

Università di Pisa

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA

Una dimostrazione del Teorema di Fáry-Milnor

Relatore:
Prof. Paolo Lisca

Candidato:
Mario Romeo

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

Indice

Introduzione **ii**

1 Formula dell'area per superfici **1**

1.1 Integrazione su $\mathcal{R} \times (0,1)$ 1

1.2 La formula dell'area per superfici 6

2 Superficie tubolare intorno ad una curva nello spazio **10**

2.1 Intorno tubolare intorno ad una curva nello spazio 10

2.2 Superficie tubolare intorno ad una curva nello spazio 14

2.3 Curvatura gaussiana nei punti della superficie tubolare 17

2.4 Integrazione su $\mathcal{K}$ 18

3 Il Teorema di Fáry-Milnor **20**

3.1 Enunciato ed alcuni risultati preliminari 20

3.2 Dimostrazione 23

Introduzione

In questa tesi mostro il Teorema di Fáry-Milnor nella versione seguente

Teorema. Una curva semplice, chiusa, annodata, di Frenet e nello spazio tridimensionale ha curvatura totale maggiore stretto di 4π.

Il Teorema originale, il quale non richiede che la curva semplice, chiusa sia di Frenet anzi sia una linea spezzata semplice, chiusa è stato formulato e dimostrato indipendentemente da István Fáry [3] (nel 1949) e da John Willard Milnor [4] (nel 1950). L'enunciato del Teorema di Fáry-Milnor fu posto inizialmente da Borsuk come quesito nel suo articolo [6] nel quale generalizzava il Teorema di Fenchel [5], una curva chiusa in $\mathbb{R}^3$ ha curvatura totale maggiore o uguale di 2π, a curve nello spazio n-dimensionale. Fáry era un matematico ungherese nato a Gyula (nel 1922) e mostrò questo teorema all'età di 27 anni. Milnor è un matematico americano nato nel New Jersey (nel 1931) e mostrò questo teorema all'età di 19 anni durante i suoi studi universitari a Princeton University. Milnor è famoso per il suo contributo nella topologia differenziale, nella k-teoria algebrica e nei sistemi dinamici olomorfi a bassa dimensione. Ora, alla età di 91 anni, è professore dell'università di Stony Brook ed è uno dei cinque matematici che hanno vinto il premio Abel, il premio Wolf e la medaglia Fields. Tra i più noti dei suoi lavori c'è la dimostrazione dell'esistenza di sfere 7-dimensionali con struttura differenziale non standard.

Nella dimostrazione del Teorema di Fáry-Milnor, nella versione sopra enunciata, ho seguito l'approccio del do Carmo [1] cercando di andare più nel dettaglio, dimostrando quanto più possibile ogni affermazione. Ho articolato la tesi in tre sezioni :

Nella prima sezione definisco l'integrazione su superfici usando l'approccio del Montiel-Ross [2]. Mostro che una regione $\mathcal{R}$ di una superficie orientabile ammette un intorno tubolare, che è un aperto di $\mathbb{R}^3$, e che questo è diffeomorfo a $\mathcal{R} \times (0,1)$. Tale diffeomorfismo, mi permette di definire l'integrale su $\mathcal{R} \times (0,1)$ come un integrale di Lebesgue su un aperto di $\mathbb{R}^3$. Infine dico che l'integrale su $\mathcal{R}$ è quello su $\mathcal{R} \times (0,1)$. L'utilità di questo approccio e quello di arrivare alla formula dell'area per superfici, il quale lega l'integrale sopra citato ad un integrale sulla sfera.

Nella seconda sezione mostro l'esistenza di una superficie tubolare intorno ad una curva semplice, chiusa, di Frenet, dimostrando prima che esiste un intorno tubolare e successivamente deducendo l'esistenza di tale superficie come "sezione cilindrica" dell'intorno tubolare. Dopo di che calcolo in quali punti della superficie la curvatura Gaussiana è positiva. Infine integro la curvatura Gaussiana nella regione $\mathcal{K}$ dei punti a curvatura Gaussiana positiva usando l'approccio descritto nella prima sezione, poi la integro nel modo classico tramite parametrizzazione il cui risultato è due volte

la curvatura totale della nostra curva, e poi mostro che questi due approcci sono compatibili.

Nella terza sezione arriviamo alla dimostrazione del Teorema di Fáry-Milnor. Definiamo una funzione altezza rispetto ad una direzione data, mostriamo che esistono direzioni per cui tale funzione ha punti critici solo di massimo e minimo, dopo di che supponendo per assurdo che non valga la tesi mostriamo che esiste una direzione per cui la funzione altezza ha solamente un massimo ed un minimo e per questo è possibile sciogliere la curva, arrivando ad un assurdo ed alla tesi del teorema.

La condizione espressa dal teorema è equivalente a dire che una curva semplice, chiusa, di Frenet nello spazio con curvatura totale minore o uguale di 4π è sciolta, e da qui si vede che tale condizione è solo sufficiente, infatti la cucitura di una palla da baseball è una curva chiusa liscia nello spazio tridimensionale, in particolare nella sfera due-dimensionale, che è sciolta ma con curvatura totale maggiore stretta di 4π, anzi, rendendo più "tortuosa" questa curva, è possibile rendere la curvatura totale arbitrariamente grande. Inoltre il 4π è la condizione ottimale, infatti è possibile trovare nodi trifogli con curvatura pari a $4\pi + \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$.

1 Formula dell'area per superfici

In questa sezione voglio arrivare alla formula dell'area per superfici che ci sarà molto utile per la dimostrazione del Teorema di Fáry-Milnor. Per arrivare ad essa definisco l'integrale su una regione $\mathcal{R}$ di superficie S non nel modo classico tramite parametrizzazione ma definendolo come integrale di Lebesgue su un aperto di $\mathbb{R}^3$. Dapprima mostro che una regione $\mathcal{R}$ di una superficie orientabile ammette un intorno tubolare, che è un aperto di $\mathbb{R}^3$ diffeomorfo a $\mathcal{R} \times (0,1)$, e tramite questo diffeomorfismo dico che l'integrale su $\mathcal{R}$ è l'integrale su $\mathcal{R} \times (0,1)$ e quest'ultimo, usando il diffeomorfismo come cambio di variabili, è l'integrale in $\mathbb{R}^3$ di Lebesgue.

1.1 Integrazione su $\mathcal{R} \times (0,1)$

Definizione 1.1. Sia S una superficie. Se per ogni $p \in S$ esistono segmenti aperti $N_\delta(p)$ della retta normale alla superficie nel punto p di lunghezza 2δ, $\delta > 0$, tale che per ogni $p \neq q$ punti di S si ha $N_\delta(p) \cap N_\delta(q) = \emptyset$, allora la loro unione è detta *intorno tubolare* di S che si denota con $N_\delta(S)$.

Osservazione 1.2. Un qualunque aperto V di una superficie S è una superficie e quindi la definizione precedente ha senso per aperti di una superficie.

Definizione 1.3. Sia S una superficie. Un sottoinsieme $\mathcal{R}$ aperto e relativamente compatto di S si chiama *regione* di S.

Proposizione 1.4. *Sia S una superficie orientabile e sia $\mathcal{R} \subset S$ una sua regione. Allora esiste $\delta > 0$ per cui $\mathcal{R}$ ammette un intorno tubolare $N_\delta(\mathcal{R})$ che è aperto di $\mathbb{R}^3$.*

Dimostrazione. Procediamo prima mostrando che esiste localmente un intorno tubolare e successivamente che esiste globalmente tale intorno. Nella Figura 1 c'è un esempio di intorno tubolare locale.

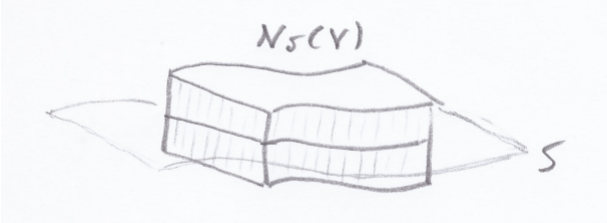


Figura 1

Passo 1 : Per ogni $p \in S$ esiste $\delta > 0$ e un intorno aperto $V \subset S$ di p che ammette un intorno tubolare $N_\delta(V)$ che è un aperto di $\mathbb{R}^3$.

Siccome S è orientabile, ammette $M : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ mappa di Gauss. Sia allora

$$H : S \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la mappa data da

$$H(p,t)) := p + tM(p) \quad \forall\ (p,t) \in S \times \mathbb{R} \tag{1}$$

Essa è differenziabile nel senso che per ogni parametrizzazione locale

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

la mappa

$$f \times Id_{\mathbb{R}} : U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow S \times \mathbb{R}$$

è differenziabile. Per costruzione la mappa H ha come immagine l'unione di linee normali alla superficie S, dunque resta da trovare un intorno aperto di p in S e condizioni su t affinché queste linee normali non si intersechino almeno localmente. Il differenziale di H nel punto $(p,0) \in S \times \mathbb{R}$ è dato da

$$(dH)_{(p,0)}(v,0) = v, \quad \forall v \in T_pS,$$

$$(dH)_{(p,0)}(0,1) = N(p),$$

e tale differenziale è un isomorfismo lineare. Presa f parametrizzazione di S intorno a p e sia $(s,v) \in U$ tale che $f(s,v) = p$, supponiamo senza perdita di generalità che $df_{(s,v)}$ abbia la sotto-matrice 2×2, individuata dalle prime due righe, invertibile. Allora si ha che il differenziale di $f \times Id_{\mathbb{R}}$ in $(s,v,0)$ è un isomorfismo lineare, dunque posto $h = H \circ (f \times \mathbb{R})$ si ha che

$$h : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ha differenziale iniettivo in $(s,v,0)$ e dunque per il teorema della funzione inversa esiste un intorno W di (s,v) in $\mathbb{R}^2$ ed un $\delta > 0$ tale che $h|_{W \times (-\delta,\delta)}$ è un diffeomorfismo con l'immagine che è un aperto di $\mathbb{R}^3$. Di conseguenza

$$(H|_{V \times (-\delta,\delta)})^{-1} = (f \times \mathbb{R}) \circ (h|_{W \times (-\delta,\delta)})^{-1}$$

è differenziabile ed è l'inversa di $H|_{V \times (-\delta,\delta)}$, dunque

$$H|_{V \times (-\delta,\delta)} : V \times (-\delta,\delta) \longrightarrow N_\delta(V),$$

è un diffeomorfismo, dove $V = f(W)$ è un intorno aperto di p, e quindi $N_\delta(V)$ è un aperto di $\mathbb{R}^3$.

