

Complementi di Analisi Funzionale

A.A. 2025-2026
SIMONE SACCANI

INTRODUZIONE ALLE DISTRIBUZIONI

esempio $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$ funzione di Heaviside
 $"H' = \delta = +\infty \chi_{\{0\}}"$



TFCI: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 , a supporto compatto
 $\int_0^{+\infty} f'(x) dx = -f(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H'(x) dx$
 formula di integrazione per parti

δ' :  (dipolo elettrico)

esempio $(L^1(\mathbb{R}), *)$ è un'algebra (di Banach) NON UNITARIA
 L'unità da aggiungere dovrebbe essere la δ : " $f * \delta = f$ "
 Sappiamo che: se $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi dx = 1$
 $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon dx = 1$ e
 $f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ in L^1 e q.o. se $f \in L^1$
 $"f * \delta"$ $"\varphi_\varepsilon \xrightarrow{?} \delta"$

Idea di Schwartz: le funzioni generalizzate (da poter derivare indefinitivamente) sono da vedere come funzionali lineari su uno spazio di funzioni test: $C_c^\infty(\Omega)$
 Questo spazio di funzioni ha una topologia naturale che lo rende uno SVTLC completo non metrizzabile; indicato con $\mathcal{D}(\Omega)$ nella notazione di Schwartz
 $C_c^\infty(\Omega)$ è pure uno SVTLC indicato $\mathcal{E}(\Omega)$, metrizzabile e completo.

Convergenza:

$(f_n) \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$ converge a f in $\mathcal{E}$ se

$\partial^\alpha f_n \rightarrow \partial^\alpha f$ uniformemente sui compatti $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$,

dove $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$

(per il Tes. di Schwarz, ciò è invariante per permutazione delle coordinate)

$(f_n) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ converge a f in $\mathcal{D}$ se

$\exists K \subseteq \Omega$ compatto t.c. $\text{supp}(f_n) \subseteq K$ e $f_n \xrightarrow{\mathcal{E}} f$, cioè $\forall \alpha \partial^\alpha f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \partial^\alpha f$

Oss $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{E}$ (per la convergenza di $\mathcal{E}$)

Def. Una distribuzione u su Ω è una forma lineare (seq.) continua su $\mathcal{D}(\Omega)$:

$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad u(f_n) \rightarrow u(f)$

Lo spazio delle distribuzioni su Ω si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Def. Una distribuzione a supporto compatto è una forma lineare (seq.) continua su $\mathcal{E}(\Omega)$:

$\forall f_n \in \mathcal{E}, f_n \xrightarrow{\mathcal{E}} f \quad v(f_n) \rightarrow v(f)$

FATTO: vi è una inclusione lineare

$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

$f \mapsto u_f$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f \varphi$

è iniettiva perché per $f \in L^1_{loc}$ vale TFCV:

$\int_{\Omega} f \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ allora $f = 0$ (q.o.)

FATTO Molte operazioni e costruzioni lineari su $\mathcal{D}'(\Omega)$ si possono definire generalizzando analoghe operazioni su $\mathcal{D}(\Omega)$ via trasposizione:

da $L: \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ si ottiene

$$L^T: \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad L^T u = u \circ L$$

esempio si definisce $\partial_{x_i}: \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \partial_{x_i} u = -\partial_{x_i}^T u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\text{cioè } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \partial_{x_i} u(\varphi) = -u(\partial_{x_i} \varphi)$$

Può in generale:

$$\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$$

La formula di integrazione per parti (per Ω) dice che questa definizione generalizza ∂_{x_i} da $C^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} f \partial_{x_i} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \partial_{x_i} f \cdot \varphi \, dx \quad \forall f \in C^1(\Omega) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Similmente, si definiscono operazioni su $\mathcal{D}'(\Omega)$:

- moltiplicazione per una funzione
- convoluzione
- cambio di variabile
- trasformata di Fourier

EX perché gli elementi di $\mathcal{E}'(\Omega)$ si chiamano distribuzioni a supporto compatto?

Idea:

(1) $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ è denso (seq.)

(se χ_n è una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ t.c. $\chi_n|_{K_n} = 1$, con (K_n) successione di compatti che invade Ω , allora $\chi_n \notin C_c^\infty$ e $\chi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$)

$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$ (via restrizione a $\mathcal{D}$)

è iniettiva perché $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{E}$

Dunque gli elementi di $\mathcal{E}'$ si possono includere in $\mathcal{D}'$

Se $u \in \mathcal{E}'$, vi è un compatto $K \subset \Omega$ t.c.

$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, se $\text{supp}(\varphi) \cap K = \emptyset$ allora $u(\varphi) = 0$

Per assurdo, $\exists \varphi_n \in \mathcal{E}$ con $\text{supp} \varphi_n \cap K_n = \emptyset$, $u(\varphi_n) = 1$, quindi $\varphi_n \longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}$ quindi $u(\varphi_n) \longrightarrow 0$ ∇

Struttura di SVTLC sugli spazi di funzioni test

Ricordo che: uno SVT (su $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) è uno spazio vettoriale con una topologia che rende continue le operazioni vettoriali

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$

Una classe importante sono gli SVTLC, cioè che ammettono una base di interni convessi di 0.

Equivaleentemente, si possono descrivere con una famiglia di seminorme:

($p: V \longrightarrow \mathbb{R}$ è una seminorma se

$$p(x) \geq 0, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in K$$

In generale, non è una norma.)

Se P è una famiglia di seminorme su V , la famiglia delle palle

$\{B_p(0, r) : p \in P, r > 0\}$ è una pre-base di interni

(è già una base se P è una famiglia di seminorme "stabile per massimo")

$$B_{p \vee q}(0, r) = B_p(0, r) \cap B_q(0, r)$$

esempio

- $C^0(\Omega)$ con la Topologia della convergenza uniforme sui compatti, associata alla famiglia di seminorme $\{\|\cdot\|_{\infty, K}\}_{K \in \mathcal{K}(\Omega)}$
- $C^m(\Omega)$, $0 \leq m \leq \infty$, con la Topologia della convergenza uniforme con le derivate di ordine $\leq m$

$$\{\rho_{m, K}\}_{K \in \mathcal{K}(\Omega)}$$

$$\text{dove } \rho_{m, K}(f) = \max_{k \leq m} \|\partial^k f\|_{\infty, K}$$

- $\mathbb{R}^n$ con la topologia prodotto, è uno SVTLC con

$$\rho_k(x) = |x_k| \quad \text{e anche } \rho_n(x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

- Topologie deboli:

se F è un sottospazio di forme lineari su V (su K), $F \subseteq V'_{\text{alg}}$ è definita la topologia debole relativa a F $\sigma(V, F)$, che è la meno fine topologia su V che rende continua le $f \in F$

EX (1) esiste

(2) ha come prebase di intorni di 0 gli insiemi

$$\{x \in V : |\langle f, x \rangle| \leq 1\}$$

(3) è topologizzato dalla famiglia di seminorme

$$\rho_f(x) = |\langle f, x \rangle|, \quad f \in F.$$

(4) In particolare è uno SVT.

FATTO Dati V K -sp. vett. e $F \subseteq V'_{\text{alg}}$ ssp
 $(V, \sigma(V, F))^*$ (forme lineari continue) $= F$

esempio Altre costruzioni di funzioni C_c^∞ via convoluzione iterata.
 Per $a > 0$, consideriamo $H_a := \frac{1}{a} \chi_{[0,a]}$, $\int_{\mathbb{R}} H_a dx = 1$, $H_a \geq 0$.
 Per $\varphi \in C_c^\infty$, $H_a * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) H_a(x-y) dy = \frac{1}{a} \int_{x-a}^x \varphi(y) dy$
 $(H_a * \varphi)'(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-a)}{a} = \frac{1}{a} (I - \tau_a)(\varphi)$

Se $\text{supp}(\varphi) \subset [0, T]$, $\text{supp}(H_a * \varphi) \subset [0, T+a]$

Sia $(a_k)_{k \geq 0}$ una serie di reali positivi con $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = T < \infty$

Definiamo

$$\begin{cases} U_0 := H_{a_0} \\ U_{k+1} := H_{a_{k+1}} * U_k, \quad \text{cioè } U_k = H_{a_k} * H_{a_{k-1}} * \dots * H_{a_0} \end{cases}$$

Oss $U_k \in C_c^\infty([0, a_0 + a_1])$ (è lineare a tratti)

e U_k è di classe C^{k-1} ; $\text{supp}(U_k) \subset [0, \sum_{j=0}^k a_j] \subset [0, T]$

Per dato $m \in \mathbb{N}$ e $k > m$,

$$\begin{aligned} U_k^{(m)} &= D^m (H_{a_k} * H_{a_{k-1}} * \dots * H_{a_0}) = \\ &= D^{m-1} \left[\frac{1}{a_0} (I - \tau_{a_0}) H_{a_k} * \dots * H_{a_1} \right] \end{aligned}$$

Oss I l'operatore di traslazione $\tau_a: \varphi \mapsto \varphi(\cdot - a)$

commuta con l'operatore derivata.

