q_{n-1}\|_{\infty, I} \frac{1}{\lambda_n} (1 - x^{\lambda_n}) \leq \left|1 - \frac{q}{\lambda_n}\right| \cdot \|Q_{n-1}\|_{\infty, I} \end{aligned}$$

quindi $\|Q_n\|_{\infty} \leq \left|1 - \frac{q}{\lambda_n}\right| \|Q_{n-1}\|_{\infty}$ ed essendo $\|Q_0\|_{\infty} = 1$:

$$\|Q_n\|_{\infty} \leq \prod_{k=1}^n \left|1 - \frac{q}{\lambda_k}\right| = o(1) \text{ per } k \rightarrow \infty$$

Passando all'inverso:

$$\|Q_n\|_{\infty}^{-1} \geq \prod_{k=1}^n \left|1 - \frac{q}{\lambda_k}\right|^{-1}$$

e per l'ipotesi $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$, quindi:

$$\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \lambda_k > q}} \left(1 - \frac{q}{\lambda_k}\right)^{-1} \geq \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \lambda_k > q}} \left(1 + \frac{q}{\lambda_k}\right) \geq q \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \lambda_k > q}} \frac{1}{\lambda_k} \rightarrow \infty$$

Allora $x^q = \sum_{k=1}^n a_{k,n} x^{\lambda_k} + Q_n(x)$ dove però $\|Q_n\|_{\infty} \rightarrow 0$. Segue che:

$$\sum_{k=1}^n a_{k,n} x^{\lambda_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{\infty}} x^q$$

cioè $x^q \in \overline{\text{Span}\{x^{\lambda_k} : k \geq 0\}}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. ■

5.7 Esercitazioni e Applicazioni

5.7.1 Equicontinuità

Definizione 5.7.1 - Famiglia Equicontinua

Siano (M, d_M) uno spazio metrico e $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subseteq C^0(M, X)$ si dice equicontinua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x) - f(y)\|_X < \varepsilon \quad \text{se } d_M(x, y) < \delta$$

Definizione 5.7.2 - Famiglia Puntualmente Equicontinua

Siano (M, d_M) uno spazio metrico e $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subseteq C^0(M, X)$ si dice puntualmente equicontinua se per ogni $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tale che:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x) - f(y)\|_X < \varepsilon \quad \text{se } d_M(x, y) < \delta$$

Proposizione 5.7.1

Valgono le seguenti proprietà:

1. una famiglia equicontinua è puntualmente equicontinua.
2. una famiglia puntualmente equicontinua non è necessariamente equicontinua.
3. dato (M, d) compatto, allora $\mathcal{F} \subseteq C^0(M, X)$ è equicontinua se e solo se è puntualmente equicontinua.

Dimostrazione. ————— ■

5.7.2 Teorema di Peano

Teorema 5.7.1 - Teorema di Esistenza di Peano

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

ha soluzione locale (in generale può essere non unica).

Inoltre per $r > 0$, definiamo $B = \bar{B}(0, r, \mathbb{R}^n)$ ed $f \in C^0(B, \mathbb{R}^n)$ tali che:

$$a\|f\|_{B, +\infty} \leq r$$

Allora il problema di Cauchy formulato precedentemente ammette $u \in C^0([-a, a], \mathbb{R}^n)$ soluzione.

Dimostrazione. Sia $\{f_j\}_{j \geq 0}$ una successione di mappe $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziane e convergente uniformemente a f su B (per esempio, con f_j mappe polinomiali).

Si può fare in modo che $\|f_j\|_{\infty, B} \leq \|f\|_{\infty, B}$. Basta usare, invece delle funzioni f_j , le mappe $g_j = \frac{\|f\|_{\infty}}{\|f_j\|_{\infty}} f_j$ che hanno norma uniforme $\|g_j\|_{\infty, B} = \|f\|_{\infty, B}$.

Siccome $f_j \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ anche $\frac{\|f\|_{\infty}}{\|f_j\|_{\infty}} \rightarrow 1$ e $g_j \xrightarrow{\|\cdot\|} f$. Per il Teorema di Esistenza 4.3.1, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{u}_j = f_j(u_j) \\ u_j(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u_j \in C^1([-a, a], \mathbb{R}^n)$.

Le funzioni u_j sono equicontinue, anzi equilipschitziane dato che:

$$\|u'_j\|_{\infty, J} \leq \|f_j\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$$

Per il Teorema di Ascoli-Arzelà 5.1.1 l'insieme è compatto quindi vi è una sottosuccessione uniformemente convergente, sia essa $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tale che $u_j \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty, [-a, a]}} u$ ed in particolare:

$$u'_j = f(u_j) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty, [-a, a]}} f(u)$$

Per il Teorema di Limite sotto Segno di Derivata, segue che u è derivabile, con $u' = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(u_j) = f(u)$.

Infine, risolve $u(0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} u_j(0) = x_0$.

Citazione 11. È un fenomeno di prostaferesi. Perchè cosa vuol dire prostaferesi? Vuol dire aggiungere e togliere!

■

5.7.3 Pennello di Peano

Citazione 12. Del caro nonno Peano, che si fa la barba alla mattina con il suo bel pennello...

Bisogna fare alcune osservazioni che ci serviranno più tardi.

Fatterello 5.7.1 - Intersezione numerabile di compatti

Sia X uno spazio di Hausdorff. Data una successione decrescente $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di compatti connessi non vuoti, allora $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$ è compatto, connesso e non vuoto.

Dimostrazione. —————

■

Definizione 5.7.3 - Valore Aderente

Siano X e Y spazi topologici e sia $D \subseteq X$ denso. Data la funzione $S : D \rightarrow Y$, diciamo che $y \in Y$ è valore limite (o aderente) di S per $d \rightarrow x \in X$ con $d \in D$ se e solo se per ogni $U \in I(x)$ e $V \in I(y)$ vale che:

$$V \cap S(D \cap U) \neq \emptyset$$

Equivalentemente, ciò significa che, definito:

$$\lim_{\substack{d \rightarrow x \\ d \in D}} S(d) = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{S(D \cap U)}$$

vale che $y \in \lim_{\substack{d \rightarrow x \\ d \in D}} S(d)$.

Fatterello 5.7.2 - Valori aderenti in spazi A_1

Siano X e Y spazi topologici I -numerabili. Allora, nelle ipotesi della definizione precedente, y è valore aderente ad S se e solo se esiste $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D$ tale che per $k \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} d_k \rightarrow x \\ S(d_k) \rightarrow y \end{cases}$$

Fatterello 5.7.3

Siano X e Y spazi normati, sia $D \subseteq X$ un denso convesso. Sia $S : D \rightarrow Y$ continua e compatta²⁰. Allora per ogni $x \in X$:

$$\lim_{\substack{d \rightarrow x \\ d \in D}} S(d) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{S\left(D \cap B\left(x, \frac{1}{k}\right)\right)}$$

è compatto, connesso e non vuoto.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Fatto 5.7.1 ■

Pennello di Peano

Definiamo questi insiemi. L'intervallo $I = [-a, a]$, i numeri reali $r, R > 0$ tali che $aR \leq r$, la palla $B = \bar{B}_\infty(0, r; \mathbb{R}^n)$ e lo spazio di Banach $\mathbb{E} = C^0(I \times B, \mathbb{R}^n)$, definiamo:

$$\begin{cases} D = \{f \in C^0(I \times B, \mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{I \times B} \leq R, \text{ Lipschitz nella seconda variabile} \} \\ \bar{D} = \{f \in C^0(I \times B; \mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{\infty, I \times B} \leq R\} = \bar{B}(0, R; \mathbb{E}) \end{cases}$$

Dal Teorema di Cauchy-Lipchitz è definita una mappa $S : D \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ponendo $S(f) = u$ dove:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u(t)) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che D è convesso per definizione ed S è una mappa compatta: infatti $S(D)$ è un insieme di curve equilipschitz (di costante R), tutte nulle in 0. Dunque $S(D)$ è relativamente compatto per il Teorema di Ascoli-Arzelà 5.1.1.

$S(D)$ continua: se $f_k \rightarrow f$ in D , allora $S(f_k)$ a meno di sottosuccessioni converge (per compattezza di $S(D)$) a una soluzione di:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

che essendo unica, è proprio $S(f)$. Allora $S(f_k) \rightarrow S(f)$ per l'argomento sequenziale di Urysohn.

Dunque per ogni $f \in X$ vale che l'insieme $\lim_{\substack{g \rightarrow f \\ g \in D}} S(g)$ è compatto, connesso e non vuoto per

il Fatto 5.7.3.

Vediamo che questo insieme è proprio il Pennello di Peano, dove fissata $f \in \mathbb{E}$:

$$P = \left\{ u \in C^0(I, \mathbb{R}^n) \mid u \text{ risolve il sistema } \begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = 0 \end{cases} \right\}$$

Il fatto che $\lim_{\substack{g \rightarrow f \\ g \in D}} S(g) \subseteq P$, ovvio e già vista: dal Teorema 3.3.4, infatti dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{u}_k = g_k(t, u_k) \\ u_k(0) = 0 \end{cases}$$

²⁰Per mappa compatta si intende una mappa che manda insiemi limitati in insiemi relativamente compatti (la cui chiusura è un compatto).

si ha che:

$$u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u \implies g_k(t, u_k) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f(t, u)$$

e dato che $\dot{u}_k \rightarrow \dot{u}$, ne segue che u verifica l'equazione differenziale $\dot{u} = f(t, u)$.

Per finire, dobbiamo provare che $\lim_{\substack{g \rightarrow f \\ g \in D}} S(g) \supseteq D$, cioè ogni soluzione $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ del

problema di Cauchy 5.4 si può ottenere come limite uniforme di soluzioni a problemi approssimati. In altre parole, $\exists \{g_k\}_k \subseteq D$ tale che le soluzioni $u_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di

$$\begin{cases} \dot{u}_k = g_k(t, u_k) \\ u_k(0) = 0 \end{cases}$$

convergono uniformemente alla soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dunque: sia u soluzione del problema 5.4, sia $(f_k)_k \subseteq D$ successione di mappe continue e convergenti uniformemente ad f (per Teorema di Weierstrass possiamo considerare f_k polinomiali) nello spazio $C^1(I \times B, \mathbb{R}^n)$. Allora la successione di soluzioni $\{u_k\}$ è tale che: $u_k \rightarrow u$ e $\dot{u}_k \rightarrow \dot{u}$. Definisco:

$$g_k(t, x) = f_k(t, x) + \dot{u}_k(t) - f_k(t, u_k(t))$$

Allora per definizione di g_k :

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = g_k(t, u_k(t)) \\ u_k(0) = 0 \end{cases}$$

cioè $u_k = S(g_k)$ e $g_k(t, x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(t, x) + \dot{u}(t) - f(t, u(t)) = f(t, x)$.

Le mappe $\{g_k\}$ sono Lipschitz quindi a meno di normalizzazione (per avere $\|g_k\|_\infty \leq R$) vale che $\{g_k\} \subseteq D$. Abbiamo quindi l'inclusione cercata, ovvero:

$$P = \lim_{\substack{g \rightarrow f \\ g \in D}} S(g)$$

Quindi il Pennello di Peano è un insieme compatto, connesso e non vuoto.

Capitolo 6

1-Forme Differenziali

6.1 1-Forma differenziale

Definizione 6.1.1 - 1-Forma differenziale

Siano E spazio di Banach e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $E^* = L(E, \mathbb{R})$. Una 1-forma differenziale è una mappa continua $\omega : \Omega \rightarrow E^*$.

Esempio 6.1.1

Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Allora il suo differenziale $df : \Omega \rightarrow E^*$ è una 1-forma differenziale.

Definizione 6.1.2 - 1-Forma differenziale esatta

Una 1-forma differenziale $\omega : \Omega \rightarrow E^*$ è esatta se esiste $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $\omega = df$. In tal caso, f si dice primitiva di ω .

Definizione 6.1.3 - 1-Forma differenziale chiusa

Sia $\omega \in C^1(\Omega, E^*)$ e sia $x \in \Omega$. Notando che $D\omega(x) \in L(E, E^*) \cong L^2(E \times E)$, se $D\omega(x)$ è simmetrico allora ω si dice 1-forma differenziale chiusa.

Osservazione 6.1.1 - Esatta \Rightarrow Chiusa

Per il Teorema 3.3.2, segue dalla definizione che ω esatta $\Rightarrow \omega$ chiusa.

6.2 Integrale di Linea

Definizione 6.2.1 - Integrale di Linea per C^1

Siano una 1-forma differenziale $\omega : \Omega \rightarrow E^*$ dove $\Omega \subseteq E$ aperto e una curva $\gamma \in C^1([a, b], \Omega)$.

L'integrale di linea di ω lungo γ è definito:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

Proposizione 6.2.1 - Additività rispetto al dominio

Nelle ipotesi della definizione 6.2.1, sia $c \in [a, b]$. Allora:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a, c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c, b]}} \omega$$

Definizione 6.2.2 - Integrale di Linea per C^1 a tratti

Siano una 1-forma differenziale $\omega : \Omega \rightarrow E^*$ dove $\Omega \subseteq E$ aperto e una curva¹ $\gamma \in C^{1, Tr}([a, b], \Omega)$ tale che la derivata sia discontinua in $\{x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}\}$. Siano $x_0 = a$ ed $x_n = b$.

L'integrale di linea di ω lungo γ è definito:

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

Proposizione 6.2.2 - Invarianza per riparametrizzazione

Sia $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione C^1 tale che $\sigma(c) = a$ e $\sigma(d) = b$. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una funzione C^1 . Allora:

$$\int_{\gamma \circ \sigma} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Dimostrazione. Basta infatti scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \sigma} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(\sigma(t))) [\dot{\gamma}(\sigma(t)) \sigma'(t)] dt = \int_a^b \omega(\gamma(\sigma(t))) [\dot{\gamma}(\sigma(t))] \sigma'(t) dt \\ &= \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} \omega(\gamma(s)) [\dot{\gamma}(s)] ds = \int_{\gamma} \omega \end{aligned}$$

■

Proposizione 6.2.3 - Condizione necessaria per ω esatta

Se ω è esatta, allora l'integrale di linea dipende solo dagli estremi della curva su cui si integra.

Dimostrazione. Sia $\omega = df$. Allora:

$$\omega(\gamma(t)) [\dot{\gamma}(t)] = df(\gamma(t)) [\dot{\gamma}(t)] = (f(\gamma(t)))'$$

da cui per Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b (f(\gamma(t)))' dt = \int_{\gamma} \omega$$

¹Per funzione in $C^{1, Tr}$ si intende una funzione derivabile tale che la derivata sia discontinua in un numero finito di punti.

Analogamente accade per curve C^1 a tratti, in quanto si ottiene lo stesso risultato con una somma telescopica. ■

Proposizione 6.2.4 - Condizione necessaria/sufficiente per ω esatta

Sia $\omega \in C^1(\Omega, E^*)$. Se per ogni $\gamma \in C^{1,Tr}([a, b], \Omega)$ vale che $\int_\gamma \omega$ dipende soltanto da $\gamma(b)$ e $\gamma(a)$, allora ω è esatta.

Dimostrazione. Sia $\omega \in C^0(\Omega, \mathbb{E}^*)$ tale che $\int_\gamma \omega$ dipende solo da $\gamma(a), \gamma(b), \forall \gamma \in C^{1tr}([a, b], \Omega)$. Senza perdere generalità, supponiamo Ω connesso (\Rightarrow per archi), perchè in caso basta restringersi alle sue componenti connesse e trovare lì delle primitive. Ha senso definire per $x_0, x \in \Omega$:

$$\int_{x_0}^x \omega = \int_\gamma \omega$$

con qualunque $\gamma \in C^{1,Tr}([a, b], \Omega)$ con $\gamma(a) = x_0, \gamma(b) = x$. Fisso $x_0 \in \Omega$ e definisco $f(x) := \int_{x_0}^x \omega$.

Sia $x \in \Omega$ con $B(x, r) \subseteq \Omega, r > 0$. Sia $h \in \mathbb{E}, \|h\| < r$. Per la proprietà di additività per giustapposizione di cammini:

$$f(x+h) = \int_{x_0}^{x+h} \omega = \int_{x_0}^x \omega + \int_x^{x+h} \omega = f(x) + \int_x^{x+h} \omega$$

Se scriviamo la definizione di differenziale per f :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - \omega(x)h &= \int_0^1 \omega(x+th)[h]dt - \int_0^1 \omega(x)[h]dt \\ &= \int_0^1 (\omega(x+th) - \omega(x))[h]dt \end{aligned}$$

da cui segue che in norma, per $h \rightarrow 0$:

$$\|f(x+h) - f(x) - \omega(x)h\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\omega(x+th) - \omega(x)\| \cdot \|h\| = o(\|h\|)$$

ovvero $df = \omega$. ■

Definizione 6.2.3 - 1-forma differenziale conservativa

Sia ω 1-forma differenziale. Si dice conservativa se per γ cammino chiuso qualsiasi:

$$\int_\gamma \omega = 0$$

6.3 Caso di 1-forme su \mathbb{R}^n

In questa sezione denotiamo $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$.

Useremo il fatto che $E \cong E^*$ tramite prodotto scalare. Considerando la base canonica di \mathbb{E} data da: $(e_k)_{k=1}^n$ si può definire una base per E^* data da $(dx_k)_{k=1}^n$ dove:

$$\langle dx_k, e_h \rangle = \delta_{k,h} = (e_k \cdot e_h)$$

cioè sono i funzionali che ritornano la k -esima coordinata del vettore valutato.

Scriviamo ora una 1-forma $\omega \in C^0(\Omega, \mathbb{E}^*)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{E}$, nella base duale:

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) dx_k$$

dove $a_k \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$.

Per l'isomorfismo $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^*$ alla 1-forma $\omega(x)$ corrisponde una mappa $F \in C^0(\Omega, \mathbb{E})$:

$$F(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) e_k$$

ed in particolare si può riscrivere la valutazione di ω in termini di prodotto scalare, come:

$$\omega(x)[h] = (F(x) \cdot h)$$

Proposizione 6.3.1 - Condizione di chiusura

Sia $\omega \in C^0(\Omega, \mathbb{E}^*)$ una 1-forma. ω è chiusa se e solo se per ogni $i, j = 1, \dots, n$:

$$\partial_i a_j = \partial_j a_i$$

Dimostrazione (Majer). Dalla Definizione 6.1.3, segue che ω è chiusa se e solo se:

$$D\omega(x) = [\partial_1 \omega(x) \mid \partial_2 \omega(x) \mid \dots \mid \partial_n \omega(x)]$$

è simmetrico.

Per la corrispondenza vista sopra, possiamo scrivere le derivate parziali:

$$\partial_i \omega(x) = \begin{pmatrix} \partial_i a_1(x) \\ \partial_i a_2(x) \\ \vdots \\ \partial_i a_n(x) \end{pmatrix}$$

e allora sostituendo:

$$D\omega(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 a_1(x) & \partial_2 a_1(x) & \dots & \partial_n a_1(x) \\ \partial_1 a_2(x) & \partial_2 a_2(x) & \dots & \partial_n a_2(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 a_n(x) & \partial_2 a_n(x) & \dots & \partial_n a_n(x) \end{bmatrix}$$

che è simmetrica se e solo se per ogni $i, j = 1, \dots, n$:

$$\partial_i a_j = \partial_j a_i$$

■

Dimostrazione (Visciglia). ————— ■

Definizione 6.3.1 - Omotopia

Sia X spazio topologico. Diciamo che due cammini $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a, b], X)$ sono omotopi a estremi fissi (quindi $A = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $B = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$) se esiste una funzione $\gamma : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow X$ continua tale che:

- $\gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ e $\gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [a, b]$.
- $A = \gamma(s, a)$ e $B = \gamma(s, b)$ per ogni $s \in [0, 1]$.

Definiamo lo spazio dei cammini continui da A in B come $C_{A,B}([a, b], X)$.

Lemma 6.3.1

Sia $g \in C^0([0, 1] \times [a, b], \mathbb{R})$ con derivata nella prima variabile:

$$\partial_1 g \in C^0([0, 1] \times [a, b], \mathbb{R})$$

Allora la funzione definita dall'integrale per ogni $s \in [0, 1]$:

$$J(s) = \int_a^b g(s, t) dt$$

è derivabile, con derivata:

$$J'(s) = \int_a^b \partial_1 g(s, t) dt$$

Dimostrazione. Usando il solito sviluppo, per $s, r \in [0, 1]$:

$$J(r) - J(s) - (r - s) \int_a^b \partial_1 g(s, t) dt = \int_a^b [g(r, t) - g(s, t) - (r - s) \partial_1 g(s, t)] dt$$

L'integrando si stima con il Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned} |g(r, t) - g(s, t) - (r - s) \partial_1 g(s, t)| &= |(g(r, t) - r \partial_1 g(s, t)) - (g(s, t) - s \partial_1 g(s, t))| \\ &= |[g(r, t) - \sigma \partial_1 g(s, t)]_{\sigma=s}^{\sigma=r}| \leq |r - s| \sup_{\substack{a \leq t \leq b \\ \sigma \in [s, r]}} |\partial_1 g(\sigma, t) - \partial_1 g(s, t)| \\ &= o(|r - s|) \quad \text{per } r \rightarrow s \end{aligned}$$

perchè, per esempio, se ω è modulo di continuità di $\partial_1 g$, la quantità si maggiora con:

$$|r - s| - \omega(|r - s|)$$

per cui si ottiene la condizione di derivabilità per J . ■

I risultati del Lemma si possono generalizzare.

Proposizione 6.3.2

Sia $g \in C^0(U \times [a, b], \mathbb{E})$ con differenziale nella prima variabile $D_1 g \in C^0(U \times [a, b], \mathbb{E})$. Allora la funzione definita dall'integrale per ogni $s \in [0, 1]$:

$$J(s) = \int_a^b g(s, t) dt$$

è differenziabile:

$$DJ(s) = \int_a^b D_1 g(s, t) dt$$

Dimostrazione. Dimostrazione per esercizio. ■

Proposizione 6.3.3 - Invarianza integrale per Cammini omotopi

Sia $\omega \in C^1(\Omega, \mathbb{E}^*)$ chiusa e $\gamma \in C^2([0, 1] \times [a, b], \Omega)$ ad estremi fissi, con $\gamma(s, a) = A$ e $\gamma(s, b) = B$ per ogni $s \in [0, 1]$.

Allora l'integrale di ω lungo il cammino $\gamma(s, \cdot)$ è costante al variare di $s \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Deriviamo rispetto ad s l'integrale di linea lungo $\gamma(s, \cdot)$:

$$\int_{\gamma(s, \cdot)} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(s, t)) [\partial_t \gamma] dt$$

Riconosco di essere in situazione dove posso applicare la Proposizione 6.3.2:

$$\partial_s \left(\int_{\gamma(s, \cdot)} \omega \right) = \int_a^b \partial_s (\omega(\gamma) [\partial_t \gamma]) dt = \int_a^b (D\omega(\gamma(s, t)) [\partial_s \gamma, \partial_t \gamma] + \omega(\gamma(s, t)) \partial_s \partial_t \gamma) dt$$

Siccome $\gamma \in C^2$ possiamo scambiare l'ordine di derivazione nel secondo addendo per il Teorema di Schwarz e nel primo possiamo scambiare ∂_s e ∂_t per l'ipotesi di ω chiusa. Quindi:

$$\begin{aligned} \partial_s \left(\int_{\gamma(s, \cdot)} \omega \right) &= \int_a^b (D\omega(\gamma) [\partial_t \gamma, \partial_s \gamma] + \omega(\gamma) \partial_t \partial_s \gamma) dt \\ &= \int_a^b \partial_t (\omega(\gamma) [\partial_s \gamma]) dt \stackrel{TFCI}{=} [\omega(\gamma(s, t)) [\partial_s \gamma(s, t)]]_{t=a}^{t=b} \end{aligned}$$

Ma poichè $\gamma(s, a) = A$ e $\gamma(s, b) = B \forall s$, vale che $\partial_s \gamma(s, a) = \partial_s \gamma(s, b) = 0$. Quindi:

$$\partial_s \left(\int_{\gamma(s, \cdot)} \omega \right) = 0$$

Si conclude che $\int_{\gamma(s, \cdot)} \omega$ è costante in s . ■

Corollario 6.3.0.1

Di conseguenza, per $\omega \in C^1(\Omega, \mathbb{E}^*)$ chiusa possiamo definire $\int_\gamma \omega$ anche per qualunque $\gamma \in C^0([a, b], \Omega)$ ponendo:

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_0} \omega$$

con γ_0 cammino $C^2([a, b], \Omega)$ qualsiasi, con $\gamma_0 \in B(\gamma, \varepsilon) \subseteq C_{AB}^0([a, b], \Omega)$.

Dimostrazione. Infatti: $C_{AB}^0([a, b], \Omega)$ è aperto in $C_{AB}^0([a, b], \mathbb{E})$, quindi vi è $\varepsilon > 0$ tale che $B(\gamma, \varepsilon) \subseteq C_{AB}^0([a, b], \Omega)$.

Per densità² vi è almeno un $\gamma_0 \in B(\gamma, \varepsilon)$ di classe C^2 , quindi è ben definito $\int_{\gamma_0} \omega$.

Se γ_1 è un altro cammino C^2 con $\gamma_1(a) = A$, $\gamma_1(b) = B$ e tale che $\|\gamma - \gamma_1\|_\infty < \varepsilon$, allora possiamo confrontare $\int_{\gamma_0} \omega$ e $\int_{\gamma_1} \omega$ via l'omotopia di classe C^2 :

$$H : (s, t) \mapsto s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$$

Poichè ciò definisce una funzione localmente costante $C_{AB}([a, b], \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ essa è costante sulle componenti connesse di $C_{AB}([a, b], \Omega)$ cioè per cammini omotopi a estremi fissati A, B (nello spazio C^0). Abbiamo quindi la tesi. ■

²Facciamo riferimento all'Osservazione 6.3.1.

Osservazione 6.3.1

La densità di $C^2([0, 1], \mathbb{E})$ in $(C^0([0, 1], \mathbb{E}), \|\cdot\|_\infty)$ si prova usando i polinomi di Bernstein a valori vettoriali.

Un altro modo è approssimare con curve a immagine³ di dimensione finita e usando allora il Teorema di Weierstrass.

³Ve lo lasciamo (palesamente) come esercizio.

Capitolo 7

Teoria della Misura

7.1 Definizioni sulla Misura

Definizione 7.1.1 - σ -additività e σ -subadditività

Sia $\alpha : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora α si dice:

- σ -additiva se per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per ogni partizione numerabile $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ di E vale:

$$\alpha(E) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \alpha(F)$$

- σ -subadditiva se per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per ogni ricoprimento numerabile $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ di E vale:

$$\alpha(E) \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} \alpha(F)$$

Esempio 7.1.1

Sia X un insieme, $\{c_x\}_{x \in X} \subseteq [0, +\infty]$. Allora per ogni $S \subseteq X$:

$$\alpha(S) = \sum_{x \in S} c_x \in [0, +\infty]$$

definisce una funzione σ -additiva su $\mathcal{P}(X)$ (ciò segue dall'associatività generalizzata).

Esempio 7.1.2

Sia $X = [a, b]$ intervallo in $\overline{\mathbb{R}}$ e si consideri l'insieme:

$$\mathcal{I} = \{[c, d] \mid a \leq c \leq d \leq b\}$$

Sia $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione crescente e continua a sinistra. Definiamo:

$$\alpha : \begin{array}{ll} \mathcal{I} & \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ [c, d] & \longmapsto f(d) - f(c) \end{array}$$

definisce una funzione σ -additiva su \mathcal{I} .

Dimostrazione. Proviamo che per intervalli $\{\mathcal{J}_k\}_{0 \leq k \leq m} \subseteq \mathcal{F}$ vale l'additività.

1. Se $\{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_m\}$ sono una partizione di \mathcal{J}_0 , allora $\alpha(\mathcal{J}_0) = \sum_{k=1}^m \alpha(\mathcal{J}_k)$.

Infatti l'uguaglianza si riduce a una somma telescopica. Ordinati gli estremi degli

intervalli come $a_0 < \dots < a_m$, con $J_k = [a_{k-1}, a_k[$:

$$\begin{aligned} \alpha \left(\bigcup_{k=1, \dots, m} J_k \right) &= \alpha(\mathcal{J}_0) = f(a_m) - f(a_0) \\ &= \sum_{k=1}^m (f(a_k) - f(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^m \alpha(\mathcal{J}_k) \end{aligned}$$

2. Se $\{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_m\}$ sono disgiunti tali che $\bigcup_{k=1, \dots, m} \mathcal{J}_k \subseteq \mathcal{J}_0$ allora:

$$\sum_{k=1}^m \alpha(\mathcal{J}_k) \leq \alpha(\mathcal{J}_0)$$

Infatti ogni \mathcal{J}_k è uguale a qualche $[a_{j-1}, a_j[$ e quindi la conclusione viene da (1).