Passo 2 : Esiste $\delta > 0$ tale che $\mathcal{R}$ ammette un intorno tubolare $N_\delta(\mathcal{R})$ che è aperto di $\mathbb{R}^3$.

Per il Passo 1 la superficie S ammette intorni tubolari locali, in particolare essi ricoprono $\overline{\mathcal{R}}$, ed essendo compatto è possibile estrarne una sotto-famiglia finita

$$\{V_{p_1}, \cdots, V_{p_n}\}, \quad p_i \in S, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Sia allora

$$\delta_0 = \min\{\delta_{p_1}, \cdots, \delta_{p_n}\},$$

dove i δ_{p_i} sono dati sempre dal Passo 1 e relativi agli V_{p_i} per $i = 1, \cdots, n$. Mostriamo ora che è possibile trovare $\delta < \delta_0$ affinché

$$H|_{\mathcal{R}\times(-\delta,\delta)} \longrightarrow N_\delta(\mathcal{R})$$

è iniettiva. Infatti, se così non fosse, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ci sarebbero $p_n, q_n \in S$ con $p_n \neq q_n$ tali che

$$N_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap N_{\frac{1}{n}}(q_n) \neq \emptyset.$$

Siccome $\overline{\mathcal{R}}$ è compatto, possiamo assumere che esistano $p, q \in \overline{\mathcal{R}}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = p, \quad \lim_{n\to+\infty} q_n = q.$$

Abbiamo inoltre una successione

$$r_n \in N_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap N_{\frac{1}{n}}(q_n).$$

Allora

$$|p_n - q_n| \leq |p_n - r_n| + |r_n - q_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

e quindi i due limiti coincidono, cioè $p = q$. Applicando il Passo 1 al punto $p = q \in S$, esiste V intorno aperto di $p = q$ in S e $\rho > 0$ tale che $N_\rho(V)$ è un intorno tubolare. Abbiamo inoltre che esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha che

$$\frac{1}{n} < \rho, \quad p_n, q_n \in V,$$

ma allora deve valere che per ogni $n > N$

$$N_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap N_{\frac{1}{n}}(q_n) \subset N_\rho(p_n) \cap N_\rho(q_n) = \emptyset$$

e questo dà una contraddizione. Dunque

$$H|_{\mathcal{R}\times(-\delta,\delta)}$$

è un diffeomorfismo locale per il Passo 1 ed è iniettiva per il passo 2, e quindi è un diffeomorfismo con la sua immagine, cioè $N_\delta(\mathcal{R})$. Inoltre $N_\delta(\mathcal{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^3$. Infatti ogni V_i è un aperto di S che ammette un intorno tubolare aperto e a maggior ragione $V_i \cap \mathcal{R}$ è un aperto di S che ammette un intorno tubolare aperto. Unendo quest'ultimi si ha $N_\delta(\mathcal{R})$ che è quindi aperto. □

Corollario 1.5. *Sia S una superficie compatta orientabile. Allora S ammette un intorno tubolare $N_\delta(S)$, che è aperto di $\mathbb{R}^3$, per qualche $\delta > 0$.*

Dimostrazione. Siano $p, q \in S$, $p \neq q$, allora $\mathcal{R}_1 = S - \{p\}$ e $\mathcal{R}_2 = S - \{q\}$ sono due regioni di S ed ammettono intorni tubolari

$$N_{\delta_1}(\mathcal{R}_1), \quad N_{\delta_2}(\mathcal{R}_2)$$

rispettivamente. Poniamo

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

e si ha la tesi. □

Definizione 1.6. Sia S una superficie orientabile e sia $\mathcal{R}$ una regione di S. Sia poi O un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ e supponiamo che $\phi : O \longrightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ sia un diffeomorfismo, dove $a < b$ sono due numeri reali. Allora il *valore assoluto* dello Jacobiano è la mappa,

$$|Jac\ \phi|(x) = |det(d\phi_x)|$$

che associa ad un elemento di O un elemento di $\mathbb{R}$.

Osservazione 1.7. Siano $\phi : O_1 \longrightarrow O_2$ e $\psi : O_2 \longrightarrow O_3$ mappe differenziabili tra aperti di $\mathbb{R}^3$ oppure tra sottoinsiemi aperti di $S \times \mathbb{R}$ dove S è una superficie regolare. Allora

$$|Jac(\psi \circ \phi)| = |Jac\ \psi| \circ \phi |Jac\ \phi|.$$

Ciò deriva dalle proprietà del determinante. Inoltre $\phi : O_1 \longrightarrow O_2$ è un diffeomorfismo se e solo se $|Jac\ \phi| > 0$.

Definizione 1.8. Sia $\mathcal{R}$ una regione di una superficie orientabile S. Fissato un diffeomorfismo $\phi : O \longrightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$, $a < b$ numeri reali, definito su un aperto O di $\mathbb{R}^3$, diciamo che la funzione $h : \mathcal{R} \times (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è *integrabile su* $\mathcal{R} \times (a, b)$ se $(h \circ \phi)|Jac\ \phi|$ lo è su O (nel senso di Lebesgue). In questo caso

$$\int_O (h \circ \phi)|Jac\ \phi| \tag{2}$$

è chiamato *integrale di h su* $\mathcal{R} \times (a, b)$ e lo denotiamo anche

$$\int_{\mathcal{R}\times(a,b)} h \quad \text{oppure} \quad \int_{\mathcal{R}\times(a,b)} h(p, t)\ dpdt.$$

Osservazione 1.9. Questa è una buona definizione infatti si può vedere che non dipende dalla scelta dell'aperto O e dal diffeomorfismo ϕ, in quanto se avessi due aperti O_1, O_2 di $\mathbb{R}^3$ e $\phi_i : O_i \longrightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ due diffeomorfismi, allora la composizione $\psi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : O_1 \longrightarrow O_2$ è un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa

$$|Jac\ \phi_1| = |Jac\ \phi_2| \circ \psi |Jac\ \psi|$$

su O_1. Quindi, se $h : \mathcal{R} \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che $(h \circ \phi_2)|Jac\ \phi_2|$ è integrabile su O_2, la formula di cambio di variabili per integrali di Lebesgue dice che

$$(h \circ \phi_1)|Jac\ \phi_1| = [(h \circ \phi_2) \circ \psi][|Jac\ \phi_2| \circ \psi]|Jac\ \psi|$$

è integrabile su O_1 e che

$$\int_{O_2} (h \circ \phi_2)|Jac\ \phi_2| = \int_{O_1} [(h \circ \phi_2) \circ \psi][|Jac\ \phi_2| \circ \psi]|Jac\ \psi|.$$

Cioè, in questo caso, abbiamo

$$\int_{O_2} (h \circ \phi_2)|Jac\ \phi_2| = \int_{O_1} (h \circ \phi_1)|Jac\ \phi_1|.$$

Inoltre la definizione ha senso, cioè per ogni regione $\mathcal{R}$ di S esistono un insieme aperto O di $\mathbb{R}^3$ ed un diffeomorfismo $\phi : O \longrightarrow \mathcal{R} \times (a,b)$. Infatti siccome S è orientabile ed $\mathcal{R}$ aperto relativamente compatto, allora $\mathcal{R}$ ammette un intorno tubolare $N_\epsilon(\mathcal{R})$ che è aperto di $\mathbb{R}^3$ e diffeomorfo a $\mathcal{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$. Dunque possiamo prendere $N_\epsilon(\mathcal{R})$ come aperto O, ed essendo $\mathcal{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$ diffeomorfo a $\mathcal{R} \times (a,b)$ tramite il diffeomorfismo $Id_{\mathcal{R}} \times h$, dove

$$h : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow (a,b)$$

è un diffeomorfismo, allora

$$\phi : (Id_{\mathcal{R}} \times h) \circ (H|_{\mathcal{R} \times (-\epsilon,\epsilon)})^{-1} : O \longrightarrow \mathcal{R} \times (a,b)$$

è il diffeomorfismo che stavamo cercando, dove H è come in (1).

Proposizione 1.10. *Sia $\mathcal{R}$ una regione di una superficie orientabile S e sia (a,b) un intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$. Le proprietà dell'integrale di Lebesgue rimangono valide per l'integrazione di funzioni su $\mathcal{R} \times (a,b)$. Ne citiamo una che ci servirà più avanti :*

Ogni funzione continua su $\overline{\mathcal{R}} \times [a,b]$ è integrabile su $\mathcal{R} \times (a,b)$.

Consideriamo ora una funzione $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita su una regione $\mathcal{R}$ di S. Noi possiamo pensare f come una funzione dal prodotto $\mathcal{R} \times (a,b)$, per ogni numero reale $a < b$, come

$$f(p,t) = f(p), \quad \forall p \in \mathcal{R} \subset S \quad \forall t \in (a,b)$$

Per questa funzioni, abbiamo che

$$\frac{1}{b-a} \int_{\mathcal{R} \times (a,b)} f(p)\ dpdt$$

è indipendente da (a,b), ammesso che esista.