Quindi $U_k^{(m)} = \left(\prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{a_j} (I - \tau_{a_j}) \right) (H_{a_m} * \dots * H_{a_k})$
 (prodotto commutativo di m operatori)

Quindi, essendo $\|\tau_a \varphi\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{L^\infty}$

$$\|U_k^{(m)}\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |U_k^{(m)}| dx \leq \frac{2^m}{a_0 a_1 \dots a_{m-1}}$$

$$\text{perché } \int_{\mathbb{R}} H_{a_m} * \dots * H_{a_k} = \prod_{j=0}^m \int_{\mathbb{R}} H_{a_j} = 1$$

Per la stima di $\|U_k^{(m)}\|_{L^\infty}$, basta ricordare che $\|\varphi * g\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$

Quindi

$$\|U_k^{(m)}\|_{L^\infty} \leq \frac{2^m}{a_0 a_1 \dots a_{m-1}} \|H_{a_m} * \dots * H_{a_k}\|_{L^1} \leq \frac{2^m}{a_0 a_1 \dots a_m}$$

Allora $(U_k)_{k \geq m}$ è limitata in $C^m[0, T]$ $\forall m$

(Però, via Ascoli-Arzelà e argomento diagonale, esiste una ssc convergente in tutti i C^m ad una funzione C_c^∞ , con

$$\|u^{(m)}\|_{L^\infty} \leq \frac{2^m}{a_0 \dots a_m}, \quad u \geq 0, \quad \int_0^T u = 1, \quad \text{supp}(u) \subset [0, T])$$

In realtà (U_k) è già convergente.

basta provare che U_k converge puntualmente; allora, da quanto detto, la convergenza è C^m $\forall m$

(argomento di Urysohn: $u_j \rightarrow u$ sse $\forall ssc \{u_{j_k}\} ssc \{u_{j_k} \rightarrow u\}$)

$$U_{k+1} - U_k = H_{a_{k+1}} * U_k - U_k = \frac{1}{a_{k+1}} \int_{x-a_{k+1}}^x U_k(y) dy - U_k(x) = \frac{1}{a_{k+1}} \int_{x-a_{k+1}}^x (U_k(y) - U_k(x)) dy$$

$$\|U_{k+1} - U_k\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{a_{k+1}} a_{k+1} \cdot \sup_{|x-y| \leq a_{k+1}} |U_k(x) - U_k(y)| \leq a_{k+1} \|U_k\|_{L^\infty} \leq \frac{2a_{k+1}}{a_0 a_1}$$

Allora (U_k) converge uniformemente perché $U_k = \sum_{j=0}^{k-1} (U_{j+1} - U_j)$

è una serie normalmente convergente per $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Si può fare l'analogia stima per $\|U_{k+1}^{(m)} - U_k^{(m)}\|_{L^\infty}$, ma non è necessario

esempio Prendendo $a_k = \frac{1}{(k+1)^\lambda}$, $\lambda > 1$, si trova $\sum a_k < \infty$ e una funzione $u \in C_c^\infty$, $\text{supp}(u) \subset [0, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\lambda}]$,

$$\text{con } \|u^{(m)}\|_{L^\infty} \leq 2^m [(m+1)^\lambda]^\lambda$$

(e non esiste con $\lambda=1$)

(vedere "Teorema di Denjoy-Carleman")

SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

Def. Uno SVT su $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ è un K -spazio vettoriale con una topologia che rende continue le operazioni vettoriali
 $+: V \times V \rightarrow V, \quad \cdot: K \times V \rightarrow V$

esempio ogni spazio normato; $C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}), C^0(\Omega)$ con conv. unif. sui compatti;

Oss Ogni SVT T_0 è anche T_3

Oss Prodotto topologico e lineare di due SVT è uno SVT con le rispettive strutture prodotto

Def. X SVT è somma diretta topologica dei suoi ssp vett. X_1 e X_2 se
 $+: X_1 \times X_2 \xrightarrow{\sim} X$ è omeo lineare.

EX Ogni SVT X si scompone in una somma diretta (non canonica)
 $(\overline{0})$ e Y qualunque addendo diretto algebrico
 $X = (\overline{0}) \oplus Y$
 $(\overline{0})$ ha la topologia indiscreta.
 Y è Hausdorff

esempio $\mathcal{L}^1(X, \mu) = \{\text{funzioni integrabili}\}, L^1(X, \mu) = \{\text{classi di funz. int.}\}$
 $L^1(X, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu) / \overline{0}$

Def. Un sottoinsieme $S \subseteq X$ si dice:
• bilanciato se $\forall \lambda \in K$ con $|\lambda| \leq 1, \lambda S \subseteq S$;
• assorbente se $\forall x \in X \exists m > 0$ t.c. $\forall t \geq m \quad x \in tS$

Perché le traslazioni $x \mapsto x - v$ in uno SVT sono omeomorfismi,
per descrivere la top. di uno SVT è sufficiente descrivere gli intorni dell'origine.

$\mathcal{U}_x := \{V \subseteq X, V \text{ intorno di } 0\}$

Proprietà:

- (1) $\mathcal{U}$ è un filtro
- (2) $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subseteq U$
- (3) $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U}, V \subseteq U \quad V$ bilanciato
- (4) $\forall U \in \mathcal{U}$ è assorbente

DIMOSTRAZIONE

- (1) per def. di intorno
- (2) continuità della somma in 0:
 $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U}$ t.c. $+(V \times V) \subseteq U$
- (3) continuità del prodotto in 0:
 $\forall U \in \mathcal{U} \exists \varepsilon > 0 \exists V \in \mathcal{U}$ t.c. $\cdot(B_K(0, \varepsilon) \times V) \subseteq U$
allora $V := B_K(0, \varepsilon) \cdot V_0$ è un intorno bilanciato contenuto in U
- (4) continuità del prodotto in $(0, x)$

Viceversa: se X è uno s.v. con un'assegnata famiglia di insiemi $\mathcal{U}$ verificante (1)-(4), vi è un'unica top di SVT per cui $\mathcal{U}$ è il sistema di intorni di 0. Si dichiara $A \subseteq X$ aperto se:

$$A = \bigcup_{\substack{0 \in U \\ a+U \subseteq A}} a+U$$

o anche: A aperto sse $\forall a \in A \quad A-a \in \mathcal{U}$

esempio SVT metrizzabili non localmente convessi

- $M := \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili}\}$
esiste una distanza su M che lo rende sp. metrico completo, SVT ($f_k \rightarrow f$ sse $f_k \rightarrow f$ in misura)
l'unica forma lineare continua su M è la forma nulla
- $L^p(0,1)$ con $0 < p < 1$: $\|f\|_p = \int_0^1 |f|^p$ "paranorma"
 $d_p(f,g) := \|f-g\|_p$
rendo L^p un SVT metrico completo, non loc. convesso e di nuovo con duale top nullo.
- $\ell^p = \{(x_k)_{k \geq 0} \mid \sum |x_k|^p < +\infty\}$ $0 < p < 1$
con $d_p(x,y) = \|x-y\|_p$, è SVT met. compl. non loc. conv.
 $f: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ è un funz. lineare continuo sse si estende a un funz. lineare continuo su ℓ^1

SVT localmente convessi

DEF. X è uno SVTLCL se ogni $x \in X$ ammette un SFI convessi.

Vi è una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X t.c.

(i) $\forall B \in \mathcal{B}$ B è assorbente, bilanciato e convesso
"assolutamente convesso"

(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B_3 \in \mathcal{B} \quad B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Viceversa, se X è sv su K e $\mathcal{B}$ una famiglia di parti che soddisfa (1)-(2), allora la famiglia

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X: \exists r > 0 \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.c. } rB \subseteq U\}$$

è una famiglia con le proprietà (1)-(4), che caratterizza una topologia di SVT su X (e LC).

Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme sullo sv X , la famiglia

$$\mathcal{B} := \{B_p(0,1) : p \in \mathcal{P}\} \text{ ha le proprietà (i)-(ii)}$$

e quindi definisce una topologia di SVTLCL su X .

dove la famiglia aumentata $\tilde{\mathcal{P}}$ è ottenuta includendo anche

$\max\{p_1, \dots, p_k\}$ con sottoinsiemi finiti $\{p_1, \dots, p_k\} \subseteq \mathcal{P}$,

in modo che se $p, q \in \tilde{\mathcal{P}}$, allora $p \vee q \in \tilde{\mathcal{P}}$

$$B_{p \vee q}(0,r) = B_p(0,r) \cap B_q(0,r)$$

Funzionale di Minkowski associato ad un convesso

$C \subseteq X$ $\mathbb{R}$ -sp. vett., $0 \in C$, C convesso

Def. Il funzionale di Minkowski è la funzione

$$p_C: X \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$p_C(x) := \inf \{ t > 0 : x \in tC \}$$

esempio Se $C = B(0, 1)$ di uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ allora $p_C = \|\cdot\|$

Proprietà

(1) C bilanciato $\implies p_C(x) = p_C(-x)$

($\lambda C = C \forall |\lambda| = 1 \implies p_C(\lambda x) = p_C(x) \forall |\lambda| = 1$)

(1) $\{p_C < 1\} \subseteq C \subseteq \{p_C \leq 1\}$

(2) C assorbito $\iff p_C(x) < +\infty \forall x$

(3) p_C è positivamente omogenea.

$$\forall \lambda > 0 \forall x \in X \quad p_C(\lambda x) = \inf \{ t > 0 : \lambda x \in tC \} = \inf_{t=\lambda s, s>0} \{ \lambda s > 0 : \lambda x \in \lambda sC \} = \\ = \inf \{ \lambda s > 0 : x \in sC \} = \lambda \inf \{ s > 0 : x \in sC \} = \lambda p_C(x)$$

(4) p_C è subadditiva:

$\forall x, y \in X$ (wlog $p_C(x), p_C(y) < +\infty$), siano $a, b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } p_C(x) < a, p_C(y) < b$.