3. Se $\{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_m\}$ ricoprono¹ \mathcal{J}_0 allora $\sum_{k=1}^m \alpha(\mathcal{J}_k) \geq \alpha(\mathcal{J}_0)$.

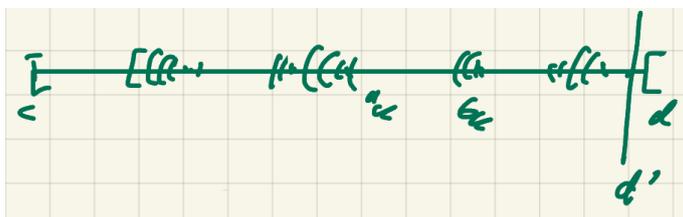
Infatti se $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ sono gli estremi dei \mathcal{J}_k , ordinati in modo crescente, la partizione $\{[a_{j-1}, a_j[\}_{1 \leq j \leq n}$ dell'intervallo $[a_0, a_n[$ raffina la famiglia $\{\mathcal{J}_k\}_{1 \leq k \leq m}$ cioè ogni $[a_{j-1}, a_j[$ è contenuto in qualche \mathcal{J}_k . Anzi:

$$\mathcal{J}_k = \bigcup_{[a_{j-1}, a_j[\subseteq \mathcal{J}_k} [a_{j-1}, a_j[$$

allora segue l'additività:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq m} \alpha(\mathcal{J}_k) &= \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{[a_{j-1}, a_j[\subseteq \mathcal{J}_k} \alpha([a_{j-1}, a_j[) \\ &\geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \text{ t.c. } \exists k \\ [a_{j-1}, a_j[\subseteq \mathcal{J}_k}} \alpha([a_{j-1}, a_j[) = \alpha(\mathcal{J}_0) \end{aligned}$$

Proviamo ora la σ -additività su \mathcal{J}_0 intervallo. Sia $J = [c, d[$ ripartito in una famiglia numerabile di $\{J_k = [a_k, b_k[\}_{k \in \mathbb{N}}$.



Sia $\varepsilon > 0$. Per continuità a sinistra di f , esiste $d' < d$ tale che $f(d') > f(d) - \varepsilon$. Similmente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $a'_k < a_k$ tale che $f(a'_k) > f(a_k) - 2^{-k}\varepsilon$. Dunque vale che:

$$\alpha([c, d']) \geq \alpha([c, d]) - \varepsilon$$

e per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\alpha([a'_k, b_k]) \leq \alpha([a_k, b_k]) + 2^{-k}\varepsilon$$

¹Ciò equivale a dire: $\mathcal{J}_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^m \mathcal{J}_k$.

Poichè $\{]a'_k, b_k[\}_{k \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di $[c, d']$ compatto, vi è un $m \in \mathbb{N}$ tale che $\bigcup_{k=1}^m]a'_k, b_k[\supseteq [c, d']$ quindi anche $\bigcup_{k=1}^m [a'_k, b_k[\supseteq [c, d'[$. Allora:

$$\begin{aligned} \alpha([c, d]) &\leq \alpha([c, d']) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \alpha([a'_k, b_k]) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \alpha([a_k, b_k]) + \sum_{k=1}^m 2^{-k} \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha([a_k, b_k]) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario:

$$\alpha([c, d]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha([a_k, b_k])$$

D'altra parte, per il punto (2), si ha che per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale $\alpha([c, d]) \geq \sum_{k=1}^m \alpha([a_k, b_k])$ e quindi vale la per $m \rightarrow +\infty$:

$$\alpha([c, d]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha([a_k, b_k])$$

dato che valgono le due disuguaglianze, otteniamo la tesi. ■

Dimostrazione. σ -additività con induzione transfinita

La prima parte della dimostrazione si fa in diversi modi.

- Modo 1: Se $J = [c, d[\in \mathcal{J}$ è ripartito in una famiglia numerabile d'intervalli $\{]a, a'[\}_{a \in A}$ dove A è l'insieme degli estremi sinistri ed è bene ordinato dall'ordinamento indotto da \mathbb{R} .
Infatti: se $B \leq A, \emptyset \neq B$ si ha $c < \beta := \inf B < d$. Quindi $\beta \in [a, a'[$ per qualche $a \in A$. Siccome β è $\inf B$, vi sono elementi di B in $[\beta, a'[$ e quindi $\beta = a$ perchè $] \beta, a'[\subseteq]a, a'[$ e l'unico elemento di A in $]a, a'[$ è a .
- Modo 2: copiare da Punis: VEDERE
- Conclusione della dimostrazione: allora la tesi:

$$\alpha([c, d]) = \sum_{x \in \Lambda} \alpha([x, x'])$$

segue per induzione transfinita sull'insieme ben ordinato $A' = A \cup \{d\}$

$$\alpha([c, d]) = \sum_{\substack{x \in A \\ x < a}} \alpha([x, x'])$$

vale $\forall a \in A'$. Supponiamo che valga per ogni $a \in A$ minore di $b \in A'$. Infatti:

- se $b = c$ si riduce a $\alpha(\emptyset) = \sum_{\emptyset} = 0$
- se $b = a'$ per qualche a , vale l'ipotesi induttiva per $a < b$ e quindi

$$\alpha([c, b]) = \alpha([c, a]) + \alpha([a, a']) = \sum_{\substack{x \in A \\ x < a}} \alpha([x, x']) + \alpha([a, a']) = \sum_{\substack{x \in A \\ x < b}} \alpha([x, x'])$$

- se $b > c, b \neq x' \forall x \in A$ allora b è limite di una successione crescente $\{a_n\}$ di elementi di A . Allora

$$\begin{aligned} \alpha([c, b]) &= f(b) - f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) - f(c) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{x \in A \\ x < a_n}} \alpha([x, x']) = \sum_{\substack{x \in \\ x < b}} \alpha([x, x']) \end{aligned}$$

Segue la tesi. ■

Definizione 7.1.2 - σ -algebra

Una σ -algebra di un insieme X è un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che:

- per ogni $A \in \mathcal{A}$ vale che $A^C \in \mathcal{A}$
- per ogni $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ numerabile vale che $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{A}$

Definizione 7.1.3 - σ -algebra generata

Dato un insieme X e una famiglia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esiste la minima σ -algebra contenente \mathcal{E} . Essa è la σ -algebra generata da \mathcal{E} , si indica: $\sigma\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

Definizione 7.1.4 - σ -algebra boreliana

Dato uno spazio topologico X , la σ -algebra dei boreliani è quella generata dagli aperti della topologia di X .

Definizione 7.1.5 - Misura

Una misura m su X spazio topologico è una funzione σ -additiva a valori in $[0, +\infty]$, definita su una σ -algebra \mathcal{A} di X :

$$m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

La terna (X, \mathcal{A}, m) si dice **spazio di misura**.

Definizione 7.1.6 - Misura Esterna

Una misura esterna m su X spazio topologico è una funzione σ -subadditiva a valori in $[0, +\infty]$, definita su $\mathcal{P}(X)$:

$$m : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

Definizione 7.1.7 - Spazio di misura completo

Uno spazio di misura (X, \mathcal{A}, m) si dice completo se per ogni $A \in \mathcal{A}$ di misura nulla² e per ogni $B \subseteq A$ segue che $B \in \mathcal{A}$.

Definizione 7.1.8 - μ -misurabilità secondo Carathéodory

Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna su X topologico. Allora $A \in \mathcal{P}(X)$ è μ -misurabile secondo Carathéodory se per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^C)$$

Definizione 7.1.9 - Atomo

Sia (X, \mathcal{A}, m) uno spazio di misura. Un atomo è un insieme misurabile A tale che:

- $m(A) > 0$

²Un insieme si dice di misura nulla se $m(A) = 0$.

- per ogni $B \subseteq A$ vale che $m(B) = \begin{cases} 0 \\ m(A) \end{cases}$

Seguono le definizioni per uno spazio di misura:

- non-atomico: non ha atomi.
- puramente atomico: \mathcal{A} è la σ -algebra generata dai suoi atomi.

7.1.1 Fatti base sulle Misure

Sia (X, \mathcal{A}, m) uno spazio di misura. Valgono i seguenti fatti generali.

Proposizione 7.1.1 - Monotonia

Siano $A, B \in \mathcal{A}$ tali che $A \subseteq B$. Allora $m(A) \leq m(B)$.

Dimostrazione. Segue direttamente dalla σ -additività:

$$m(B) = m(A) + m(B \cap A^C) \geq m(A)$$

■

Proposizione 7.1.2 - σ -subadditività

Sia $A \in \mathcal{A}$ ed $(A_k) \subseteq \mathcal{A}$ un ricoprimento numerabile di A . Allora esiste un raffinamento (A'_k) di (A_k) che è partizione di A . In particolare:

$$m(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} m(A'_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} m(A_k)$$

Dimostrazione. Si pone $A'_k = A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j$ in modo che gli A'_k siano disgiunti e ricoprano A . Segue allora la tesi. ■

Proposizione 7.1.3 - Regolarità esterna

Sia $(A_k) \subseteq \mathcal{A}$ successione tale che $A_k \subseteq A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora:

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

Dimostrazione. Consideriamo per notazione $A_{-1} = \emptyset$. Allora si osserva che:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \setminus A_{k-1})$$

da cui segue che:

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k \setminus A_{k-1}) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^m m(A_k \setminus A_{k-1}) \\ &= \sup_{m \in \mathbb{N}} m\left(\bigsqcup_{k=0}^m A_k \setminus A_{k-1}\right) = \sup_{m \in \mathbb{N}} m(A_m) \end{aligned}$$

■

Proposizione 7.1.4 - Regolarità interna al finito

Sia $(A_k) \subseteq \mathcal{A}$ successione tale che $A_k \supseteq A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia inoltre $m(A_0) < +\infty$. Allora:

$$m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \inf_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$$

Dimostrazione. Segue subito dalla regolarità esterna enunciata prima, infatti:

$$m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) + m\left(A_0 \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = m(A_0)$$

essendo $< +\infty$ e per regolarità esterna

$$\begin{aligned} m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) &= m(A_0) - m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_0 \setminus A_k\right) = m(A_0) - \sup_{n \in \mathbb{N}} m\left(\bigcup_{0 \leq k \leq n} A_0 \setminus A_k\right) \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left[m(A_0) - m\left(\bigcup_{0 \leq k \leq n} A_0 \setminus A_k\right) \right] = \inf_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) \end{aligned}$$

■

Teorema 7.1.1 - Teorema di Severini-Egoroff

Sia (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura tale che $\mu(X) < +\infty$. Se $f_n \rightarrow f$ quasi-ovunque, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus A_\varepsilon$.

Dimostrazione. Omessa.

■

7.2 Costruzione di Misure

7.2.1 Funzioni d'insieme \rightarrow Misure Esterne

Proposizione 7.2.1 - Esistenza della massima misura esterna

Sia $\alpha : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione di insieme su X .

Allora esiste la massima misura esterna tra quante sono $\leq \alpha$ su \mathcal{E} . Essa si chiama "misura esterna prodotta da α " e denotata α^* .

In particolare, vale che:

$$\alpha^* \text{ estende } \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \text{ è } \sigma\text{-subadditiva}$$

Dimostrazione. Se $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ è una misura esterna e $\mu|_{\mathcal{E}} \leq \alpha$, allora per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$ e per ogni $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ ricoprimento³ di S :

$$\mu(S) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(E_k)$$

dove la prima disuguaglianza è per subaddittività di μ e la seconda perchè $\mu|_{\mathcal{E}} \leq \alpha$. Quindi:

$$\mu(S) \leq \alpha^*(S) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(E_k) \mid (E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} \text{ ricoprimento di } S \right\} \cup \{+\infty\}$$

e il membro destro definisce una funzione di insieme α^* che è σ -subadditiva.

Verifica immediata con il solito "giochetto" di $\varepsilon 2^{-k}$. Supponiamo $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $S \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$.

- se un S_k ha $\alpha^*(S_k) = +\infty$, non c'è nulla da provare: $\alpha^*(S) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^*(S_k)$.
- altrimenti sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\{E_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ \mathcal{E} -ricoprimento di S_k con:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha(E_{k,j}) \leq \alpha^*(S_k) + 2^{-k} \varepsilon$$

e allora $\{E_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{N}^2}$ è un \mathcal{E} -ricoprimento numerabile di S tale che:

$$\begin{aligned} \alpha^*(S) &\leq \sum_{k,j} \alpha(E_{k,j}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha(E_{k,j}) \right) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha^*(S_k) + \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \varepsilon \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha^*(S_k) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

allora essendo ε arbitrario:

$$\alpha^*(S) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha^*(S_k)$$

Infine: se $\alpha^*|_{\mathcal{E}} = \alpha$, allora in particolare α è σ -subadditiva visto che lo è α^* .

Viceversa: se α è σ -subadditiva (in quanto misura esterna), per ogni $A \in \mathcal{E}$ e per ogni $\{E_k\}$ un \mathcal{E} -ricoprimento numerabile di A vale: $\alpha(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(E_k)$, quindi $\alpha(A) \leq \alpha^*(A)$,

e d'altra parte: $\alpha^*(A) \leq \alpha(A)$ (perchè $\alpha^*|_{\mathcal{E}} \leq \alpha$). Ma allora $\alpha = \alpha^*|_{\mathcal{E}}$ ovvero α^* estende α . ■

³Questo a patto che esistano. Infatti se $S \in \mathcal{P}(X)$ qualsiasi, non è detto che esista un ricoprimento di S dato da elementi di \mathcal{E} . Nel caso in cui non esistesse poniamo $\alpha^*(S) = +\infty$

7.2.2 Misure Esterne \rightarrow Misure

Proposizione 7.2.2 - Costruzione m^* da m misura

Sia (X, \mathcal{A}, m) spazio di misura ed $m^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ la misura esterna associata ad m . Sia $S \in \mathcal{P}(X)$. Allora esiste⁴ $S^* \in \mathcal{A}$ tale che $S \subseteq S^*$ e $m^*(S) = m(S^*)$.

Dimostrazione. Infatti nella definizione di m^* :

$$m^*(S) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k) \mid (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A} - \text{ricoprimento di } S \right\}$$

Possiamo limitarci a ricoprimenti fatti con un unico $A \in \mathcal{A}$. Infatti, dato $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un \mathcal{A} -ricoprimento di S , l'insieme $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ sta in \mathcal{A} (σ -algebra) ed è tale che $m(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k)$. Quindi in questo caso:

$$m^*(S) = \inf_{\substack{A \supseteq S \\ A \in \mathcal{A}}} m(A)$$

Ma allora:

- se $m^*(S) = +\infty$ basta prendere $S^* = X$.
- altrimenti sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, con $A_n \supseteq S \forall n$, una successione minimizzante. Allora:

$$S^* := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \supseteq S$$

e per monotonia $m(S^*) \leq m(A_n) \forall n$. Dunque:

$$m(S^*) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) = m^*(S) \leq m^*(S^*) = m(S^*)$$

perciò $m^*(S) = m(S^*)$. ■

Proposizione 7.2.3 - Scomposizione

Sia (X, \mathcal{A}, m) spazio di misura e $A \in \mathcal{A}$. Per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$ vale che:

$$m^*(S) = m^*(S \cap A) + m^*(S \setminus A)$$

Si dice che "A taglia bene ogni $S \in \mathcal{P}(X)$ ".

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{A}$ ed $S \in \mathcal{P}(X)$. Sia $S^* \supseteq S$ un coperchio misurabile di S . Poichè $S \subseteq (S^* \cap A) \cup (S^* \setminus A)$ allora:

$$m^*(S) \leq m^*(S^* \cap A) + m^*(S^* \setminus A) = m(S^* \cap A) + m(S^* \setminus A) = m(S^*) = m^*(S)$$

quindi sono tutte uguaglianze (ricorda che $m^*|_{\mathcal{A}} = m$). ■

Osservazione 7.2.1

Questa proposizione implica la m^* -misurabilità degli elementi in \mathcal{A} (vedi Definizione 7.1.8).

⁴ S^* non è unico. Un insieme con tale proprietà è chiamato coperchio misurabile.

Teorema 7.2.1 - σ -algebra da misura esterna

Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna. Allora:

1. $\mathcal{A}_\mu = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ tali che } A \text{ è } \mu\text{-misurabile}\}$ è una σ -algebra.
2. $\mu|_{\mathcal{A}_\mu}$ è una misura completa.

Dimostrazione. Dalla definizione è immediato che se $A \in \mathcal{A}_\mu$ anche $A^c \in \mathcal{A}_\mu$ e chiaramente $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Verifichiamo che se $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ anche $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$. Per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$, usando la μ -misurabilità di A con $S \cap (A \cup B) \in \mathcal{P}(X)$ si ottiene:

$$\mu(S \cap (A \cup B)) = \mu(S \cap (A \cup B) \cap A) + \mu(S \cap (A \cup B) \cap A^c) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c \cap B)$$

Allora:

$$\begin{aligned} \mu(S \cap (A \cup B)) + \mu(S \cap (A \cup B)^c) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c \cap B) + \mu(S \cap A^c \cap B^c) \\ &= \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c) = \mu(S) \end{aligned}$$

dove le ultime uguaglianze seguono poichè $A, B \in \mathcal{A}$. Dunque $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$.

Per vedere che \mathcal{A}_μ è una σ -algebra basta provare che contiene le unioni numerabili disgiunte di suoi elementi: se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ allora $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j)$. Prendiamo $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq$

\mathcal{A}_μ disgiunti. Per ricorsione su $n \in \mathbb{N}$ per le unioni finite vale: $\bigcup_{k=0}^n A_k \in \mathcal{A}_\mu$. Allora per

ogni $S \in \mathcal{P}(X)$ segue la μ -misurabilità $\mu\left(S \cap \bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n \mu(S \cap A_k)$.

Osserviamo che

$$\mu(S) = \mu\left(S \cap \bigcup_{k=0}^n A_k\right) + \mu\left(S \setminus \bigcup_{k=0}^n A_k\right) \geq \sum_{k=0}^n \mu(S \cap A_k) + \mu\left(S \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)$$

che è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi:

$$\begin{aligned} \mu(S) &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(S \cap A_k) + \mu\left(S \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \\ &\geq \mu\left(S \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) + \mu\left(S \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)^c\right) \geq \mu(S) \end{aligned}$$

dunque sono tutte uguaglianze, cioè $\mu(S) = \mu\left(S \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) + \mu\left(S \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)^c\right)$, cioè

$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}_\mu$.

La σ -additività segue ponendo $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, in quanto osserviamo:

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

e questo dimostra che $\mu|_{\mathcal{A}_\mu}$ è una misura.

Infine, $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu|_{\mathcal{A}_\mu})$ è uno spazio di misura completo: infatti se $A \in \mathcal{P}(X)$ ha misura esterna nulla (cioè $\mu(A) = 0$) si ha che per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$ vale:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c) = \mu(S \cap A^c) \leq \mu(S)$$

e quindi $A \in \mathcal{A}_\mu$. Per ogni $B \subseteq A$, $\mu(B) \leq \mu(A) = 0$ quindi si può allora riapplicare il ragionamento appena fatto, quindi $B \in \mathcal{A}_\mu$. ■

Proposizione 7.2.4

Sia $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ una mappa σ -subadditiva e sia α^* la misura esterna. Allora $A \in \mathcal{P}(X)$ è α^* -misurabile se e solo se per ogni $S \in \mathcal{E}$:

$$\alpha^*(S) \geq \alpha^*(S \cap A) + \alpha^*(S \cap A^C)$$

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{P}(X)$ verificante la proprietà per ogni $S \in \mathcal{E}$. Proviamo che verifica la proprietà per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$. Sia $S \in \mathcal{P}(X)$.

- Se $\alpha^*(S) = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare.
- Se $\alpha^*(S) < +\infty$, sia $\varepsilon > 0$. Sia $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ un ricoprimento numerabile di S tale che ⁵:

$$\alpha^*(S) + \varepsilon \geq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(E_k)$$

e quindi per σ -additività e vista l'arbitrarietà di ε :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^*(E_k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^*(E_k \cap A) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^*(E_k \setminus A) \\ &\geq \alpha^*(S) \geq \alpha^*(S \cap A) + \alpha^*(S \setminus A) \end{aligned}$$

in quanto $S \cap A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E_k \cap A)$ e $S \setminus A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \setminus A$. ■

Teorema 7.2.2 - Teorema di Estensione di Misure (Carathéodory)

Sia $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione di insieme. Allora $\alpha^*|_{\mathcal{A}_{\alpha^*}}$ estende α se e solo se:

1. α è σ -subadditiva
2. per ogni $A, B \in \mathcal{E}$ vale che $\alpha^*(B) \geq \alpha^*(B \cap A) + \alpha^*(B \cap A^C)$

Citazione 13. *E' una dimostrazione abbastanza tecnica che non richiede grandi idee. E' solo difficile ricordarsela, ma quelli sono affari vostri!*

Dimostrazione. Se $\alpha^*|_{\mathcal{A}_{\alpha^*}}$ estende α , valgono le due condizioni dell'enunciato. Se valgono le due condizioni, si è visto⁶ che $\alpha^*|_{\mathcal{E}} = \alpha$ e che $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha^*}$. ■

7.2.3 Misure sugli Intervalli

Ricordiamo dall'Esempio 7.1.2 che dati $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ crescente e continua a sinistra ed $\mathcal{I} = \{[c, d[\mid a \leq c \leq d \leq b\}$, si può definire una funzione $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty]$:

$$\alpha([c, d[) = f(d) - f(c)$$

⁵Ricordiamo che essendo α σ -subadditiva vale che $\alpha^*|_{\mathcal{E}} = \alpha$

⁶Le proposizioni/teoremi precedenti implicano il Teorema.

che è σ -additiva (quindi σ -subadditiva).

Vediamo che α verifica anche l'ipotesi (2) del Teorema 7.2.2.

Siano $a \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4 \leq b$. Allora indicando $I_1 = [c_1, c_2[$ e $I_2 = [c_3, c_4[$ e prendendo $p \in \mathbb{R}$ tale che $c_2 \leq p \leq c_3$:

$$\begin{aligned} \alpha^*(I_1 \cup I_2) &= \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J_k) \mid (J_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \text{ tale che } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \supseteq I_1 \cup I_2 \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J_k \cap]-\infty, p[) + \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J_k \cap [p, +\infty[) \mid \right. \\ &\quad \left. \mid (J_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \text{ tale che } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \supseteq I_1 \cup I_2 \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J'_k) \mid (J'_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \text{ tale che } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J'_k \supseteq I_1 \right\} + \\ &\quad + \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J''_k) \mid (J''_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \text{ tale che } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J''_k \supseteq I_2 \right\} \\ &= \alpha^*(I_1) + \alpha^*(I_2) \end{aligned}$$

cioè α^* è additiva su I , dunque vale (2) Per il Teorema di Estensione, α si estende ad una misura completa su una σ -algebra contenente l'insieme \mathcal{I} (contenente quindi la σ -algebra dei Boreliani).

Osservazione 7.2.2

Da quanto visto, ogni $S \subseteq [a, b]$ ha un coperchio misurabile $S^* = G_\delta$ (dove G_δ indica un'intersezione numerabile di aperti di \mathbb{R}).

Basta infatti reiterare la costruzione precedente, "suddividendo" ogni insieme S intersecandoli con aperti.

Osservazione 7.2.3 - Caratterizzazione misurabili

Ogni insieme S che è α^* -misurabile è della forma $S = S^* \setminus N$ dove:

- $S^* = G_\delta$ è un coperchio misurabile
- N è un sottoinsieme boreliano di misura nulla

Definizione 7.2.1 - Quasi-anello

Una famiglia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice quasi-anello di parti di X se per ogni $A, B \in \mathcal{E}$:

- $A \cap B$ è unione numerabile disgiunta di elementi di \mathcal{E} .
- $A \setminus B$ è unione numerabile disgiunta di elementi di \mathcal{E} .

Se denotiamo $\Sigma\mathcal{E}$ la collezione di sottoinsiemi di X che sono unioni numerabili disgiunti di elementi di \mathcal{E} , allora in un quasi-anello si ha $A \cap B \in \Sigma\mathcal{E}, A \setminus B \in \Sigma\mathcal{E}$.

Nota Bene: Non è detto che questi insiemi stiano in \mathcal{E}

Osservazione 7.2.4

Poichè per famiglie di insiemi disgiunti $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ vale:

$$\left(\bigsqcup_i E_i \right) \cap \left(\bigsqcup_j F_j \right) = \bigsqcup_{i,j} (E_i \cap F_j)$$

in un quasi-anello \mathcal{E} , se $A \in \Sigma\mathcal{E}$ e $B \in \Sigma\mathcal{E}$ si ha $A \cap B \in \Sigma\mathcal{E}$.

Poichè inoltre $(\sqcup_i E_i) \setminus C = \sqcup_i (E_i \setminus C)$, se $C \in \mathcal{E}$ si ha anche $A \setminus C \in \Sigma\mathcal{E}$, e quindi anche $A \cup C = (A \setminus C) \sqcup (A \cap C) \in \Sigma\mathcal{E}$.

Con il seguente risultato, si vuole indebolire la richiesta di avere una σ -algebra del Teorema di Estensione di Misure 7.2.2: basta una funzione d'insieme σ -additiva su un quasianello.

Proposizione 7.2.5 - Condizione sufficiente per Estensione

Sia $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione σ -additiva su \mathcal{E} quasi-anello. Allora valgono le condizioni del Teorema 7.2.2.

Dimostrazione. Vogliamo innanzitutto mostrare che α σ -additiva è anche σ -subadditiva. Siano $A \in \mathcal{E}$ e $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tali che $A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Per l'osservazione precedente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si hanno famiglie di insiemi disgiunti $\{E_i^k\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ e $\{F_i^k\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$A_k \cap \left(A \setminus \bigcup_{j < k} A_j \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} E_i^k$$

$$A_k \setminus \left(A \setminus \bigcup_{j < k} A_j \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F_i^k$$

allora

$$A_k = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} E_i^k \cup F_i^k$$

$$A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap \left(A \setminus \bigcup_{j < k} A_j \right) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \left(A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j \right) \cap A = \bigsqcup_{(i,k) \in \mathbb{N}^2} E_i^k$$

così per la σ -subadditività:

$$\alpha(A) = \sum_{(i,k) \in \mathbb{N}^2} \alpha(E_i^k) \leq \sum_{(i,k) \in \mathbb{N}^2} \alpha(E_i^k) + \alpha(F_i^k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(E_i^k) + \alpha(F_i^k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(A_k)$$

Abbiamo dunque la condizione (1) del Teorema 7.2.2, mostriamo che vale anche (2), ossia: $\alpha(B) \geq \alpha^*(B \cap A) + \alpha^*(B \setminus A)$ per tutti $A, B \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} \alpha(B) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(E_k) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(F_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha^*(E_k) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha^*(F_k) \\ &\geq \alpha^*(B \cap A) + \alpha^*(B \setminus A) \end{aligned}$$

■

Corollario 7.2.2.1 - Misure Finite sui Boreliani

Vi è una bigezione tra:

$$\left\{ \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty] \\ \text{crescenti continue a sinistra} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{ \text{Misure su boreliani di } [a, b] \}$$

$$\begin{array}{ccc} f_m(x) = m([a, x]) & \longleftarrow & m \\ f & \longrightarrow & \alpha^* \text{ estensione di} \\ & & \alpha : [c, d[\mapsto f(d) - f(c) \end{array}$$

Osservazione 7.2.5

La funzione $f_m(x) = m([a, x])$ è continua a sinistra sempre; a destra lo è nel punto x_0 se e solo se $m(\{x_0\}) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} m([0, x]) = m\left(\bigcap_{x > x_0} [a, x]\right) = m([a, x_0])$$

che è uguale ad $m([a, x_0])$ se e solo se $m(\{x_0\}) = 0$.

7.2.4 Misura di Lebesgue (pt.1)

Definizione 7.2.2 - Misura di Lebesgue

La misura sui boreliani di \mathbb{R} estesa da $f(x) = x$ viene chiamata misura di Lebesgue; la indicheremo $m(A) = |A|$.

Definizione 7.2.3 - Misura esterna di Lebesgue

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo la misura esterna di Lebesgue come:

$$|A|_e = m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} |I_i| \mid \{I_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ ricoprimento di } A \text{ con intervalli} \right\}$$

oppure considerando intervalli disgiunti $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$:

$$|A|_e = \inf \{ |U| \mid U \supset A \text{ aperto} \}$$

7.2.5 Misura Prodotto

Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) due spazi di misura. Consideriamo il prodotto cartesiano $X \times Y$ con la σ -algebra prodotto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{E}$.