Definizione 1.11. Sia $\mathcal{R}$ una regione di una superficie orientabile S e sia $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è *integrabile su* $\mathcal{R}$ quando la funzione

$$(p, t) \in \mathcal{R} \times (0, 1) \longmapsto f(p)$$

è integrabile su $\mathcal{R} \times (0, 1)$. Il numero reale

$$\int_{\mathcal{R}\times(0,1)} f(p)\ dpdt$$

sarà chiamato *integrale di* f *su* $\mathcal{R}$ e lo rappresenteremo anche con i simboli

$$\int_{\mathcal{R}} f, \quad \int_{\mathcal{R}} f(p)\ dp, \quad \textit{oppure} \quad \int_{\mathcal{R}} f\ dA$$

Proposizione 1.12. *Sia $\mathcal{R}$ una regione di una superficie orientabile S e sia la funzione $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Le proprietà dell'integrale su $\mathcal{R} \times (a, b)$ rimangono valide per l'integrazione di funzioni su $\mathcal{R}$. Ne enunciamo una che ci servirà più avanti:*

Ogni funzione continua su $\overline{\mathcal{R}}$ è integrabile su $\mathcal{R}$.

1.2 La formula dell'area per superfici

Lo scopo della formula dell'area tra superfici e quella di poter calcolare l'integrale della curvatura Gaussiana nella regione dei punti a curvatura Gaussiana positiva, che vedremo nella sezione successiva, come un integrale sulla 2-sfera.

Definizione 1.13. Siano O un insieme aperto limitato di $\mathbb{R}^3$, $\phi : \overline{O} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa differenziabile (cioè è restrizione di una mappa differenziabile da un aperto $\overline{O} \subset V \subset \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$). Allora $x \in \mathbb{R}^3$ è un *valore regolare* per ϕ se per ogni $p \in \phi^{-1}(x)$ si ha che $d\phi_p$ è un isomorfismo lineare.

Osservazione 1.14. Se $x \in \mathbb{R}^3$ è un valore regolare, allora per il teorema della funzione inversa $\phi^{-1}(x)$ è discreto e, siccome $\overline{O}$ è compatto, è anche finito. Allora possiamo definire il seguente.

Definizione 1.15. Siano O un insieme aperto limitato di $\mathbb{R}^3$, $\phi : \overline{O} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa differenziabile e $f : O \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora poniamo

$$n(\phi, f) : \mathbb{R}^3 - \phi(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$n(\phi, f)(x) = \sum_{p\in\phi^{-1}(x)} f(p),$$

con la convenzione che la somma è zero quando $x \notin \phi(\overline{O})$, e dove $\mathcal{N} \subset \overline{O}$ è l'insieme dei punti di $\overline{O}$ che sono critici per ϕ, cioè,

$$\mathcal{N} = \{x \in \overline{O} |\ |Jac\ \phi|(x) = 0\}.$$

Osservazione 1.16. Dal teorema di Sard si deduce che $\phi(\mathcal{N})$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^3$ e dunque $n(\phi, f)$ è definita quasi ovunque su $\mathbb{R}^3$. Inoltre se ϕ è un diffeomorfismo con la sua immagine, allora $n(\phi, f)$ è definita ovunque su $\mathbb{R}^3$ e coincide su $\phi(\overline{O})$ con la mappa $f \circ \phi^{-1}$. Enunciamo il seguente.

Teorema 1.17. [4, teo.5.24]*(Formula dell'area) Sia $\phi : \overline{O} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa differenziabile, dove O è un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbb{R}^3$ e $f : O \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione su O. Supponiamo che il prodotto $f|Jac\ \phi|$ sia integrabile su O. Allora la funzione $n(\phi, f)$ è integrabile in $\mathbb{R}^3$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f) = \int_O f(x)|Jac\ \phi|(x)\ dx.$$

Osservazione 1.18. Osserviamo che se ϕ è iniettiva, allora

$$n(\phi, f)(x) = f \circ \phi^{-1}(x),$$

cioè, in questo caso, la formula dell'area è un cambio di variabili.

Proposizione 1.19. *Sia $\mathcal{R}$ una regione di una superficie orientabile, siano $a < b$ numeri reali, e sia $\phi : \mathcal{R} \times (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa differenziabile. Allora posto*

$$\mathcal{N} = \{(p, t) \in \mathcal{R} \times (a, b)|\ |Jac\ \phi|(p, t) = 0\},$$

si ha che $\phi(\mathcal{N})$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Essendo $\mathcal{R}$ una regione, allora esiste un aperto limitato $O = N_\epsilon(\mathcal{R})$ di $\mathbb{R}^3$ ed un diffeomorfismo F da $\mathcal{R} \times (a, b)$ in O. Allora $\phi \circ F^{-1}$ è una mappa differenziabile da un aperto limitato O di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$. Per il teorema di Sard si ha che $\phi \circ F^{-1}(\mathcal{N}')$ ha misura nulla, dove :

$$\mathcal{N}' = \{x \in O|\ |Jac\ (\phi \circ F^{-1})|(x) = 0\}.$$

Ma

$$|Jac\ (\phi \circ F^{-1})|(x) = |Jac\ \phi| \circ F^{-1}(x)\ |Jac\ F^{-1}|(x),$$

e siccome F è un diffeomorfismo si ha $|Jac\ F^{-1}|(x) \neq 0$ per ogni $x \in O$ e quindi vale che $x \in O$ è critico per $\phi \circ F^{-1}$ se e soltanto se $F^{-1}(x)$ è critico per ϕ, perciò $(\phi \circ F^{-1})(\mathcal{N}') = \phi(\mathcal{N})$ e dunque $\phi(\mathcal{N})$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^3$. □

Teorema 1.20 (Formula dell'area per il prodotto)**.** *Sia $\phi : \overline{\mathcal{R}} \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa differenziabile, dove $\mathcal{R}$ è una regione di una superficie orientabile e $a < b$ sono numeri reali, e sia f una funzione su $\mathcal{R} \times (a, b)$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che $f|Jac\ \phi|$ sia integrabile su $\mathcal{R} \times (a, b)$. Allora la funzione $n(\phi, f)$, data da*

$$n(\phi, f)(x) = \sum_{(p,t) \in \phi^{-1}(x)} f(p, t),$$

è ben definita quasi ovunque ed integrabile in $\mathbb{R}^3$*, con integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f) = \int_{\mathcal{R}\times(a,b)} f(p,t)|Jac\ \phi|(p,t)\ dpdt.$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che, posto

$$\mathcal{N} = \{(p,t) \in \mathcal{R} \times (a,b)|\ |Jac\ \phi|(p,t) = 0\},$$

si ha che $\phi(\mathcal{N})$ ha misura nulla e quindi $n(\phi, f)$ è ben definita quasi ovunque. Consideriamo O un aperto relativamente compatto di $\mathbb{R}^3$, e sia

$$\psi : O \longrightarrow \mathcal{R} \times (a,b)$$

un diffeomorfismo, applichiamo la formula dell'area alla mappa $\phi \circ \psi$ e alla funzione $f \circ \psi$. Dunque abbiamo

$$\int_O (f \circ \psi)|Jac\ (\phi \circ \psi)| = \int_{\mathbb{R}^3} n(\phi \circ \psi, f \circ \psi).$$

Siccome ψ è un diffeomorfismo $n(\phi \circ \psi, f \circ \psi) = n(\phi, f)$ e dalla Definizione 1.8 si ha

$$\int_O (f \circ \psi)|Jac\ (\phi \circ \psi)| = \int_{\mathcal{R}\times(a,b)} f|Jac\ \psi|,$$

e dalle due uguaglianze si ha la tesi. □

Teorema 1.21 (Formula dell'area per superfici)**.** *Sia* $\phi : \overline{\mathcal{R}_1} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}_2}$ *una mappa differenziabile tra due regioni di due superfici orientabili e sia* f *una funzione su* $\mathcal{R}_1$ *a valori in* $\mathbb{R}$ *tale che il prodotto* $f|Jac\ \phi|$ *è integrabile su* $\mathcal{R}_1$*. Allora la funzione definita da*

$$n(\phi, f)(q) = \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} f(p)$$

è ben definita per ogni $q \in \mathcal{R}_2$*, eccetto su un insieme di misura nulla, ed è integrabile su* $\mathcal{R}_2$*. Inoltre,*

$$\int_{\mathcal{R}_1} f(p)|Jac\ \phi|(p)\ dp = \int_{\mathcal{R}_2} n(\phi, f).$$

Dimostrazione. Per ipotesi $f|Jac\ \phi|$ è integrabile su $\mathcal{R}_1$ e per la Definizione 1.11 il suo integrale è dato da

$$\int_{\mathcal{R}_1} f|Jac\ \phi| = \int_{\mathcal{R}_1\times(0,1)} f(p)|Jac\ \phi|(p)\ dpdt.$$

Ora la mappa

$$\pi_1 : \mathcal{R}_1 \times (0,1) \longrightarrow \mathcal{R}_1$$

è la proiezione sulla prima componente, possiamo allora riscrivere l'equazione precedente come

$$\int_{\mathcal{R}_1} f|Jac\ \phi| = \int_{\mathcal{R}_1\times(0,1)} (f\circ\pi_1)|Jac\ (\phi\times Id_{(0,1)})|.$$

Scegliamo ora un diffeomorfismo

$$\psi : \overline{O} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}_2}\times[0,1],$$

dove O è un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$. Denotiamo con

$$\xi : \mathcal{R}_1\times(0,1) \longrightarrow O$$

la composizione

$$\xi = \psi^{-1}\circ(\phi\times Id_{(0,1)})$$

e usando la moltiplicatività del valore assoluto dello Jacobiano, l'integrale del membro di destra dell'equazione precedente diventa

$$\int_{\mathcal{R}_1\times(0,1)} (f\circ\pi_1)(|Jac\ \psi|\circ\xi)|Jac\ \xi|.$$