Quindi $x \in aC, y \in bC \implies \frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} \left(\frac{y}{b}\right) \in C$

$\implies x+y \in (a+b)C$, quindi $p_C(x+y) \leq a+b$ arbitrari $\implies p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$

In particolare: se C è un insieme assorbito, bilanciato e convesso, allora p_C è una seminorma (e $\{p_C < 1\} \subseteq C \subseteq \{p_C \leq 1\}$)

Topologia iniziale di una famiglia di applicazioni

Sia X un insieme, $\mathcal{Y}$ una famiglia di applicazioni

$\mathcal{Y} = \{ f_i: X \longrightarrow Y_i, i \in I \}$ a valori in spazi topologici Y_i .

Allora esiste la meno fine topologia $\tau_{\mathcal{Y}}$ su X che rende

continue le mappe $\mathcal{Y}$, e ha come prebase di aperti

la famiglia $\{ f_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{B}_i \}$, con $\mathcal{B}_i$ base (o prebase) della topologia di Y_i .

Proprietà universale: un'applicazione $\phi: Z \longrightarrow X$ è continua se e solo se $f_i \circ \phi$ è continua $\forall i \in I$

$$\begin{array}{ccc} (Z, \tau_Z) & \xrightarrow{\phi} & (X, \tau_{\mathcal{Y}}) \\ & \searrow f_i \circ \phi & \downarrow f_i \\ & & (Y_i, \tau_{Y_i}) \end{array}$$

"Transitività" della costruzione: consideriamo la situazione

$$\begin{array}{ccccc} & & g_{ik} & \longrightarrow & Z_{ik} \\ & \nearrow f_i & \nearrow g_{ik} & & \nearrow g_{ik} \\ X & \xrightarrow{f_i} & (Y_i, \tau_{Y_i}) & \xrightarrow{g_{ik}} & Z_{ik} \\ & \searrow f_j & \searrow g_{jk} & \longrightarrow & \searrow g_{jk} \\ & & (Y_j, \tau_{Y_j}) & \xrightarrow{g_{jk}} & Z_{jk} \\ & \searrow f_k & \searrow g_{kn} & \longrightarrow & \searrow g_{kn} \\ & & (Y_k, \tau_{Y_k}) & \xrightarrow{g_{kn}} & Z_{kn} \end{array}$$

con $\{Z_i\}$ famiglia di sp. top.; Y_i topologizzati con la top. iniziale di una famiglia $\mathcal{G}_i$

Allora la top. iniziale su X di $\mathcal{F} = \{f_i : X \rightarrow (Y_i, \tau_{Y_i})\}$ coincide con la top. iniziale delle composizioni $\{g_{ij} \circ f_j : X \rightarrow Z_{ij}\}$

Oss Casi particolari:

- (i) top. prodotto su $X = \prod_{i \in I} Y_i \xrightarrow{\pi_i} Y_i$
- (ii) top. indotta: $X \xrightarrow{i_X} (Y, \tau_Y)$

Caso di SVT e operatori lineari:

Se X è uno sp. vett. e $\mathcal{F} = \{T_i : X \rightarrow Y_i\}$ è una famiglia di operatori lineari a valori in SVT Y_i , allora la topologia $\tau_{\mathcal{F}}$ rende X SVT (cioè rende continue le operazioni vettoriali).

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{+} & X \\ (\tau_i, \tau_i) \downarrow & \searrow & \downarrow \tau_i \\ Y_i \times Y_i & \xrightarrow{+} & Y_i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K \times X & \xrightarrow{\cdot} & X \\ (\text{id}_K, \tau_i) \downarrow & \searrow & \downarrow \tau_i \\ K \times Y_i & \xrightarrow{\cdot} & Y_i \end{array}$$

Siccome $T_i : X \rightarrow Y_i$ è continua, anche $(T_i, T_i) : X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$ e allora anche la composizione.

Topologie deboli

Il caso particolare di top. iniziali su X sp. vett., rispetto a $\mathcal{F}$,

famiglia di funzionali lineari: $\mathcal{F} \subseteq X'_{\text{alg}}$

Wlog $\mathcal{F}$ è un sottospazio vett. di X'_{alg}

NOTAZIONE dato X sp. vett. e F ssp. di X'_{alg} , $\sigma(X, F)$ è la top. iniziale di F .

rende X SVT, loc. convesso; è topologizzato dalle seminorme $x \mapsto |f(x)|$; è $T_0 (= T_3)$ se e solo se F è separante ($\forall x \in X \exists f \in F : f(x) \neq 0$)

FATTO $(X, \sigma(X, F))^* = F$

Lemma Siano $f_0, f_1, \dots, f_n \in X'_{\text{alg}}$. Allora sono equivalenti:

- (i) $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$
- (ii) $|f_0| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|$
- (iii) $\text{Ker } f_0 \supseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Ker } f_i$

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) $M := \sum |\lambda_i|$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $x \in \bigcap \text{Ker } f_i \Rightarrow |f_0(x)| = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } f_0$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Ker } f_i = \text{Ker } \Phi$, dove $\Phi = \prod_{i=1}^n f_i : X \rightarrow K^n$
 Poiché $\text{Ker } f_0 \supseteq \text{Ker } \Phi$, f_0 si fattorizza tramite Φ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & K^n \\ & \searrow f_0 & \downarrow \lambda \\ & & K \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists \lambda : K^n \rightarrow K \text{ lineare} \\ (\lambda(u) = \sum \lambda_i u_i) \end{array}$$

cioè $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ t.c. $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$

□

Un caso particolare di top. debole:

$X = V^*$ duale di un SVT V

$F =$ valutazioni su $\mathcal{A}$ di $V \sim V$

Quindi si ha la topologia debole $*$ su V^* , cioè $\sigma(V^*, V)$

Continuità delle forme lineari su X SVT:

Lemma Per $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ lineare, X SVT, $f \neq 0$, sono equivalenti:

- (i) f continua
- (ii) $\text{Ker } f$ chiuso
- (iii) $\text{Ker } f$ non è denso
- (iv) f non è surgettiva su un aperto $\neq \emptyset$
($\exists A \neq \emptyset$ aperto t.c. $f(A) \neq \mathbb{K}$)
- (v) f è limitata su un intorno di 0

Dimostrazione

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\exists A$ aperto $\neq \emptyset$ disgiunto da $\text{Ker } f$

allora $f(A) \neq 0$, cioè f non è surgettiva su A

(iv) $\Rightarrow$ (v): $\exists A$ intorno di 0 t.c. $f(A) \neq \mathbb{K}$. Si può prendere A bilanciato
allora $f(A)$ è un sottoinsieme bilanciato di $\mathbb{K}$:

$f(A) =$ palla aperta/chiusa $\neq \mathbb{K}$, dunque $f(A)$ è limitato.

(v) $\Rightarrow$ (i): se $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in U$ intorno di 0, allora $\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{M}U$
 $\Rightarrow f$ è continua in 0 $\Rightarrow f$ continua. $\square$

Limitatezza negli SVT

Def. $S \subseteq X$ SVT è limitato se è assorbito da ogni intorno di 0,
cioè $\forall U \in \mathcal{U}_X \quad \exists t > 0$ t.c. $S \subseteq tU$

Esempio ogni punto è un insieme limitato

Equivalentemente:

- $\forall U \in \mathcal{U} \quad \exists t > 0$ t.c. $\forall r \geq t \quad S \subseteq rU$
- $\forall U \in \mathcal{B}$, con $\mathcal{B}$ prebase di intorni di 0, $\exists t > 0$ t.c. $\forall r \geq t \quad S \subseteq rU$

Oss. • se S è limitato, anche $\overline{S}$ lo è

(basta usare gli intorni chiusi nella def)

• se S e S' sono limitati, anche $S \cup S'$ lo è

• ogni compatto è limitato

• Caso degli SVTLC: se (X, P) è SVTLC definito dalla famiglia di seminorme P , $S \subseteq X$ è limitato se e solo se $\forall p \in P$ p è limitato su S

• Per $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato, S è limitato se e solo se è contenuto in una palla.