Definiamo la funzione d'insieme:

$$\begin{aligned} \lambda : \quad \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A \times B &\longmapsto \mu(A)\nu(B) \end{aligned}$$

Fatterello 7.2.1 - λ è σ -additiva

Siano $A, A_k \in \mathcal{A}$ e $B, B_k \in \mathcal{B}$ dove $k \in \mathbb{N}$ tali che: $A \times B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \times B_k$. Per ogni $x \in A$ vale che:

$$B = \bigsqcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ A_k \ni x}} B_k$$

quindi valutando nella misura ν , per ogni $x \in A$

$$\nu(B) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ A_k \ni x}} \nu(B_k)$$

che riscritto per ogni $x \in X$:

$$\chi_A(x)\nu(B) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ A_k \ni x}} \chi_{A_k}\nu(B_k)$$

In particolare, consideriamo le somme parziali della sommatoria al membro a destra: sono funzioni misurabili⁷ non negative, per cui applicando il Teorema 7.4.1, si integra rispetto ad X :

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)\nu(B_k)$$

Questo dimostra la σ -additività.

Fatterello 7.2.2 - \mathcal{E} è un quasi-anello

Siano $A, A' \in \mathcal{A}$ e $B, B' \in \mathcal{B}$. Allora vale che:

- $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$
- $(A \times B) \setminus (A' \times B') = [A \times (B \setminus B')] \sqcup [(A \setminus A') \times (B \cap B')]$

quindi \mathcal{E} verifica le proprietà di un quasi-anello.

Ma allora dalla Proposizione 7.2.5 segue che λ si può estendere ad una misura prodotto $\mu \otimes \nu$ sulla σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Osservazione 7.2.6

La misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n è proprio la misura prodotto $m \otimes \cdots \otimes m = m^{\otimes n}$ dove m è la misura di Lebesgue su \mathbb{R} .

7.2.6 Misura di Lebesgue (pt.2)

Proposizione 7.2.6 - Invarianti per la misura di Lebesgue

La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue e $v \in \mathbb{R}^n$, vale⁸:

$$m(A + v) = m(A)$$

In realtà vale di più, come vedremo nel Corollario 7.2.3.2. Per arrivare a tale risultato, bisogna prima introdurre λ -sistemi e π -sistemi.

Definizione 7.2.4 - λ -sistema

Sia X un insieme. Un λ -sistema è un sottoinsieme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ che verifica:

1. dati $A, B \in \mathcal{M}$ tali che $A \subseteq B$ vale che $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
2. se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ crescenti per inclusione, allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Definizione 7.2.5 - π -sistema

Sia X un insieme. Un π -sistema è $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che per ogni $A, B \in \mathcal{E}$ vale $A \cap B \in \mathcal{E}$.

Proposizione 7.2.7 - Caratterizzazione σ -algebra

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. \mathcal{M} è una σ -algebra.
2. \mathcal{M} è un λ -sistema ed un π -sistema.

Dimostrazione. Le implicazioni seguono direttamente dalle definizioni. ■

⁷per le definizioni di questi concetti si veda il paragrafo 7.3

⁸Ricordo la notazione: $A + v = \{a + v \mid a \in A\}$.

Teorema 7.2.3 - Teorema della Classe Monotona (Sierpinski)

Sia X un insieme. Sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un π -sistema tale che $X \in \mathcal{E}$.

Allora il minimo λ -sistema generato da \mathcal{E} è una σ -algebra, che indicheremo $\lambda(\mathcal{E})$.

Dimostrazione. E' sufficiente provare che $\lambda(\mathcal{E})$ è un π -sistema. Per la Proposizione 7.2.7 dimostro così che $\lambda(\mathcal{E})$ è una σ -algebra.

Definiamo per ogni $A \in \lambda(\mathcal{E})$:

$$K(A) = \{B \in \lambda(\mathcal{E}) \mid A \cap B \in \lambda(\mathcal{E})\}$$

e proviamo che $K(A) = \lambda(\mathcal{E})$. Infatti:

- per ogni $A \in \lambda(\mathcal{E})$ per costruzione $K(A)$ è un λ -sistema.
- dato che \mathcal{E} è un π -sistema, per ogni $A, B \in \mathcal{E}$ segue che $A \cap B \in \mathcal{E}$. Ma allora per costruzione $\mathcal{E} \subseteq K(A)$.

Dato che per ogni $A \in \lambda(\mathcal{E})$ l'insieme $K(A)$ è un λ -sistema contenente \mathcal{E} e che $\lambda(\mathcal{E})$ è il minimo λ -sistema che contiene \mathcal{E} , allora $K(A) \supseteq \lambda(\mathcal{E})$. Dato che $K(A) \subseteq \lambda(\mathcal{E})$ per costruzione, vale l'uguaglianza. ■

Corollario 7.2.3.1

Sia (X, \mathcal{A}) un insieme dotato di una σ -algebra e con due misure μ_1 e μ_2 . Se μ_1 e μ_2 coincidono su un π -sistema $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, allora coincidono su $\lambda(\mathcal{E})$.

Corollario 7.2.3.2 - Caratterizzazione della Misura di Lebesgue

La misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n è l'unica misura sullo spazio \mathbb{R}^n che soddisfa:

- l'invarianza per traslazioni.
- $m([0, 1]^n) = 1$, ossia che è normalizzata su $[0, 1]^n$.

Dimostrazione. Sia $m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ una misura che rispetta le proprietà enunciate. Dimostriamo allora che essa è la misura di Lebesgue n -dimensionale.

La dimostrazione si divide in 4 passaggi:

1. Mostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale: $m\left([0, \frac{1}{k}]^n\right) \leq \frac{1}{k^n}$.

Infatti dividendo l'insieme $[0, 1]^n$ in "cubi" n -dimensionali di lato $\frac{1}{k}$, supponendo che $m\left([0, \frac{1}{k}]^n\right) > \frac{1}{k^n}$:

$$\begin{aligned} 1 &= m([0, 1]^n) \stackrel{(a)}{\geq} m([0, 1]^n) \\ &= m\left(\bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^k \left[\frac{i_1-1}{k}, \frac{i_1}{k}\right] \times \dots \times \left[\frac{i_n-1}{k}, \frac{i_n}{k}\right]\right) \\ &\stackrel{(b)}{=} k^n m\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]^n\right) > 1 \end{aligned}$$

che è un assurdo⁹.

⁹Nei passaggi si usa: la disuguaglianza di contenimento (a) e l'invarianza per traslazione della misura (b).

2. Mostriamo che $m(\partial[0, 1]^n) = 0$. Usando nuovamente i "cubi" n -dimensionali, per ogni $k \in \mathbb{N}$, osserviamo che:

$$\partial[0, 1]^n \subseteq [0, 1]^n \setminus \left(\bigcup_{j_1, \dots, j_n=2}^k \left[\frac{i_1-1}{k}, \frac{i_1}{k} \right] \times \dots \times \left[\frac{i_n-1}{k}, \frac{i_n}{k} \right] \right)$$

per cui data la σ -additività di m misura:

$$\begin{aligned} m(\partial[0, 1]^n) &\leq m([0, 1]^n) - m \left(\bigcup_{i_1, \dots, i_n=2}^k \left[\frac{i_1-1}{k}, \frac{i_1}{k} \right] \times \dots \times \left[\frac{i_n-1}{k}, \frac{i_n}{k} \right] \right) \\ &= 1 - \frac{(k-1)^n}{k^n} \end{aligned}$$

Dato che questo vale per ogni $k \in \mathbb{N}$, si passa al \limsup :

$$m(\partial[0, 1]^n) \leq 1 - \limsup_{k \in \mathbb{N}} \frac{(k-1)^n}{k^n} = 0$$

da cui otteniamo che $m(\partial[0, 1]^n) = 0$. In particolare ne segue l'uguaglianza $m([0, 1]^n) = m([0, 1]^n)$. Ripercorrendo quindi il procedimento del punto (1) si conclude che $m\left([0, \frac{1}{k}]^n\right) = \frac{1}{k^n}$.

3. Mostriamo che $m\left(\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^n |b_j - a_j|$ dove $|b_j - a_j| \in \mathbb{Q}$ per ogni $j = 1, \dots, n$.

Dato che le differenze sono razionali, consideriamo il minimo comune multiplo M dei denominatori di $|b_j - a_j|$ al variare di j . Possiamo suddividere l'insieme $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ con "cubi" n -dimensionali di lato $\frac{1}{M}$. Facendo questo, con un procedimento analogo al punto (1) e ricordando l'uguaglianza $m\left([0, \frac{1}{k}]^n\right) = \frac{1}{k^n}$:

$$m\left(\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^n |b_j - a_j|$$

4. Supponiamo ora che $|b_j - a_j| \in \mathbb{R}$. Allora vi è una successione decrescente $b_{j,k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} b_j$ tale che per ogni j, k valga: $|b_{j,k} - a_j| \in \mathbb{Q}$.
Ma allora per costruzione vale:

$$\prod_{j=1}^n [a_j, b_j] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^n [a_j, b_{j,k}]$$

quindi per regolarità interna della misura m :

$$\begin{aligned} m\left(\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]\right) &= m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^n [a_j, b_{j,k}]\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m\left(\prod_{j=1}^n [a_j, b_{j,k}]\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n |b_{j,k} - a_j| = \prod_{j=1}^n |b_j - a_j| \end{aligned}$$

Ma allora m coincide con la misura di Lebesgue sullo stesso π -sistema \mathcal{E} quindi coincidono su $\lambda(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Segue che m è proprio la misura di Lebesgue che quindi è l'unica a soddisfare le richieste enunciate nel corollario. ■

7.3 Funzioni Misurabili

Definizione 7.3.1 - Spazio Misurabile

Un insieme X con una σ -algebra si dice uno spazio misurabile (X, \mathcal{A}) .

Definizione 7.3.2 - Funzione Misurabile

Una funzione $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ si dice misurabile se per ogni $B \in \mathcal{B}$ vale $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposizione 7.3.1 - Topologico \rightarrow Misurabile

Sia (X, τ) uno spazio topologico. X diventa spazio misurabile con la σ -algebra dei boreliani $\sigma\mathcal{A}(\tau)$.

Proposizione 7.3.2 - Criterio di misurabilità di f

Sia $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ funzione tra spazi misurabili. Allora:

- l'insieme $C = \{B \in \mathcal{B} \text{ tale che } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ è una σ -algebra.
- f è misurabile se e solo se C genera \mathcal{B} come σ -algebra.

Dimostrazione. Segue direttamente dalle definizioni. ■

Corollario 7.3.0.1

Valgono i seguenti fatti:

- Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua tra topologici, allora è misurabile.
- $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se per ogni $c \in \mathbb{R}$ vale $\{f < c\} \in \mathcal{A}$

Proposizione 7.3.3 - Prodotto Cartesiano

Siano (X_1, \mathcal{A}_1) ed (X_2, \mathcal{A}_2) spazi misurabili. Allora il prodotto cartesiano $X_1 \times X_2$ si può munire della σ -algebra prodotto:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma\mathcal{A}(\mathcal{E}) \quad \text{dove} \quad \mathcal{E} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

Essa è la minima σ -algebra che rende le proiezioni π_1 e π_2 su X_1 ed X_2 misurabili.

Dimostrazione. Verifichiamo che $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ è proprio \mathcal{M} , la minima σ -algebra che rende le proiezioni misurabili. Siano $A_1 \in \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Allora $\pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2 \in \mathcal{M}$ e $\pi_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2 \in \mathcal{M}$. Per proprietà di σ -algebra allora $A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}$.

Ma allora $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$, quindi $\sigma\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{M}$ e per minimalità di \mathcal{M} ho l'uguaglianza (dato che pure $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ rende le proiezioni continue). ■

Corollario 7.3.0.2 - Misurabilità sulle coordinate

Siano X, Y_1, Y_2 spazi misurabili. Allora $f : X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ è misurabile se e solo se le coordinate lo sono¹⁰.

Dimostrazione. La tesi segue direttamente dalla definizione di σ -algebra prodotto. ■

Proposizione 7.3.4 - Involuppo Superiore e limite

Siano $f_k : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funzioni misurabili, per $k \in \mathbb{N}$. Allora:

1. l'involuppo superiore $f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ è una funzione misurabile.

¹⁰Ovvero se la misurabilità funziona per elementi della σ -algebra di Y_1 e di Y_2 separatamente.

2. le funzioni $\limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k$ e $\liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k$ sono funzioni misurabili.

Dimostrazione. Il punto (1) si ottiene sapendo che per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$\left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k < c \right\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k < c\}$$

Dato che $\{f_k < c\} \in \mathcal{A}$, per proprietà di σ -algebra l'intersezione numerabile segue che $\left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k < c \right\} \in \mathcal{A}$. Ma allora per il Corollario 7.3.0.1 la funzione $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ è misurabile. Lo stesso per $\inf_{k \in \mathbb{N}}$.

Per il punto (2) osserviamo che:

$$\begin{cases} \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k > n} f_k \right) \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k > n} f_k \right) \end{cases}$$

dato che per il punto precedente tutte le funzioni sono misurabili, allora ho la tesi. ■

Definizione 7.3.3 - Limite Superiore di successione di insiemi

Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$, si definisce:

$$\limsup(A_n) = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ definitivamente}\}$$

Teorema 7.3.1 - Teorema di Borel-Cantelli

Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ successione di misurabili in (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura. Supponiamo che $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. Allora:

$$\mu(\limsup(A_n)) = 0$$

Citazione 14. *E' sorprendente. A volte con delle idee del cavolo si arriva a fare delle cose sorprendenti!*

Dimostrazione. _____ ■

7.4 Integrazione secondo Lebesgue

Definizione 7.4.1 - Funzione Semplice

Una funzione semplice $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile con $Im f$ di cardinalità finita, ovvero:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{f(x)=c_i} = \sum_{c \in \mathbb{R}} c \cdot \chi_{f(x)=c}$$

ovvero $f \in Span\{\chi_A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

Denoteremo:

$$\mathcal{S}^+ = \{f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, +\infty[\text{ funzioni semplici non negative}\}$$

Proposizione 7.4.1 - Misurabilità: successioni di funzioni semplici

Ogni limite puntuale di funzioni semplici (misurabili) è misurabile. Viceversa, ogni funzione $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile è limite puntuale di funzioni semplici e ogni funzione misurabile non negativa è limite puntuale crescente di funzioni semplici

Dimostrazione. La prima implicazione segue dalla Proposizione 7.3.4. Per il viceversa, costruiamo una successione di funzioni semplici.

Si comincia da un'osservazione: dato $c \in \overline{\mathbb{R}}$, si possono definire successioni convergenti a c nel seguente modo:

- se $c = +\infty$ allora $c_k = k \rightarrow c = +\infty$.
- se $c = -\infty$ allora $c_k = -k \rightarrow c = -\infty$.
- se $c \in \mathbb{R}$ allora $c_k = 2^{-k} \lfloor 2^k c \rfloor \rightarrow c$

che generalizzando si può scrivere¹¹:

$$c_k = 2^{-k} \left\lfloor 2^k ((c \wedge k) \vee -k) \right\rfloor$$

Poniamo:

$$f_k(x) = 2^{-k} \left\lfloor 2^k ((f(x) \wedge k) \vee -k) \right\rfloor$$

dove:

- f_k sono funzioni semplici in quanto $|Im f_k| \leq 2k + 1$, quindi misurabili
- $f_k \rightarrow f$ puntualmente

da cui la tesi. Inoltre se $f \geq 0$ allora la successione delle f_k è crescente ■

Definizione 7.4.2 - Integrale di Funzioni Semplici

Siano (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura e $f \in \mathcal{S}^+$, tale che:

$$f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \chi_{A_k}$$

dove $\{A_k\}_{k=1, \dots, n} \subseteq \mathcal{A}$. Definiamo l'integrale su X di f come:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$$

¹¹Ricordiamo la notazione: \wedge è il minimo tra i due termini, \vee il massimo.

Verifichiamo la buona definizione: l'integrale non dipende dalla rappresentazione in somma di f .

Supponiamo che:

$$f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{n'} c'_k \cdot \chi_{A'_k}$$

dove senza perdere generalità $A_k = A'_k$ ed $n = n'$. Basterebbe infatti considerare l'unione di $\{A_k\}$ ed $\{A'_k\}$ con tutte le possibili intersezioni.

Sia ora $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}([n])}$ la σ -algebra generata da A_1, \dots, A_n dove per ogni $\alpha \in \mathcal{P}([n])$:

$$B_\alpha = \left(\bigcap_{i \in \alpha} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \notin \alpha} A_i^C \right)$$

In particolare B_α sono disgiunti e ricoprono $\bigcup_{k=1, \dots, n} A_k$, piÙ precisamente:

$$A_i = \bigsqcup_{\alpha \ni i} B_\alpha$$

Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{\alpha \ni i} \mu(B_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}([n])} \left(\sum_{i \in \alpha} c_i \right) \mu(B_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{P}([n])} \left(\sum_{i \in \alpha} c'_i \right) \mu(B_\alpha) = \sum_{i=1}^n c'_i \mu(A_i) \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza vale perché per $i \in \alpha$ vale che $c_i = f|_{B_\alpha} = c'_i$.

Notazione 7.1 - Integrazione su sottoinsieme

Siano (X, \mathcal{A}, μ) spazio metrico e $Y \in \mathcal{A}$. Scriviamo:

$$\int_Y f d\mu = \int_X f \cdot \chi_Y d\mu$$

Proposizione 7.4.2 - Proprietà dell'Integrale di Funzioni Semplici

Siano $f, g \in \mathcal{S}^+$. Allora:

1. vale l'additività, cioè:

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

2. l'integrale è positivamente omogeneo: per $\lambda \geq 0$

$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$$

3. l'integrale è crescente, se $f \leq g$ allora

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

4. vale l'additività rispetto al dominio. Dati $A, B \in \mathcal{A}$ disgiunti

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

Dimostrazione. Dimostriamo questi fatti separatamente.

1. scriviamo $f = \sum_{i=0}^n c_i \chi_{A_i}$ e $g = \sum_{j=0}^m d_j \chi_{B_j}$. Allora:

$$f + g = \sum_{\substack{i \in [n] \\ j \in [m]}} (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

quindi calcolando l'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \sum_{\substack{i \in [n] \\ j \in [m]}} (c_i + d_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{\substack{i \in [n] \\ j \in [m]}} c_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{\substack{i \in [n] \\ j \in [m]}} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i \in [n]} c_i \mu(A_i) + \sum_{j \in [m]} d_j \mu(B_j) = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \end{aligned}$$

2. data la scrittura $f = \sum_{i=0}^n c_i \chi_{A_i}$ segue che:

$$\int_X \lambda f d\mu = \sum_{i=0}^n \lambda c_i \mu(A_i) = \lambda \sum_{i=0}^n c_i \mu(A_i) = \lambda \int_X f d\mu$$

3. a meno di prendere un raffinamento, scriviamo $f = \sum_{i=0}^n c_i \chi_{A_i}$ e $g = \sum_{i=0}^n d_i \chi_{A_i}$. Ma allora, dato che $c_i \leq d_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$:

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=0}^n c_i \mu(A_i) \leq \sum_{i=0}^n d_i \mu(A_i) = \int_X g d\mu$$

4. siano $A, B \in \mathcal{A}$ disgiunti. Allora:

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_X f \cdot \chi_{A \cup B} d\mu = \int_X f(\chi_A + \chi_B) d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

■

Definizione 7.4.3 - Integrale per Misurabili non negativi

Sia $f; (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [0, +\infty[$ funzione misurabile non negativa. Allora:

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{S}^+ \\ \varphi \leq f}} \int_X \varphi d\mu$$

Osservazione 7.4.1

I risultati della Proposizione 7.4.2 si generalizzano ad integrali di funzioni misurabili non negative.

Questo segue dalla definizione di $\int_X f d\mu$ come estremo superiore dell'integrale su funzioni semplici (per le quali le proprietà valgono).

Osservazione 7.4.2 - Generalizzazione di Sommatoria

Sia X un insieme dotato della misura di cardinalità μ :

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{se } \text{card}(A) < +\infty \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Data $f : X \rightarrow [0, +\infty[$, equivalente ad una famiglia di reali non negativi indicizzata su X , vale che:

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sup_{F \in \mathcal{F}(X)} \sum_{x \in F} f(x) = \int_X f d\mu$$

dove $\mathcal{F}(X)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di X di cardinalità finita.

Con questa misura, possiamo dare una definizione di sommatorie di famiglie tramite integrali.

Definizione 7.4.4 - Quasi-ovunque

Sia X uno spazio di misura. Una proprietà vale quasi-ovunque se l'insieme dei punti di X per cui la proprietà è falsa ha misura nulla.

Proposizione 7.4.3

Sia $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione misurabile non negativa. Allora:

1. f nulla quasi-ovunque se e solo se $\int_X f d\mu = 0$.
2. $\int_X f d\mu < +\infty$ implica $f < +\infty$ quasi-ovunque.

Dimostrazione. Dimostriamo i 2 punti separatamente.

1. Se $f = 0$ quasi-ovunque, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}^+$ tale che $0 \leq \varphi \leq f$ segue che $\varphi = 0$ quasi-ovunque. Ma allora $\int_X \varphi d\mu = 0$. Per definizione di integrale di f segue la tesi. Viceversa, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale che $f \geq \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{f \geq \frac{1}{n}\}}$. Integrando:

$$0 = \int_X f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu \left(\left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\} \right)$$

per cui $\mu \left(\left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\} \right) = 0$ per ogni n . Ma dato che:

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}$$

allora vale la tesi.

2. Supponiamo per assurdo che esista $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) > 0$ dove per ogni suo punto $f = +\infty$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n = n \cdot \chi_A \leq f$$

Ma allora:

$$\int_X f d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n d\mu = \limsup_{n \rightarrow +\infty} n\mu(A) = +\infty$$

■

Definizione 7.4.5 - Funzione Integrabile

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile se:

- f è misurabile
- $\int_X |f| d\mu < +\infty$

Proposizione 7.4.4 - Definizione equivalente

Equivalentemente, sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile se:

$$f = g - h$$

con $g, h : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili non negative con integrale finito.

Dimostrazione. Supponendo che $\int_X |f| d\mu < +\infty$, allora considerando: $f = f_+ - f_-$, posso riscrivere:

$$\int_X |f| d\mu = \int_X (f_+ + f_-) d\mu = \int_X f_+ d\mu + \int_X f_- d\mu < +\infty$$

per cui $g = f_+$ ed $h = f_-$ misurabili ed integrabili.

Supponiamo che $f = g - h$ con g, h misurabili non negative con integrale finito. Ma allora:

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g - h| d\mu \leq \int_X (|g| + |h|) d\mu = \int_X |g| d\mu + \int_X |h| d\mu < +\infty$$

da cui segue l'equivalenza tra definizioni. ■

Definizione 7.4.6 - Integrale per Funzioni Integrabili

Siano (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Data la scrittura $f = g - h$ data dalla Proposizione 7.4.4:

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu - \int_X h d\mu$$

Osservazione 7.4.3

L'integrale di f non dipende dalla scelta di g, h . Supponiamo che $f = g - h = g' - h'$. L'additività dell'integrale di funzioni misurabili non negative¹², sapendo che $g+h' = g'+h$, implica:

$$\int_X g d\mu - \int_X h d\mu = \int_X g' d\mu - \int_X h' d\mu$$

Proposizione 7.4.5 - Additività dell'Integrale per funzioni misurabili non negative

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura e siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili non negative. Allora vale la proprietà di additività:

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

Dimostrazione. Sappiamo dalla Proposizione 7.4.1 che esistono successioni: $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^+$ e $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^+$ monotone crescenti che convergono rispettivamente ad f e g . Applicando

¹²vedasi 7.4.5

il Teorema di Beppo-Levi 7.4.1:

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu + \int_X g d\mu &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X \phi_k d\mu + \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X \psi_k d\mu \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X (\phi_k + \psi_k) d\mu = \int_X (f + g) d\mu \end{aligned}$$

■

Corollario 7.4.0.1 - Additività dell'integrale per funzioni integrabili

Date f, g allora $\int f + g = \int f + \int g$

Dimostrazione. Date $f = f_1 - f_2$ e $g = g_1 - g_2$ con f_i, g_i funzioni misurabili non negative allora:

$$\int f + g = \int f_1 + g_1 - \int f_2 + g_2 = \left(\int f_1 + \int f_2 \right) + \left(\int g_1 - g_2 \right) = \int f + \int g$$

■

Definizione 7.4.7 - Spazio delle Funzioni Integrabili

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. L'insieme delle funzioni integrabili su X è uno spazio vettoriale:

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu) = \mathcal{L}^1(X)$$

Proposizione 7.4.6 - Proprietà di $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura, considero lo spazio $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Valgono le seguenti proprietà:

1. la funzione integrale \int_X , come applicazione $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma lineare.
2. la funzione $\|\cdot\|_1$ definita:

$$\begin{array}{ccc} \|\cdot\|_1 & \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & f & \mapsto & \|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \end{array}$$

è una seminorma. In particolare $\|f\|_1 = 0$ se e solo se $f = 0$ quasi-ovunque.

3. è ben definito lo spazio normato $L^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) / \ker \|\cdot\|_1$.

Dimostrazione. Lasciato per esercizio.

■

Definizione 7.4.8 - Spazi $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Per $p \in [1, +\infty[$ si definisce la seminorma:

$$\|f\|_{p,X} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

sullo spazio di funzioni:

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{p,X} < +\infty\}$$

7.4.1 Teoremi di Integrazione

Teorema 7.4.1 - Teorema di Beppo Levi

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Siano $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative, dove $f_k : X \rightarrow [0, +\infty]$.

Chiamiamo f il limite puntuale: $f = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$. Allora per $k \rightarrow +\infty$:

$$\int_X f_k d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$$

Dimostrazione. Dato che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale $f_k \leq f_{k+1} \leq f$, integrando si ottiene:

$$\int_X f_k d\mu \leq \int_X f_{k+1} d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Dunque anche la successione degli integrali è crescente quindi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Per mostrare l'altra disuguaglianza (\geq) basta provare:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}^+, \varphi \leq f \text{ vale } \int_X \varphi d\mu \leq \sup_{k \geq 0} \int_X f_k d\mu$$

allora per definizione segue che:

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \in \mathcal{S}^+}} \int_X \varphi d\mu \leq \sup_{k \geq 0} \int_X f_k d\mu$$

Sia $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x) \leq f(x)$. Basta provare che per ogni $i \in [n]$ vale:

$$c_i \mu(A_i) = \int_{A_i} \varphi d\mu \leq \sup_{k \geq 0} \int_{A_i} f_k d\mu$$

dove al posto di sup possiamo anche mettere un $\lim_{k \rightarrow +\infty}$ e poi si somma per $i = 1, \dots, n$.

Senza perdere generalità, sia $A_i = X$ e consideriamo $c < c_i$. Banalmente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che $f_k \geq c \chi_{\{f_k > c\}}$. Quindi:

$$\sup_{k \geq 0} \int_X f_k d\mu \geq \int_X f_k d\mu \geq c \cdot \mu(\{f_k > c\})$$

dove per definizione $\{f_k > c\}_{k \in \mathbb{N}}$ è successione di insiemi crescenti per inclusione. Quindi anche

$$\sup_{k \geq 0} \int_X f_k d\mu \geq c \cdot \sup_{k \geq 0} \mu(\{f_k > c\}) = c \cdot \mu\left(\bigcup_{k \geq 0} \{f_k > c\}\right) = c \cdot \mu(\{f > c\}) = c \cdot \mu(X)$$

perchè si è supposto che $f \geq \varphi = c_i \chi_X$ dove $c_i > c$. Allora anche $f \geq c_i \mu(X)$.

Sommando su $i = 1, \dots, n$ segue:

$$\sup_{k \geq 0} \int_X f_k d\mu \geq \int_X \varphi d\mu$$

Questo vale per ogni $\varphi \leq f$ per cui passando all'estremo superiore:

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{S}^+ \\ \varphi \leq f}} \int_X \varphi d\mu \leq \sup_{k \geq 0} \int_X f_k d\mu$$

Avendo le due disuguaglianze, vale l'uguaglianza al limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu$$

■

Osservazione 7.4.4 - Beppo Levi "decescente"

Il Teorema di Beppo Levi continua a valere per successioni di funzioni decrescenti $f_k \geq f_{k+1} \geq 0$ purché $\int_X f_1 d\mu < +\infty$.

Infatti basta considerare la successione di funzioni $g_k = f_1 - f_k$.