Applicando la formula dell'area per il prodotto alla mappa ξ e alla funzione $(f\circ\pi_1)|Jac\ \psi|\circ\xi$, si vede che

$$\int_{\mathcal{R}_1} f|Jac\ \phi| = \int_{\mathbb{R}^3} n(\xi,(f\circ\pi_1)|Jac\ \psi|\circ\xi).$$

Osserviamo che

$$n(\xi,(f\circ\pi_1)(x)|Jac\ \psi|\circ\xi)(x) = n(\xi,f\circ\pi_1)|Jac\ \psi|(x).$$

Applicando la Definizione 1.8 alla mappa ψ e alla funzione $n(\xi,f\circ\pi_1)|Jac\ \psi|(x)$ otteniamo

$$\int_{\mathcal{R}_1} f|Jac\ \phi| = \int_{\mathcal{R}_2\times(0,1)} n(\xi,f\circ\pi_1)\circ\psi^{-1}.$$

La dimostrazione si conclude notando che

$$[n(\xi,f\circ\pi_1)\circ\psi^{-1}](q,t) = n(\phi,f)(q)$$

per ogni $q\in\mathcal{R}_2$ regolare per $n(\phi,f)$, e usando ancora la Definizione 1.11 per l'integrale di superficie. Infine per il teorema di Sard tra superfici si ha che $n(\phi,f)$ è ben definita quasi ovunque. □

Corollario 1.22. *Lo stesso risultato si ha se $\phi : S_1 \longrightarrow S_2$ è una mappa differenziabile tra due superfici compatte orientabili.*

2 Superficie tubolare intorno ad una curva nello spazio

In questa sezione mostro che una curva semplice, chiusa, di Frenet nello spazio ammette una superficie tubolare intorno ad essa. Dopo di che trovo l'espressione della curvatura Gaussiana K nei punti della superficie tubolare, uso la formula dell'area per superfici per calcolare l'integrale di K nella regione $\mathcal{K}$ dei punti della superficie tubolare a curvatura Gaussiana positiva ed infine la calcolo l'integrale di K nella regione $\mathcal{K}$ tramite parametrizzazione, mostrando che è due volte la curvatura totale e che questo risultato è compatibile con quello della formula dell'area tra superfici.

2.1 Intorno tubolare intorno ad una curva nello spazio

Come abbiamo detto, lo scopo di questa sezione è mostrare che intorno ad una curva semplice, chiusa, di Frenet in $\mathbb{R}^3$ esiste una superficie detta tubo. Quello che facciamo non è altro che trovare un atlante di carte locali e per fare ciò, dobbiamo mostrare che le nostre candidate carte locali parametrizzino effettivamente aperti del tubo. Quindi dobbiamo trovare degli aperti "buoni" di $\mathbb{R}^3$ che intersecati col tubo ci diano l'immagine di ogni carta locale. In questa sotto-sezione troviamo questi aperti e per fare ciò usiamo che una curva semplice, chiusa, di Frenet in $\mathbb{R}^3$ ammette un intorno tubolare.

Definizione 2.1. Sia $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva semplice e di Frenet, cioè p.l.a con curvatura strettamente positiva dove L è la lunghezza di α, e sia C la traccia di α. Se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $p \in C$ esiste un disco aperto $D_\delta(p)$ di raggio δ e centro p normale alla curva in p per cui

$$D_\delta(p) \cap D_\delta(q) = \emptyset \quad per\ ogni\ p, q \in C,\ p \neq q$$

allora l'unione

$$U_\delta(C) = \bigcup_{p \in C} D_\delta(p)$$

è detta *intorno tubolare* di α (o di C).

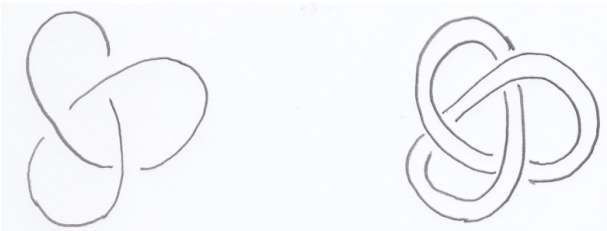


Figura 2

Nella Figura 2 si vede a sinistra una curva chiusa e a destra un suo intorno tubolare.

Proposizione 2.2. *Sia $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva chiusa e sia C la traccia di α. Se C ammette un intorno tubolare $U_\delta(C)$, per qualche $\delta > 0$, allora $U_\delta(C)$ è un aperto di $\mathbb{R}^3$.*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che

$$U_\delta(C) = \{q \in \mathbb{R}^3 |\ dist(q, C) < \delta\}.$$

Se

$$q \in D_\delta(p) \subset D_\delta(C)$$

per qualche $p \in C$, allora

$$dist(q, C) \leq dist(q, p) < \delta.$$

Viceversa se $q \in C$, allora

$$q \in D_\delta(q) \ e \ dist(q, C) = 0 < \delta,$$

altrimenti se $q \notin C$ e $dist(q, C) < \delta$ consideriamo la mappa

$$d_q : C \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$d_q(p) = dist(p, q).$$

Allora d_q è continua e differenziabile, ed essendo C compatto, d_q ammette un punto di minimo $p_0 \in C$. Sia

$$s_0 \in [0, L] \quad tale \ che \quad p_0 = \alpha(s_0),$$

allora $d_q \circ \alpha$ è differenziabile e il suo differenziale in s_0 è

$$0 \equiv d(d_q \circ \alpha)_{s_0} = d(d_q)_{p_0} \cdot T(s_0) = \frac{1}{|q - p_0|} < T(s_0), q - p_0 >,$$

quindi $< T(s_0), q - p_0 >= 0$ e perciò $p_0 \in D_\delta(q)$. □

Osservazione 2.3. L'ipotesi di chiusura per la curva C è fondamentale, infatti nel caso contrario si avrebbe

$$U_\delta(C) \not\supseteq \{q \in \mathbb{R}^3 |\ dist(q, C) < \delta\} = B_\delta(C).$$

Proposizione 2.4. *Sia $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva semplice, chiusa, di Frenet e sia C la traccia di α. Allora C ammette un intorno tubolare $U_r(C)$ per qualche $r > 0$.*

Dimostrazione. L'idea è di mostrare che esiste localmente un intorno tubolare, dopodiché mostrare che esiste un raggio comune che va bene per ogni intorno tubolare locale in modo tale da raccordarli in un unico tubo ed infine mostrare che esiste un raggio r per cui il tubo non si auto-interseca. Cioè facciamo vedere che per ogni coppia di punti $p, q \in C$ esistono rispettivamente due intorni tubolari locali, di raggio r, disgiunti. Ci sarà utile considerare l'estensione liscia L-periodica

$$\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

di α data da

$$\tilde{\alpha}(\tilde{s}) = \alpha(s)$$

dove $s \in [0, L)$ tale che $\tilde{s} - s$ è un multiplo intero di L.

Passo 1 : Per ogni $s \in [0, L]$ esiste un $r > 0$ ed un $\epsilon > 0$ tale che

$$I(s, \epsilon) = \tilde{\alpha}((s - \epsilon, s + \epsilon))$$

ammette un intorno tubolare

$$U_r(I(s, \epsilon)).$$

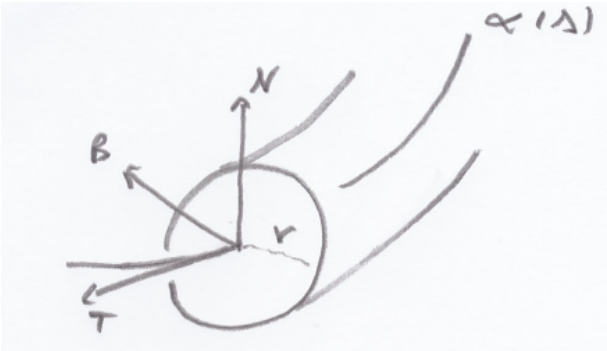


Figura 3

Consideriamo la mappa

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

data da

$$F(s, u, v) := \tilde{\alpha}(s) + uN(s) + vB(s) \tag{3}$$

Questa mappa è differenziabile ed il differenziale nel punto $(s, 0, 0)$, dove $s \in [0, L]$, è dato da

$$dF_{(s,0,0)} = (T(s)|N(s)|B(s)),$$

dove T, N, B sono rispettivamente il vettore tangente, normale e binormale di α, e dunque $dF_{(s,0,0)}$ è un isomorfismo lineare. Allora per il teorema della funzione inversa esiste un intorno aperto di $(s,0,0)$ della forma

$$A_r(s,\epsilon) = (s-\epsilon, s+\epsilon) \times B((0,0), r),$$

per qualche $\epsilon > 0$ e un $r > 0$, dove $B((0,0), r)$ è la palla aperta di raggio r e centro in $(0,0)$, tale che la restrizione

$$F|_{A_r(s,\epsilon)} \longrightarrow F(A_r(s,\epsilon))$$

ha inversa differenziabile e dunque è un diffeomorfismo con l'immagine, e l'immagine $F(A_r(s,\epsilon))$ è proprio $U_r(I(s,\epsilon))$ per costruzione di F.

Passo 2 : Esiste un $r > 0$ tale che per ogni $s \in [0, L]$ esiste $\epsilon > 0$ per cui

$$F|_{A_r(s,\epsilon)} : A_r(s,\epsilon) \longrightarrow U_r(I(s,\epsilon))$$

è un diffeomorfismo.

Osserviamo che la famiglia

$$\{U_r(I(s,\epsilon))\},$$

data nel Passo 1, è un ricoprimento aperto di C, ed essendo C compatto, è possibile estrarne una sotto-famiglia finita

$$\{U_{r_1}(I(s_1,\epsilon_1)), \cdots, U_{r_n}(I(s_n,\epsilon_n))\}.$$

Poniamo

$$r := \min\{r_{s_1}, \cdots, r_{s_n}\}.$$

Allora gli

$$U_r(I(s_i,\epsilon_i)), \quad i = 1, \cdots, n$$

sono intorni tubolari locali di C, la mappa

$$F|_{A_r(s_i,\epsilon_i)} : A_r(s_i,\epsilon_i) \longrightarrow U_r(I(s_i,\epsilon_i))$$

è ancora un diffeomorfismo in quanto restrizione di un diffeomorfismo.