• Ogni operatore lineare continuo $T: X \rightarrow Y$ fra SVT è un operatore limitato, cioè $\forall S \subseteq X$ limitato, $T(S)$ è limitato in Y

Viceversa? Sì per X, Y normati
In generale no.

EX Se X è uno SVT I-norm. e $T: X \rightarrow Y$ SVT un operatore lineare
 t.c. $\forall x_k \rightarrow 0$ in X , $\exists x_{k_j}$ ssc t.c. $T(x_{k_j}) \rightarrow 0$.
 Allora T è continuo.

EX "Caratterizzazione sequenziale della limitatezza."
 $S \subseteq X$ SVT è limitato $\iff \forall (s_k) \subset S \quad \forall (\alpha_k) \subseteq K, \alpha_k \rightarrow 0$, vale
 $\alpha_k s_k \rightarrow 0$ in X .

DIMOSTRAZIONE

$(\Rightarrow)$ Sia S limitato, $(s_k) \subseteq S, (\alpha_k) \subseteq K, (\alpha_k) = o(1)$

Sia $U \in U_X$ bilanciato

S limitato $\Rightarrow \exists n \geq 0$ t.c. $S \subseteq nU$

Poiché $(\alpha_k) = o(1)$, $|\alpha_k| \leq \frac{1}{n}$ definitivamente

Allora $\alpha_k s_k \in \alpha_k S \subseteq \alpha_k nU \subseteq U$ perché U è bilanciato e $|n\alpha_k| \leq 1$.

$(\Leftarrow)$ Per assurdo, sia S non limitato: $\exists U \in U_X$ t.c. $S \not\subseteq nU \quad \forall n$

$\Rightarrow \forall n \exists s_n \in S \setminus nU$, quindi $(s_n) \subseteq S$ e t.c. $\forall n \nexists s_n \in U \quad \nexists$ □

DEF. $(x_n) \subseteq X$ SVT è di Cauchy se
 $\forall U \in U_X \exists n \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq n \quad x_p - x_q \in U$

EX Le successioni di Cauchy in uno SVT sono limitate.

DIMOSTRAZIONE

Sia $U \in U_X$, sia $V \in U_X$ bilanciato t.c. $V+V \subseteq U$

Poiché (x_n) è di Cauchy, $\exists n$ t.c. $x_n - x_{n_0} \in V \quad \forall n \geq n_0$,

cioè $x_n \in x_{n_0} + V \quad \forall n \geq n_0$.

Inoltre $\exists m$ t.c. $mV \supseteq \{x_{n_0}, x_{n_0}\}$ poiché $\{x_{n_0}, x_{n_0}\}$ è limitato.

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in mV + V \subseteq mV + mV = m(V+V) \subseteq mU$ □

Teorema di Banach-Steinhaus o uniforme limitatezza

Def. Una famiglia $\Gamma \subseteq L(X; Y)$ (operatori lineari continui tra gli SVT X e Y) si dice equicontinua se
 $\forall V \subseteq Y, \exists U \subseteq X$ t.c. $\forall T \in \Gamma, T(U) \subseteq V$ (o $U \subseteq T^{-1}(V)$)
 $\Gamma(U) \subseteq V$, dove $\Gamma(U) = \bigcup_{T \in \Gamma} T(U)$
 $U \subseteq I^{-1}(V)$, dove $I^{-1}(V) = \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(V)$

Teorema di Banach-Steinhaus

Siano X, Y SVT. Sia $\Gamma \subseteq L(X; Y)$ puntualmente limitata in $S \subseteq X$, cioè $\forall s \in S, \Gamma(s)$ è limitato in Y , con $S \subseteq X$ di II categoria. Allora Γ è equicontinua.

Def. $S \subseteq X$ sp. top. è:

- I-categoria se $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ con $\overline{S_n} = \emptyset$,
- II-categoria se non è I-categoria.

La nozione di sottoinsieme di II-categoria è rilevante grazie al Teorema di Baire.

Teorema di Baire

Sia X spazio metrico completo, (A_n) successione di aperti densi. Allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è denso.

Quindi X è II-categoria come sottoinsieme di X , cioè $X \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ con C_n chiusi, $\overline{C_n} = \emptyset$, o equivalentemente $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, con A_n aperti densi.

Dimostrazione

Sia B aperto, $B \neq \emptyset$: $B \cap A_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{B}_1 \subseteq A_1 \cap B$.

Iterando, $\exists \bar{B}_n(x_n, r_n) \subseteq B_{n-1} \cap A_{n-1}$, con $r_n > 0$

Per completezza, $x_n \rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap B \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è denso. $\square$

Dimostrazione

Sia $V \subseteq Y$; sia $W \subseteq Y$ chiuso e bilanciato t.c. $W+W \subseteq V$.

Per ipotesi, $\forall s \in S, \Gamma(s)$ è limitato

$\Rightarrow \exists n_s$ t.c. $\Gamma(s) \subseteq n_s W$, cioè $\forall T \in \Gamma, T(s) \in n_s W$,

ossia $s \in n_s T^{-1}(W)$, $s \in n_s I^{-1}(W) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n I^{-1}(W)$

Dunque $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n I^{-1}(W)$

Oss W chiuso $\Rightarrow n I^{-1}(W)$ chiuso (e omomorfo)

Poiché S è II-categoria, almeno uno, quindi tutti e in particolare $I^{-1}(W)$, hanno parte interna.

Allora $U = I^{-1}(W) - I^{-1}(W)$ è un intorno di 0

e vale $\forall T \in \Gamma, U \subseteq T^{-1}(W) - T^{-1}(W) = T^{-1}(W - W) \subseteq T^{-1}(V)$,

cioè $\forall T \in \Gamma, T(U) \subseteq V$. $\square$

Conseguenze

- Caso X, Y Banach:

$T \subseteq L(X, Y)$ puntualmente limitata in X (o in S II-categoria in X)
(cioè $\forall x \in X \sup_{T \in T} \|Tx\| < +\infty$).

Allora T è limitata in norma degli operatori: $\sup_{T \in T} \|T\| < +\infty$
(o equivalentemente, T è equilipschitz).

- X, Y Banach:

$(T_n)_n \subseteq L(X, Y)$ puntualmente convergente ("fortemente convergente")

Allora il limite $T: x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ è un operatore lineare continuo

$T: X \rightarrow Y$ con $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$

Infatti (T_n) è puntualmente limitata su $X \Rightarrow (T_n)$ limitata:

$\exists M$ t.c. $\|T_n x\| \leq M \|x\| \Rightarrow \|T x\| \leq M \|x\|$

$\Rightarrow \|T\| \leq \sup \|T_n\|$ ma vale per qualunque ssc.

esempio $T_n: \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T_n(x) = x \cdot e_n$ è t.c. $\|T_n\| = 1$ ma
 T_n converge puntualmente a 0.

- **EX** Continuità di applicazioni bilineari tra Banach:

Sia $b: X \times Y \rightarrow Z$ un'applicazione bilineare con X, Y, Z Banach.

separatamente continua: $\forall x \in X \ b(x, \cdot)$ è continua,
 $\forall y \in Y \ b(\cdot, y)$ è continua.

Allora b è continua

- X Banach, $Y = \mathbb{K}$.

Sia $T \subseteq X^*$. Allora T è limitata in X^* per $\|\cdot\|_{X^*}$

se e solo se T è puntualmente limitata su X ,

cioè T è limitata nella topologia debole* di X^*

- X Banach, $Y = \mathbb{K}$.

Sia $T \subseteq X$. Allora T è limitato in $(X, \|\cdot\|)$ se e solo se

T è w-limitato in X (cioè per la topologia $\sigma(X, X^*)$)

Segue dal punto precedente, vedendo T come sottoinsieme

di un duale, cioè X^{**} : vi è l'importante inclusione

isometrica $i_X: X \hookrightarrow X^{**}$, $x \mapsto \text{val}_x$

i_X è chiaramente lineare e continua di norma ≤ 1 :

$$\|i_X x\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |i_X x, f| = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |f, x| \leq \|x\|$$

Inoltre $\forall x \in X \ \|i_X x\|_{X^{**}} = \|x\|$, cioè $i_X: X \hookrightarrow X^{**}$

è un'inclusione di sottospazio (chiuso se X è Banach)

Inoltre, identificando X con la sua immagine isometrica $i_X(X) \subseteq X^{**}$,

la topologia indotta su X dalla topologia w* di X^{**} ,

cioè la $\sigma(X^{**}, X^*)$, è la $\sigma(X, X^*)$

Teorema di Hahn-Banach

Sia X spazio vettoriale reale, $M \subseteq X$ sottospazio,
 $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ subadditiva e positivamente omogenea (p è sublineare)
Sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ lineare t.c. $f(x) \leq p(x) \forall x \in M$.
Allora $\exists F: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare, $F(x) \leq p(x) \forall x \in X$, $F(x) = f(x) \forall x \in M$

DIMOSTRAZIONE

Sia $M := \{g \in \text{Nag} : M \subseteq N \subseteq X \text{ sottospazio}, g|_M = f, g \leq p \text{ su } N\}$
 M è parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione dei grafici,
cioè la relazione di estensione: $g \leq h \iff \text{graph}(g) \subseteq \text{graph}(h)$
cioè $\text{Dom}(g) \subseteq \text{Dom}(h)$ e $h|_{\text{Dom}(g)} = g$

$f \in M$ e M ha la condizione della catena ascendente:

$$(g_\alpha)_{\alpha \in A} \text{ catena in } M \implies \bigcup_{\alpha \in A} g_\alpha \in M$$

Per il lemma di Zorn, esiste un elemento massimale $F \in M$.