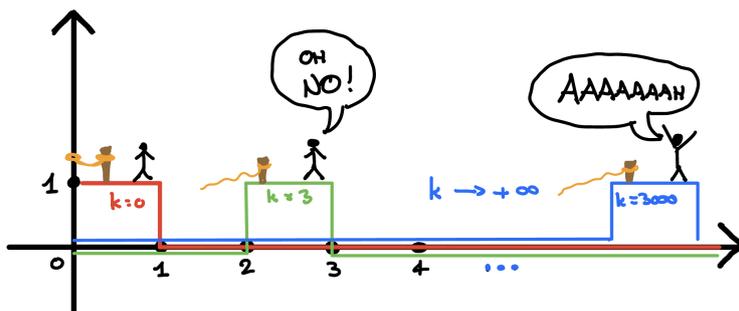
Lemma 7.4.1 - Lemma di Fatou

Sia (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura. Considero $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili non negative. Allora:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu \geq \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$$

Citazione 15. *Vabbé... se uno non... all'iniz... all'inizio uno come diree non vede perché la disuguaglianza giusta è questa però appunto basta subito pensare al caso... semmai volete ricordarvelo, al caso di... funzioni...*

...si! Per esempio un altr... un altro caso dove si vede una disuguaglianza stretta è questo: pensiamo alla caratteristica dell'intervallo $[k, k+1]$. Quindi è un intervallo che... che va all'infinito come una barca... legata male.



Rielaborazione artistica della barca legata male.

Dimostrazione. Siano per $k \in \mathbb{N}$ definite: $g_k = \inf_{j \geq k} f_j$. Così $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili¹³ non negative, crescente e tale che:

$$f := \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \sup_{k \geq 0} \left(\inf_{j \geq k} f_j \right) = \sup_{k \geq 0} g_k$$

¹³Infatti per la Proposizione 7.3.4 l'involuppo inferiore di funzioni misurabili è misurabile.

cioè la successione $\{g_k\}$ converge crescendo a $f = \liminf f_k$.
Inoltre $\forall j \geq k \geq 0$ vale: $f_j \geq g_k$ e perciò:

$$\int_X f_j d\mu \geq \int_X g_k d\mu$$

Dunque posso passare all'estremo inferiore:

$$\inf_{j \geq k} \int_X f_j d\mu \geq \int_X g_k d\mu$$

Dato che questo vale $\forall k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu &= \sup_{k \geq 0} \left(\inf_{j \geq k} \int_X f_j d\mu \right) \geq \sup_{k \geq 0} \int_X g_k d\mu \\ &\stackrel{BL}{=} \int_X \left(\sup_{k \geq 0} g_k \right) d\mu = \int_X \left(\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \right) d\mu \end{aligned}$$

ovvero la tesi. ■

Esempio 7.4.1 - "La barchetta slegata"

Si osserva che per la successione $f_k = \chi_{[k, k+1]}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ottiene la disuguaglianza stretta:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu = 1$$

ma

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = 0$$

Teorema 7.4.2 - Teorema di Lebesgue (Convergenza Dominata)

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Sia data una successione di funzioni integrabili $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge puntualmente ad una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e che viene dominata da una funzione integrabile non negativa g (cioè tale che valga per ogni $k \in \mathbb{N}$: $|f_k| \leq g$). Allora per $k \rightarrow +\infty$:

$$\int_X f_k d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$$

Dimostrazione. Applichiamo il Lemma di Fatou 7.4.1 alle successioni¹⁴ definite $g \pm f_n \geq 0$ (che convergono puntualmente a $g \pm f$). Allora:

$$\int_X (g \pm f) d\mu = \int_X \liminf_{k \rightarrow +\infty} (g \pm f_k) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X (g \pm f_n) d\mu$$

Usando la linearità di \int_X e sottraendo il termine $\int_X g d\mu$, si ottiene la catena di disequazioni:

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

Ma allora $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. ■

¹⁴Applichiamo il ragionamento sia alle funzioni $g + f_n$ che alle funzioni $g - f_n$ in quanto faremo uso di entrambe.

Teorema 7.4.3 - Teorema di Integrazione per Serie

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Data una successione di funzioni integrabili $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_1 < +\infty$, la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ converge μ -quasi-ovunque ed in seminorma $\|\cdot\|_1$ ad una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile tale che:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X f_k d\mu$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione misurabile non negativa:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$$

Essa domina la successione S_n delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, ovvero:

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k \quad |S_n| \leq g$$

Applicando il Teorema di Beppo-Levi 7.4.1 alle somme parziali di g si ha:

$$\int_X g d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \sum_{k=0}^n |f_k| d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \|f_k\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_1 \stackrel{hp}{<} +\infty$$

cioè g è integrabile: quindi in particolare $g(x) < +\infty$ μ -quasi ovunque.

Allora, per questi $x \in X$ dove la funzione è definita, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente e definisce (μ -quasi ovunque) una f misurabile (che si può estendere a piacere, per esempio con il valore 0). Per il Teorema di Convergenza Dominata 7.4.2 si passa al limite sulle somme parziali S_n e si ottiene:

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Analogamente, vediamo la convergenza:

$$\|f - S_n\|_1 = \int_X \left| \sum_{k>n} f_k \right| d\mu \rightarrow 0$$

cioè le somme parziali S_n convergono ad f quasi ovunque ed in seminorma $\|\cdot\|_1$. ■

Corollario 7.4.3.1 - $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo

$L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Banach: dalla Proposizione 1.2.5 (Completezza per Serie) segue che lo spazio è completo.

Citazione 16. *Ma quindi... domani è Venerdì Santo? ...e noi lo santificheremo!*

Teorema 7.4.4 - Teorema Inverso della Convergenza Dominata

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili convergente in norma $\|\cdot\|_1$ ad $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Allora vi è una sottosuccessione dominata in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e convergente ad f μ -quasi-ovunque.

Dimostrazione. Siccome $\|f - f_n\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, esiste una successione strettamente crescente di indici $n_0 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ tale che $\|f - f_{n_k}\|_1 \leq 2^{-k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (si può provare per induzione). Consideriamo la funzione misurabile non negativa:

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

A questo punto:

- per il Teorema di Beppo-Levi 7.4.1 (detto per serie non negative):

$$\begin{aligned} \int_X g d\mu &= \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\|_1 \\ &\leq \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (2^{-j} + 2^{-j+1}) = \|f_{n_0}\|_1 + 3 < +\infty \end{aligned}$$

- per costruzione, $\forall k$ vale: $|f_{n_k}(x)| = \left| f_{n_0}(x) + \sum_{j=1}^k (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \right| \leq g(x)$ ovvero la funzione g domina la sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$.
- per il Teorema di Integrazione per Serie 7.4.3, la serie:

$$f_{n_0}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x))$$

converge quasi ovunque (per gli x dove $g(x) < +\infty$) ed in norma $\|\cdot\|_1$ ad una \tilde{f} , che è identica ad f quasi ovunque (per unicità del limite in modulo equivalente quasi ovunque, cioè in \mathcal{L}^1).

■

Corollario 7.4.4.1

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura e sia $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$.
2. $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua quasi-ovunque su X .
3. $|f(x, t)| \leq h(x) + c \cdot |t|$ dove $c \in \mathbb{R}$ ed $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Allora la seguente mappa è ben definita e continua:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) &\longrightarrow \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \\ u(x) &\mapsto f(x, u(x)) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per la buona definizione della mappa bisogna mostrare che $f(x, u(x))$ è misurabile. In effetti se u è semplice:

$$u(x) = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j}$$

con $(A_j)_{j=1}^m$ partizione misurabile di X . Ma allora:

$$f(x, u(x)) = \sum_{j=1}^m f(x, c_j) \chi_{A_j}(x)$$

che non è semplice ma è misurabile. Siccome ogni u misurabile è limite puntuale di una successione di funzioni semplici ϕ_n , anche $f(x, u(x))$ è misurabile in quanto limite μ -quasi ovunque di $f(x, \phi_n(x))$. Resta da verificare che:

$$\int_X |f(x, u(x))| d\mu \leq \int_X |h(x)| d\mu + c \int_X |u(x)| d\mu < \infty$$

perchè $h(x), u(x) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Per quanto riguarda la continuità, essendo $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ normato, verifichiamo la continuità per successioni. Sia $u_n \rightarrow u$ in $\|\cdot\|_1$.

Per il Teorema 7.4.4, esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente ad u quasi ovunque e dominata da $g \in \mathcal{L}^1$. Allora vale che:

- Per l'ipotesi (2), ovvero $f(x, t)$ continua quasi ovunque nella seconda variabile, si ha che $f(x, u_{n_k}(x)) \rightarrow f(x, u(x))$ puntualmente quasi ovunque
- Per l'ipotesi (3) vale $|f(x, u_{n_k}(x))| \leq h(x) + C|u_{n_k}(x)| \leq h(x) + Cg(x) \in \mathcal{L}^1$, ovvero ogni elemento della successione $\{f(x, u_{n_k}(x))\}$ è integrabile.
- Possiamo applicare il Teorema 7.4.2 ottenendo che $\{f(x, u_{n_k}(x))\} \rightarrow f(x, u(x))$ in $\|\cdot\|_1$.

Dunque: si è provato che $\forall u_n \rightarrow u$ convergente in \mathcal{L}^1 , esiste sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $f(x, u_{n_k}) \rightarrow f(x, u(x))$ in norma $\|\cdot\|_1$. Allora:

$$f(x, u_n(x)) \rightarrow f(x, u(x))$$

per il solito argomento di Urysohn. ■

Teorema 7.4.5 - Continuità della Funzione Integrale

Siano I spazio metrico, (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura. Sia $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. $f(t, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile per ogni $t \in I$
2. $f(\cdot, x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua per ogni $x \in X$ (o quasi-ogni secondo la misura μ)
3. $|f(t, x)| \leq h(x)$ per $h \in L^1(X)$ e per ogni $t, x \in I \times X$

Allora è ben definita e continua l'applicazione:

$$\begin{aligned} \phi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_X f(t, x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Dimostrazione. E' una conseguenza del Teorema di Convergenza Dominata 7.4.2. Infatti per la condizione (2), se ho una successione $t_k \rightarrow t$ nell'intervallo I , si ha la convergenza $f(t_k, x) \rightarrow f(t, x)$ per ogni $x \in X$. Inoltre, le funzioni $f(t_k, \cdot)$ sono misurabili per (1) e dominate in \mathcal{L}^1 dalla funzione h per il punto (3). Applicando il Teorema si ottiene che per $k \rightarrow +\infty$:

$$\phi(t_k) \rightarrow \phi(t)$$

■

Proposizione 7.4.7 - Assoluta continuit  di L'Integrale di Lebesgue

Sia $f \in L^1(X)$ con (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) < \delta$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\mu(A_k) < \frac{1}{2^k} \quad e \quad \int_{A_k} |f| d\mu > \varepsilon_0$$

Introduciamo quindi $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. Per costruzione $B_n \supseteq B_{n+1}$, inoltre:

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Quindi al limite:

$$\mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Osserviamo ora che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_0 < \int_{A_n} |f| d\mu \leq \int_{B_n} |f| d\mu$$

dove il \leq vale poich  $A_n \subseteq B_n$ per costruzione. Quindi trovo un assurdo se provo che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} |f| d\mu = 0$$

Possiamo riscrivere l'integrale. L'ultima equazione   verificata se e solo se¹⁵:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{B_n} |f| d\mu = 0$$

Detto quindi $f_n = \chi_{B_n} |f|$, ho che $|f_n| \leq |f| \Rightarrow f_n$   dominata da una funzione in \mathcal{L}^1 quindi concludo se provo che quasi ovunque:

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ma puntualmente ho che:

$$|f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |f| \chi_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n}$$

e abbiamo detto che $B_n \supseteq B_{n+1}$ e $\mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ quindi $\mu(\bigcap_n B_n) = 0$, ovvero $|f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ quasi ovunque. ■

¹⁵Il trucco   quello di "scaricare" il dominio variabile dell'integrale su un insieme generico su funzioni, cos  da applicare tecniche che conosciamo.

Proposizione 7.4.8 - Convergenza Dominata in Spazi \mathcal{L}^p

Sia $p < +\infty$. Data una successione $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^p(X, \mu)$, segue che:

1. se $f_k \rightarrow f$ puntualmente μ -quasi ovunque ed esiste $g \in \mathcal{L}^p$ tale che $|f_k| \leq g$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora:

$$f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$$

2. se $f_k \rightarrow f$ in norma $\|\cdot\|_p$ allora esiste una sottosuccessione $\{f_{k_j}\} \subseteq \{f_k\}$ convergente ad f puntualmente μ -quasi ovunque tale che esiste $g \in \mathcal{L}^p$ con $|f_{k_j}| \leq g$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Dimostriamo le proprietà separatamente.

1. Sia $f_k \rightarrow f$ puntualmente μ -quasi ovunque dominata da $g \in \mathcal{L}^p$. Ma allora osserviamo che $|f_k|^p \rightarrow |f|^p$ e che $|f_k|^p \leq g^p \in \mathcal{L}^1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per il Teorema 7.4.2 allora:

$$\int_X |f_k|^p d\mu \rightarrow \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X g^p d\mu < +\infty$$

quindi $f_k \rightarrow f$ in norma $\|\cdot\|_p$ ed $f \in \mathcal{L}^p$.

2. Se $f_k \rightarrow f$ in norma $\|\cdot\|_p$, allora $|f_k - f|^p \rightarrow 0$ in norma $\|\cdot\|_1$. Per il Teorema 7.4.4 esiste sottosuccessione $\{f_{k_j}\}$ dominata e convergente μ -quasi ovunque ad f . In particolare componendo le funzioni con la radice p -esima, si ottiene la convergenza e dominanza nello spazio di misura \mathcal{L}^p . ■

Proposizione 7.4.9 - Continuità degli Operatori di Composizione

Siano $p, r \geq 1$ e $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua per ogni $x \in X$
- $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$
- $|f(x, t)| \leq h(x) + c|t|^{\frac{r}{p}}$ con $h \in \mathcal{L}^1$

Allora la mappa
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p(X, \mu) & \longrightarrow & \mathcal{L}^r(X, \mu) \\ u & \longmapsto & f(x, u(x)) \end{array}$$
 è ben definita e continua.

Dimostrazione. Consideriamo una successione $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1$ che converge in norma $\|\cdot\|_p$ ad una funzione u . Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente quasi ovunque ad u e dominata da una funzione $g \in \mathcal{L}^p$. Ma allora:

$$\begin{cases} f(x, u_{k_j}(x)) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} f(x, u(x)) & \text{quasi ovunque} \\ |f(x, u_{k_j}(x))| \leq h(x) + c \cdot |u_{k_j}(x)|^{\frac{r}{p}} \leq h(x) + c \cdot g(x)^{\frac{r}{p}} \in \mathcal{L}^r \end{cases}$$

Ma allora $f(x, u_{k_j}(x)) \rightarrow f(x, u(x))$ in norma $\|\cdot\|_r$ per $j \rightarrow +\infty$. Questo prova la continuità dell'operatore $u \mapsto f(x, u(x))$.

Inoltre, abbiamo già osservato che u misurabile implica $f(x, u(x))$ misurabile. L'operatore è quindi ben definito e continuo. ■

Corollario 7.4.5.1 - Omeomorfismo tra \mathcal{L}^p

Per $1 \leq p < +\infty$ gli spazi \mathcal{L}^p sono topologicamente omeomorfi tra loro.

Dimostrazione. Osserviamo che ogni spazio \mathcal{L}^p è omeomorfo ad \mathcal{L}^1 esibendo una mappa:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}^p &\longrightarrow \mathcal{L}^1 \\ u &\longmapsto |u|^p \operatorname{sgn}(u) \end{aligned}$$

ben definita e con inversa:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathcal{L}^1 &\longrightarrow \mathcal{L}^p \\ v &\longmapsto |v|^{\frac{1}{p}} \operatorname{sgn}(v) \end{aligned}$$

Inoltre, entrambe le mappe sono continue per la Proposizione precedente. Quindi Φ è omeomorfismo tra \mathcal{L}^p e \mathcal{L}^1 . ■

Corollario 7.4.5.2 - Completezza L^p

Per $1 \leq p < +\infty$ lo spazio $L^p(X, \mu)$ è completo.

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ è completo con il Corollario 7.4.3.1. Dato che $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ sono omeomorfi a $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ completo, sono completi. ■

7.4.2 Teoremi di Calcolo

Teorema 7.4.6 - Teorema di Tonelli

Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) spazi di misura σ -finiti¹⁶ e sia $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile e non negativa rispetto ad $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Allora:

1. la seguente funzione è \mathcal{A} -misurabile e non negativa:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow [0, +\infty] \\ x &\longmapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \end{aligned}$$

2. vale l'identità:

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

Dimostrazione. Definiamo l'insieme:

$$\mathcal{F} = \{f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty] \text{ misurabile non negativa} \mid f \text{ verifica (1) e (2)}\}$$

Questo insieme verifica le proprietà:

1. \mathcal{F} è un "cono positivo convesso": contiene le combinazioni lineari a coefficienti non negativi di suoi elementi (segue dalla linearità delle condizioni (1) e (2)).
2. \mathcal{F} contiene limiti puntuali di successioni crescenti $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di suoi elementi, dove $f_n \leq f_{n+1}$ (vale per Beppo-Levi applicato agli spazi X , Y , $X \times Y$).
3. \mathcal{F} contiene le funzioni caratteristiche di rettangoli:

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \chi_B(y) \in \mathcal{F}$$

Dividiamo in 2 casi la conclusione:

¹⁶Uno spazio di misura è σ -finito se è unione numerabile di insiemi misurabili con misura finita. Ad esempio \mathbb{R} con misura di Lebesgue non è finito ma è σ -finito in quanto unione ad esempio degli intervalli $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ che sono spazi di misura finiti.

- siano X, Y di misura finita. Allora prendiamo $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid \chi_S \in \mathcal{F}\}$. Le proprietà osservate per \mathcal{F} dicono che \mathcal{S} è un λ -sistema:

– se $S_n \subseteq S_{n+1}$ successione di elementi di \mathcal{S} , allora per (2):

$$\chi_{\cup S_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{S_n}$$

– se $S, S' \in \mathcal{S}$ tali che $S \subseteq S'$ allora dall'additività e finitezza:

$$\chi_S - \chi_{S'} = \chi_{S' \setminus S}$$

Inoltre: $\mathcal{S} \supseteq \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ che è π -sistema, quindi per il Teorema della Classe Monotona:

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

- siano X e Y spazi σ -finiti qualunque: esistono $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ successioni crescenti di spazi misurabili di misura non negativi tali che:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \quad Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

Ma allora consideriamo $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile non negativa. Definiamo: $f_n(x, y) = f(x, y)\chi_{X_n \times Y_n} \in \mathcal{F}$ per il caso X, Y di misura finita. Quindi vale il limite monotono crescente:

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$$

e per Beppo Levi si ottiene $f \in \mathcal{F}$.

Dato che tutte le funzioni misurabili non negative appartengono a \mathcal{F} , vale la tesi. ■

Citazione 17. **poggiata la penna* BENISSIMO! Wrummmm wruuuuuum, adesso bisogna finire rapidamente, eh!*

Definiamo per il prossimo Corollario la funzione "sezione". Dato lo spazio di misura prodotto $X \times Y$, per ogni $x \in X$:

$$\begin{aligned} j_x : Y &\longrightarrow X \times Y \\ y &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

Corollario 7.4.6.1 - Principio di Cavalieri

Siano X, Y spazi di misura σ -finiti. Consideriamo un elemento della σ -algebra prodotto $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Allora:

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \int_{X \times Y} \chi_S(x, y) d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y \chi_S(x, y) d\nu d\mu$$

inoltre, possiamo scrivere $\chi_S(x, y) = \chi_{S_x}(y)$ dove $S_x = j_x^{-1}(S)$. Dunque si ottiene:

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \int_X \nu(S_x) d\mu$$

Citazione 18. Allora, se S è...

cade matita in aula

Se lei si ferma a raccogliere una matita si perde DUE teoremi con la velocità che ora...

Fatterello 7.4.1 - Applicazione di Tonelli

Per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ vale l'identità:

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{|f| \geq t\}) dt$$

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)| d\mu(x) &= \int_X \int_0^{+\infty} \chi_{[0,|f(x)|]}(t) dt d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \int_X \chi_{[0,|f(x)|]}(t) d\mu(x) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\}) dt \end{aligned}$$

■

Teorema 7.4.7 - Teorema di Fubini

Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) spazi di misura. Sia $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$. Allora:

1. per quasi-ogni $x \in X$ è ben definita e integrabile su (Y, \mathcal{B}) la funzione:

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

2. vale la seguente identità:

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

Dimostrazione. Siccome $|f|$ è integrabile (perchè $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$), ha supporto σ -finito ovvero non è nulla in un insieme $X_0 \times Y_0$ con X_0 e Y_0 che sono σ -finiti. Senza perdere generalità consideriamo $X = X_0$ e $Y = Y_0$.

Decomponiamo $f = f_+ - f_-$ ed applichiamo Tonelli alle due funzioni f_+ ed f_- . Ma allora è ben definita e misurabile la funzione del punto (1), in quanto:

$$x \mapsto \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < +\infty$$

μ -quasi ovunque. ■

Esempio 7.4.2 - Tonelli non applicabile

Siano $X = Y = [0, 1]$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B} =$ "boreliani di $[0, 1]$ ". Consideriamo le misure rispettivamente su (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) : μ misura di Lebesgue e ν cardinalità.

Prendiamo $\Delta = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$. Allora si osserva che:

$$\int_X \left(\int_Y \chi_{\Delta}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X 1 d\mu(x) = 1$$

mentre cambiando l'ordine di integrazione:

$$\int_Y \left(\int_X \chi_{\Delta}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_Y 0 d\nu(y) = 0$$

Qui Tonelli non funziona perchè (Y, \mathcal{B}, ν) non è σ -finito.

Teorema 7.4.8 - Disuguaglianza di Volume per Mappe C^1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa C^1 dove $E \subseteq \Omega$ è misurabile. Allora:

$$|g(E)| \leq \int_E |\det Dg(x)| dx$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione seguirà i seguenti passi:

- ci si può ricondurre sempre al caso E compatto. Infatti se E è misurabile, è unione numerabile di chiusi. A meno di raffinare questa famiglia (per rendere i chiusi limitati), è un unione di chiusi limitati (quindi compatti). Discusso il caso di E compatto, basta sommare.
- si ingrossa l'insieme $graph(g|_E)$ all'insieme:

$$\bigcup_{|h| \leq \delta} graph(g(\cdot + h)) \subseteq \bigcup_{|h| \leq \delta} graph(g(x) + Dg(x)h + R(h))$$

dove per l'inclusione si applica la Formula di Taylor al 1° ordine.

- si usa il Principio di Cavalieri per ottenere una disuguaglianza per il volume dell'insieme.
- si passa al limite per $\delta \rightarrow 0$ usando il Teorema di Beppo Levi.

Sia quindi $E \subseteq \Omega$ compatto. Consideriamo:

$$0 < \delta < \min\{\|x - y\| \mid x \in E, y \in \Omega^C\}$$

Consideriamo un modulo di continuità ω per $Dg|_E$, per cui per ogni $x \in E$ ed $y \in \Omega$:

$$\|Dg(x) - Dg(y)\| \leq \omega(\|x - y\|)$$

Dalla stima del resto al 1° ordine, $\forall x \in E$ ed $\forall \|h\| \leq \delta$ (per cui dalla costruzione $x + th \in E$ per ogni $|t| < 1$):

$$\|g(x + h) - g(x) + Dg(x)h\| \leq \|h\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Dg(x + th) - Dg(x)\| \leq \delta \cdot \omega(\delta)$$

Segue da queste disuguaglianze l'inclusione $\Gamma \subseteq \Gamma'$ di compatti in \mathbb{R}^{2n} , dove:

$$\begin{cases} \Gamma = \{(x - h, g(x)) \mid \|h\| \leq \delta, x \in E\} = \{(x', g(x')) \mid \|h\| \leq \delta, x' \in E - h\} \\ \Gamma' = \bigsqcup_{x \in E_\delta} \{x\} \times \{g(x) + Dg(x)[\delta B] + \delta\omega(\delta)B\} \end{cases}$$

con le notazioni¹⁷ $B = \overline{B}(0, 1)$ e $E_\delta = E + \delta B \subseteq \Omega$.

Prendiamo le misure di questi insiemi:

$$\begin{aligned} |\delta B| \cdot |g(E)| &\leq |\Gamma| = \int_{g(E)} |g^{-1}(y) \cap E + \delta B| dy \\ &\leq |\Gamma'| = \int_{E_\delta} |Dg(x)[\delta B] + \delta\omega(\delta)B| dx \end{aligned}$$

¹⁷In questo caso, $E + \delta B = \{x = e + \delta h \in \Omega \mid e \in E, h \in B\}$.

Per l'omogeneità rispetto alle omotetie, si ha che in dimensione n : $|\lambda E| = \lambda^n |E|$. Nel nostro caso, portiamo all'esterno un fattore δ :

$$\begin{aligned} \int_{E_\delta} |\delta Dg(x)[B] + \delta \omega(\delta)B| dx &= \delta^n \int_{E_\delta} |Dg(x)[B] + \omega(\delta)B| dx \\ &= \frac{|\delta B|}{|B|} \int_{E_\delta} |Dg(x)[B] + \omega(\delta)B| dx \end{aligned}$$

Per cui si ottiene la disuguaglianza:

$$|g(E)| \leq \frac{1}{|B|} \int_{E_\delta} |Dg(x)[B] + \omega(\delta)B| dx$$

Ora, notiamo che gli insiemi $\{Dg(x)[B] + \omega(\delta)B\}_\delta$ sono decrescenti per inclusione rispetto a $\delta \rightarrow 0$. Quindi la loro intersezione sarà:

$$\bigcup_{\delta > 0} (Dg(x)[B] + \omega(\delta)B) = Dg(x)[B]$$

Essendo tutti questi insiemi compatti, hanno misura finita e possiamo applicare la regolarità interna della misura:

$$|Dg(x)[B] + \omega(\delta)B| \cdot \chi_{E_\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} |Dg(x)[B]| \cdot \chi_E = |\det Dg(x)| \cdot |B| \cdot \chi_E$$

per cui integrando si ottiene proprio:

$$|g(E)| \leq \frac{1}{|B|} \int_E |\det Dg(x)| \cdot |B| dx = \int_E |\det Dg(x)| dx$$

ovvero la disuguaglianza cercata. ■

Corollario 7.4.8.1

Nelle stesse ipotesi del Teorema 7.4.8 per $u : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile non negativa vale:

$$\int_{g(\Omega)} u(y) dy \leq \int_{\Omega} u(g(x)) |\det Dg(x)| dx$$

Dimostrazione. Dimostriamo il caso in cui $u = \chi_S$ dove $S \subseteq \Omega$ boreliano. Allora:

$$u \circ g = \chi_{g^{-1}(S)}$$

Quindi applicando il Teorema precedente ad $E = g^{-1}(S)$:

$$\begin{aligned} \int_{g(\Omega)} u(y) dy &= |S| = |g(g^{-1}(S))| \leq \int_{g^{-1}(S)} |\det Dg(x)| dx \\ &= \int_{\Omega} \chi_{g^{-1}(S)}(x) \cdot |\det Dg(x)| dx = \int_{\Omega} u(g(x)) |\det Dg(x)| dx \end{aligned}$$

Lo stesso risultato vale per:

- u funzione semplice non negativa, per linearità della formula ottenuta.
- u funzione misurabile non negativa, usando Beppo-Levi con una successione monotona $\{u_k\}$ di funzioni semplici non negative che converge crescendo ad u .

Quest'ultimo punto è la tesi del corollario. ■

Corollario 7.4.8.2 - Teorema di Sard facile

Nelle stesse ipotesi del Teorema 7.4.8 l'insieme dei punti singolari di g :

$$Z = \{x \in \Omega \mid \det Dg(x) = 0\}$$

ha l'immagine $g(Z)$ di misura nulla.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 7.4.8, grazie al fatto che $|\det Dg(x)| = 0$ per ogni $x \in Z$. ■

Teorema 7.4.9 - Cambio di Variabile

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ iniettiva e C^1 . Allora:

1. per ogni $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile positiva vale che:

$$\int_{g(\Omega)} u(y) dy = \int_{\Omega} u(g(x)) |\det Dg(x)| dx$$

2. per ogni $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile vale che:

$$\int_{g(\Omega)} u(y) dy = \int_{\Omega} u(g(x)) |\det Dg(x)| dx$$

3. per ogni insieme $E \subseteq \Omega$ misurabile vale che

$$|g(E)| = \int_E |\det Dg(x)| dx$$

Dimostrazione. Dimostriamo i punti separatamente.