Passo 3 : Esiste un $r > 0$ tale che per ogni $s, t \in [0, L)$ esistono $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ per cui

$$U_r(s,\epsilon) \cap U_r(t,\delta) = \emptyset.$$

Supponiamo che tale r non esista. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $p_n, q_n \in C$ tali che

$$p_n \neq q_n \quad e \quad D_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap D_{\frac{1}{n}}(q_n) \neq \emptyset.$$

Assumiamo, senza perdita di generalità, che le successioni $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siano convergenti rispettivamente a p e q, infatti, siccome C è compatto, oggi successione in C ammette una sotto-successione convergente, e posso usare gli stessi indici in quanto con gli indici della sotto-successione convergente della prima successione estraggo una sotto-successione convergente dalla seconda che a sua volta ammette una sotto-sotto-successione convergente e gli indici di quest'ultima vanno bene per entrambe. Inoltre esiste una successione

$$r_n \in D_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap D_{\frac{1}{n}}(q_n),$$

a causa della nostra supposizione, tale che

$$|p_n - q_n| \leq |p_n - r_n| + |r_n - q_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

quindi p e q coincidono. Siano $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\alpha(t_n) = p_n, \quad \alpha(s_n) = q_n$$

e siano convergenti a l_1 ed l_2 rispettivamente, sempre perché $[0, L]$ è compatto. Se esistono $\epsilon > 0$ tali che per ogni $n > N_0$,

$$|t_n - s_n| > \epsilon,$$

allora $l_1 \neq l_2$ e

$$\alpha(l_1) = p = q = \alpha(l_2),$$

e ciò è assurdo per semplicità di α. Se invece per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N_0$ si ha

$$|t_n - s_n| < \epsilon,$$

allora si ha che $l_1 = l_2 = l$. Ma per il Passo 1 so che localmente in l esiste un intorno tubolare U per cui $F|_U$ è iniettiva, inoltre le successioni $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ staranno definitivamente in U è ciò non è possibile per la condizione che $p_n \neq q_n$. In conclusione unendo tutti gli $U_r(s, \epsilon)$ si ha l'intorno tubolare $U_r(C)$. □

Osservazione 2.5. Osserviamo che se $U_{r_0}(C)$ è un intorno tubolare, per $r_0 > 0$,allora per ogni $0 < r < r_0$ $U_r(C)$ è un intorno tubolare.

2.2 Superficie tubolare intorno ad una curva nello spazio

Adesso mostriamo che una curva semplice, chiusa, di Frenet α ammette una superficie tubolare T di raggio $r > 0$ ed in particolare è la traccia T della mappa

$$f(s,v) := \alpha(s) + r(N(s)\cos v + B(s)\sin v) \tag{4}$$

definita in $[0,L]\times[0,2\pi]$, e la sua restrizione a $(0,L)\times(0,2\pi)$ è una parametrizzazione locale di T.

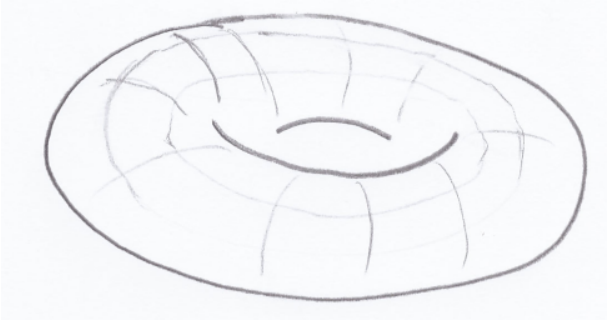


Figura 4

Per esempio la superficie tubolare di una circonferenza è il toro, come in Figura 4.

Definizione 2.6. Se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $p \in C$ esiste un cerchio $S_\delta(p)$ di raggio δ e centro p normale alla curva α in p per cui

$$S_\delta(p) \cap S_\delta(q) = \emptyset \quad \text{per ogni } p, q \in C,$$

allora l'unione

$$T_\delta(C) = \bigcup_{p\in C} S_\delta(p)$$

è detta *tubo* (o *superficie tubolare*) intorno ad α (o a C).

Proposizione 2.7. *Sia $\alpha : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva semplice, chiusa, di Frenet e sia C la sua traccia. Allora α ammette un tubo T che è una superficie orientabile. In particolare, la mappa (4) è una parametrizzazione locale.*

Dimostrazione. L'idea è usare il fatto che la curva C ammette un intorno tubolare $U_{r_0}(C)$ e che una qualsiasi "sezione cilindrica" di $U_{r_0}(C)$ è una superficie tubolare.

Passo 1 : Esiste $r > 0$ tale che la traccia T di f, definita in (4), è una superficie tubolare.

Sia $r_0 > 0$ tale che $U_{r_0}(C)$ è un intorno tubolare di C, sia $0 < r < r_0$ e sia F la mappa definita in (3). Consideriamo la mappa

$$g : [0, L] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

data da

$$g(s, v) = (s, r\cos v, r\sin v).$$

L'immagine di g è una superficie, non è altro che un cilindro intorno al segmento $[0, L]$ dell'asse delle x. Se considero l'intorno

$$V = \mathbb{R} \times B((0, 0), r)$$

dell'asse delle x, allora, per quanto visto nella Proposizione 2.4, si ha che $F(V) = U_r(C)$ è un intorno tubolare di C, e dunque è possibile trovare un $0 < r' < r$ tale che l'immagine di g è contenuta in V e dunque $F \circ g \equiv f$ è un tubo intorno a C ed è quindi una superficie in quanto $F|_V$ è un diffeomorfismo locale, sempre per quanto visto nella Proposizione 2.4.

Passo 2 : T è orientabile.

Abbiamo che la mappa

$$M : [0, L] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

data da

$$M(s, v) = N(s)\cos v + B(s)\sin v$$

è una mappa normale su T, in quanto è una mappa continua a valori in $\mathbb{S}^2$, quindi in particolare

$$< M, M_s >=< M, M_v >= 0$$

perciò

$$< f_s, M >=< T(s) + rM_s, M >= 0 =< rM_v, M >=< f_v; M >$$

e dunque è normale ad ogni piano tangente di T. □

Osservazione 2.8. Sia f definita in (4). In quanto parametrizzazione essa è differenziabile ed il suo differenziale nel punto $(s, v) \in (0, L) \times (0, 2\pi)$ è dato da

$$df_{(s,v)} = (f_s | f_v),$$

dove

$$f_s = (1 - rk\cos v)T(s) + r\tau(-N(s)\sin v + B(s)\cos v),$$

$$f_v = r(-N(s)\sin v + B(s)\cos v)$$

e τ è la torsione di α, ed il differenziale è iniettivo se e solo se

$$f_s \wedge f_v = r(1 - rk\cos v)M \neq \underline{0} \Longleftrightarrow 1 - rk\cos v \neq 0,$$

dove M è la mappa di Gauss e k la curvatura di α. Quindi si ha il vincolo su r dato da

$$rk_0 < 1 \tag{5}$$

dove $k_0 = \max\{k(s)|\ s \in [0, L]\}$. Questa condizione ci sarà utile più avanti, ed essa non è aggiuntiva a quanto detto precedentemente, è già verificata con la scelta di $r > 0$ per cui $U_r(C)$ è intorno tubolare. Infatti la (5) dice solo quando f è differenziabile, ma noi abbiamo ottenuto di più della differenziabilità.

2.3 Curvatura gaussiana nei punti della superficie tubolare

I coefficienti della prima forma fondamentale nei punti di S sono :

$$E = (1 - rk\cos v)^2 + r^2\tau^2, \quad F = r^2\tau, \quad G = r^2.$$

Dove k e τ sono rispettivamente curvatura e torsione di α. La mappa di Gauss su T è data da :

$$M = \frac{\underline{x}_s \wedge \underline{x}_v}{|\underline{x}_s \wedge \underline{x}_v|} = -(N\cos v + B\sin v),$$

dove

$$|\underline{x}_s \wedge \underline{x}_v|^2 = EG - F^2 = r^2(1 - rk\cos v)^2.$$

Dopo di che

$$M_s = -N'\cos v - B'\sin v = Tk\cos v + N\tau\sin v - B\tau\cos v,$$

$$M_v = N\sin v - B\cos v,$$

da qui otteniamo:

$$M_s \wedge M_v = k\cos v(N\cos v + B\sin v).$$

Essendo

$$\underline{x}_s \wedge \underline{x}_v = -r(1 - rk\cos v)(N\cos v + B\sin v)$$

si vede che

$$M_s \wedge M_v = \frac{-k\cos v}{r(1 - rk\cos v)}\underline{x}_s \wedge \underline{x}_v.$$

Dunque la curvatura Gaussiana è :

$$K = \frac{-k\cos v}{r(1 - rk\cos v)} \tag{6}$$

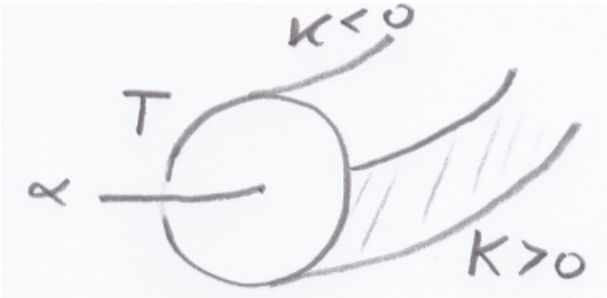


Figura 5

Osservazione 2.9. Dalla (6) si vede che $K(s,v) \geq 0$ se e solo se

$$v \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Chiamo

$$\mathcal{K} = f\Big((0,L) \times \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big)\Big),$$

è l'insieme dei punti di T con curvatura Gaussiana strettamente positiva, dunque

$$\overline{\mathcal{K}} = \{(s,v) \in [0,L] \times [0,2\pi] |\ K(s,v) \geq 0\}.$$

Osservazione 2.10. Per quanto visto precedentemente, la superficie tubolare T intorno ad una curva semplice, chiusa, di Frenet è una superficie compatta orientabile, non solo $\mathcal{K}$ appena definito è una regione di T e dunque ammette un intorno tubolare $N_\delta(\mathcal{K})$, aperto di $\mathbb{R}^3$, diffeomorfo a $\mathcal{K} \times (-\delta, \delta)$,per qualche $\delta > 0$. Siamo pronti per integrare su $\mathcal{K}$.