Bisogna verificare che se $g \in M$, $\text{Dom}(g) \neq X$, allora g ha un'estensione propria: infatti $\exists x_0 \in X \setminus \text{Dom}(g)$;

costruiamo $h \in M$ con $\text{Dom}(h) = \text{Dom}(g) \oplus \mathbb{R}x_0$, cioè

se $N = \text{Dom}(g)$, h ha dominio $N \oplus \mathbb{R}x_0$ e quindi deve essere

$$h(y + tx_0) = g(y) + \lambda t \quad \text{con } \lambda = h(x_0).$$

Si cerca $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $h \leq p$ su $N \oplus \mathbb{R}x_0$, cioè $\forall u, v \in N$

$$\begin{cases} h(u + tx_0) \leq p(u + tx_0) & \forall t \geq 0 \\ h(v - tx_0) \leq p(v - tx_0) \end{cases} \iff \begin{cases} h(\frac{u}{t} + x_0) \leq p(\frac{u}{t} + x_0) \\ h(\frac{v}{t} - x_0) \leq p(\frac{v}{t} - x_0) \end{cases} \iff \begin{cases} h(u) + \lambda \leq p(u + x_0) \\ h(v) - \lambda \leq p(v - x_0) \end{cases}$$

$$\text{cioè } -p(v - x_0) + h(v) \leq \lambda \leq p(u + x_0) - h(u) \quad \forall u, v \in N$$

Dunque tale λ esiste perché $-p(v - x_0) + h(v) \leq p(u + x_0) - h(u)$

$$\iff \underbrace{h(u) + h(v)}_{h(u+v)} \leq \underbrace{p(u+x_0) + p(v-x_0)}_{p(u+v)}$$



Oss Per X Hilbert, $M \subseteq X$ ssp.

Sia $P: X \rightarrow M$ il proiettore ortogonale.

Allora $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ si estende per composizione
 $f \circ P: X \rightarrow \mathbb{R}$

Conseguenze di Hahn-Banach:

1. Dato $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato e $Y \subseteq X$ sottospazio vettoriale, allora ogni forma lineare continua su Y si estende a una forma lineare su X , con la stessa norma.

Infatti se $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineare continua, $f(x) \leq C\|x\| \forall x \in Y$

(su spazi tipo H Hilbert è ovvio: usando $P: X \rightarrow Y$ proiettore o rappresentando f con un prodotto scalare)

2. Nella stessa situazione, la norma di X si può ricostruire a partire dalla norma del duale X^* .

Infatti $\forall x \in X, \|x\|_X = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle f, x \rangle|$

In altre parole, la mappa $X \rightarrow X^{**}, x \mapsto ev_x$ è un'isometria lineare.

Infatti $\|ev_x\|_{X^{**}} = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle ev_x, f \rangle|$

Infatti $|\langle f, x \rangle| \leq \|x\| \|f\|$ per Cauchy-Schwarz.

Ma, per Hahn-Banach, preso $Y = \mathbb{R}x$, la forma $Y \ni y = tx \mapsto t\|x\| \in \mathbb{R}$,

allora $|\langle f_0, y \rangle| = \|y\|$ e f_0 si estende a ora f su X con

$\|f\| = 1$ e $\langle f, x \rangle = \|x\|$.

3. Per $T: X \rightarrow Y$ lineare continua tra spazi normati,

esiste l'operatore trasposto $T^*: Y^* \rightarrow X^*, f \mapsto f \circ T$,

ovvero $\langle T^* y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle \quad \forall x \in X, \forall y^* \in Y^*$.

Allora $\|T\| = \|T^*\|$

def. $(X, \|\cdot\|)$ è riflessivo se $i_X: X \rightarrow X^{**}$ è surgettiva (isometria).

Costruzioni negli SVT e negli SVTL

• **Sottospazi:** $Y \subseteq X$ sottospazio vettoriale è ancora SVT con la topologia indotta. Se X è semi-normato, lo è anche Y con la restrizione della seminorma.

• **Prodotti:** prodotto topologico di SVT è SVT.

Se X_i è localmente convesso con seminorma p_i , quale famiglia si può usare su $\prod X_i$?

• **Quozienti:** $Y \subseteq X$ sottospazio con X SVT, si può considerare $q: X \rightarrow X/Y$ e si può dotare X/Y della topologia quoziente e della struttura vettoriale quoziente. Si ha che X/Y è SVT.

Caso di X con seminorma $\|\cdot\|$: X/Y è topologizzato dalla seminorma quoziente $\forall \tilde{x} \in X/Y, \|\tilde{x}\| := \inf_{x \in \tilde{x}} \|x\|$

Vale che $B_{X/Y}(0, r) = q(B_X(0, r))$; in particolare, q è aperta.

Inoltre la seminorma quoziente è una norma $\iff Y$ è chiuso.

• **Topologie iniziali** rispetto a una famiglia di mappe.

EX Y sottospazio chiuso di $(X, \|\cdot\|)$ normato

Allora X è completo $\iff Y$ è completo e X/Y è completo.

EX $(X, \|\cdot\|)$ è completo $\iff$ le serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ normalmente convergenti sono convergenti $\iff$ sono convergenti le serie con $\|x_i\| \leq 2^{-i}$

Limiti induttivi

Sia (X_n, τ_n) una successione di spazi topologici con mappe continue iniettive $i_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ (wlog inclusioni)

Allora lo spazio $X_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ammette la più fine topologia per cui le inclusioni $X_n \rightarrow X_\infty$ sono continue.

Si ha che $A \subseteq X_\infty$ è aperto $\iff \forall n \ A \cap X_n \in \tau_n$.

Si verifica che questo definisce una topologia su X_∞ , che è la massima che rende continue le inclusioni.

Oss X_∞ si ottiene come quoziente di un coprodotto

$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ unione disgiunta, topologizzata dalla topologia generata da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$.

È la più fine che renda $X_n \rightarrow \bigsqcup X_n$ continua.

Dopo si quozienta $q: \bigsqcup X_n \rightarrow \bigcup X_n$ e si considera la topologia quoziente, ottenendo lo spazio (X_∞, τ_∞) .

⚠ Per una costruzione di SVT (X_n) (anche Hilbert) lo spazio limite topologico $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ è certamente uno spazio vettoriale con una topologia. Ma questa topologia è in generale troppo forte e non rende continue $+, \cdot$ (cioè può non essere SVT).

In alcuni casi funziona:

$X_n = \mathbb{R}^n$, $i_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $X_\infty = \mathbb{R}^\infty = \{\text{succ. definit. nulle}\}$

Allora la topologia "limite" rende $\mathbb{R}^\infty$ uno SVT.

Ex Trovare $A \subseteq C_c(\mathbb{R})$ aperto per la top. limite in Top (cioè $A \cap C_{[-n,n]}(\mathbb{R})$ aperto in $C_{[-n,n]}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \text{supp}(f) \subseteq [-n,n]\}$) ma non è aperto nella topologia limite SVT.

Oss Abbiamo detto che $A \subseteq X_\infty$ è aperto $\iff$ è unione crescente $A = \bigcup_n A_n, A_n \in \tau_n$.
(per poter conservare la struttura SVT, questi aperti sono troppi)

Limiti induttivi di SVT

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ successione di SVT con $i_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ inclusioni lineari continue (non chiediamo che X_n abbia la topologia di sottospazio)

$\mathcal{U}_n :=$ sistema di intorni di 0 in X_n .

i_n è continua: $\{U_n \cap X_n : U \in \mathcal{U}_{n+1}\} \subseteq \mathcal{U}_n$

Lo spazio $X_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ è uno spazio vettoriale

FATTO esiste la più fine topologia di SVT su X_∞ che rende continue le inclusioni $X_n \hookrightarrow X_\infty$.

Costruzione

Se (V_n) è una successione di insiemi $V_n \subseteq X_n$,
indichiamo $\sum_{i=1}^{\infty} V_i := \bigcup_{n \geq 0} \sum_{i=1}^n V_i = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in V_i\}$

Lemma 1 Se X è SVT, $U \in \mathcal{U}_X$, esiste una successione $(V_i)_{i \geq 0} \subseteq \mathcal{U}_X$ tale che $\sum_{i \geq 0} V_i \subseteq U$.