1. Sia $Z = \{x \in \Omega : \det Dg(x) = 0\}$. Allora g induce un diffeomorfismo fra gli aperti:

$$\Omega' = \Omega \setminus Z \xrightarrow{\sim} g(\Omega') \setminus g(Z)$$

Per trovare la formula basta restringersi a Ω' (a sinistra) ed a $g(\Omega')$ (a destra).

Si può quindi assumere $\Omega = \Omega'$ cioè $g : \Omega \xrightarrow{\sim} g(\Omega)$ diffeomorfismo tra aperti.

Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile non negativa¹⁸. Per il Corollario 7.4.8.1:

$$\begin{aligned} \int_{g(\Omega)} u(y) dy &\leq \int_{\Omega=g^{-1}(g(\Omega))} u(g(x)) |\det Dg(x)| dx \\ &\leq \int_{g(\Omega)} u(g(g^{-1}(y))) |\det Dg(g^{-1}(y))| |\det Dg^{-1}(y)| dy \\ &= \int_{g(\Omega)} u(y) dy \end{aligned}$$

per la regola di differenziazione di una composizione.

2. Per $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ si applica il caso (1) alle mappe u_+ e u_- . Con la linearità dell'integrale $\int_{g(\Omega)}$ si ottiene il risultato cercato.

3. Si applica il punto (1) a $\chi_E(x)$.

¹⁸Basterebbe che fosse definita solo su Ω' . Senza perdere generalità, se fosse definita solo su Ω potrei estenderla dicendo che è 0 fuori da Ω' .

■

Commento 8. Questo Teorema migliora il risultato del Teorema 7.4.8.2: ora sappiamo che per fare il cambio di variabile non serve un diffeomorfismo ma basta una funzione iniettiva.

Il prossimo corollario migliora il risultato del Corollario 7.4.8.1: al posto della disuguaglianza si identifica dove è stata "persa l'uguaglianza", nella cardinalità della fibra della funzione di cambio variabile.

Corollario 7.4.9.1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ed $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile positiva o integrale. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \#(g^{-1}(y))u(y)dy = \int_{\Omega} u(g(x))|detDg(x)|dx$$

Dimostrazione. Basta considerare il caso dove u è misurabile non negativa.

Rimuovendo l'insieme singolare Z della funzione g , si può assumere che g sia un diffeomorfismo locale: $g : \Omega \rightarrow g(\Omega)$.

Si può ricoprire Ω con una famiglia numerabile $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di aperti su cui g induce un diffeomorfismo (dove $g(A_i)$ aperti):

$$g|_{A_i} : A_i \xrightarrow{\sim} g(A_i)$$

Definiamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ gli insiemi $B_i = A_i \setminus \left(\bigcup_{j < i} A_j \right)$. Gli insiemi B_i ripartiscono Ω , per cui:

$$\#g^{-1}(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{g(B_i)}(y)$$

Allora per il Teorema 7.4.9 e per il Teorema di Beppo-Levi per serie:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \#(g^{-1}(y))u(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{g(B_i)}(y)u(y)dy = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{g(B_i)} u(y)dy \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{B_i} u(g(x))|detDg(x)|dx = \int_{\Omega} u(g(x))|detDg(x)|dx \end{aligned}$$

Come nel Teorema precedente, se u è integrabile si considera la scomposizione $u = u_+ - u_-$ e si applica il risultato appena ottenuto alle singole mappe u_+ e u_- . ■

Osservazione 7.4.5

Analogamente alla formula di cambio variabile in una dimensione, possiamo scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d(y, \Omega, g)u(y)dy = \int_{\Omega} u(g(x))detDg(x)dx$$

dove $d(y, \Omega, g)$ è il grado topologico della terna (y, Ω, g) .

Teorema 7.4.10 - Derivazione sotto Segno di Integrale

Siano $I = [a, b]$ spazio metrico, (X, \mathcal{A}, μ) spazio di misura. Sia $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. $f(t, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile per ogni $t \in I$
2. $f(\cdot, x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ è C^1 per ogni $x \in X$ (o quasi-ogni secondo la misura μ)

3. $|f(t, x)| + |\partial_t f(t, x)| \leq h(x)$ per $h \in L^1(X)$ e per ogni $t, x \in I \times X$

Allora è ben definita e C^1 l'applicazione:

$$\begin{aligned} \varphi: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_X f(t, x) d\mu(x) \end{aligned}$$

ed in particolare:

$$\varphi'(t) = \int_X \partial_t f(t, x) d\mu(x)$$

Dimostrazione. La funzione $\partial_t f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa le condizioni 1, 2, 3 del Teorema 7.4.5. In particolare per l'ipotesi di misurabilità di $\partial_t f(t, \cdot)$ notiamo che la funzione:

$$\partial_t f(t, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(t + \frac{1}{k}, x) - f(t, x)}{\frac{1}{k}}$$

che è misurabile per ogni $t \in I$. Quindi:

$$\varphi(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$$

è $C^0(I, \mathbb{R})$. Segue che anche $I \ni t \rightarrow \int_X \partial_t f(t, x) d\mu(x)$ è $C^0(I, \mathbb{R})$ sempre per il Teorema 7.4.5.

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, per dimostrare che $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ basta osservare che $\forall a, s \in I$:

$$\int_a^s \int_X \partial_t f(t, x) d\mu(x) dt = \int_X f(s, x) d\mu(x) - \int_X f(a, x) d\mu(x)$$

Per vedere l'identità, usiamo il Teorema di Fubini (in seguito verificheremo le ipotesi per poter applicare Fubini):

$$\begin{aligned} \int_a^s \int_X \partial_t f(t, x) d\mu(x) dt &= \int_X \int_a^s \partial_t f(t, x) dt d\mu(x) = \int_X (f(s, x) - f(a, x)) d\mu(x) \\ &= \int_X f(s, x) d\mu(x) - \int_X f(a, x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Verifichiamo le ipotesi di Fubini, ossia che $\partial_t f(t, x) \in \mathcal{L}^1(I \times X)$. Per quasi ogni $x \in X$ e $t \in I$:

$$\partial_t f(t, x) \leq h(x)$$

Inoltre $\partial_t f(t, x)$ è misurabile anche come applicazione $I \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Basta vedere che $\partial_1 f(t, x)$ è integrabile in $I \times X$ usando nuovamente il Teorema di Continuità della Funzione Integrale 7.4.5. Dobbiamo dimostrare che vale la sua ipotesi (1). Denotiamo $g(t, x) = \partial_t f(t, x)$. Allora "approssimiamo" t con la successione $t_n = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \rightarrow t$. Per continuità di $g(\cdot, x)$:

$$g(t, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, x\right)$$

ed in questo caso possiamo scrivere:

$$g\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, x\right) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ na \leq k \leq nb}} g\left(\frac{k}{n}, x\right) \cdot \chi_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)}(t)$$

che è somma finita di funzioni misurabili. Quindi al limite $g(t, x)$ è misurabile. Ne segue che $g(t, x)$ verifica le ipotesi del Teorema 7.4.5 ed è quindi integrabile. Si può applicare Fubini. ■

7.4.3 Mappe Lipschitz

Fatterello 7.4.2 - Mappe Lipschitz e Misura

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa Lipschitz (rispetto a $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$). Allora vale¹⁹ che per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$|f(E)|_e \leq c^n |E|_e$$

Dimostrazione. Consideriamo la palla $B(x, r) =]x - r, x + r[^n$. Siccome:

$$f(B(x, r)) \subseteq B(f(x), cr) = f(x) + cB(0, r)$$

passando alla misura:

$$|f(B(x, r))| \leq c^n |B(x, r)|$$

Consideriamo ora $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Per ogni $\varepsilon > 0$ per definizione di misura esterna esiste un ricoprimento numerabile con palle: $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$\begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N}} |B(x_i, r_i)| \leq |E|_e + \varepsilon \\ E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_i) \end{cases}$$

quindi in particolare:

$$f(E) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(B(x_i, r_i)) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (f(x_i) + cB(0, r_i))$$

Passando alla misura:

$$|f(E)|_e \leq c^n \sum_{i \in \mathbb{N}} |B(0, r_i)| \leq c^n (|E|_e + \varepsilon)$$

e valendo questo per ogni $\varepsilon > 0$, si ottiene la tesi. ■

Esempio 7.4.3 - Controesempio con f continua

Sia $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la funzione di Cantor (continua su ogni intervallo aperto del complementare dell'insieme C di Cantor). Sia $f(x) = x + g(x)$. In particolare $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ è un omeomorfismo. Però:

- $|C| = 0$
- siano C_k gli insiemi "parziali" di Cantor, $[0, 1] \setminus C = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} ([0, 1] \setminus C_k)$:

$$\begin{aligned} |f(C)| &= |f([0, 1])| - |f([0, 1] \setminus C)| = 2 - \left| f\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} ([0, 1] \setminus C_k)\right) \right| \\ &= 2 - \left| \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} ([0, 1] \setminus C_k) \right| = 2 - |[0, 1] \setminus C| = 1 \end{aligned}$$

Fatterello 7.4.3

Sia f localmente Lipschitz. Allora f manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, manda misurabili in misurabili.

¹⁹Indichiamo con $|\cdot|_e$ la misura esterna di Lebesgue.

Dimostrazione. Dal Fatto 7.4.2, applicando la disuguaglianza segue che se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura nulla, allora $f(E)$ ha misura nulla.

Sappiamo che un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue se si può scrivere nella forma $E = F \cup N$ dove:

- F è unione numerabile di compatti: $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.
- N è un insieme di misura nulla.

Ma allora, la preimmagine tramite f sarà:

$$f(E) = f(F \cup N) = f(F) \cup f(N) = f(N) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(C_n)$$

dove $f(N)$ ha misura nulla, $f(C_n)$ compatti, quindi misurabili. Segue che $f(E)$ è misurabile. ■

7.4.4 Mappe Lineari

Sia $T \in GL(n, \mathbb{R})$ mappa lineare invertibile. Possiamo considerare la funzione d'insieme, dove $I = [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \{ \sigma - \text{algebra misurabili Lebesgue} \} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \frac{|T(E)|}{|T(I^n)|} \end{aligned}$$

Essa è una misura, normale sul cubo unitario ($\mathcal{L}(I^n) = 1$) ed invariante per traslazioni. Segue che è la misura di Lebesgue: per ogni E misurabile secondo Lebesgue vale

$$|T(E)| = |T(I^n)| \cdot |E|$$

Fatterello 7.4.4 - Misura di I^n

Definiamo la funzione:

$$\begin{aligned} c : GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ T &\longmapsto |T(I^n)| \end{aligned}$$

Allora si vede che $c(T) = |\det T|$.

Dimostrazione. Osserviamo subito che per $S, T \in GL(n, \mathbb{R})$ vale per linearità che:

$$c(ST) = |TS(I^n)| = |T(S(I^n))| = c(T) \cdot |S(I^n)| = c(T) \cdot c(S)$$

analogamente alla proprietà del determinante $\det(ST) = \det(S) \cdot \det(T)$.

Basta quindi studiare l'uguaglianza su un insieme di generatori del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$. Per la proprietà enunciata, segue la tesi per qualsiasi $T \in GL(n, \mathbb{R})$.

Vediamo dei casi particolari:

- (a) Matrici Diagonali: sia $T = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$. Allora:

$$c(T) = |T(I^n)| = \left| \prod_{i=1}^n [0, \tau_i] \right| = \left| \prod_{i=1}^n \tau_i \right| = |\det(T)|$$

- (b) Matrici di Permutazione: sia T matrice di permutazione. Allora essa lascia fisso l'insieme I^n :

$$c(T) = |T(I^n)| = |I^n| = 1 = |\det(T)|$$

- (c) Matrici Ortogonali: sia $T \in O(n)$. La trasformazione lascia fissa la palla $B(0, 1)$. Allora:

$$c(T) = |T(I^n)| = \frac{|T(B(0, 1))|}{|B(0, 1)|} = 1 = |\det(T)|$$

- (d) Perturbazioni Nilpotenti di \mathbb{I} : sia $N \in L(n, \mathbb{R})$ matrice nilpotente, cioè $N^k = 0$ (prendiamo tale $k \in \mathbb{N}$ in modo che sia il più piccolo naturale per cui succede). Definiamo²⁰ $T = \mathbb{I} + N$. Vale quindi la stima per $m \in \mathbb{N}$:

$$T^m = (\mathbb{I} + N)^m = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} N^j = O(m^k)$$

Siccome in generale vale la disuguaglianza (che segue dal fatto che T è $\|T\|$ -Lipschitz):

$$|c(T)| = |T(I^n)| \leq \|T\|^n$$

Applicandolo alla relazione ottenuta:

$$c(\mathbb{I} + N) = c((\mathbb{I} + N)^m)^{\frac{1}{m}} \leq \|(\mathbb{I} + N)^m\|^{\frac{1}{m}} \leq m^{\frac{kn}{m}}$$

Dato che questo vale per ogni $m \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{\frac{kn}{m}} = 1$ segue:

$$c(\mathbb{I} + N) \leq 1$$

Analogamente, anche $(\mathbb{I} + N)^{-1}$ è perturbazione nilpotente di \mathbb{I} . Ne segue che:

$$c((\mathbb{I} + N)^{-1}) \leq 1$$

Per cui: $1 = c(I) = c(\mathbb{I} + N) \cdot c((\mathbb{I} + N)^{-1})$. Le disuguaglianze precedenti devono quindi essere uguaglianze: $c(\mathbb{I} + N) = 1 = |\det(\mathbb{I} + N)|$.

- (e) Perturbazioni Elementari di \mathbb{I} : definiamo una matrice elementare come $E_{i,j} = (e_{a,b})_{a,b=1}^n$ dove i coefficienti sono tutti nulli a meno di $e_{i,j} = 1$. Consideriamo la perturbazione elementare dell'identità, per $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T = \mathbb{I} + \lambda E_{i,j}$$

Lavoriamo nel caso $n = 2$, basterebbe altrimenti applicare una permutazione P delle coordinate (ricordando dal punto (b) che $c(P) = 1$) per ottenere una matrice T dove $i = 1$ e $j = 2$.

Consideriamo quindi $T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e osserviamo che $T(I^2)$ è un parallelepipedo con stesso lato di base e altezza, quindi stessa misura di Lebesgue di I^2 , come in Figura 7.1.

Segue che:

$$c(T) = |T(I^n)| = |I^n| = 1 = |\det(T)|$$

Basta allora trovare un insieme di generatori per $GL(n, \mathbb{R})$ usando le classi particolari appena descritte, su cui $c(T)$ e $\det(T)$ coincidono. Riportiamo 3 conclusioni distinte (l'ultima lasciata come curiosità):

²⁰Indichiamo \mathbb{I} la matrice identità, per distinguerla da $I = [0, 1]$.

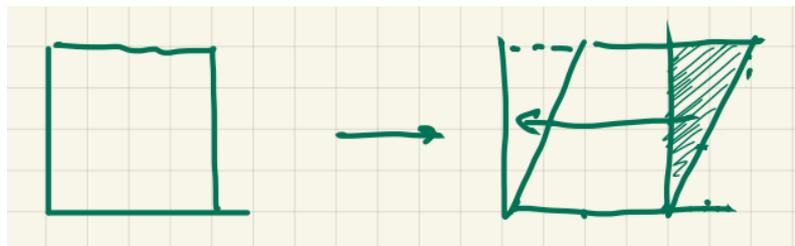


Figura 7.1: Visualizzazione grafica della trasformazione di $T(I^2)$

1. Decomposizione ai Valori Singolari: ogni matrice $T \in L(n, \mathbb{R})$ si decompone nella forma:

$$T = U \cdot S \cdot V \quad \text{dove} \quad \begin{cases} U, V \in O(n) \\ S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \end{cases}$$

ed in particolare $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ sono i valori singolari di T e vale:

$$c(T) = c(U) \cdot c(S) \cdot c(V) = c(S) = \prod_{i=1}^n \sigma_i = \det(S) = |\det(T)|$$

2. Decomposizione LU: ogni matrice $T \in L(n, \mathbb{R})$ si scrive tramite decomposizione LU come:

$$T = L \cdot U \cdot P \quad \text{dove} \quad \begin{cases} L \text{ triangolare superiore} \\ U \text{ triangolare inferiore} \\ P \text{ matrice di permutazione} \end{cases}$$

In particolare, si può scrivere matrici triangolari superiori/inferiori nella forma:

$$L = (\mathbb{I} + N) \cdot D \quad \text{dove} \quad \begin{cases} N \text{ nilpotente} \\ D = \text{diag}(L_{1,1}, \dots, L_{n,n}) \end{cases}$$

ed analogamente per $U = D' \cdot (\mathbb{I} + N')$. Quindi:

$$T = (\mathbb{I} + N) \cdot D \cdot D' \cdot (\mathbb{I} + N') \cdot P$$

ovvero mi riconduco a matrici speciali dei casi (a), (b), (d).

3. Decomposizione con Matrici Elementari: si usano le matrici speciali (a), (e). Si rimanda al libro "*Principles of Mathematical Analysis*" - *W. Rudin* per la dimostrazione di questa decomposizione di matrici.

■

7.5 Tecniche di Calcolo e Applicazioni

7.5.1 Tecniche di Calcolo (Integrali Doppi)

Insiemi Normali

Definizione 7.5.1 - Insieme Normale

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Si dice normale rispetto all'asse y se esistono due funzioni $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$A = \{(x, y) \mid a < x < b \text{ ed } \alpha(x) < y < \beta(x)\}$$

cioè A ha come fibre degli intervalli.

Osservazione 7.5.1

Sia A un insieme normale rispetto all'asse y . Si può usare il Teorema 7.4.7:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Inoltre, questi risultati continuano a valere per insiemi normali rispetto all'asse x .

Coordinate Polari

Sia $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa o integrabile. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

Infatti basta considerare il cambio di variabile:

$$g \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix}$$

dove quindi:

$$Dg \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}$$

e segue subito che: $\det Dg \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \rho$.

7.5.2 Tecniche di Calcolo (Integrali Tripli)

Integrazione per Fili

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme normale rispetto all'asse z , ossia esiste $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A \text{ ed } \alpha(x, y) < z < \beta(x, y)\}$$

Allora:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_A \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Integrazione per Sezioni

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme normale rispetto all'asse z , ossia esistono $a < z < b$ e $\{A_z\}_{z \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tali che:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid a < z < b \text{ ed } (x, y) \in A_z\}$$

Allora:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Coordinate Sferiche

Consideriamo la sfera unitaria $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e parametrizziamo i punti con due angoli $\varphi_1 \in [0, \pi]$ e $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$. Dato $P \in S^2$ definiamo:

- φ_2 l'angolo tra l'asse z e il segmento \overline{OP} .
- φ_1 l'angolo tra l'asse x e il segmento $\overline{OP'}$, con P' proiezione di P sul piano xy .

Sia la terza coordinata sferica il raggio $\rho \in [0, +\infty[$. Allora si può definire:

$$\Phi(\rho, \varphi_1, \varphi_2) = (\rho \sin \varphi_2 \cos \varphi_1, \rho \sin \varphi_2 \sin \varphi_1, \rho \cos \varphi_2)$$

Calcolando il determinante del Jacobiano di Φ , si ottiene che:

$$|\det J\Phi(\rho, \varphi_1, \varphi_2)| = \rho^2 \sin \varphi_2$$

per cui risulta che:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\Phi(\rho, \varphi_1, \varphi_2)) \rho^2 \sin \varphi_2 d\varphi_2 d\varphi_1 d\rho$$

7.5.3 Integrale di Eulero e Formula di Stirling

Ricordiamo la formula di Cauchy per funzioni analitiche. Sia f analitica, allora:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

Consideriamo $f(z) = e^z$, con il cammino circolare $\gamma(t) = re^{it}$:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{re^{it}} e^{-nit} dt$$

Vogliamo allora studiare l'integrale al secondo membro. Sia $r = n$, completiamo lo sviluppo di e^{it} al 2° ordine:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi n^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{n - \frac{nt^2}{2} + n(e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2})} dt = \frac{e^n}{2\pi n^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{nt^2}{2}} e^{n(e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2})} dt$$

In particolare, posso maggiorare il modulo dell'integrando:

$$\left| e^{n(e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2})} \right| = e^{n(\cos t - 1 - it + \frac{t^2}{2})} \leq e^{n \frac{\pi^2 t^2}{24}} \quad (7.1)$$

per ogni $|t| < \pi$, in quanto all'ultimo passaggio uso la disuguaglianza (da Lagrange):
 $\cos(\theta) - 1 + \frac{t^2}{2} = \cos(\theta) \frac{t^4}{24} \leq \frac{\pi^2}{24} t^2$.

Si esegue il cambio di variabile $s = \sqrt{nt}$:

$$\frac{1}{n!} = \frac{e^n}{2\pi n^{n+\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{n(e^{i\frac{s}{\sqrt{n}}}-1-i\frac{s}{\sqrt{n}}+\frac{s^2}{n})} \chi_{[-\sqrt{n}\pi, \sqrt{n}\pi]} ds$$

Osserviamo che l'integrando converge puntualmente a $e^{-\frac{s^2}{2}}$. Infatti per ogni $s \in [-\sqrt{n}\pi, \sqrt{n}\pi]$ fissato, per $n \rightarrow +\infty$:

$$n \left[e^{i\frac{s}{\sqrt{n}}} - 1 - i\frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{s^2}{n} \right] = n o\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$$

Inoltre, dalla maggiorazione 7.1, l'integrando è dominato da:

$$e^{(-\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{24})s^2} \in L^1$$

perché $\frac{1}{2} > \frac{\pi^2}{24}$. Si conclude allora che:

$$\frac{1}{n!} = \frac{e^n}{2\pi n^{n+\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + o(1) \right) \quad (7.2)$$

Ricordiamo la formula dell'integrale di Eulero per il fattoriale, ovvero:

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$$

dove l'integrando ha massimo per $t = n$.

Riscriviamo l'integrale col cambio di variabile $t = n + \sqrt{ns}$, in questo modo:

- trasliamo la funzione integranda in modo che il massimo si trovi per $t = 0$.
- si normalizza la derivata seconda di $e^{-t} t^n$ (in modo che per $n \rightarrow +\infty$ la derivata seconda resti limitata).

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-n-\sqrt{ns}} (n + \sqrt{ns})^n \sqrt{n} ds \\ &= n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)_+^n e^{-\sqrt{ns}} ds \end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrando ottenuto converge puntualmente per $n \rightarrow +\infty$ ad $e^{-\frac{s^2}{2}}$. Infatti prendendo il logaritmo si ottiene:

$$\begin{aligned} \log \left(\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)_+^n e^{-\sqrt{ns}} \right) &= n \log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)_+ - \sqrt{ns} \\ &= n \left(\frac{s}{\sqrt{n}} - \frac{s^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \sqrt{ns} = -\frac{s^2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Gli integrandi sono crescenti su $] - \infty, 0]$ e decrescenti su $[0, +\infty[$, quindi anche gli integrali convergono per il Teorema di Beppo Levi:

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (7.3)$$

Confrontando allora le stime 7.2 ed 7.3 si ottiene che:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}$$

7.5.4 Confronto tra Integrale di Riemann e Lebesgue

Esempio 7.5.1

La funzione $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ non è Riemann-integrabile ma è integrabile secondo Lebesgue.

Proposizione 7.5.1 - Integrali di Riemann e Lebesgue

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. Allora:

$$R([a, b]) \subseteq \mathcal{L}^1([a, b])$$

Dimostrazione. Data la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ che scriviamo: $P = \{x_k\}_{k=0, \dots, n}$ dove $x_k < x_{k+1}$ per ogni $k = 0, \dots, n-1$ ed $x_0 = a, x_n = b$.

Allora la somma inferiore si può scrivere:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) (x_{k+1} - x_k) = \int_{[a, b]} f_P dx$$

definendo $f_P(x) = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{y \in [x_k, x_{k+1}]} f(y) \right) \chi_{[x_k, x_{k+1}]}(x)$. Osserviamo che f_P sono funzioni semplici. Consideriamo ora una successione di suddivisioni sempre più fini $\{P_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Applicando Beppo-Levi, allora per $m \rightarrow +\infty$:

$$s(f, P_m) = \int_{[a, b]} f_{P_m} dx \longrightarrow \int_{[a, b]} f_{\star} dx$$

dove $f_{\star} = \sup_{m \in \mathbb{N}} f_{P_m}$.

Se la funzione f è Riemann-integrabile, allora gli integrali coincidono. ■

7.6 Risultati Topologici

Citazione 19. Eeeeeeeeh... c'è poco da fare, a volte mi dimentico qualche pezzo...

Teorema 7.6.1 - Teorema di Punto Fisso di Brower (TPF)

Sia $B = \bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, ogni funzione continua $f \in C^0(B, B)$ ha almeno un punto fisso.

Teorema 7.6.2 - Teorema di Non-Retrazione (TNR)

Sia $B = \bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, non esiste alcuna retrazione $r : B \rightarrow \partial B$ continua tale che $r|_{\partial B} = id|_{\partial B}$.

Dimostrazione. (TPF e TNR)

Dimostreremo i seguenti passaggi:

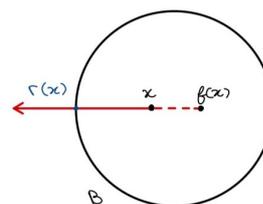
$$TNR(C^2) \xrightarrow{(1)} TPF(C^2) \xrightarrow{(2)} TPF(C^0) \xrightarrow{(3)} TNR(C^0)$$

dove indichiamo con $TNR(C^2)$ il Teorema di Non-Retrazione per mappe C^2 e analogamente gli altri. Infine dimostreremo il Teorema di Non-Retrazione per mappe C^2 .

- supponiamo che $f \in C^2(B, B)$ non abbia punti fissi. Allora esiste una retrazione $r : B \rightarrow \partial B$, (con la stessa regolarità C^2).

Infatti, sia $f \in C^2(B, B)$ con $f(x) \neq x$ per ogni $x \in B$. Definisco la retrazione:

$$\begin{aligned} r : B &\longrightarrow \partial B \\ x &\longmapsto \partial B \cap \{x + t(x - f(x))\}_{t \geq 0} \end{aligned}$$



ovvero la mappa che associa ad x l'intersezione di ∂B con la semiretta che parte da x e passa per $f(x)$ (come in Figura 7.2).

Figura 7.2: Retrazione di B su ∂B

Allora $r : B \rightarrow \partial B$ è ben definita ed è $C^2(B)$ inoltre $r(x) = x$ per ogni $x \in \partial B$. Verifichiamo che è una mappa C^2 . Possiamo riscrivere $r(x) = x + t(x) \cdot (x - f(x))$ dove ora $t = t(x)$ è definita dal sistema:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \|x + t(x - f(x))\| = 1 \end{cases}$$

La verifica che $t(x)$ è una mappa C^2 è lasciata per esercizio.

Esercizio 7.6.1

Il problema ha un'unica soluzione che è la radice ≥ 0 di un polinomio di secondo grado (con termine noto negativo e coefficiente principale positivo):

$$\|x + t(x - f(x))\|^2 - 1 = 0$$

Al variare di x , la soluzione generale $t(x)$ è una mappa C^2 .

- sia $f \in C^0(B, B)$. Per il Teorema di "approssimazione" di Weierstrass (i polinomi sono densi in $C^2(\mathbb{R}) \subseteq C^0(\mathbb{R})$) esiste una successione $\{f_k\}_{k \geq 0}$ di mappe $C^2(\mathbb{R})$ (persino polinomiali) tali che $f_k \rightarrow f$ uniformemente su B .

Ma allora $\|f_k\|_{\infty, B} \rightarrow \|f\|_{\infty, B} \leq 1$. In particolare segue che:

$$\begin{aligned} & - 1 \vee \|f_k\|_{\infty, B} \rightarrow 1 \\ & - \frac{1}{1 \vee \|f_k\|_{\infty, B}} \in C^0(B, B) \end{aligned}$$

Dunque si può supporre $\|f_k\|_{\infty, B} \leq 1$, ovvero $f_k|_B \in C^2(B, B)$. Per TPF(C^2) esiste $x_k \in B$ tale che $f_k(x_k) = x_k \forall k \in \mathbb{N}$.

Per compattezza \exists sottosuccessione $\{x_{k_j}\}$ convergente a un $x \in B$. Osserviamo che:

$$x_{k_j} = f_{k_j}(x_{k_j}) \rightarrow f(x) = x$$

in quanto le funzioni $\{f_k\}$ convergono ad f uniformemente.

- per esercizio: l'idea è fare una dimostrazione per assurdo, se esistesse una retrazione, allora facilmente troverei una mappa con punto fisso.

Resta da dimostrare TNR(C^2).