2.4 Integrazione su $\mathcal{K}$

Sia T sia una superficie tubolare intorno ad $\alpha : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva semplice, chiusa, di Frenet. Vogliamo integrare la curvatura Gaussiana K su l'insieme $\overline{\mathcal{K}}$ nel modo classico, cioè tramite parametrizzazione. $\overline{\mathcal{K}}$ non è un insieme aperto di T, per integrare K su $\overline{\mathcal{K}}$ vogliamo usare il teorema di convergenza monotona.

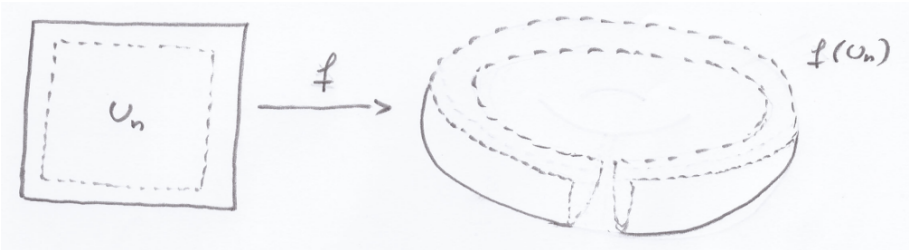


Figura 6

A tal proposito sia f data in (4) e poniamo

$$U_n = \left(\frac{1}{n}, L - \frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ non nullo. Poniamo inoltre

$$f_n(s,v) := \mathcal{X}_{U_n}(s,v)K(s,v),$$

dove $\mathcal{X}_A$ è la funzione caratteristica di A. Le funzioni f_n sono ben definite, in quanto $f|_{(0,L)\times(0,2\pi)}$ è un un diffeomorfismo, e sono integrabili su T, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ non nullo si ha

$$\int_T f_n = \int_{U_n} K\sqrt{EG - F^2}\ dsdv = \int_{\frac{1}{n}}^{L-\frac{1}{n}} \int_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{n}} -k(s)\cos v\ dsdv$$

$k(s)$ e $\cos v$ sono entrambe funzioni positive negli intervalli di integrazioni quindi possiamo usare Fubini

$$\int_T f_n = -\int_{\frac{1}{n}}^{L-\frac{1}{n}} k(s)\ ds \int_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{n}} k(s)\cos v\ dv = (2\cos\frac{1}{n}) \int_{\frac{1}{n}}^{L-\frac{1}{n}} k(s)\ ds$$

che ha un valore finito e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_T f_n = 2\int_0^L k(s)\ ds$$

che ha un valore finito. Osserviamo inoltre che la successione di funzioni f_n è monotona e converge puntualmente a

$$\tilde{f}(s,v) := \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{K}}}(s,v)K(s,v)$$

quindi per il teorema di convergenza monotona

$$\int_{\overline{\mathcal{K}}} K = \int_T f = \int_T \lim_{n\to+\infty} f_n = 2\int_0^L k(s)\ ds \tag{7}$$

cioè la curvatura Gaussiana totale sull'insieme $\overline{\mathcal{K}}$ è uguale al doppio della curvatura totale della curva α.

Osservazione 2.11. Osserviamo che l'integrale di K su $\overline{\mathcal{K}}$ è lo stesso di integrare su $\mathcal{K}$, in quanto, per l'osservazione 2.9, $K = 0$ sui punti di $\partial\mathcal{K}$. Integrare $\mathcal{K}$ secondo la definizione di integrale tramite parametrizzazione, fatta precedentemente, coincide con l'integrale dato dalla Definizione 1.11, infatti

$$\int_{\mathcal{K}} K = 1 \cdot \int_{\mathcal{K}} K = \int_{[0,1]} 1 \cdot \int_{\mathcal{K}} K = \int_{(0,1)} 1 \cdot \int_{\mathcal{K}} K.$$

Sappiamo che $f|_{(0,L)\times(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}$ è un diffeomorfismo la cui immagine è $\mathcal{K}$, dunque

$$\int_{(0,1)} 1 \cdot \int_{\mathcal{K}} K = \int_{(0,1)} 1 \cdot \int_{(0,L)\times(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})} K \circ f|Jac\ f|,$$

e siccome 1 e $K \circ f|Jac\ f|$ sono funzioni positive ed integrabili, per il teorema di Fubini si ha

$$\int_{(0,1)} 1 \cdot \int_{(0,L)\times(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})} K \circ f|Jac\ f| = \int_{(0,L)\times(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\times(0,1)} K \circ (f \times Id_{(0,1)})|Jac\ f \times Id_{(0,1)}|.$$

Ma abbiamo che $f|_{(0,L)\times(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})} \times Id_{(0,1)}$ è un diffeomorfismo tra $(0,L)\times(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\times(0,1)$ e $\mathcal{K}\times(0,1)$, dunque per la Definizione 1.8 si ha

$$\int_{(0,L)\times(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\times(0,1)} K \circ (f \times Id_{(0,1)})|Jac\ f \times Id_{(0,1)}| = \int_{\mathcal{K}\times(0,1)} K,$$

e si conclude con la Definizione 1.11.

Teorema 2.12. *Sia T una superficie tubolare intorno ad una curva semplice, chiusa, di Frenet. Allora :*

$$\int_T K^+ = \int_{\mathbb{S}^2} n_{\mathcal{K}}(M) \tag{8}$$

dove $n_{\mathcal{K}}(M) = n(M, \mathcal{X}_{\mathcal{K}})$, $K^+ = \max\{K, 0\}$, $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$ è la funzione caratteristica dell'insieme dei punti di T a curvatura Gaussiana strettamente positiva ed M la mappa di Gauss su S.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{K}$ l'insieme dei punti a curvatura Gaussiana strettamente positiva. Abbiamo visto che $\mathcal{R} = f((0,L)\times(0,2\pi))$ ed è quindi una regione, dove f è data in (4). Per definizione si ha che $K = |Jac\ M|$, inoltre $K^+ = \mathcal{X}_{\mathcal{K}}|Jac\ M|$, e per quanto visto in (7), si ha che $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}|Jac\ M|$ è una funzione integrabile. Siccome la mappa di Gauss $M : T \longrightarrow \mathbb{S}^2$ è differenziabile, per la formula dell'area tra superfici vale

$$\int_T \mathcal{X}_{\mathcal{K}}|Jac\ M| = \int_{\mathbb{S}^2} n_{\mathcal{K}}(M),$$

dunque si ha la tesi. □

3 Il Teorema di Fáry-Milnor

3.1 Enunciato ed alcuni risultati preliminari

Teorema 3.1 (di Fáry-Milnor)**.** *la curvatura totale di una curva in $\mathbb{R}^3$ semplice, chiusa, di Frenet e annodata è maggiore di 4π.*

Prima di passare alla dimostrazione chiariamo alcune cose preliminari.

Definizione 3.2. Una curva C in $\mathbb{R}^3$ semplice, chiusa, di Frenet è *sciolta* se esiste

$$j : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

embendding del disco in $\mathbb{R}^3$, cioè una mappa che è omeomorfismo con l'immagine, tale che

$$C = j(\partial D),$$

cioè la curva C è immagine del bordo del disco tramite l'embendding.

Proposizione 3.3. *Sia $\beta : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa regolare. Allora $\beta([0, L])$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^2$.*



Figura 7

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mu(\beta([0, L])) > 0$, dove μ è la misura di Lebesgue, allora esiste $t_0 \in [0, L]$ tale che

$$\mu(\beta([t_0 - \mu, t_0 + \mu])) > 0$$

per ogni $\mu > 0$. Infatti, se così non fosse, avremo che per ogni $t \in [0, L]$ esiste $\epsilon_t > 0$ tale che

$$\mu(\beta([t - \epsilon_t, t + \epsilon_t])) = 0 \quad t \in (0, L), \quad \mu(\beta([0, 0 + \epsilon_0)) = 0, \quad \mu(\beta(L - \epsilon_L, L]) = 0.$$

La famiglia

$$\{(t - \epsilon_t, t + \epsilon_t)\}_{t\in(0,L)} \cup \{[0, 0 + \epsilon_0), (L - \epsilon_L, L]\}$$

è un ricoprimento aperto di $[0, L]$, che è compatto, quindi è possibile estrarre un sotto-ricoprimento finito $\{U_1, \cdots, U_n\}$, ma allora

$$\mu(\beta([0, L])) = \mu(\beta\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\Big)) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \beta(U_i)\Big) \leq \bigcup_{i=1}^{n} \mu(\beta(U_i)) = 0$$

assurdo. Sia dunque t_0 tale che

$$\mu(\beta([t_0 - \mu, t_0 + \mu])) > 0$$

per ogni $\mu > 0$ e sia $p \in \mathbb{R}^2$ tale che $\beta(t_0) = p$. Per ipotesi β è regolare, dunque se $\beta(t) = (x(t), y(t))$ abbiamo che

$$\beta'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq 0.$$

Supponiamo senza perdita di generalità che $y'(t_0) \neq 0$, allora sia

$$F : \mathbb{R} \times [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

data da

$$F(s, t) = (x(t) + s, y(t)).$$

Questa mappa è differenziabile e il suo differenziale in $(0, t_0)$ è

$$dF_{(0,t_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) \end{pmatrix} \not\equiv 0.$$

Allora per il teorema della funzione inversa esiste un $\epsilon > 0$, un $\delta > 0$ ed un intorno aperto U di p in $\mathbb{R}^2$ tale che

$$F : (-\epsilon, \epsilon) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow U$$

è un diffeomorfismo. Se consideriamo

$$g : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

data da

$$g(t) = (0, t),$$

abbiamo che

$$\beta \equiv F \circ g.$$

Siccome

$$\mu(\beta([t_0 - \delta, t_0 + \delta])) > 0,$$

allora esiste W intorno aperto di p in $\mathbb{R}^2$ tale che

$$W \subset \beta([t_0 - \delta, t_0 + \delta]),$$

ma allora

$$g((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) = F^{-1} \circ \beta(((t_0 - \delta, t_0 + \delta)))$$

cioè $Im(g)$ contiene l'aperto $F^{-1}(W)$ di $\mathbb{R}^2$, ma questo è assurdo per costruzione di g. □

Corollario 3.4. *(a) : Sia $\beta : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa regolare. Allora β non è surgettiva.*

(b) : Sia $\beta : [0, L] \longrightarrow S$ una curva chiusa regolare a valori su una superficie. Allora ha misura nulla e non è surgettiva.