DIMOSTRAZIONE

Per ricorrenza, $\exists V_0$ t.c. $V_0 + V_0 \subseteq U$

$\exists V_1$ t.c. $V_1 + V_1 \subseteq V_0$ e così via. $\square$

Lemma 2 Per due successioni $(V_i), (V'_i)$, $0 \in V_i, V'_i$, vale:

- $\sum V_i + \sum V'_i \subseteq \sum (V_i + V'_i)$
- $\sum V_i \cap \sum V'_i \supseteq \sum (V_i \cap V'_i)$
- se ogni V_i è assorbente / bilanciato / convesso, anche $\sum V_i$ lo è.

proposizione Dati $(X_i)_{i \geq 0}$ SVT con inclusioni lineari continue $X_n \rightarrow X_{n+1}$ e $X_\infty = \bigcup X_i$, allora:

(1) X_∞ ha una topologia di SVT con base di intorni di 0

$$\mathcal{U}_\infty := \left\{ \sum_{i \geq 0} V_i : V_i \in \mathcal{U}_i \right\}$$

(2) Le inclusioni $(X_i, \mathcal{U}_i) \rightarrow (X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$ sono continue

(3) per ogni Y SVT, $L: X_\infty \rightarrow Y$ lineare, L è continua $\iff L|_{X_i}$ è continua $\forall i$

(4) $(X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$ ha la massima topologia di SVT che renda continue le inclusioni.

Oss $\sum V_i$ è unione crescente di $A_n := \sum_{i=0}^n V_i$, cioè $A_{n+1} = A_n + V_{n+1}$

EX Trovare una funzione continua su $C_{c,n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall n$,

$\downarrow$
 $C_c(\mathbb{R})$

ma che non è continua su $C_c(\mathbb{R})$.

DIMOSTRAZIONE

(1) Segue dal Lemma 1, cioè $\mathcal{U}_\infty$ ha le proprietà delle basi di intorni di un SVT.

Ad esempio, dato $V = \sum_{i \geq 0} V_i \in \mathcal{U}_\infty$, $\forall i \exists U_i \in \mathcal{U}_i$ con $U_i + U_i \subseteq V_i$ quindi $\sum U_i + \sum U_i \subseteq \sum (U_i + U_i) \subseteq \sum V_i$

(2) Per ogni $V = \sum V_i \in \mathcal{U}_\infty$, $\forall n$ $X_n \cap V \supseteq V_n$, cioè $V \cap X_n \in \mathcal{U}_n$.

(3) Se $L: X_\infty \rightarrow Y$ è continua, chiaramente $L|_{X_n}: X_n \rightarrow Y$ è continua.

Se tutte le restrizioni $L|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$ sono continue, dato $U \in \mathcal{U}_Y$

$\exists (U_i) \subseteq \mathcal{U}_i$ t.c. $\sum U_i \subseteq U$. Inoltre $\exists V_i \in \mathcal{U}_i$ t.c. $L(V_i) \subseteq U_i$,

quindi $L(\sum V_i) = \sum L(V_i) \subseteq \sum U_i \subseteq U$.

(4) È un caso particolare di (3) per $L = \text{id}: (X_\infty, \tau_\infty) \rightarrow (X_\infty, \tau)$ con τ topologia su X_∞ che rende continue le inclusioni: per (3), L è continua, ossia τ_∞ è più fine di τ .

Oss Se X_i è svrlc $\forall i$, anche X_∞ è svrlc.

Oss Con sottosuccessioni (X_{n_k}) si ottiene lo stesso spazio

EX Verificare che per $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, (K_j) successione di compatti
t.c. $K_j \subseteq K_{j+1}$, $\bigcup K_j = \Omega$, il limite $C_c(\Omega) = \bigcup_{j=0}^{\infty} C_{K_j}$
ha una topologia che non dipende dalla scelta di (K_j)
(In effetti, $C_c(\Omega) = \varinjlim C_{K_j}$)

Limiti induttivi stretti

$X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ è un'inclusione di sottospazio

(cioè X_n ha la top. indotta da X_{n+1})

(caso considerato inizialmente da Dieudonné e Schwartz, generalizzato da Grothendieck)

proposizione Sia (X_∞, U_∞) limite induttivo stretto di (X_n, U_n) . Allora

(1) X_n è sottospazio di X_∞

(2) se $C \subseteq X_0$, C è chiuso in $X_\infty \iff C$ è chiuso in $X_n \forall n$.

Quindi, in generale (prendendo ssc),

$C \subseteq X_{n_0}$ è chiuso in $X_\infty \iff C$ è chiuso in infiniti $X_n, n \geq n_0$.

(3) In particolare, 0 è chiuso in $X_\infty \iff 0$ è chiuso in $X_n \forall n$
cioè X_∞ è Hausdorff $\iff X_n$ è Hausdorff $\forall n$.

Oss L'ipotesi X_n ssp di X_{n+1} implica

$\forall U \in U_n \exists V \in U_{n+1}$ t.c. $X_n \cap (V+V) \subseteq U$

Conseguenza: vi è una base di intorni di X_∞ della forma

$\sum_{i=0}^k V_i$, con $V_i \in U_i$, $X_n \cap (V_{i+1} + V_{i+1}) \subseteq V_i$

Allora per ogni n fissato, la successione

$X_n \cap (V_k + \sum_{i=0}^k V_i)$ è decrescente per inclusione (in $k \geq n$)

$$\begin{aligned} X_n \cap (V_{k+1} + \sum_{i=0}^{k+1} V_i) &= X_n \cap X_{k+1} \cap (V_{k+1} + V_{k+1} + \sum_{i=0}^k V_i) \stackrel{(*)}{=} \\ &= X_n \cap [X_k \cap (V_{k+1} + V_{k+1}) + \sum_{i=0}^k V_i] \subseteq X_n \cap (V_k + \sum_{i=0}^k V_i) \end{aligned}$$

Oss (*) Se $B \subseteq X_k$, allora $X_k \cap (A+B) = (X_k \cap A) + B$

Quindi per opportuni intorni $\sum_{i=0}^k V_i \in U_\infty$ e $\forall n$

$$\begin{aligned} X_n \cap \sum_{i=0}^k V_i &\subseteq X_n \cap (V_k + \sum_{i=0}^k V_i) \subseteq \\ X_n \cap \sum_{i=0}^k V_i &\subseteq X_n \cap (V_n + \sum_{i=0}^{n-1} V_i) \subseteq \underbrace{V_n + V_n + \sum_{i=0}^{n-1} V_i}_{\text{generico intorno di } X_n \forall U \in U_n} \end{aligned}$$

Dimostrazione

(1) $X_0 \subseteq X_\infty$ ssp, se $C \subseteq X_0$ è chiuso in X_∞ , lo è in X_0

Viceversa, sia C chiuso in $X_n \forall n$

Sia $x \in X_\infty \setminus C \implies \exists n$ t.c. $x \in X_n \setminus C$

Sia U intorno di x in X_n , disgiunto da C

Sia V intorno di x in X_∞ t.c. $X_n \cap V \subseteq U$

quindi anche $V \cap C \subseteq (V \cap X_n) \cap C \subseteq U \cap C = \emptyset$

□

proposizione

Sia (X_α, U_α) limite induttivo stretto di
 $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ inclusioni di sottospazi chiusi.

Allora $A \subseteq X_\infty$ è limitato $\iff A$ è contenuto in un X_n e
 A è limitato in X_n

Oss Se $A \subseteq Y$ ssp di X e A è limitato in Y , allora è limitato anche in X .

DIMOSTRAZIONE

Sia $A \subseteq X_\infty$ non incluso in alcun X_n : proviamo che non è limitato.