Sia per assurdo $r : B \rightarrow \partial B$ una mappa $C^2(B, \mathbb{R}^n)$ tale che $\forall x \in \partial B$ valga $r(x) = x$. Definiamo, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in B$ la funzione $g(t, x) = g^t(x)$ (pensiamo cioè a questa funzione in due variabili come ad una famiglia indicizzata sul parametro t):

$$g^t(x) = (1-t)x + t \cdot r(x)$$

Fissando $x \in B$, al variare di $t \in \mathbb{R}$ abbiamo la retta passante per x e $r(x)$, in particolare $g^0(x) = x$, $g^1(x) = r(x)$. Inoltre, sul bordo, $\forall x \in \partial B$ e $\forall t \in \mathbb{R}$ vale $g^t(x) = x$.

Considero la funzione²¹:

$$\varphi(x) = \int_B \det Dg^t(x) dx$$

Allora si osserva che:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \int_B 1 dx = |B| > 0 \\ \varphi(1) = \int_B \det Dr(x) dx = \int_B 0 dx = 0 \end{cases}$$

Infatti se fosse $Dr(x_0)$ invertibile in un qualunque punto $x_0 \in B$, allora r sarebbe localmente invertibile in x_0 per Teorema di Inversione Locale. Quindi l'immagine avrebbe parte interna non vuota, ma $r(B) \subseteq \partial B$, che non ha parte interna.

L'obiettivo ora è calcolare $\varphi'(t)$. Trovando che è zero, si ottiene una contraddizione in quanto φ dovrebbe essere costante ma $\varphi(0) \neq \varphi(1)$.

Per il Teorema 7.4.10 deriviamo in t sotto il segno di integrale²²:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_B \det Dg^t(x) dx &= \int_B \partial_t (\det Dg^t(x)) dx \stackrel{(a)}{=} \int_B \partial_t (\det [\partial_1 g^t | \partial_2 g^t | \dots | \partial_n g^t]) dx \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_B \sum_{j=1}^n \det [\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] dx \end{aligned}$$

dove abbiamo scritto esplicitamente le colonne del Jacobiano (a), applicato la linearità del determinante e Schwarz $\partial_t \partial_j = \partial_j \partial_t$ (b).

Si vorrebbe estrarre ∂_j dall'addendo j -esimo, fuori dal determinante.

²¹Osserviamo che $Dg^t(x) = D_2g(t, x)$.

²²La verifica delle ipotesi del Teorema 7.4.10 non è stata fatta.

Sul singolo addendo j -esimo non c'è questa uguaglianza, ma sulla somma completa si. Infatti sul singolo addendo si ha che:

$$\begin{aligned} \partial_j \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] &= \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] + \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_i g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] \end{aligned}$$

Sommando gli addendi per $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \partial_j \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] &= \sum_{j=1}^n \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_i g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] \end{aligned}$$

dove la seconda sommatoria risulta nulla perchè i suoi $n(n-1)$ termini si annullano 2 a 2 (il termine i, j è opposto al termine j, i perchè è il det della matrice a cui ho trasposto le colonne i, j).

Commento 9. Pronti a giocare a "Where is Waldo?" con gli indici delle derivate parziali? Trovate le differenze tra le righe!

Infatti vediamo che per proprietà del determinante e Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_i g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] &= \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n \left(\det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_i g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots] + \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_i \partial_j g^t | \dots] \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n \left(\det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_i g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots] - \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_i \partial_j g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots] \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n \left(\det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_i g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots] - \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_j \partial_i g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots] \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^n 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi si conclude che:

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \int_B \partial_j \det[\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] dx$$

Vediamo che ciascun integrale è nullo. Scriviamo $x \in \mathbb{R}^n$ evidenziando la j -esima coordinata:

$$x = \hat{x}_j + x_j e_j \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

dove $x_j \in \mathbb{R}$ è la j -esima coordinata e $\widehat{x}_j \in B \cap \{x_j = 0\}$. Usiamo il Teorema di Fubini 7.4.7:

$$\begin{aligned} \int_B \partial_j \det [\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R} \times B_j} \partial_j \det [\partial_1 g^t | \dots | \partial_n g^t] \cdot \chi_{[\sqrt{1-\|\widehat{x}_j\|^2}, \sqrt{1-\|\widehat{x}_j\|^2}]}(x_j) dx_j d\widehat{x}_j \\ &= \int_{B_j} \int_{-\sqrt{1-\|\widehat{x}_j\|^2}}^{\sqrt{1-\|\widehat{x}_j\|^2}} \partial_j \det [\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t] dx_j d\widehat{x}_j \\ &\stackrel{TFI}{=} \int_{B_j} \det [\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t]_{x_j=\sqrt{1-\|\widehat{x}_j\|^2}}^{x_j=-\sqrt{1-\|\widehat{x}_j\|^2}} d\widehat{x}_j \end{aligned}$$

dove l'integrando è nullo, perchè $\det [\partial_1 g^t | \dots | \partial_t g^t | \dots | \partial_n g^t]$ è una funzione dispari ed è valutata in $\pm\sqrt{1-\|\widehat{x}_j\|^2}$.

Segue che $\forall x \in \partial B$ vale:

$$\partial_1 g^t(x) = 0$$

e quindi $g^t(x) = x$ per ogni $x \in \partial B$. Abbiamo così l'assurdo cercato. ■

Dal Teorema del Punto Fisso seguono le proposizioni:

Proposizione 7.6.1 - Perron - Frobenius

Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ matrice a coefficienti non negativi.

Allora A ha un autovalore non negativo, corrispondente ad un autovettore di coordinate non negative.

Dimostrazione. Lasciata per esercizio (idea: discutere prima il caso con matrice A non invertibile). ■

Proposizione 7.6.2

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto ed $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in \partial K$.

Allora f è surgettiva su K , ossia $f(K) \supseteq K$.

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. ■

7.7 Problema dei Momenti

7.7.1 Teorema di Riesz-Markov-Kakutani

Definizione 7.7.1 - Pushforward

Siano (X, \mathcal{A}) ed (X', \mathcal{A}') spazi di misura e sia m misura su (X, \mathcal{A}) . Sia $p : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X', \mathcal{A}')$ una funzione misurabile. Allora definiamo il pushforward della misura $p_*(m)$:

$$\begin{aligned} p_*(m) : \mathcal{A}' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ S &\longmapsto m(p^{-1}(S)) \end{aligned}$$

che a sua volta è una misura. Possiamo ovvero considerare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{m} & \mathbb{R} \\ p^{-1} \uparrow & \nearrow p_*(m) & \\ \mathcal{A}' & & \end{array}$$

Teorema 7.7.1 - Teorema di Riesz-Markov-Kakutani

Sia X uno spazio metrico compatto e sia ϕ un funzionale lineare positivo su $C(X)$.

Allora esiste un'unica misura finita μ sui boreliani di X tale che per ogni $f \in C(X)$ valga:

$$\langle \phi, f \rangle = \int_X f(x) d\mu(x)$$

Commento 10 (Idea della dimostrazione). Non costruiamo la misura μ , ma $\mu \otimes \lambda_1$, misura prodotto di μ su X e λ_1 misura di Lebesgue su \mathbb{R} .

Dimostrazione. Costruiamo un quasi-anello di parti di $X \times \mathbb{R}$.

Consideriamo gli insiemi "zona fra due grafici".

Per $u, v \in C(X)$ definiamo:

$$[u, v) := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid u(x) \leq t < v(x)\}$$

Senza perdere generalità, si può assumere che $u \leq v$ perchè $[u, v) = [u, v \vee u)$ (in ogni caso, la rappresentazione delle "zone tra grafici" non è unica).

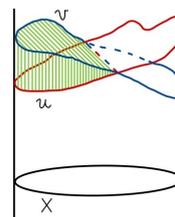


Figura 7.3: Zona compresa tra due funzioni u e v

La collezione di questi insiemi è un quasi-anello \mathcal{E} di parti di $X \times \mathbb{R}$. Infatti sono verificate le 2 proprietà di quasi-anello:

- Vale che:

$$[u_1, v_1) \cap [u_2, v_2) = [u_1 \vee u_2, v_1 \wedge v_2) \in \mathcal{E}$$

perchè le condizioni di appartenenza all'insieme si possono riscrivere:

$$\begin{cases} u_1(x) \leq t < v_1(x) \\ u_2(x) \leq t < v_2(x) \end{cases} \iff u_1(x) \vee u_2(x) \leq t < v_1(x) \wedge v_2(x)$$

- Vediamo che la differenza sta in \mathcal{E} .

Consideriamo $M \geq \|u_1\|_\infty \vee \|v_1\|_\infty \vee \|u_2\|_\infty \vee \|v_2\|_\infty$.
 Senza perdita di generalità siano $u_1 \leq v_1$ e $u_2 \leq v_2$. Allora,
 come rappresentato nella Figura 7.4:

$$\begin{aligned} [u_1, v_1] \setminus [u_2, v_2] &= [u_1, v_1] \cap [-M, M] \cap [u_2, v_2]^C \\ &= [u_1, v_1] \cap ([-M, u_2] \sqcup [v_2, M]) \\ &= ([u_1, v_1] \cap [-M, u_2]) \sqcup ([u_1, v_1] \cap [v_2, M]) \end{aligned}$$

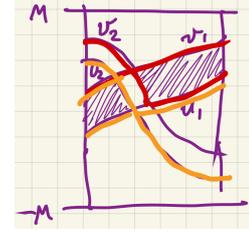


Figura 7.4

Dunque: intersezione di due elementi di \mathcal{E} è un elemento di \mathcal{E} e la differenza relativa è unione disgiunta di 2 elementi di \mathcal{E} . Segue che \mathcal{E} è un quasi anello.

La σ -algebra generata da \mathcal{E} è $\mathcal{B}(X \times \mathbb{R})$. Dimostriamolo.

Sia $F \subseteq X$ chiuso. Esiste $f \in C(X)$ tale che $F = f^{-1}(0)$, basta per esempio²³ prendere $f(x) = \text{dist}(x, F)$ la distanza punto-chiuso. Siano $a < b \in \mathbb{R}$. Allora:

$$F \times [a, b] = \bigcap_{n>0} [a + nf, b] \in \sigma\mathcal{A}(\mathcal{E})$$

Dimostriamo le due inclusioni:

- da un lato, se $(x, t) \in F \times [a, b]$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ vale che $a = a + 0 = a + nf(x) \leq t < b$ ovvero $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $(x, t) \in [a + nf, b]$.
- viceversa, se $\forall n \in \mathbb{N}$ vale che $(x, t) \in [a + nf, b]$ allora $a \leq t \leq b$ e per forza $f(x) = 0$, altrimenti per $f(x) > 0$ esisterebbe un $n \in \mathbb{N}$ tale che $t < a + nf(x)$. Quindi $x \in F$.

Allora la σ -algebra generata da $F \times [a, b)$ con F chiuso e $[a, b)$ intervallo semiaperto è contenuta in $\sigma\mathcal{A}(\mathcal{E})$, la quale a sua volta è contenuta in $\mathcal{B}(X \times \mathbb{R})$ (gli insiemi $[u, v)$ sono boreliani in quanto sono nella forma "aperto \cap chiuso").

Definiamo una funzione di insieme non negativa su \mathcal{E} , ponendo $\forall u \leq v$:

$$\alpha([u, v]) := \langle \phi, v - u \rangle$$

Questa è una buona definizione, α non dipende dalla scelta di u, v per descrivere l'insieme. Se per $u_1 \leq v_1$ e $u_2 \leq v_2$ si ha che $[u_1, v_1) = [u_2, v_2)$ allora per ogni $x \in X$ gli intervalli reali:

$$[u_1(x), v_1(x)) = [u_2(x), v_2(x)) \subseteq \mathbb{R}$$

Questo significa che per ogni $x \in X$:

$$v_1(x) - u_1(x) = v_2(x) - u_2(x)$$

quindi:

$$\langle \phi, v_1 - u_1 \rangle = \langle \phi, v_2 - u_2 \rangle$$

²³In questo passaggio si usa la condizione che X è metrico.

La funzione così definita è σ -additiva: siano $u \leq v$ e $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C(X)$ due successioni tali che $u_k \leq v_k$ per ogni k . Supponiamo (con ragionamento analogo alla costruzione della misura di Lebesgue a partire da intervalli):

$$[u, v) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} [u_k, v_k) \subseteq X \times \mathbb{R}$$

Prendendo le fibre della proiezione su \mathbb{R} , ciò implica che $\forall x \in X$ vi è una partizione in intervalli semiaperti di \mathbb{R} :

$$[u(x), v(x)) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} [u_k(x), v_k(x)) \subseteq \mathbb{R}$$

Per la σ -additività della misura di Lebesgue λ_1 su questa fibra (fissato cioè $x \in X$):

$$v(x) - u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (v_k(x) - u_k(x))$$

che è una serie a termini non negativi (ovvero le somme parziali sono una successione monotona crescente).

Ricordiamo il Teorema di Dini sulla Convergenza Monotona 5.5.1: se f_n sono funzioni continue in uno spazio compatto, convergenti con monotonia ad una f continua, allora il limite è uniforme.

Qui la applichiamo alle somme parziali, ottenendo al limite:

$$v - u = \sum_{k=0}^{\infty} (v_k - u_k)$$

La serie delle somme parziali è uniformemente convergente quindi, essendo ϕ continuo:

$$\langle \phi, v - u \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \phi, v_k - u_k \rangle$$

vale a dire che è verificata la σ -additività in quanto:

$$\alpha([u, v)) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha([u_k, v_k))$$

Per il Teorema di Estensione di Caratheodory 7.2.2 è dunque definita una misura m su $\mathcal{B}(X \times \mathbb{R})$ tale che $\forall u, v \in C(X)$ tali che $u \leq v$:

$$\langle \phi, v - u \rangle = m[u, v)$$

Inoltre, m è invariante per "traslazioni verticali", ovvero per traslazioni lungo \mathbb{R} come in Figura 7.6:

$$m(E + c) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(X \times \mathbb{R}) \text{ e } \forall c \in C(X)$$

dove c è intesa come funzione continua, non soltanto come costante (cioè in un certo senso è "traslazione variabile" rispetto ad $x \in X$).

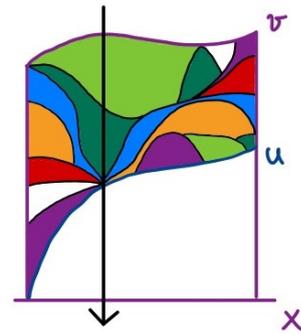


Figura 7.5: Esempio di partizione dell'insieme $[u, v)$ e della fibra di un punto x

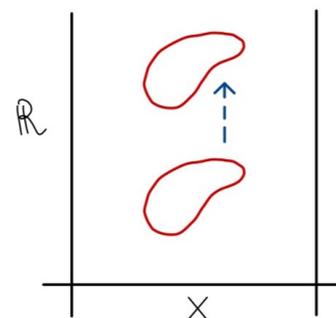


Figura 7.6: Rappresentazione della "traslazione verticale"

Infatti, è invariante per traslazioni la funzione d'insieme α su \mathcal{E} :

$$[u, v] + c = [u + c, v + c]$$

quindi:

$$\alpha([u, v] + c) = \langle \phi, (v + c) - (u + c) \rangle = \langle \phi, v - u \rangle = \alpha[u, v]$$

Di conseguenza, se α è invariante per queste traslazioni lo è anche la misura esterna α^* su $\mathcal{P}(X \times \mathbb{R})$ ²⁴ e a maggior ragione lo è la misura $m = \alpha^*|_{\mathcal{A}|_{\alpha^*}}$.

Lemma 7.7.1

Sia m una misura su $X \times \mathbb{R}$, invariante per "traslazione verticale", è della forma $m = \mu \otimes \lambda_1$.

Dimostrazione Lemma. Per ogni $E \in \mathcal{B}(X)$ posso considerare una misura ν su \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto m(E \times A) \end{aligned}$$

Definiamo la funzione "proiezione verticale" $p_E : E \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. In particolare $p_E^{-1}(A) = E \times A$ e nel nostro caso particolare:

$$\nu(A) = m(E \times A) = m(p_E^{-1}(A))$$

Ma dato che m è invariante per traslazioni verticali, allora ν è una misura invariante per traslazione su \mathbb{R} : è proprio la misura di Lebesgue a meno di moltiplicazione scalare. Possiamo quindi scrivere per ogni $E \in \mathcal{B}(X)$ ed ogni $A \in \mathbb{R}$:

$$m(E \times A) = \mu_E \cdot \lambda_1(A)$$

per normalizzare allora si considera $A = [0, 1]$ e si ottiene $\mu_E = m(E \times [0, 1])$.

Denotiamo con $q : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ la proiezione su X . Scrivendo il pushforward di m , allora:

$$\mu_E = q_*(m)(E)$$

Ne risulta che se definiamo $\mu = q_*(m)$ si ottiene la scrittura voluta nel lemma. Infatti a questo punto sui "rettangoli" del tipo $E \times A \in \mathcal{B}(X \times \mathbb{R})$ vale:

$$m(E \times A) = \mu_E \cdot \lambda_1(A) = \mu(E) \cdot \lambda_1(A) = (\mu \otimes \lambda_1)(E \times A)$$

Usando il Corollario 7.2.3.1, dato che m e $\mu \otimes \lambda_1$ coincidono sul π -sistema dei rettangoli che genera $\mathcal{B}(X \times \mathbb{R})$ allora $m = \mu \otimes \lambda_1$ su tutto $\mathcal{B}(X \times \mathbb{R})$. Segue la tesi. ■

Concludiamo quindi la dimostrazione del Teorema.

Per ogni $f \in C(X)$ non negativa, scrivo:

$$\langle \phi, f \rangle = \langle \phi, f - 0 \rangle = (\mu \otimes \lambda_1)([0, f])$$

cioè la misura del sottografico di f , per cui:

$$\begin{aligned} \langle \phi, f \rangle &= (\mu \otimes \lambda_1)([0, f]) = \int_{X \times \mathbb{R}} \chi_{[0, f(x)]}(t) d(\mu \otimes \lambda_1)(x, t) \\ &= \int_X \int_0^{+\infty} \chi_{[0, f(x)]}(t) d\lambda_1(t) d\mu(x) = \int_X \lambda_1([0, f(x)]) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

²⁴Se α ha una qualche invarianza ce l'ha anche α^* per costruzione di misura esterna.

In generale, per $f \in C(X)$ si può decomporre $f = f_+ - f_-$ come funzioni non negative. Applicando quanto appena visto:

$$\langle \phi, f \rangle = \langle \phi, f_+ - f_- \rangle = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu = \int_X f d\mu$$

quindi ho trovato la misura μ cercata. ■

7.7.2 Problema dei Momenti

Definizione 7.7.2 - Momento

Sia $I \subseteq \mathbb{R}^+$. Data una misura μ sui boreliani di I , per $k \in \mathbb{N}$ il momento k -esimo di μ è:

$$m(k) = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x) \in [0, +\infty]$$

Definizione 7.7.3 - Problema dei Momenti

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Data allora una successione $\{u(k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq [0, +\infty]$, dire se vi è una misura boreliana su I per la quale $\{u(k)\}$ sono i momenti.

Si chiama problema dei momenti di Hausdorff quando $I = [0, 1]$.

Con il Teorema 7.7.1 di Riesz-Markov-Kakutani sappiamo che i funzionali lineari positivi su $C^0([0, 1])$ hanno esattamente la forma:

$$\phi_\mu : f \mapsto \int_I f(x) d\mu$$

quindi il problema si può tradurre in questo modo: data una successione $\{u(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dire se è la successione dei momenti di un funzionale lineare positivo $\phi \in C^0([0, 1])$ (cioè per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale²⁵ $u(k) = \langle \phi, x^k \rangle$).

Condizioni Necessarie su $\{u(k)\}$

Studieremo ora delle condizioni necessarie affinché il problema abbia soluzione.

Sia μ un funzionale lineare positivo su $C^0([0, 1])$. La sua successione dei momenti sarà non negativa e decrescente, infatti per ogni $0 \leq k < h$ interi vale che:

- $x^k \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, per cui $\langle \mu, x^k \rangle \geq 0$.
- $x^k \geq x^h$ per ogni $x \in [0, 1]$, per cui $\langle \mu, x^k \rangle \geq \langle \mu, x^h \rangle$.

Più in generale, dato che $x^k(1 - x^n) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$ vale che:

$$0 \leq \langle \mu, x^k(1 - x^n) \rangle = \langle \mu, \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} x^{j+k} \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} m_\mu(j+k)$$

dove indichiamo $m_\mu(k) = \langle \mu, x^k \rangle$. Ma allora affinché ci sia soluzione al problema dei momenti la successione $u \in \ell_\infty$ dev'essere tale che:

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} u(j+k) \geq 0 \tag{7.4}$$

²⁵Il prodotto scalare $\langle \mu, f \rangle = \int_X f(x) d\mu(x)$.

Riscriviamo ora questa condizione con operatori su ℓ_∞ . In particolare definiamo l'operatore "shift sinistro" S tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in \ell_\infty$:

$$[Su](k) = u(k+1)$$

Si ottiene che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\langle \mu, x^k \rangle = m_\mu(k) = [S^k m_\mu](0) = \langle e_0, S^k m_\mu \rangle$$

e allora per linearità del prodotto scalare:

$$\langle \mu, x^k(1-x^n) \rangle = [S^k(I-S^n)m_\mu](0) = [(I-S)^n m_\mu](k)$$

Si riscrive la condizione necessaria 7.4 come:

$$(I-S)^n u = (-1)^n (S-I)^n u \geq 0 \quad (7.5)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 7.7.4 - Successione Completamente Monotona

Una successione $u \in l_\infty$ che verifica l'equazione 7.5 viene chiamata completamente monotona.

D'ora in poi indicheremo con $C^0([0,1])^*$ come il duale di $C^0([0,1])$ (ovvero lo spazio di Banach dei funzionali lineari continui che agiscono su $C^0([0,1])$).

Consideriamo ora l'operatore lineare B_n (per i polinomi di Bernstein). Possiamo definirne il duale:

$$B_n^* : C^0([0,1])^* \longrightarrow C^0([0,1])^* \\ \phi \longmapsto \phi \circ B_n$$

in modo tale che valga la proprietà sul prodotto scalare "valutazione"²⁶:

$$\langle B_n^* \phi, f \rangle = \langle \phi, B_n f \rangle$$

per ogni $\phi \in C^0([0,1])^*$ e per ogni $f \in C^0([0,1])$.

Scriviamo allora esplicitamente la valutazione su $f \in C^0([0,1])$ di $B_n \mu$:

$$\begin{aligned} \langle B_n^* \mu, f \rangle &= \langle \mu, B_n f \rangle = \left\langle \mu, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle e_{\frac{k}{n}}, f \rangle \langle \mu, x^k (1-x^n) \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \mu, x^k (1-x^n) \rangle e_{\frac{k}{n}}, f \right\rangle \end{aligned}$$

Per cui l'operatore $B_n^* \mu$ si scrive come combinazione lineare di $e_0, e_{\frac{1}{n}}, \dots, e_1$:

$$B_n^* \mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \mu, x^k (1-x^n) \rangle e_{\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^n c(k, n) e_{\frac{k}{n}}$$

dove i coefficienti della combinazione lineare si scrivono:

$$c(k, n) = \binom{n}{k} \langle \mu, x^k (1-x^n) \rangle = \binom{n}{k} [S^k(I-S)^{n-k} m_\mu](0)$$

²⁶Il prodotto scalare $\langle \phi, f \rangle = \phi(f)$ è la valutazione del funzionale lineare ϕ su f .

L'idea alla base del seguente Teorema è, data una successione completamente monotona $u \in l_\infty$, cercare se esiste il limite di:

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n c(k, n) e_{\frac{k}{n}}$$

ad una misura μ che risolve il problema dei momenti.

Teorema 7.7.2 - Teorema di Hausdorff

Sia $u \in l_\infty$ una successione completamente monotona di numeri reali tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(I - S)^n u \geq 0$$

Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ definiamo i coefficienti:

$$c(k, n) = \binom{n}{k} [(I - S)^{n-k} u](0) \geq 0$$

Sia allora per $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n c(k, n) e_{\frac{k}{n}}$$

Allora per ogni $f \in C^0([0, 1])$ si ha che:

$$\langle \mu_n, f \rangle = [B_n f(S)(u)](0)$$

e quindi $\langle \mu_n, f \rangle$ converge a $\langle \mu, f \rangle$ dove μ è un funzionale lineare positivo su $C^0([0, 1])$ tale che $m_\mu = u$ (ovvero $\mu_n \rightarrow \mu$ puntualmente).

Dimostrazione. L'identità $\langle \mu_n, f \rangle = [B_n f(S)(u)](0)$ viene dalla definizione di $B_n f$ e dei coefficienti $c(k, n)$. Infatti:

$$\begin{aligned} \langle \mu_n, f \rangle &= \sum_{k=0}^n c(k, n) f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [S^k (Id - S)^{n-k} u](0) f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) S^k (Id - S)^{n-k} \right] u(0) = [B_n f(S)(u)](0) \end{aligned}$$

Se $f(x) = x^k$ allora $B_n(x^k) = x^k + \varepsilon_{k,n}(x)$ dove $\varepsilon_{k,n}$ è un polinomio che converge uniformemente a zero su $[0, 1]$ (per il Teorema di Bernstein, visto che $B_n x^k \xrightarrow{\text{unif}} x^k$ sui compatti), di grado $\leq k$ quindi nello spazio di dimensione $k + 1$:

$$\Pi_k = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq k\}$$

In particolare tende a zero la somma dei $k + 1$ coefficienti del polinomio $\varepsilon_{k,n}$ per $n \rightarrow +\infty$. Perciò anche $B_n x^k(S) = S^k + \varepsilon_{k,n}(S) \rightarrow S^k$ nella norma degli operatori e per $n \rightarrow +\infty$. Ma allora:

$$\langle \mu_n, x^k \rangle = [B_n x^k(S)u](0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S^k u(0) = u(k)$$

ovvero abbiamo trovato che il momento k -esimo converge ad $u(k)$ come volevamo. Siccome μ_n è un funzionale lineare non negativo, la sua norma è:

$$\|\mu_n\| = \langle \mu_n, 1 \rangle = [B_n 1(S)u](0) = u(0)$$

perchè $B_n 1 = id$. Perciò μ_n è una successione di funzioni equilipschitziane²⁷ (di costante $\|\mu_n\| = u(0)$) che converge puntualmente sul sottoinsieme denso di $C^0(I)$ costituito dai polinomi, dato che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\langle \mu_n, x^k \rangle \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x^k$$

e per linearità allora:

$$\langle \mu_n p \rangle \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} p$$

per ogni $p \in \mathbb{R}[x]$. Ricordando che una successione di funzioni equicontinue a valori reali ha come insieme di convergenza un sottoinsieme chiuso del dominio, si conclude che μ_n converge puntualmente dappertutto, dato che l'insieme dei polinomi è denso in $C^0(I)$:

$$\langle \mu_n, f \rangle \rightarrow \mu(f)$$

per ogni $f \in C^0(I)$. Allora il limite è anch'esso un funzionale lineare e positivo (perchè queste proprietà passano al limite) e quindi continuo ($\|\mu\| = \langle \mu, 1 \rangle < +\infty$, quindi è lipschitziano) e verifica

$$\langle \mu, x^k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu_n, x^k \rangle = u(k)$$

cioè μ risolve il problema dei momenti per la successione $u \in \ell_\infty$. ■

Osservazione 7.7.1 - Unicità soluzione del Problema di Hausdorff

L'unicità della soluzione segue subito dal Teorema di densità di Weierstrass: se conosco i momenti di un funzionale lineare positivo sui monomi allora per linearità li conosco sui polinomi. Per densità concludo che li conosco per ogni $f \in C^0([0, 1])$.

²⁷Ricordiamo che la costante di Lipschitz per operatori lineari è proprio la norma degli operatori.

Capitolo 8

Sottovarietà Differenziali di \mathbb{R}^n

8.1 Sottovarietà Differenziali: definizioni

Commento 11. *Dejavù? Vi sembra di aver già sbattuto la testa sul tavolo ripetute volte per queste definizioni? No, non siete voi che vi state sbagliando o vi ricordate male, non volevamo spaventarvi, più di quanto non abbiamo già fatto, ma le definizioni che seguiranno trattano sottovarietà differenziali in \mathbb{R}^n , mentre quelle del Capitolo 3 erano in spazi di Banach (aaahhhhh i mostri).*

Abbiamo quindi ripetuto le definizioni per la nostra e la vostra gioia. Lo sappiamo, vi abbiamo a cuore.