Dimostrazione. (a) : Se fosse surgettiva allora, in particolare, l'immagine di β conterrebbe un aperto U, ma si arriva ad un assurdo come prima.

(b) : Sia

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$$

una parametrizzazione locale. Se $\beta([0, L])$ non avesse misura nulla, allora conterrebbe un aperto W della superficie S, supponiamo che f parametrizzi W e sia

$$\gamma : [0, L] \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

tale che $\beta \equiv f \circ \gamma$. Allora, siccome f è un omeomorfismo, si ha che $\gamma([0, L])$ contiene l'aperto $f^{-1}(W)$ di $\mathbb{R}^2$, allora si ha un assurdo dalla Proposizione 3.3 ed in modo simile si ha che non è surgettiva. □

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema di Fáry-Milnor:

3.2 Dimostrazione

Dimostrazione. L'idea è definire una funzione altezza h_w lungo una direzione privilegiata w la quale permette di dire che ogni suo punto critico è solamente un punto di massimo o di minimo. Dopo di che supporre per assurdo la tesi e mostrare che allora esiste una direzione w per cui h_w ha esattamente un massimo ed un minimo e mostrare che questo implica che la curva è sciolta.

Passo 1 : Se $w \neq \pm B(s)$ per ogni $s \in [0, L]$, allora oggi punto critico della funzione altezza h_w è un punto di massimo o di minimo.

Osserviamo che il vettore binormale $B(s)$ di $\alpha(s)$ è una curva chiusa regolare a valori in $\mathbb{S}^2$, quindi per il Corollario 3.2 esiste $w \in \mathbb{R}^3$ unitario non nullo tale che $w \neq \pm B(s)$ per ogni $s \in [0, L]$. Sia

$$h_w : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$$

la funzione *altezza* di α nella direzione w, definita da

$$h_w(s) =< \alpha(s), w > . \tag{9}$$

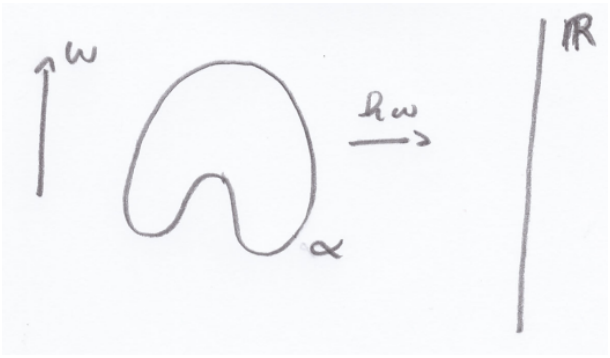


Figura 8

Siccome

$$h'_w(s) =< T(s), w >,$$

si vede che $s \in [0, L]$ è un punto critico di h_w, cioè un punto per cui $h'_w(s) = 0$, precisamente quando il vettore tangente $T(s)$ è ortogonale a w. Osserviamo inoltre che

$$h''_w(s) =< \alpha''(s), w >=< k(s)N(s), w > .$$

Se $s \in (0, L)$ è un punto critico di h_w allora $T(s)$ deve essere ortogonale a w e questo significa che w è una qualche combinazione lineare di $N(s)$ e $B(s)$. Possiamo supporre che i punti critici di h_w siano in $(0, L)$, infatti essendo $[0, L]$ compatto h_w ammette massimo e minimo. Se 0 o L fosse un punto di minimo, tramite un'altra parametrizzazione di α, potremmo far sì che che tale punto sia interno e quindi critico. Siccome abbiamo scelto $w \neq \pm B(s)$ non nullo, allora deve valere $< N(s), w >\neq 0$. Inoltre, per ipotesi, $k(s) \neq 0$ e allora $< k(s)N(s), w >\neq 0$, perciò $h''_w(s) \neq 0$. Quindi ogni punto critico di h_w è un massimo o un minimo.

Passo 2 : Mostriamo che se

$$\int_C k < 4\pi,$$

allora esiste $w_0 \neq \pm B(s)$ per ogni $s \in [0, L]$ tale che h_{w_0} ha solo due punti critici.

Per la (7)

$$\int_{\mathcal{K}} K = 2 \int_0^L k(s)ds < 8\pi.$$

Supponiamo al contrario che per ogni $w \in \mathbb{R}^3$ unitario non nullo tale che
$w \neq \pm B(s)$ per ogni $s \in [0, L]$, h_w ha almeno tre punti critici. Per il Passo 1 ogni

punto critico è un massimo o minimo. Assumiamo che due di questi, diciamo s_1 ed s_2, siano punti di minimo, l'altro caso è analogo. Allora la superficie tubolare T intorno ad α ammette due minimi p e q tale che $K(p), K(q) > 0$ e
$M(p) = M(q) = -w$, come in Figura 9.



Figura 9

Infatti sia

$$H_w : [0, L] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$H_w(s, v) =< \alpha(s) + r(N(s)\cos v + B(s)\sin v), w > .$$

Questa è la funzione altezza di

$$f = \alpha(s) + r(N(s)\cos v + B(s)\sin v),$$

come in (4), nella direzione w, con w unitario non nullo diverso da $\pm B(s)$ per ogni $s \in [0, L]$. le sue derivate parziali sono

$$(H_w)_v =< f_v, w >=< r(-N(s)\sin v + B(s)\cos v), w >$$

$$(H_w)_s =< f_s, w >=< (1 - rk\cos v) < T(s), w > +\tau(H_w)_v.$$

Queste sono nulle se

$$< B(s)\cos v - N(s)\sin v, w >= 0 \quad e \quad < T(s), w >= 0,$$

dove ho usato (5) per dire che $1 - rk\cos v > 0$. Dalla seconda uguaglianza si ha che almeno in s_1, s_2 questa si annulla. Da quanto visto nel Passo1 , in s_i con $i = 1, 2$, w deve essere della forma

$$w = N(s_i)\cos\tilde{v_i} + B(s_i)\sin\tilde{v_i} = -M(s_i, \tilde{v_i}),$$

per qualche $\tilde{v_i} \in [0, 2\pi],\ i = 1, 2$, dove la seconda uguaglianza l'abbiamo ottenuta nella sotto-sezione 2.3. Quindi, in $s_i,\ i = 1, 2$, si ha

$$0 =< B(s_i)\cos v - N(s_i)\sin v, w >= \sin\tilde{v_i}\cos v - \sin v\cos\tilde{v_i} = \sin(\tilde{v_i} - v).$$

Dunque se $v_i \in [0, 2\pi]$ è tale che $\tilde{v_i} - v_i = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, gli (s_i, v_i) sono punti stazionari per H_w, e in questi punti il piano tangente è normale a w. Osserviamo che, poiché $w \neq \pm B(s_i)$, abbiamo $\tilde{v_i} \neq \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi, per l'osservazione 2.9 $K(s_i, v_i) \neq 0$. Perciò se $\tilde{v_i} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ prendo $v_i = \tilde{v_i}$, se $\tilde{v_i} \in (0, \frac{\pi}{2})$ prendo $v_i = \tilde{v_i} + \pi$ e se $\tilde{v_i} \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ prendo $v_i = \tilde{v_i} - \pi$, in ogni caso ho $K(s_i, v_i) > 0$ e $M(s_i, v_i) = -w$, quindi $-w$ è immagine, tramite la mappa di Gauss M, di due punti sulla superficie con curvatura Gaussiana strettamente positiva. Siccome, per il Corollario 3.4 (b), $B([0, L])$ ha misura nulla in $\mathbb{S}^2$, per il Teorema 2.12

$$\int_{\mathcal{K}} K \geq Area(\mathbb{S}^2) = 8\pi,$$

che contraddice l'ipotesi.

Passo 3 : Esiste $w_0 \neq \pm B(s)$ per ogni $s \in [0, L]$ tale che h_{w_0} ha solo due punti critici. Allora C è sciolta.