Per ipotesi, $\forall n \exists a_n \in A \exists (k_n) \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in X_{k_n} \setminus X_{k_n-1}$

e wlog $k_n = n$ (prendendo $X_\infty = \bigcup X_n$)

dunque $a_n \in (X_n \setminus X_{n-1}) \cap A$, quindi anche $\bigcap a_n \in X_n \setminus X_{n-1}$

Seccome X_{n-1} è chiuso in X_n , $\exists U_n \in U_n$ t.c. $(\bigcap a_n - U_n) \cap X_{n-1} = \emptyset$

cioè $\bigcap a_n \notin X_{n-1} + U_n$, o $a_n \notin X_{n-1} + n U_n$

Siano $V_n \in U_n$ t.c. $V_n + V_n \subseteq U_n$ e $X_n \cap (V_{n+1} + V_{n+1}) \subseteq V_n$

Come visto prima, $X_n \cap (V_k + \sum_{i=0}^k V_i)$ è decrescente $\forall k \geq n$

e $X_n \cap \sum_{i=0}^{\infty} V_i \subseteq X_n \cap \sum_{i=0}^n V_i \subseteq V_n + \sum_{i=0}^n V_i \subseteq V_n + V_n + X_{n-1} \subseteq X_{n-1} + U_n$

Quindi $\bigcap a_n \notin X_n \cap \sum_{i=0}^{\infty} V_i$

e seccome $\bigcap a_n \in X_n \implies \bigcap a_n \notin \sum_{i=0}^{\infty} V_i \implies a_n \notin n \sum_{i=0}^{\infty} V_i$

dunque $n \sum_{i=0}^{\infty} V_i \not\supseteq A$



Oss L'ipotesi di inclusione chiusa è necessaria

Se $A \subseteq X_0$ limitato $\implies A$ è limitato in X_∞

$\implies \bar{A}$ è limitato in X_∞ ma potrebbe non essere contenuto in nessun X_n

esempio $X_n \subsetneq X_{n+1}$ denso in X_{n+1}

Tre esempi importanti

(1) lo spazio $C_c = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{supp } x \text{ finito}\} = \mathbb{R}^{\infty}$
 $= \text{Span}((e_j)_{j \geq 0})$

Se $X_n = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_i = 0 \forall i \geq n\}$

allora $C_c = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ è uno SVT con la sua top. limite induttivo

• Qualunque top. di SVT su C_c rende continue le inclusioni $j_n: X_n \hookrightarrow C_c$

Qualunque applicazione lineare $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ SVT è continua

perché è la composizione

$x \mapsto x_i$ è continua

$L(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x_i)$ Le: è somma di n appl. continue

Quindi la top. limite su C_c è la più fine topologia di SVT su C_c .

È localmente convessa perché lo sono gli X_n

Dunque la top. di C_c è associata alla famiglia di tutte le seminorme.

Se p è una seminorma su C_c

$$\forall x \in C_c \quad x = \sum x_i e_i \quad (\text{somma finita})$$

$p(x) \leq \sum |x_i| p(e_i)$, cioè p è dominata da una seminorma

$$p_\sigma(x) = \sum |x_i| \sigma_i \quad \text{con } \sigma \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$$

Quindi C_c è topologizzato dalle seminorme $\{p_\sigma \mid \sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$

C_c non è metrizzabile, quindi non è a base numerabile di intorni

$\Rightarrow$ non ammette una fam. numerabile di seminorme topologizzanti

$$[d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} (p_i(x-y) \wedge 1)]$$

In fatti, C_c è ssp. completo: $(x_k) \subseteq C_c$ di Cauchy

$\Rightarrow x_k$ limitata $\Rightarrow \exists N$ t.c. $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^N$ completo

$\Rightarrow \exists (x_{k_j})$ convergente in $\mathbb{R}^N \Rightarrow$ converge anche in C_c

C_c è unione numerabile di X_n , ssp chiusi con parte interna vuota

quindi di I-categoria

Per il Teo. di Baire, non può essere metrizzabile

EX Sia X SVT I-numerabile, Hausdorff.

Allora X è metrizzabile: vi è una paranorma p la cui distanza $p(x-y)$ topologizza X

Idea Sia $(U_n)_{n \geq 0}$ una base di intorni di X bilanciati

$$\text{con } U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$$

Definiamo $\forall x \in X \quad p(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m 2^{-k_i} : (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m \text{ t.c. } x \in U_{k_1} + U_{k_2} + \dots + U_{k_m} \right\}$
(distinti oppure qualunque)

allora $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$$\{p < 2^{-n}\} \subseteq U_n \subseteq \{p \leq 2^{-n}\}$$

In generale, p non è 1-omogenea

EX In effetti, la top. limite induttivo di SVT su C_c coincide con

la top. limite induttivo topologico τ_∞

quindi $f: C_c \rightarrow Y$ è continua $\iff \forall n \exists f_n: X_n \rightarrow Y$ vale

non solo per f lineare, Y SVT, ma anche per f appl., Y sp. top.

Nella top. dim. topol., $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$ è aperto sse $A \cap \mathbb{R}^n$ è aperto $\forall n$

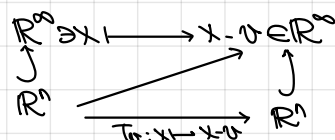
sse $A = \bigcup A_n$ crescente, $A_n \cap X_n$ aperto

Oss La top. τ_∞ è inv. per traslazione:

$\forall u \in \mathbb{R}^\infty, v \in \mathbb{R}^n$ per qualche n

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ è continua $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ anche $\mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$



Quindi: basta provare che intorni aperti di 0 in τ_∞

sono anche intorni nella top. SVT

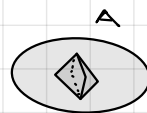
Definiamo induttivamente una successione $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R}_+ \text{ t.c.}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^\infty$$

(*) Se $\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| < 1$, allora $x \in A$

quindi la palla unitaria della norma $p_\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|$ è

contenuta in A , quindi A è intorno di 0 in top. SVT



Definiti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.c. volga (*), consideriamo

$$\forall s \geq 0 \quad K_s := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| + s|x_n| \leq 1\} \setminus A$$

K_s sono compatti, $K_s \subseteq \mathbb{R}^n$, decrescenti per inclusione

$$\text{e } \bigcap_{s \geq 0} K_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \leq 1, x_n = 0\} \setminus A = \emptyset$$

Allora $\exists s > 0, s := \lambda_n$ t.c. $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \leq 1\} \subseteq A$

Quindi la successione (λ_i) ha la proprietà richiesta

(2) Lo spazio $C^0(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto,

$$\lim_{K \in \mathcal{K}} C_K$$

$\mathcal{K} = \{K \subseteq \Omega \text{ compatti}\}$

Costruiamo una famiglia di seminorme

(spazio LB: limite di Banach)

Fatto: la famiglia di seminorme $\{p_\sigma : \sigma \in C^0(\Omega)_+\}$ topologizza $C^0(\Omega)$

dove $p_\sigma(u) = \|\sigma \cdot u\|_{\infty, \Omega}$

$$C^0(\Omega)_+ = \{\sigma \in C^0(\Omega), \sigma \geq 0\}$$

Definiamo:

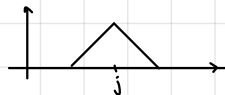
$$\cdot \varphi(x) := \frac{1}{\text{dist}(x, \Omega^c)} + \|x\| \quad \forall x \in \Omega$$

$$\cdot K_i := \{x : |\varphi(x) - i| \leq 1\} = \varphi^{-1}([i-1, i+1]) \in \mathcal{K}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} K_i = \Omega, \quad K_i \cap K_j = \emptyset \text{ se } |i-j| \geq 3$$

$$\cdot \eta_j := (1 - |\varphi(x) - j|)_+, \quad \eta_j \in C^0(\Omega)_+, \text{ supp } \eta_j \subseteq K_j$$

$$\sum_{j \geq 0} \eta_j(x) = 1 \text{ perché } \sum_{j \geq 0} (1 - |t - j|)_+ = 1$$



Sia U intorno aperto convesso di 0 in $C^0(\Omega)$

Vogliamo trovare $\sigma \in C^0(\Omega)_+$ t.c. $\{p_\sigma \leq 1\} \subseteq U$.

Definiamo: $\forall j \geq 0 \quad \delta_j = \inf \{\|u\|_{\infty} : u \in C_K^0, U\}$

$\delta_j > 0$ perché $C_K^0 \cap U$ è intorno di 0 nello spazio di Banach C_K^0

Definiamo una funzione $p \in C^0(\Omega)_+$

$$\varepsilon_j := \min \{2^{j-2} \delta_{j-1}, 2^{j-1} \delta_j, 2^j \delta_{j+1}\}$$

$$p = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j \eta_j \in C^0(\Omega)_+$$

$$\sigma = \frac{1}{p}$$

Dico che $\forall u \in C^0(\Omega)$ con $|u(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in \Omega$ vale $u \in U$

(cioè $\|\sigma u\|_{\infty, \Omega} \leq 1$)

In fatti, sia u t.c. $|u(x)| \leq p(x) \quad \forall x$

Allora $\forall i \in \mathbb{N} \quad u \eta_i \in C_{K_i}^0$,

$$|u \eta_i| \leq p \eta_i \leq \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j \eta_j \eta_i = \sum_{i-1 \leq j \leq i+1} \varepsilon_j \eta_i \eta_j \leq \max_{i-1 \leq j \leq i+1} \varepsilon_j \leq 2^{i-1} \delta_i$$

$$\text{Quindi } \underbrace{\|2^{i+1} u \eta_i\|_{\infty}}_{C_{K_i}^0} \leq \delta_i$$

Per definizione di δ_i , $2^{i+1} u \eta_i \in U$

$$\text{Ora } u = \sum_{i \geq 0} u \eta_i = \sum_{i \geq 0} 2^{i+1} (2^{i+1} u \eta_i) + 2^{-N} \cdot 0 \text{ è}$$

una combinazione convessa di el. di $U \Rightarrow u \in U$.