Definizione 8.1.1 - Sottovarietà Differenziale

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$. Σ è una sottovarietà differenziabile k -dimensionale se per ogni $p \in \Sigma$ esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^n$ di p e un diffeomorfismo:

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$$

tale che:

$$\varphi(U \cap \Sigma) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

Esempio 8.1.1

Riportiamo una rappresentazione grafica del diffeomorfismo φ :

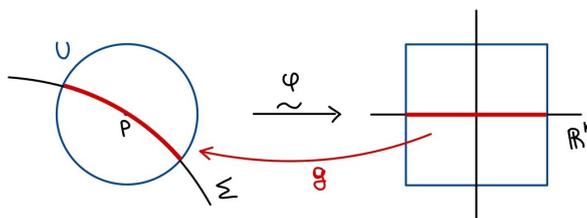


Figura 8.1: Esempio di sottovarietà differenziabile

Definizione 8.1.2 - Parametrizzazione Locale Regolare

Nelle ipotesi della Definizione 8.1.1, chiamiamo $V = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ e $g = \varphi^{-1}|_V$. Allora g si chiama parametrizzazione locale regolare in p , cioè:

$$g : V \xrightarrow{\sim} U \cap \Sigma$$

che è un omeomorfismo con differenziale iniettivo in ogni punto.

Definizione 8.1.3 - Spazio Tangente

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà k -dimensionale di \mathbb{R}^n , $p \in \Sigma$. Lo spazio tangente si definisce:

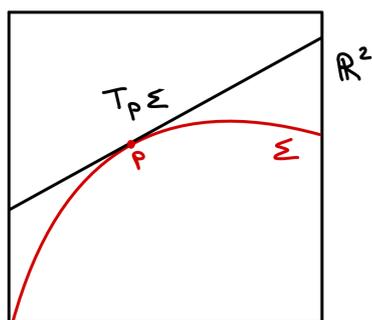
$$T_p\Sigma = Dg(0) \left(\mathbb{R}^k \right)$$

dove si intende g parametrizzazione locale regolare con $g(0) = p$:

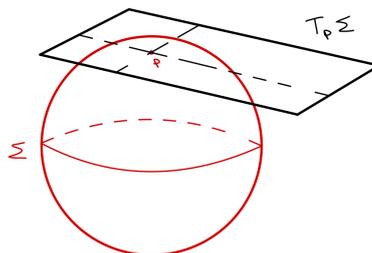
$$Dg(0) : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_p\Sigma$$

Esempio 8.1.2

Riportiamo due rappresentazioni grafiche di spazio tangente:



(a) Spazio tangente con $n = 2$ e $k = 1$



(b) Spazio tangente con $n = 3$ e $k = 2$

Osservazione 8.1.1

Siano $g' : V' \xrightarrow{\sim} W \subseteq \Sigma$ un'altra parametrizzazione locale regolare:

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{g'} & W \subseteq \Sigma \\ & \searrow g & \nearrow \\ V & & \end{array}$$

Allora $g' = g \circ h$ con $h : V \xrightarrow{\sim} V'$ diffeomorfismo locale tra aperti di \mathbb{R}^k .

Definizione 8.1.4 - Mappa Differenziabile tra Sottovarietà

Siano $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Sigma' \subseteq (\mathbb{R}^n)'$ sottovarietà differenziabili. La funzione $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ è una mappa differenziabile se e solo se per ogni $p \in \Sigma$ e per ogni parametrizzazione locale regolare g , la composizione¹:

$$V \xrightarrow{g} \Sigma \xrightarrow{f} \Sigma' \xrightarrow{j} (\mathbb{R}^n)'$$

è differenziabile (dove $j : \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}^n$ è l'immersione).

Equivalentemente, la funzione è una mappa differenziabile se per ogni $p \in \Sigma$ f si estende ad un'applicazione differenziabile tra un intorno di p in \mathbb{R}^n ed un intorno di $f(p)$ in $(\mathbb{R}^n)'$.

Proposizione 8.1.1

Siano $\Sigma, \Sigma' \subseteq$ sottovarietà differenziabili e $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ mappa differenziabile. Allora il differenziale

$$Df(p) : T_p\Sigma \longrightarrow T_{f(p)}\Sigma'$$

si può definire in due modi (rispettivamente con le 2 definizioni di mappa differenziabile):

¹Indichiamo $(\mathbb{R}^n)'$ lo spazio di arrivo per intendere lo spazio in cui si immerge Σ' , distinto da quello di Σ .

1. $Df(p) = D(j \circ f \circ g)(0) \circ [Dg(0)]^{-1}$.
2. estendendo f ad una mappa \tilde{f} differenziabile tra intorni di \mathbb{R}^n ed $(\mathbb{R}^n)'$ e restringendo: $Df(p) = D\tilde{f}(p)|_{T_p\Sigma}$.

Dimostrazione. Segue dalle definizioni. ■

Osservazione 8.1.2 - Composizione

Vale la regola di composizione. Se $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma' \xrightarrow{f'} \Sigma''$ allora:

$$D(f' \circ f)(p) = Df'(f(p)) \circ Df(p)$$

8.2 Misure Superficiali di Sottovarietà

8.2.1 Definizioni

Definizione 8.2.1 - Determinante del Differenziale

Siano $\Sigma, \Sigma' \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà differenziabili k -dimensionali. Sia $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ differenziabile. E' ben definita:

$$|\det Df(p)| = \sqrt{\det Df(p)^T Df(p)}$$

Definizione 8.2.2 - Misura Superficiale su $E \subseteq \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$

Data una parametrizzazione locale $g : V \xrightarrow{\sim} W \subseteq \Sigma$ e sia $E \subseteq W$ boreliano tale che $E = g(F)$, F boreliano di V . Definiamo allora:

$$\sigma(E) = \int_F \sqrt{\det Dg(x)^T Dg(x)} dx$$

Osservazione 8.2.1

E' una buona definizione, in quanto $\sigma(E)$ non dipende dalla parametrizzazione g .

Dimostrazione. Siano due g, g' parametrizzazioni locali. Per quanto visto, $g' = g \circ h$ ed in particolare:

$$Dg'(x) = Dg(h(x)) Dh(x)$$

Segue che, moltiplicando per il trasposto di $Dg'(x)$:

$$(Dg'(x))^T Dg'(x) = (Dh(x))^T ((Dg(h(x)))^T Dg(h(x))) Dh(x)$$

Ma allora per cambio di variabile, indicando $E = g(F) = g'(F')$, ovvero $F = h(F')$:

$$\begin{aligned} \int_{F'} \sqrt{\det ((Dg'(x))^T Dg'(x))} dx &= \int_{F'} \sqrt{\det ((Dg(x))^T Dg(x))} |det Dh(x)| dx \\ &= \int_F \sqrt{\det ((Dg(y))^T Dg(y))} dy \end{aligned}$$

cioè la tesi. ■

Definizione 8.2.3 - Misura Superficiale su $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ unione numerabile di aperti, $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$ tali che:

$$g_i : V_i \xrightarrow{\sim} W_i$$

parametrizzazioni locali.

Consideriamo $X_j = W_j \subseteq \bigcup_{i < j} W_i$, per cui $\Sigma = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$, per poter definire per ogni $E \subseteq \Sigma$ boreliano:

$$\sigma(E) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma(X_j \cap E)$$

In particolare, $\sigma(E)$ è indipendente dalla partizione $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ per Σ .

8.2.2 Teoremi su Misure Superficiali

Proposizione 8.2.1 - Cambio di Variabile tra Varietà

Sia $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ mappa differenziabile tra sottovarietà k -dimensionali e sia $E \subseteq \Sigma$ boreliano. Sappiamo che:

$$\sigma(f(E)) \leq \int_E |\det Df(x)| dx$$

dove l'uguaglianza vale per f iniettiva.

Allora per ogni $u : \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile non negativa vale che:

$$\int_{\Sigma'} u(y) d\sigma(y) \leq \int_{\Sigma} u(f(x)) |\det Df(x)| dx$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla Formula 7.4.9 che vale per $f : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. ■

Teorema 8.2.1 - Teorema di Sard

Sia $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ mappa differenziabile tra sottovarietà k -dimensionali. Allora:

$$\sigma(\text{Sing}(f)) = \sigma(f(\{x \in \Sigma \mid Df(x) \text{ non invertibile}\})) = 0$$

Cioè l'insieme dei punti in cui il differenziale non è invertibile ha misura di Lebesgue nulla.

Dimostrazione. Omessa. ■

Definizione 8.2.4 - Bordo C^1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω è un aperto con bordo C^1 se per ogni $p \in \partial\Omega$ esistono un intorno aperto U di p ed un diffeomorfismo $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U)$ tra aperti di \mathbb{R}^n tali che:

$$\begin{cases} \varphi(U \cap \partial\Omega) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \\ \varphi(U \cap \bar{\Omega}) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0]) \end{cases}$$

Definizione 8.2.5 - Normale Esterna

La normale esterna in p è, indicando con e_n l' n -esima coordinata di \mathbb{R}^n :

$$\nu_{ext}(p) = (D\varphi(p))^T [e_n]$$

che è ortogonale all'iperpiano $T_p(\partial\Omega) = (D\varphi(p))^{-1} (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.

Dimostrazione. Infatti, ricordando che il prodotto scalare è $\langle x, y \rangle = x^T y$:

$$\begin{aligned} \langle \nu(p), T_p(\partial\Omega) \rangle &= \langle (D\varphi(p))^T [e_n], (D\varphi(p))^{-1} [\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}] \rangle \\ &= e_n^T D\varphi(p) \cdot [D\varphi(p)]^{-1} [\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}] = e_n^T \cdot (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \\ &= \langle e_n, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \rangle = 0 \end{aligned}$$

■

Osservazione 8.2.2

Con questa definizione, si ottiene effettivamente un vettore ortogonale ma non è ben chiaro perché funzioni.

Cerchiamo quindi di giustificarla lavorando con un bordo $\partial\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ che è sottovarietà $(n-1)$ -dimensionale.

Consideriamo il diffeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora per definizione abbiamo che:

$$\nu_{ext}(p) = [D\varphi(p)]^T e_n$$

Scrivendo il differenziale come Jacobiano:

$$D\varphi(p) = [\partial_1\varphi(p) \mid \dots \mid \partial_n\varphi(p)]$$

allora il suo trasposto, applicato poi al vettore e_n , sarà:

$$\nu_{ext}(p) = [D\varphi(p)]^T e_n = \begin{bmatrix} \partial_1 \varphi(p) \\ \vdots \\ \partial_n \varphi(p) \end{bmatrix} e_n = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_n(p) \\ \vdots \\ \partial_n \varphi_n(p) \end{pmatrix}$$

Le coordinate della normale esterna indicano per ogni "spostamento" lungo le coordinate di $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega$ quanto ci si allontana dal bordo $\partial\Omega$ (l'allontanamento di un punto x da $\partial\Omega$ è quantificato proprio da φ_n : immaginando il codominio \mathbb{R}^n di φ , è in un certo senso la "distanza" di $\varphi(x)$ da $(\mathbb{R}^{n-1} \otimes \{0\})$).

Esempio 8.2.1

Riportiamo un esempio elementare che giustifica quanto osservato. Consideriamo la retta $r \subseteq \mathbb{R}^2$ passante per l'origine parametrizzata:

$$r : t \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta)$$

dove $\theta \in [0, 2\pi)$. Questa è banalmente una 1-sottovarietà di \mathbb{R}^2 ed il diffeomorfismo esplicito è dato dalla rotazione che porta r sull'asse x (ossia su $\mathbb{R} \times \{0\}$):

$$\varphi(p) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

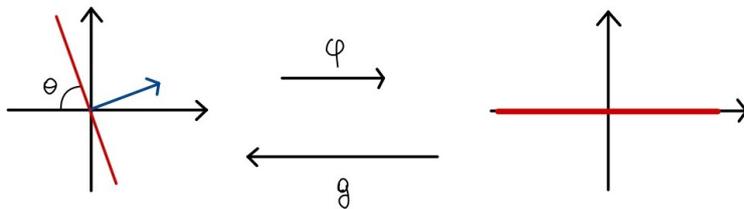


Figura 8.3: Rappresentazione grafica della φ e della normale esterna

La coordinata che definisce la normale esterna è $\varphi_2 = x \cos \theta + y \sin \theta$. Graficamente notiamo che questa coordinata identifica proprio la distanza di (x, y) dall'origine, quello che abbiamo impropriamente chiamato "allontanamento".

Calcoliamo allora la normale esterna:

$$\nu_{ext}(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_2(p) \\ \partial_2 \varphi_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ci si rende subito conto (come si vede in Figura 8.3) che questo vettore $\nu_{ext}(p)$ "massimizza" la distanza dalla retta r tra tutti i possibili spostamenti di norma 1 dal punto p .

Definizione 8.2.6 - Divergenza

Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabile, si definisce la divergenza di F in $x \in \Omega$ come:

$$\operatorname{div} F(x) = \operatorname{tr} DF(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$$

se indichiamo $F = (f_1, \dots, f_n)$.

Citazione 20. *Ah si, si... e poi scusate, un lungo spiccinò, come si direbbe, di fatterelli tutti abbastanza semplici ma vanno detti.*

Per la dimostrazione del Teorema 8.2.2 è necessario fare delle considerazioni su aperti normali e con bordo C^1 .

Fatterello 8.2.1 - Grafici di funzioni come sottovarietà

Sia $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 , dove $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ è aperto. Allora $\Sigma = \text{graph}(\varphi)$ è una sottovarietà $n - 1$ -dimensionale di \mathbb{R}^n con parametrizzazione²:

$$g = \text{id}_{\mathbb{R}^n} - \varphi \cdot e_n : U \times \mathbb{R} \longrightarrow U \times \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})e_n$$

Infatti notiamo che:

$$g(U \times \{0\}) = \Sigma$$

Inoltre φ è C^1 quindi anche g lo è. Essendo invertibile (verifica banale se si scrive g in forma matriciale), è un diffeomorfismo.

Calcolo il differenziale:

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -\partial_1\varphi & -\partial_2\varphi & \cdots & -\partial_{n-1}\varphi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\nabla\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

Allora osserviamo che lo spazio tangente si scrive:

$$T_{(x, \varphi(x))}\Sigma = \text{graph}D\varphi(x) = \{(v, \nabla\varphi(x) \cdot v) \mid v \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

e che la normale esterna è:

$$\nu_{\text{ext}}(x, \varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x)\|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\varphi(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato $E \subseteq U$ boreliano, la misura dell'insieme $g(U) \subseteq \Sigma$ è:

$$\sigma(g(E)) = \int_E \sqrt{\det Dg(x)^T Dg(x)} dx$$

Calcoliamo il determinante. Sappiamo che³:

$$Dg(x)^T Dg(x) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \nabla\varphi(x)^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \nabla\varphi(x) & 1 \end{bmatrix} = I_n + \begin{pmatrix} \nabla\varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \nabla\varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora, dati $a, b \in \mathbb{R}^n$, cerchiamo gli autovalori di $a \otimes b$: saranno 0 con molteplicità $n - 1$ (in quanto le colonne sono multipli tra loro) e $a \cdot b$ con molteplicità 1. Segue che gli autovalori di $I_n + a \otimes b$ saranno 1 con molteplicità $n - 1$ e $1 + a \cdot b$ con molteplicità 1. Quindi:

$$\det(I_n + a \otimes b) = 1 + a \cdot b$$

Nel nostro caso particolare:

$$\sigma(g(E)) = \int_E \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x)\|^2} dx$$

²La funzione g è una traslazione della quantità $\varphi(x)$, per ogni retta perpendicolare ad $U \times \{0\}$.

³L'operazione $\otimes : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}(\mathbb{R})$ è definita componente per componente come: $(a \otimes b)_{i,j} = a_i b_j$.

Proposizione 8.2.2 - Aperto come unione di aperti normali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ aperto limitato con bordo C^1 . Consideriamo la proiezione:

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array}$$

Allora valgono i seguenti risultati:

1. $K = P(\{x \in \partial\Omega \mid \langle e_n, \nu_{ext}(x) \rangle = 0\}) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ha misura nulla.
2. $\Omega \setminus K \times \mathbb{R}$ è unione di aperti normali⁴ con proiezioni sulle componenti connesse di $P(\Omega) \setminus K$

Dimostrazione. Dimostro i due punti separatamente.

1. Si osserva che $P|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ è una mappa differenziabile e per ogni $x \in \partial\Omega$ il suo differenziale in x che scriviamo come mappa:

$$DP|_{T_x\partial\Omega} : T_x\partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

in quanto si può considerare lo spazio tangente per come è definito $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Quindi è invertibile se e solo se $e_n \notin T_x(\partial\Omega)$, cioè per definizione se e solo se:

$$\langle e_n, \nu_{ext}(x) \rangle \neq 0$$

Ma allora possiamo scrivere l'insieme K nei seguenti termini:

$$\begin{aligned} K &= P(\{x \in \partial\Omega \mid DP|_{\partial\Omega}(x) \text{ non è invertibile}\}) \\ &= P(\{x \in \partial\Omega \mid \langle e_n, \nu_{ext}(x) \rangle = 0\}) \end{aligned}$$

e per il Teorema di Sard 8.2.1, K ha misura $(n-1)$ -dimensionale nulla.

2. Cominciamo con un'osservazione.

Osservazione 8.2.3 - $\partial\Omega$ come grafico di funzione

Sotto la condizione $\langle e_n, \nu_{ext}(x) \rangle \neq 0$ si può descrivere localmente il bordo $\partial\Omega$ come grafico di una funzione $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dato $p \in \partial\Omega$, sapendo che $\partial\Omega$ è una sottovarietà $(n-1)$ -differenziale, consideriamo l'intorno $U \subseteq \mathbb{R}^n$ di p tale che ci sia il diffeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$.

Si può definire una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = [\varphi(x)]_n = \langle \varphi(x), \nu_{ext}(x) \rangle$$

(l' n -esima coordinata di $\varphi(x)$) che indica intuitivamente la "distanza" di $x \in U$ dal bordo $\partial\Omega$. Infatti $x \in U \cap \partial\Omega$ se e solo se $f(x) = 0$. Ma allora applico il Teorema della Funzione Implicita 3.3.6 che richiede come ipotesi $\partial_n f(x) \neq 0$, cioè proprio⁵ $\langle \nabla f, e_n \rangle \neq 0$.

Si può definire localmente una funzione $u : P(U \cap \partial\Omega) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il bordo $\partial\Omega$ sia il grafico di U :

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n \iff (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega$$

⁴Un aperto normale è un insieme che è descritto dalla zona compresa tra 2 grafici, ad esempio date $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $f < g$: $A = \{(y, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(y) < t < g(y)\}$.

⁵Nelle note Majer osserva che ∇f è la normale esterna di $\partial\Omega$. Intuitivamente ciò è coerente con quanto definito, ma non abbiamo trovato spiegazione formale di questo fatto.

Sia $A = P(\Omega) \setminus K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Consideriamo un punto $y \in A$: la retta $r = \{x \in \mathbb{R}^n | P(x) = y\}$ interseca $\partial\Omega$ soltanto in punti $p_i \in \partial\Omega$ con $\langle \nu_{ext}(p), e_n \rangle \neq 0$ ovvero dove il bordo $\partial\Omega$ è grafico di una funzione definita $u : U_y \rightarrow \mathbb{R}$ con U_y intorno di y (per l'osservazione precedente). Si vede che:

- l'insieme delle intersezioni del bordo con r , indichiamo $\{p_1, \dots, p_{n_y}\}$, è finito. Infatti Ω è limitato, quindi $I = r \cap \partial\Omega$ è limitato. Inoltre, ogni punto d'intersezione è punto isolato, in quanto in un intorno U_i di ogni p_i il bordo è grafico di una funzione (quindi è l'unico punto di $U_i \cap \partial\Omega$ con proiezione y). Allora il numero di intersezioni è finito su I limitato, altrimenti vi sarebbero punti di accumulazione.

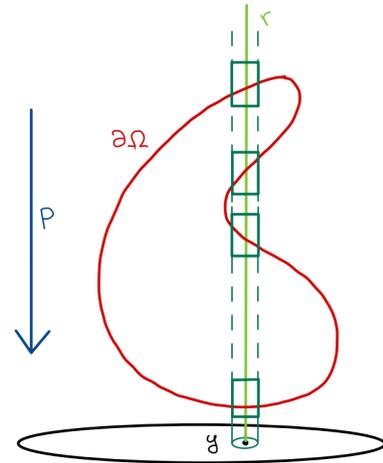


Figura 8.4: Rappresentazione della parametrizzazione locale del bordo $\partial\Omega$

- fissato $y \in A$, $\{p_1, \dots, p_{n_y}\}$ è di stessa cardinalità per tutti i punti di U_y (perchè per ogni intersezione p_i , il bordo è localmente descrivibile in un suo intorno come grafico di funzione). Associamo ad ogni punto di A il numero n_y corrispondente.
- n_y è pari: percorrendo la retta r , ad ogni intersezione si passa dalla parte interna di Ω al complementare di Ω . Dato che la retta sta "definitivamente" (ovvero andando a $\pm\infty$) fuori da Ω limitato, il numero di volte che la retta "entra/esce" da Ω è pari.
- n_y è costante sulle componenti connesse di A . Infatti l'insieme $W_n = \{y \in A \mid n_y = n\}$ è aperto (intorno di ogni suo punto: se $y \in W_n$ allora per costruzione $U_y \subseteq W_n$). Dato che P è continua, $P^{-1}(W_n)$ è aperto. Analogamente $V_n = \{y \in A \mid n_y \neq n\}$ è aperto in quanto unione numerabile di aperti $V_n = \bigcup_{m \neq n} W_m$.

Sia $C(y) \subseteq A$ componente connessa di A . Ma $C(y) \cap P^{-1}(W_n)$ e $C(y) \cap P^{-1}(V_n)$ aperti disgiunti che ricoprono $C(y)$. Dato che $y \in W_{n_y} \neq \emptyset$ vale che $W_{n_y} = C(y)$. Cioè n_y è costante sulle componenti connesse.

In ogni componente connessa $B \subseteq A$, per ogni $y \in B$ possiamo numerare in ordine crescente le intersezioni: $p_{1,y}, \dots, p_{n_B,y}$. Definiamo per $i = 1, \dots, n_B$ le funzioni:

$$\begin{aligned} f_i : B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto p_{i,y} \end{aligned}$$

in modo che $f_1 < \dots < f_{n_B}$. In particolare per ogni $y \in B$ vale che $(y, f_i(y)) \in \partial\Omega$. Per il Teorema della Funzione Implicita, queste funzioni f_i sono di classe C^1 (sono C^1 localmente, su ogni U_y).

Si osserva che possiamo scrivere per le osservazioni fatte:

$$\Omega \cap (B \times \mathbb{R}) = \bigsqcup_{i=1}^{\frac{n_B}{2}} \{(y, t) \in B \times \mathbb{R} \mid f_{2i-1}(y) < t < f_{2i}(y)\}$$

Per cui unendo al variare delle componenti connesse:

$$\Omega \cap (K \times \mathbb{R}) = \bigsqcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ comp. conn.}}} \left(\bigsqcup_{i=1}^{\lfloor \frac{nB}{2} \rfloor} \{(y, t) \in B \times \mathbb{R} \mid f_{2i-1}(y) < t < f_{2i}\} \right)$$

ovvero unione disgiunta di aperti normali. ■

Teorema 8.2.2 - Formula della Divergenza

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo C^1 . Sia $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Allora:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(y), \nu_{\text{ext}}(y) \rangle d\sigma(y)$$

Dimostrazione. Osserviamo che per linearità:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i F(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_i F(x) dx$$

Dimostriamo quindi che sulla componente $i \in \{1, \dots, n\}$ valga:

$$\int_{\Omega} \partial_i F(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(y) \langle \nu_{\text{ext}}(y), e_i \rangle d\sigma(y)$$

Vediamo un caso più semplice e poi generalizziamo.

- Ci restringiamo al caso di Ω aperto normale. Consideriamo $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ aperto, siano $\varphi^-, \varphi^+ \in C^1(U, \mathbb{R})$ tali che $\varphi^- \leq \varphi^+$. Allora, considerando il caso $i = n$, definiamo l'aperto normale:

$$\Omega = \{(x, t) \in U \times \mathbb{R} \mid \varphi^-(x) \leq t \leq \varphi^+(x)\}$$

Il bordo $\partial\Omega$ si può suddividere in 3 "componenti": $\operatorname{graf}(\varphi^+) = \Sigma^+$, $\operatorname{graf}(\varphi^-) = \Sigma^-$ e le pareti, con normale esterna perpendicolare a $\{0\} \times \mathbb{R}$ (quindi hanno contributo nullo nell'integrale che vogliamo calcolare).

Integrando su Ω , quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_n F(x, t) d(x, t) &= \int_U \int_{\mathbb{R}} \partial_n F(x, t) \chi_{[\varphi^-(x), \varphi^+(x)]}(t) d(x, t) \\ &= \int_U \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} \partial_n F(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_U (f(x, \varphi^+(x)) - f(x, \varphi^-(x))) dx \\ &= \int_U f(x, \varphi^+(x)) dx - \int_U f(x, \varphi^-(x)) dx \end{aligned}$$

Applichiamo i risultati del Fatterello 8.2.1 alla funzione φ^+ . Si ottiene che:

$$\langle \nu_{\text{ext}}(x, \varphi^+(x)), e_n \rangle \sqrt{1 + \|\nabla \varphi^+(x)\|^2} = 1$$

Inserendo questa quantità nell'integrando e applicando il cambio di variabile:

$$\begin{aligned}\int_U f(x, \varphi^+(x)) dx &= \int_U f(x, \varphi^+(x)) \langle \nu_{ext}(x, \varphi^+(x)), e_n \rangle \sqrt{1 + \|\nabla \varphi^+(x)\|^2} dx \\ &= \int_{\Sigma^+} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y)\end{aligned}$$

Similmente, si ottiene che:

$$\int_U f(x, \varphi^-(x)) dx = - \int_{\Sigma^-} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y)$$

Quindi mettendo assieme i risultati si ottiene l'integrale cercato, ovvero:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \partial_n F(x, t) d(x, t) &= \int_{\Sigma^+} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y) - \int_{\Sigma^-} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y) \\ &\stackrel{(\star)}{=} \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y) = \int_{\partial\Omega} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y)\end{aligned}$$

dove al passaggio (\star) bisogna tenere conto dell'orientazione della superficie Σ^- : la normale esterna ha verso opposto, quindi il segno "−" del termine soprastante viene cambiato quando si fa l'unione del dominio d'integrazione: $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$.

- Sia Ω un aperto con bordo C^1 qualsiasi. Allora si applica la Proposizione 8.2.2 e si può scomporre:

$$\Omega = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$$

Allora, per linearità dell'integrale:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \partial_n F(x, t) d(x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega_n} \partial_n F(x, t) d(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\partial\Omega_n} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} f(y) \langle \nu_{ext}(y), e_n \rangle d\sigma(y)\end{aligned}$$

Ma allora abbiamo la tesi. ■

Capitolo 9

Amenità

Piccola nota degli autori

Questo capitolo viene creato in modo da raccogliere vari fatterelli interessanti/amenità che non sono stati visti in classe ma sono utilizzati dal prof Pietro Majer nelle stravaganti soluzioni a compiti passati.

Sia chiaro, non è detto che ne troverete mai utilità ma... vostra nonna non direbbe la stessa cosa riguardo al vostro percorso di studi?

La funzione di Pompeiu¹

Una funzione ϕ derivabile ovunque, con derivata limitata ϕ' discontinua in un insieme denso di punti. Sia $(a_k)_{k \geq 1}$ una successione di numeri positivi con somma finita. Sia $(q_k)_{k \geq 1}$ un sottoinsieme numerabile denso di $[0, 1]$. Consideriamo la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla serie normalmente convergente

$$f(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt[3]{x - q_k}, \quad x \in [0, 1],$$

dove $a_0 := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt[3]{q_k}$, cosicché $f(0) = 0$. Pur di moltiplicare tutti gli $(a_k)_{k \geq 0}$ per un fattore moltiplicativo positivo, possiamo assumere che $f(1) = 1$.

Consideriamo inoltre la funzione $g : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ definita dalla serie positiva ottenuta derivando formalmente la serie della f (e dove si intende $g(q_n) := +\infty$).

$$g(x) := \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt[3]{(x - q_k)^2}}.$$

Poichè ogni termine della serie della f è una funzione strettamente crescente di x e limitata da a_k in valore assoluto, la f è strettamente crescente e continua, e si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt[3]{(x - q_k)^2}}.$$

Perciò la derivata inferiore del Dini di f verifica $D_* f(x) \geq g(x)$ in ogni punto, e in particolare esiste $f'(x) = +\infty$ per tutti i punti $x \in [0, 1]$ per cui $g(x) = +\infty$. Poichè g è somma di una serie di funzioni positive e continue (quindi estremo superiore delle sue somme parziali) è semicontinua inferiormente; in particolare è continua in ogni x dove

¹Ringraziamo il prof Pietro Majer per le note di questa Sezione.