Quindi sia w_0 tale che h_{w_0} ha solamente due punti critici, s_1, s_2, e siano P_1 e P_2 piani perpendicolare a w_0 passanti per $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ rispettivamente. Ogni piano ortogonale a w_0 e fra P_1 e P_2 incontrerà la curva in esattamente due punti, se così non fosse esisterebbero $t_1 < t_2 < t_3$ punti di $[0, L]$ tale che

$$0 = h_{w_0}(t_3) - h_{w_0}(t_2) = h_{w_0}(t_2) - h_{w_0}(t_1) = h_{w_0}(t_3) - h_{w_0}(t_1),$$

allora, per Rolle, esisterebbero $a \in (t_1, t_2),\ b \in (t_2, t_3)$ e $c \in (t_3, 2\pi]$ o $c \in [0, t_1)$ tale per cui h_{w_0} ha tre punti critici, ma questo è assurdo. Il punto c è ottenuto considerando l'estensione liscia L periodica di α ad $\mathbb{R}$ e restringendola al compatto $[t_3, t_1 + L]$ e applicando Rolle. Uniamo ogni coppia di punti con un segmento, in questo modo otteniamo un insieme il cui bordo è $\alpha([0, L])$ ed è omeomorfa ad un disco, infatti siano

$$P_1 = \{z \in \mathbb{R}^3 |\ < w_0, z >= \alpha(s_1)\}, \quad P_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 |\ < w_0, z >= \alpha(s_2)\}$$

i piani ortogonali a w e passanti per il massimo ed il minimo di h_{w_0} e sia

$$d = |\alpha(s_2) - \alpha(s_1)|.$$

Suppongo, senza perdita di generalità, che il punto di minimo è in 0 ed il punto di massimo $0 < \bar{s} < L$. Consideriamo adesso la base di $\mathbb{R}^3$ data da $\{T(s_1), w_0, B(s_1)\}$, allora $\alpha(s)$ sarà della forma

$$(x(s), y(s), z(s)).$$

Pongo, per ogni $s \in \mathbb{R}$, $t = y(s)$ e osserviamo che

$$h_{w_0}(\alpha(s)) =< \alpha(s), w_0 >= y(s) = t$$

e siccome ogni piano P tra P_1 e P_2 parallelo ad essi è della forma $< z, w_0 >= t$ e sappiamo che questo ha solo due intersezioni con α, una tra $[0, \bar{s}]$ e l'altra in $[\bar{s}, L]$, si ha che $y(s)$ è monotona crescente in $[0, \bar{s}]$ e decrescente in $[\bar{s}, L]$ e quindi $y(s)$, ristretta ai due intervalli, è invertibile. Suppongo, senza perdita di generalità, che $y(0) = 0$, cioè il minimo di α ha la seconda componente nulla. Allora abbiamo che

$$y(s) : [0, \bar{s}] \longrightarrow [0, d]$$

è invertibile e dunque pongo

$$\alpha_1(t) : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

data da

$$\alpha_1(t) = (x(y^{-1}(t)), t, z(y^{-1}(t))),$$

la riparametrizzazione di $\alpha|_{[0,\bar{s}]}$. Abbiamo che, se

$$P = \{z \in \mathbb{R}^3 | \ < z, w_0 >= t\},$$

allora

$$P \cap \alpha_1([0, d]) = t,$$

cioè

$$h_{w_0}(\alpha_1(t)) = t.$$

In modo analogo, faccio la stessa cosa, considerando però $\alpha(L - s)$, cioè la curva parametrizzata nel verso opposto, ottenendo così

$$\alpha_2 : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che

$$P \cap \alpha_2([0, d]) = t.$$

Pongo allora

$$F : (0, d) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

data da

$$F(t, s) = s\alpha_1(t) + (1 - s)\alpha_2(t).$$

Allora F è un diffeomorfismo con l'immagine, infatti F è differenziabile e iniettiva, le derivate parziali sono

$$F_t(t, s) = sT_{\alpha_1}(t) + (1 - s)T_{\alpha_2}(t) \notin w^{\perp},$$

$$F_s(t, s) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t) \in w^{\perp},$$

per ogni $(t, s) \in (0, d) \times [0, 1]$, allora il differenziale di F è iniettivo, quindi è un diffeomorfismo locale e perciò un diffeomorfismo con l'immagine. Siccome $(0, d) \times [0, 1]$ è diffeomorfo ad un disco D meno due punti al bordo, diciamo p e q, considero allora

$$G : D - \{p, q\} \longrightarrow F((0, d) \times [0, 1])$$

diffeomorfismo e considero la sua estensione continua $\tilde{G}$ al disco D imponendo $\tilde{G}(p) = \alpha(0)$ e $\tilde{G}(q) = \alpha(d)$. Dunque $\tilde{G}$ è un embendding del disco tale che $\tilde{G}(\partial D) = C$, cioè non ho fatto altro che spostarmi lungo la curva ed unire i due punti di intersezione coi piani P.

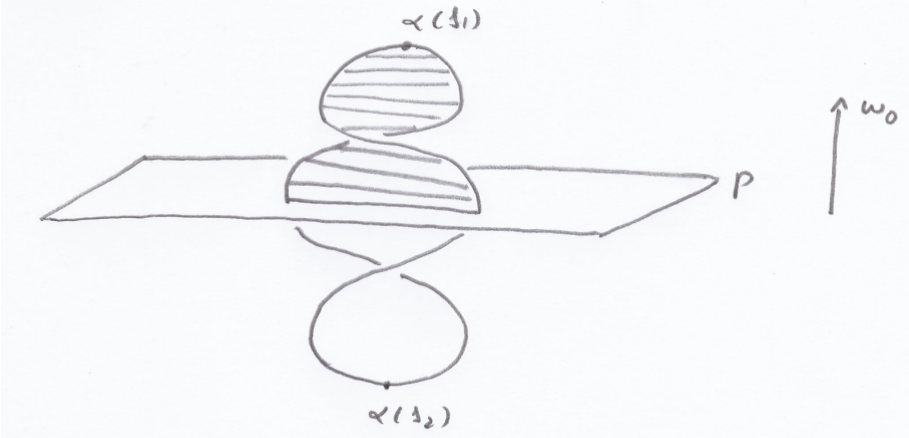


Figura 10

Dunque, secondo la Definizione 3.2, la curva è sciolta, è ciò va contro l'ipotesi che la curva sia annodata.

Passo 4 : Se

$$\int_C k = 4\pi,$$

allora esiste una piccola perturbazione $\widetilde{C}$ tale che

$$\int_{\widetilde{C}} k < 4\pi,$$

cioè $\widetilde{C}$ è sciolta e quindi C è sciolta.

Per il Teorema fondamentale della teoria locale delle curve nello spazio, abbiamo che per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e per ogni funzioni $k_0, \tau_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabili, con $k_0(s) > 0$ per ogni $s \in I$, esiste un'unica mappa $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ p.l.a, a meno di movimenti rigidi, tale per cui $k_0(s)$ e $\tau_0(s)$ sono rispettivamente la curvatura e la torsione di γ.

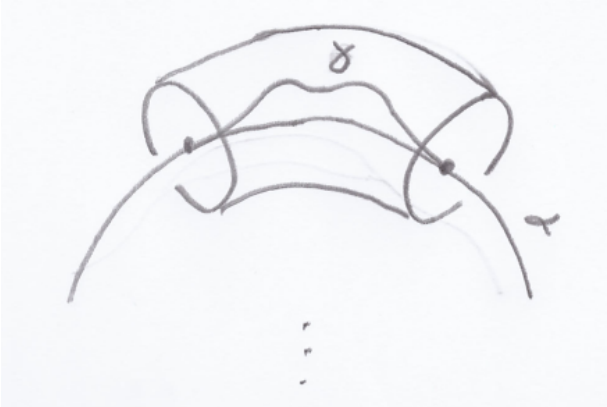


Figura 11

A tal proposito sia $p \in C$ e sia $s \in [0, L]$ tale che $\alpha(s) = p$. Consideriamo un $\epsilon > 0$ tale che $\alpha((s-\epsilon, s+\epsilon))$ sia un arco di curva abbastanza piccolo, sia U la parte di introno tubolare su $\alpha((s-\epsilon, s+\epsilon))$ e sia $0 < \delta < \epsilon$. Voglio perturbare α solo sull'intervallo $(s-\delta, s+\delta)$ di modo tale che sia sempre contenuta in U, e ciò mi garantisce che la perturbazione $\widetilde{C}$ non interseca gli altri archi di C e quindi è ancora una curva semplice, chiusa, di Frenet. Prendo allora $k_1(t)$ e $\tau_1(t)$ tale che sono uguali a $k(t)$ e $\tau(t)$ per ogni t nell'aperto

$$(s-\epsilon, s-\delta) \cup (s+\delta, s+\epsilon)$$

e $k_1(t) < k(t)$ in

$$(s-\delta, s+\delta).$$

Allora per il Teorema citato precedentemente esiste

$$\gamma : (s-\epsilon, s+\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la cui curvatura e torsione sono rispettivamente k_1 e τ_1. A meno di movimenti rigidi γ e uguale ad α in $(s-\epsilon, s-\delta) \cup (s+\delta, s+\epsilon)$ ed è quindi sostituire $\alpha|_{(s-\epsilon, s+\epsilon)}$ con γ in modo lisci spostando γ tramite movimenti rigide alla curva C ottenendo $\widetilde{C}$ che è quello che volevamo. La scelta di k_1 e τ_1 la posso fare in modo tale che γ abbia immagine in U. Quindi per il Passo 3 la curva $\widetilde{C}$ è sciolta e dunque C è sciolta.

Conclusioni : Passo 3 e Passo 4 dicono che

$$\int_C k > 4\pi$$

cioè la tesi.

□

Riferimenti bibliografici

[1] Carmo, Manfredo Perdigao : Do. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* 2.nd ed. Mineola (NY): Dover, 2016. Print.

[2] Montiel, Sebastián, Antonio Ros, and Donald Babbitt. *Curves and Surfaces.* 2.nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2009. Print. Graduate Studies in Mathematics 69.

[3] István Fáry, *sur la courburetotale d'une courbe gauce faisant un noeud,* Bull. Soc. Math. France 77 (1949), 128-138. MR 0033118

[4] J.W.Milnor, *On the total curvature of knots,* Ann. of Math. (2) 52 (1950),248-257. MR 0037509

[5] W.Fenchel *Über Krümmung und Windung geschlossenser Raumkurven*(Math. Ann., vol. 101, 1929, p. 238-252).

[6] K.Borsuk, *Sur la courbure totale des courbes fermeés* (Ann. Soc. Pol. Math., vol. XX, 1948, p. 251-265).