$g(x) = +\infty$. D'altra parte poiché $\{g = +\infty\}$ è denso in $[0, 1]$, la g è certamente discontinua in x se $g(x) < +\infty$. Quindi

$$\text{cont}(g) = \{g = +\infty\}.$$

Proviamo ora che se invece $g(x) < +\infty$ allora f è derivabile in x con $f'(x) = g(x)$. Per ogni y e x si ha

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - g(x)(y - x) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\sqrt[3]{y - q_k} - \sqrt[3]{x - q_k} - \frac{y - x}{3\sqrt[3]{(x - q_k)^2}} \right]. \end{aligned}$$

Ponendo

$$u := \sqrt[3]{x - q_k} \quad v := \sqrt[3]{y - q_k}$$

il termine fra parentesi quadre nella somma si scrive

$$v - u - \frac{1}{3}u^2(v^3 - u^3) = \frac{v^3 - u^3}{u^2} \left(\frac{u^2}{v^2 + uv + u^2} - \frac{1}{3} \right)$$

dove l'espressione razionale omogenea

$$\frac{u^2}{v^2 + uv + u^2} - \frac{1}{3} = \frac{4}{\left(\frac{2v}{u} + 1\right)^2 + 3} - \frac{1}{3}$$

è continua con valori evidentemente compresi fra $-\frac{1}{3}$ e 1, per ogni $u \neq 0$ e v . Dunque si ha

$$f(y) - f(x) - g(x)(y - x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt[3]{(x - q_k)^2}} \sigma_k(x, y) \right] (y - x),$$

dove, essendo $x \neq q_k$,

$$\sigma_k(x, y) := \frac{\sqrt[3]{(x - q_k)^2}}{\sqrt[3]{(y - q_k)^2} + \sqrt[3]{(y - q_k)(x - q_k)} + \sqrt[3]{(x - q_k)^2}} - \frac{1}{3}$$

è continua in y , con $\sigma_k(x, x) = 0$ e $|\sigma_k(x, y)| \leq 1$. Essendo per ipotesi $g(x) < +\infty$, ciò implica immediatamente che la serie normalmente convergente fra le parentesi quadre è continua in y e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt[3]{(x - q_k)^2}} \sigma_k(x, y) = o(1), \quad \text{per } y \rightarrow x$$

che è la differenziabilità di f in x :

$$f(y) - f(x) - g(x)(y - x) = o(y - x), \quad \text{per } y \rightarrow x.$$

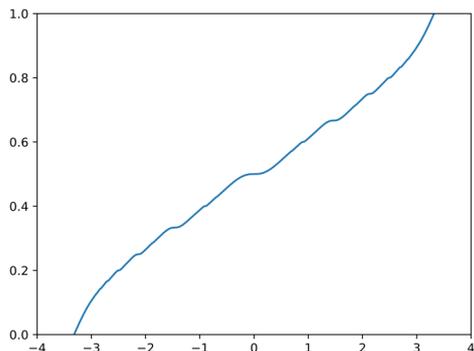
In conclusione, per ogni $x \in [0, 1]$ vale $f'(x) = g(x) \geq \alpha := \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k > 0$. Poiché $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, e f è continua e strettamente crescente, essa è un omeomorfismo dell'intervallo $[0, 1]$ in sé. Per il teorema di derivata della funzione inversa la funzione inversa di f , $\phi := f^{-1}$ ha una derivata finita in ogni punto e limitata da $1/\alpha$, e che si annulla almeno nei punti $\{f(q_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Questi formano un insieme denso di $[0, 1]$ essendo f un omeomorfismo. Infine poiché $f'(x) = g(x)$, per quanto detto sopra

$$\text{cont}(\phi') = \{\phi' = 0\},$$

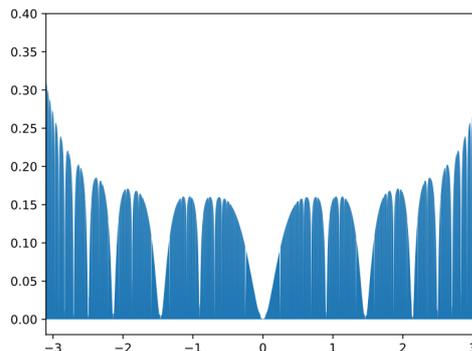
un insieme denso con parte interna nulla.

Osservazione 9.0.1

Si noti che ϕ' non è integrabile secondo Riemann in alcun intervallo $[a, b] \subset [0, 1]$. Infatti, essendo non-negativa e nulla su un denso, ha integrale inferiore di Riemann uguale a zero. Se fosse integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ l'integrale sarebbe quindi nullo. Ma sappiamo anche che se una derivata è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ vale sempre $\int_a^b \phi'(t)dt = \phi(b) - \phi(a)$, che non può essere nullo per la funzione di Pompeiu, che è strettamente crescente.



(a) Grafico ottenuto al seguente [link](#)



(b) Grafico ottenuto al seguente [link](#)

Derivate di Pompeiu

Definiamo in generale *derivata di Pompeiu* su un intervallo aperto I ogni funzione che sia la derivata di una funzione derivabile ovunque sull'intervallo, e che abbia un insieme denso di zeri. Il luogo di zeri di una funzione derivabile $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ è sempre un insieme G_δ : infatti u' per definizione è limite dei rapporti incrementali $\frac{u(t+1/n)-u(t)}{1/n}$, che sono funzioni continue di x , e vale, più in generale, che il luogo di zeri di una funzione f che sia limite puntuale di una successione f_n di funzioni continue è un insieme G_δ . Infatti, se una successione f_n (continue o no, anche più in generale definite su un insieme S) converge puntualmente a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, si ha:

$$\{f = 0\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} \left\{ |f_m| < \frac{1}{n} \right\}.$$

(Infatti un punto x appartiene all'insieme a destra se e solo se per ogni $n \geq 1$ esiste un $m = m_n \geq n$ tale che $|f_{m_n}(x)| < \frac{1}{n}$, cioè se e solo se qualche sottosuccessione di f_m converge a 0; ma poiché $f_m(x)$ già converge a $f(x)$ per ipotesi, ciò accade se e solo se $f(x) = 0$, cioè se e solo se x sta nell'insieme di sinistra). Se le f_m sono continue, l'insieme di sinistra è evidentemente un G_δ .

Come conseguenza l'insieme delle derivate di Pompeiu è uno spazio vettoriale: infatti la somma di due derivate nulle ciascuna su un G_δ denso si annulla almeno sulla intersezione dei due, che è ancora denso per il teorema di Baire. Inoltre l'insieme delle derivate di Pompeiu limitate è uno sottospazio chiuso delle funzioni limitate su I , quindi uno spazio di Banach. Infatti il limite uniforme di derivate di Pompeiu è una derivata per il teorema di limite sotto il segno di derivata, e si annulla almeno sugli zeri comuni di tutte le funzioni della successione, che è ancora un G_δ denso per il teorema di Baire.

Esercizio 1. Provare che lo spazio vettoriale V delle derivate di Pompeiu sull'intervallo I è anche un modulo su $C^1(I)$, cioè $f'u$ è una derivata di Pompeiu se lo è f' e se $u \in C^1(I)$. Dedurre che V ha dimensione infinita.

Esercizio 2. Dire se è vero o falso: una derivata di Pompeiu è integrabile secondo Riemann su un intervallo $[a, b]$ se e solo se è identicamente nulla su $[a, b]$.

Compiti Passati ed Esercizi

Fatterello 9.0.1 - Compitino Maggio 2020 - Esercizio 2

Sia $B_n(0, r)$ la palla n -dimensionale di centro 0 e raggio r . Per qualsiasi indice $i \in \{1, \dots, n\}$, definiamo per $x \in B_n(0, r)$ la funzione x_i che è la coordinata i -esima di x . Dobbiamo calcolare l'integrale: $\int_{B_n(0, r)} x_i^2 dx$.

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} n \int_{B_n(0, r)} x_1^2 dx &= n \int_{B_n(0, r)} x_i^2 dx = \int_{B_n(0, r)} (x_1^2 + \dots + x_n^2) dx \\ &= \int_{B_n(0, r)} \|x\|^2 dx = \int_0^{r^2} |\{x \in B_n(0, r) \mid s \leq \|x\|^2\}| ds \\ &= \int_0^{r^2} |\{x \in B_n(0, r) \mid \sqrt{s} \leq \|x\|\}| ds \\ &= |B(0, 1)| \int_0^{r^2} \left(r^n - s^{\frac{n}{2}}\right) ds = |B(0, r)| \frac{nr^2}{n+2} \end{aligned}$$

Fatterello 9.0.2 - Compito Settembre 2020 - Esercizio 1

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

dove $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e periodica. Allora la soluzione è:

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$$

Fatterello 9.0.3 - Compito Febbraio 2020 - Esercizio 2

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{v} = v - v^5 \\ \dot{v}(0) = 0 \\ v(0) = \lambda \end{cases}$$

Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ vale che le soluzioni sono:

1. illimitate.
2. costanti.
3. tutte limitate su tutto il dominio di esistenza.
4. infinitesime per $t \rightarrow +\infty$. E per $t \rightarrow -\infty$?

5. periodiche.

6. (opzionale) ha periodo minimo T .

Dimostrazione. (Scritta dal prof Majer)

Chiamando $y = \dot{x}$, il fatto che $y(t)^2 - x(t)^2 + \frac{1}{3}x(t)^6$ rimane costante, in termini del sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^5 \end{cases}$$

si esprime dicendo che la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ rimane dentro lo stesso insieme di livello $\{E = c\}$ della funzione energia:

$$E(x, y) := y^2 - x^2 + \frac{1}{3}x^6$$

Gli insiemi di livello sono facili da determinare (sono limitati e simmetrici rispetto agli assi; il livello $\{E = 0\}$ è una curva a "farfalla" con autointersezione nell'origine; poi ci sono i due punti di minimo e tutti gli altri sono curve semplici chiuse (per $c > 0$) o unione di due curve semplici chiuse (per $c < 0$, in prossimità dei due minimi)).

La seconda osservazione è che il campo $(y, x - x^5)$ si annulla solo nei punti di equilibrio, cosicché ogni soluzione non costante $(x(t), y(t))$, se $c \neq 0$, percorre in modo periodico la componente connessa della sua curva di livello (senza invertire la rotta), se invece $c = 0$, percorre completamente la curva $\{E = 0, x > 0\}$ oppure la curva $\{E = 0, x < 0\}$, ed è infinitesima a $\pm\infty$; tutto ciò in termini della equazione iniziale permette di rispondere alle richieste (si può anche fare tutta la discussione in termini della sola equazione scalare, ma col sistema nel piano delle fasi risulta tutto più chiaro).

Per l'ultima domanda (era la domanda bonus): il periodo dipende con continuità da λ e tende a infinito per $\lambda \rightarrow \sqrt[4]{3}$ (viene dalla dipendenza continua dai dati perché la soluzione si avvicina alla soluzione infinitesima); per $\lambda \rightarrow -\frac{2}{3}$ le soluzioni si avvicinano a una soluzione costante, con periodo che converge al periodo della soluzione linearizzata (non nullo); quindi tutti i valori di periodo maggiore certamente sono ammissibili. Ogni periodo è comunque assunto per λ grande, da una soluzione che cambiano segno: per questo basta vedere che il periodo tende a 0 per $\lambda \rightarrow \infty$.

Si scrive la formula usuale per il semiperiodo minimo $T/2$ integrando fra 0 e $T/2$. Ponendo $W(x) := \frac{1}{3}x^6 - x^2$:

$$1 = -\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{W(\lambda) - W(x(t))}}$$

In particolare per le soluzioni che cambiano segno (quelle con $\lambda > \sqrt[4]{3}$), fra 0 e $T/2$ la $x(t)$ varia fra λ e $-\lambda$; si trova, cambiando variabile:

$$T = 2 \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{W(\lambda) - W(x)}} dx = 4 \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{W(\lambda) - W(x)}} dx,$$

Questo integrale va studiato per $\lambda \rightarrow +\infty$; con un ultimo cambio di variabile $x = \lambda s$ si scrive come integrale su $[0, 1]$ e si vede che è $O(\frac{1}{\lambda})$.

Si conclude che ci sono soluzioni con segno variabile di qualunque periodo. ■

Fatterello 9.0.4 - Funzione C^∞ sul complementare del Cantor

Sia $f_C = f_{\text{Cantor}} : \mathbb{R} \setminus C \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita sul complementare dell'insieme di Cantor tale che su ogni intervallo k -esimo valga un polinomio di grado k , in cui k è il

passo della costruzione dell'insieme di Cantor in cui si escludono tali intervalli (partendo da grado -1 ($= 0$ a tappeto) su $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, grado 0 ($= 1$ a tappeto) su $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, grado 1 su $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \cup [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$, ecc.).

Dimostrare che $f_C \in C^\infty$ e trovare un'espressione per f_C .

Dimostrazione. (Trascrizione di Alex Maleknia)

Osservando il grafico della nostra funzione e della sua derivata si nota subito che:

$$f'_C(x) = \lambda \left[f_C(3x) - f_C \left(3 \left(x - \frac{2}{3} \right) \right) \right] \quad (9.1)$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Integrando, otteniamo l'equazione:

$$f_C(x) = f_C(x) - f_C(0) = \lambda \int_0^x f_C(3t) dt - \lambda \int_0^x f_C(3t - 2) dt \quad (9.2)$$

Definiamo ora l'insieme: $\Lambda = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(1-x)\} \subseteq C^0(\mathbb{R})$, dimostreremo che $f_C \in \Lambda$.

Definisco allora l'operatore T :

$$Tf(x) = \begin{cases} \int_0^x f(3t) dt & 0 < x < \frac{1}{3} \\ \int_x^1 f(3(t - \frac{2}{3})) dt & \frac{2}{3} < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per costruzione, Λ è un insieme T -invariante. Inoltre, posso riscrivere la formula 9.2:

$$f(x) = \lambda Tf(x) + \chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(x) \quad (9.3)$$

Dato che vogliamo f continua, dobbiamo verificare che con la formula 9.3 ci sia continuità in $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ (ossia agli estremi della definizione a tratti di T). Per simmetria, controlliamo solo in $\frac{1}{3}$. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f_C(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \lambda Tf_C(x) + \chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} (0 + 1) = 1$$

mentre:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f_C(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \lambda Tf_C(x) + \chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \lambda \int_0^x f_C(3t) dt$$

Dobbiamo allora imporre:

$$\lambda \int_0^{\frac{1}{3}} f_C(3t) dt = 1 \quad \iff \quad \lambda^{-1} = \int_0^1 f_C(t) dt$$

Siccome $f_C|_{[0, \frac{1}{3}]}$ è simmetrica radialmente rispetto al punto $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ (per come è definito Tf_C in $[0, \frac{1}{3}]$) e siccome $f_C \in \Lambda$, ottengo che:

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} &= \int_0^1 f_C(t) dt = \int_0^{\frac{1}{3}} f_C(t) dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f_C(t) dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 f_C(t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} f_C(t) dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f_C(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 1 dt = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Quindi $\lambda = \frac{3}{2}$.

Proviamo che la norma degli operatori di T è minore di $\frac{2}{3}$ e quindi l'operatore $I - \lambda T$ è invertibile²:

$$\|T\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|Tf\|_\infty =^* \sup_{\|f\|_\infty=1} \left\| \int_0^x f(3t) dt \right\|_\infty \leq \sup_{\|f\|_\infty=1} \int_0^{\frac{1}{3}} \|f\|_\infty dt = \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

Allora si definisce $f_C = (I - \lambda T)^{-1}(\chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]})$.

Per concludere, usiamo la serie di Neumann:

$$f_C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k T^k \chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(x)$$

e osserviamo che effettivamente $f_C \in \Lambda$, perchè $\chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} \in \Lambda$ e sappiamo che $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$. ■

Proposizione 9.0.1 - Compito Settembre 2022 (I) - Esercizio 3

Sia $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vettore e $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Definiamo la matrice Vandermonde dove ogni elemento è definito:

$$V(a)_{i,j} = a_j^{i-1}$$

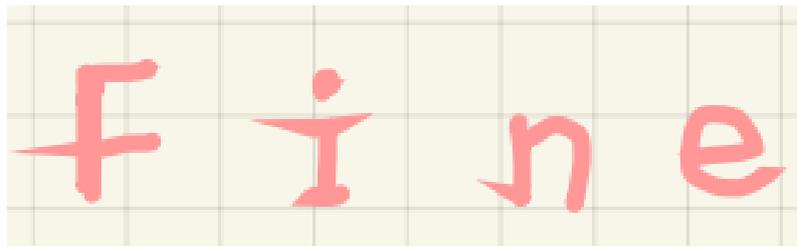
Dimostrato che:

$$\partial_t V(a + tu) = NV(a + tu)$$

con $N \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, allora vale la formula di Liouville per cui:

$$\partial_t \det V(a + tu) = \text{tr} N \cdot \det V(a + tu)$$

²Per la seconda uguaglianza (*), per definizione di T basta guardare il massimo solo per $x \in [0, \frac{1}{3}]$ perché stiamo lavorando in Λ quindi le funzioni sono simmetriche rispetto a $x = \frac{1}{2}$.



fine

Indice analitico

- I*-numerabile, 18
- II*-numerabile, 18
- λ -sistema, 162, 163
- π -sistema, 162, 163
- σ -additività, 149, 152, 159, 161
- σ -algebra, 152, 157, 162, 163
- σ -algebra boreliana, 152, 159
- σ -algebra generata, 152
- σ -algebra prodotto, 182
- σ -subadditività, 149, 152, 153
- ε -rete, 18
- 1-forma differenziale, 141, 142
- 1-forma differenziale a tratti, 142
- 1-forma differenziale chiusa, 141, 144
- 1-forma differenziale conservativa, 143
- 1-forma differenziale esatta, 104, 141–143

- Algebra, 128, 130, 133, 134
- Algebra coniugata, 134
- Aperto normale, 215, 216
- Asociatività generalizzata, 149
- Assoluta continuità, 179
- Atomo, 152

- Base di topologia, 10
- Blocchi di Jordan, 71
- Bordo C^1 , 213, 216, 218

- Cammino, 87, 119, 145, 146
- Cammino periodico, 82, 83
- Chiusura, 9
- Compattezza, 18, 19, 21, 61, 88, 93, 117, 119, 129, 131, 133, 134, 200
- Compattezza numerabile, 18, 19
- Compattezza sequenziale, 18, 20
- Complessificato, 67
- Completezza, 14, 16, 17, 32–34, 134, 135, 176, 181
- Completezza per serie, 16
- Connessione, 10
- Continuità, 28, 33, 69, 86, 87, 118, 165, 178, 189, 197
- Continuità degli operatori di composizione, 180
- Continuità uniforme, 113
- Contrazione, 37, 38
- Convergenza, 13, 14, 16, 37, 69, 124, 125, 128, 132
- Convergenza dominata, 175, 177
- Convergenza per serie, 16
- Convessità, 87, 126
- Coordinate polari, 193
- Coordinate sferiche, 194
- Coperchio misurabile, 156, 159
- Curva, 70, 142
- Curve, 118

- Derivata direzionale, 44
- Derivata parziale, 44, 48, 60, 144, 145
- Determinante del differenziale, 212
- Determinante Wronskiano, 81, 102
- Diffeomorfismo, 50, 51, 61–63
- Differenziale, 41–44, 141
- Differenziale parziale, 44–46, 78, 145
- Dipendenza dai dati iniziali, 94, 98, 108
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, 23
- Disuguaglianza di Hölder, 24
- Disuguaglianza di Minkowski, 25
- Disuguaglianza di volume per mappe C^1 , 184
- Divergenza, 214, 218

- EDO, 86, 87, 105
- EDO a variabili separabili, 101
- EDO di Bernoulli, 102
- EDO di primo ordine, 86
- EDO lineare, 102
- EDO lineare a coefficienti periodici, 82–84
- EDO lineari, 73, 74, 76
- EDO lineari a coefficienti costanti, 73
- EDO lineari a coefficienti periodici, 85
- EDO lineari a coefficienti variabili, 76
- Esponenziale, 69–71, 73, 74, 83, 84, 106
- Estensione di dominio, 92

- Fibra, 193
 Fibrato tangente, 62
 Finezza, 10, 12
 Flusso, 96, 97
 Forma di Jordan, 72, 83
 Formula del cambio di variabile, 186, 187
 Formula del cambio di variabile per varietà, 212
 Formula di Cauchy, 194
 Formula di Stirling, 194
 Fuga dai compatti, 93
 Funzionale di Lyapunov, 108, 109
 Funzione C -differenziabile, 67
 Funzione differenziabile, 41, 44–46, 49, 67, 69, 98, 145
 Funzione differenziabile 2 volte, 47, 48, 60
 Funzione infinitesima, 41
 Funzione integrabile, 171, 172, 175, 186
 Funzione integrale, 178
 Funzione misurabile, 165, 167, 170, 173, 174, 177, 181, 183, 186
 Funzione omogenea, 53
 Funzione semplice, 167

 Gradiente, 44
 Grafico, 51, 53, 62

 Hessiana, 48

 Ideale massimale, 130, 131, 134
 Immersione di Fréchet-Kuratowski, 32
 Insieme aperto, 9–11
 Insieme chiuso, 9
 Insieme denso, 10, 31, 33
 Insieme di misura nulla, 152
 Insieme equicontinuo, 113, 114, 137
 Insieme misurabile, 152, 158, 159
 Insieme normale, 193
 Insieme puntualmente equicontinuo, 137
 Insieme separante, 129, 134
 Integrale, 145
 Integrale di Eulero, 195
 Integrale di funzioni semplici, 167, 168
 Integrale di Lebesgue, 179, 196
 Integrale di linea, 142, 143, 146
 Integrale di Riemann, 196
 Integrale in spazio di Banach, 50
 Integrale per funzioni integrabili, 171
 Integrale per misurabili, 169
 Integrazione, 101
 Integrazione per fili, 193
 Integrazione per sezioni, 194
 Intorno, 10
 Inviluppo, 117, 165
 Ipotesi di Lipschitz, 87–89, 92–94, 98, 105

 Jacobiano, 44, 194

 Legge debole dei grandi numeri, 127
 Lemma di Fatou, 174
 Lemma di Gromwall, 106, 107
 Limite, 49, 69
 Limite di funzioni, 167, 174
 Limite superiore di funzioni, 165
 Limite superiore di insiemi, 166
 Lipschitz, 37, 38, 87–89, 189
 Lunghezza di curve, 118, 119
 Luogo di zeri, 51

 Mappa C -lineare, 67
 Mappa affine, 35, 38
 Mappa differenziabile tra sottovarietà, 210
 Mappa lineare, 26, 27, 43, 71, 190
 Mappe τ_* e τ^* , 96, 97
 Mappe lineari, 69
 Massimo, 128
 Matrice di monodromia, 83, 84
 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, 63
 Metodo del Wronskiano, 102
 Minimo, 61, 128
 Misura, 152, 156, 189
 Misura completa, 152, 157, 158
 Misura di Lebesgue, 161–163, 189, 190
 Misura esterna, 152, 155, 156, 158
 Misura esterna di Lebesgue, 161
 Misura prodotto, 161, 162
 Misura superficiale, 212
 Misurabilità, 189
 Misurabilità per Carathéodory, 152
 Modulo di continuità, 113
 Moltiplicatori di Floquet, 85
 Momento, 205
 Monotonia, 153
 Multi-indice, 55

 Norma, 11, 24, 26, 67, 69, 132
 Norma complessa, 67
 Norma di successione, 26
 Norma Hölderiana, 24
 Norma standard, 24
 Normale esterna, 213, 215

- o piccolo, 41
- Omotopia a estremi fissi, 145, 146
- Operatore di transizione, 77–82
- Palla aperta, 11
- Parametrizzazione locale regolare, 209
- Parte interna, 9
- Pennello di Peano, 138, 139
- Polinomi di Bernstein, 133
- Polinomio di Bernstein, 121, 123, 124, 127
- Polinomio di Taylor, 55–59, 83
- Principio di Cavalieri, 182
- Principio variazionale di Fermat, 61
- Problema dei momenti, 205
- Problema di Cauchy, 73, 74, 76, 78, 79, 87–89, 92–94, 96, 101, 137
- Problema di Hausdorff, 205, 208
- Problema di interpolazione, 129
- Prodotto cartesiano, 165
- Prodotto scalare, 11, 23, 26, 144
- Proprietà di Bolzano-Weierstrass, 18–21
- Proprietà di Lindelöf, 18–20
- Punto di equilibrio, 108
- Punto di massimo, 63
- Punto di minimo, 60, 117
- Punto fisso, 37, 38, 197
- Pushforward di misure, 201
- Quasi-anello, 159, 160, 162
- Quasi-ovunque, 154, 170, 176, 177
- Quoziente di Rayleigh, 61
- Regolarità esterna, 153
- Regolarità interna al finito, 154
- Relativa compattezza, 114
- Restrizione reale, 67
- Reticolo, 128, 129
- Semicontinuità, 97, 117, 119
- Semicontinuità sequenziale, 117
- Seminorma, 11
- Semisemplicità, 74, 85
- Serie di Neumann, 29, 30, 38
- Serie esponenziale, 69
- Soluzione globale, 105, 107
- Soluzione locale, 86, 88, 89, 137
- Soluzione massimale, 89, 94, 96
- Somma di famiglie, 170
- Soprasoluzioni e sottosoluzioni, 105
- Sottospazio metrico, 11
- Sottospazio topologico, 10
- Sottovarietà differenziabile, 61–63, 210
- Sottovarietà differenziale, 209
- Spazio completamente regolare, 129, 130
- Spazio delle funzioni integrabili, 172, 180
- Spazio delle mappe lineari, 27
- Spazio di Banach, 14, 32
- Spazio di Hausdorff, 9, 130
- Spazio di misura, 152
- Spazio di misura σ -finito, 181
- Spazio di misura completo, 152
- Spazio di successioni, 26
- Spazio di Tychonoff, 130
- Spazio metrico, 11, 13, 32, 33
- Spazio misurabile, 165
- Spazio non-atomico, 152
- Spazio normato, 11, 13, 26, 34
- Spazio prodotto, 43
- Spazio separabile, 18, 20
- Spazio tangente, 62, 63, 210, 215
- Spazio topologico, 9, 13, 165
- Stabilità asintotica dei punti di equilibrio, 108–110
- Stabilità dei punti di equilibrio, 108
- Stima di Lagrange, 57–59
- Stima di Peano, 56
- Stima integrale, 58
- Successione, 128, 135, 206
- Successione completamente monotona, 206, 207
- Successione di Cauchy, 13, 114
- Successione di funzioni, 49
- Teorema del differenziale totale, 46
- Teorema del punto fisso di Brower, 197
- Teorema del valor medio, 87
- Teorema della classe monotona, 163
- Teorema della divergenza, 215, 218
- Teorema della funzione implicita, 51
- Teorema delle contrazioni, 37
- Teorema delle perturbazioni lipschitziane, 38, 39
- Teorema di Ascoli-Arzelà, 114
- Teorema di Baire, 31
- Teorema di Beppo Levi, 173
- Teorema di Bernstein, 124, 127, 132, 133
- Teorema di Borel-Cantelli, 166
- Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf, 89
- Teorema di derivazione sotto segno di integrale, 187

- Teorema di Dini (Convergenza), 128
Teorema di Dini (Funzione implicita), 53, 104
Teorema di estensione di misure, 158–160
Teorema di estensione per densità, 33
Teorema di Eulero, 53
Teorema di Fubini, 183
Teorema di Hausdorff, 207
Teorema di Hopf-Rinow, 119
Teorema di integrazione per serie, 176
Teorema di inversione locale, 51
Teorema di Korovkin, 125
Teorema di Lebesgue, 175
Teorema di limite sotto segno di derivata, 49
Teorema di Mazur-Ulam, 35
Teorema di Müntz-Szász, 135
Teorema di non-retrazione, 197
Teorema di Peano, 137
Teorema di Perron-Frobenius, 200
Teorema di Riesz-Markov-Kakutani, 201, 205
Teorema di Sard, 186, 213
Teorema di Schwarz, 48
Teorema di Severini-Egoroff, 154
Teorema di simmetria del differenziale secondo, 47
Teorema di Stone-Weierstrass, 130, 132–134
Teorema di Temple, 126
Teorema di Tonelli, 181, 183
Teorema di Weierstrass (compatti), 61
Teorema inverso della convergenza dominante, 177
Topologia, 9
Topologia prodotto, 10
Totale limitatezza, 18

Valore aderente, 138
Valore atteso, 127
Valore di minimo, 60