Oss Su $C^0(\Omega)$ possiamo considerare gli operatori di moltiplicazione

$$M_\varphi : C_c^0 \longrightarrow C_c^0 \text{ con } \varphi \in C^0(\Omega), \text{ che sono lineari e continui}$$

$$\begin{array}{ccc} C_c^0 & \longrightarrow & C_c^0 \\ u \longmapsto & & u \varphi \end{array} \quad \|\varphi u\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty, K} \|u\|_{\infty}$$

$$\text{o anche: } \forall \sigma \quad p_\sigma(M_\varphi u) = \|\sigma \varphi u\|_{\infty} = p_{\sigma \varphi}(u)$$

In effetti, C_c^0 ha la topologia iniziale della famiglia

$$\{M_\varphi : C_c^0 \longrightarrow (C_c^0, \|\cdot\|_{\infty})\}_{\varphi}$$

③ Caso di $\mathcal{D}(\Omega)$ Lim induttivo stretto di induttori chiuse

$$\mathcal{D}_K = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \text{supp}(u) \subseteq K\} \hookrightarrow C_c^\infty(\Omega), K \in \mathcal{K}(\Omega)$$

Per una esauriente di Ω in compatti K_i , $\mathcal{D}_{K_i} \hookrightarrow \mathcal{D}_{K_{i+1}}$ è chiusa

$\mathcal{D}_K$ è ssp. chiuso dello spazio di Fréchet $C^\infty(\mathbb{R}^d)$

(SVTLC metrizzabile completo)

con le sue seminorme $p_m(\varphi) := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$

$\mathcal{D}(\Omega)$ è un LF-spazio (Limite di Fréchet)

- $A \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ è limitato $\iff \exists K \subseteq \Omega$ compatto t.c. $A \subseteq \mathcal{D}_K$, A limitato in $\mathcal{D}_K$,
cioè $\forall \varphi \in A$, $\text{supp}(\varphi) \subseteq K$ e $\max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \leq C_m$
sse A è relativamente compatto (per Ascoli-Arzelà)

- $\mathcal{D}(\Omega)$ è seq. completo e non metrizzabile

Costruzione di una famiglia di seminorme per $\mathcal{D}(\Omega)$

(seminorme di Gårding-Lions)

Dati $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, definiamo

$$q_{\sigma, \mu}(\varphi) = \max_{\substack{x \in \Omega, |\alpha| \leq m \\ \mu(x) > 0}} |\sigma(x) \partial^\alpha \varphi| \quad \text{per } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

quindi se $\varphi \in \mathcal{D}_K$, $q_{\sigma, \mu}(\varphi) \leq \|\sigma\|_{\infty, K} p_{\|\mu\|_{\infty, K}}(\varphi)$

Oss ciò dice che l'inclusione

$$(\mathcal{D}_K, \{p_m\}_{m \geq 0}) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \{q_{\sigma, \mu}\}_{\sigma, \mu}) \text{ è continua } \forall K \in \mathcal{K}(\Omega)$$

$$\forall (\sigma, \mu) \quad q_{\sigma, \mu} \leq C p_m(\varphi) \text{ con } C = \|\sigma\|_{\infty, K}, m = \lceil \|\mu\|_{\infty, K} \rceil$$

Dunque la topologia delle seminorme $\{q_{\sigma, \mu}\}$ è inclusa nella topologia di LF-spazio.

Vediamo l'altra inclusione. Definiamo

- $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$, $\varphi > 0$, propria ($\{\varphi \leq c\} \subseteq \Omega$ compatto)

- $K_i := \{x \in \Omega : |\varphi(x) - i| \leq 1\} \in \mathcal{K}(\Omega)$

- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$, $0 \leq g \leq 1$ con $\text{supp}(g) \subseteq [-1, 1]$,

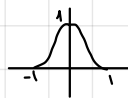
$$g(t) = g(-t), g(t) + g(1-t) = 1$$

$$\text{Quindi } \sum_{j \geq 0} g(t-j) = 1$$

- $\forall i \geq 0 \quad \eta_i(x) = g(\varphi(x) - i)$

allora $0 \leq \eta_i \leq 1$, $\text{supp}(\eta_i) \subseteq K_i$

$$\eta_i \eta_j = 0 \text{ se } |i-j| \geq 2 \quad \text{e} \quad \sum_{i \geq 0} \eta_i(x) = 1$$



Sia U intorno aperto convesso di 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$, τ_U

Allora $\forall i \quad U \cap \mathcal{D}_{K_i}$ è int. ap. di 0 in $\mathcal{D}_{K_i}$

quindi vi sono: $m_i \in \mathbb{N}$, $\delta_i > 0$, tali che

$$\text{la palla } \{\varphi \in \mathcal{D}_{K_i} : p_{m_i}(\varphi) \leq \delta_i\} \subseteq U$$

Definiamo $\sigma, \mu \in C^0(\Omega)_+$ incollando in modo discio i numeri m_i e δ_i .

- $\ell_i = \max_{i-1 \leq j \leq i+1} m_j = m_{i-1} \vee m_i \vee m_{i+1}$

$$\mu(x) = \sum_{j \geq 0} \ell_j \eta_j$$

(se $x \in \Omega : \exists i$ t.c. $x \in K_i \implies \eta_j(x) \neq 0$ al più per $j = i-1, i, i+1$)

Quindi $\forall i > 0 \quad m_i \leq l_{i-1} \wedge l_i \wedge l_{i+1}$

$$\forall x \in K_i \quad \mu(x) = \sum_{i \leq j \leq m_i} \rho_j \eta_j(x) \geq \min_{i \leq j \leq m_i} \rho_j (\sum \eta_j) \geq m_i$$

$$\text{Poi } \varepsilon_i := \min_{i \leq j \leq m_i} 2^{j-1-m_i} \rho_{m_j}(\eta_j)^{-1} \delta_j > 0$$

$$\sigma(x) := (\sum_{i \geq 0} \varepsilon_i \eta_i)^{-1} \in C^\infty(\Omega)_+$$

Quindi $\forall i > 0$

$$2^{i-1-m_i} \rho_{m_i}(\eta_i)^{-1} \delta_i \geq \varepsilon_{i+1} \forall \varepsilon_i \forall \varepsilon_{i+1}$$

$$\text{e } \forall x \in K_i \quad \sigma(x)^{-1} = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j \eta_j = \sum_{i \leq j \leq m_i} \varepsilon_j \eta_j \leq \max_{i \leq j \leq m_i} \varepsilon_j \leq 2^{i-1-m_i} \rho_{m_i}(\eta_i)^{-1} \delta_i$$

Quindi

$$\mu(x) \geq m_i \quad \text{e} \quad \sigma(x)^{-1} \leq 2^{i-1-m_i} \rho_{m_i}(\eta_i)^{-1} \delta_i$$

Quindi da palla

$$\{f \in \mathcal{D}(\Omega) : q_{\sigma, \mu}(f) \leq 1\} \subset U$$

In fatti, data $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, possiamo scrivere $f = \sum_{j \geq 0} \eta_j f$

$\forall i \quad 2^{i+1} \eta_i f$ ha supporto in K_i , quindi $\in C_{K_i}^\infty$

Verifichiamo che $\rho_{m_i}(2^{i+1} \eta_i f) < \delta_i$

Oss Siccome $\eta_i f \in C_{K_i}^\infty$, se $\rho_{m_i}(2^{i+1} \eta_i f) < \delta_i$, allora

$2^{i+1} \eta_i f \in U$, e quindi, essendo U convesso

$$f = \sum_{i \geq 0} \eta_i f = \sum_{i \geq 0} 2^{-i-1} (2^{i+1} \eta_i f) \in U \quad (\text{combinazione convessa di el. di } U, \text{ fra cui } 0 \in U)$$

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq m_i, (\forall x \in K_i)$$

$$|\partial^\beta (2^{i+1} \eta_i f)| = 2^{i+1} |\partial^\beta (\eta_i f)| \stackrel{\text{Leibnitz}}{=} 2^{i+1} \left| \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \partial^{\beta-\alpha} \eta_i \cdot \partial^\alpha f \right| = \quad [\text{dove } \binom{\beta}{\alpha} := \prod_{i=1}^n \binom{\beta_i}{\alpha_i}]$$

$$= 2^{i+1} \left| \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \partial^{\beta-\alpha} \eta_i(x) \partial^\alpha f(x) \sigma(x) \sigma^{-1}(x) \right| \leq 2^{i+1} \left[\sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \right] \rho_{m_i}(\eta_i) \max_{\substack{x \in K_i \\ |\alpha| \leq m_i}} |\sigma(x) \partial^\alpha f(x)| |\sigma^{-1}(x)|$$

ma $\sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} = 2^{|\beta|}$, quindi

$$\leq 2^{i+1+m_i} \rho_{m_i}(\eta_i) q_{\sigma, \mu}(f) \sigma^{-1}(x) \leq \delta_i q_{\sigma, \mu}(f)$$

Quindi se $q_{\sigma, \mu}(f) < 1$, segue che
quindi $f \in U$.

$$\rho_{m_i}(2^{i+1} \eta_i f) = \max_{|\beta| \leq m_{i+1}} |\partial^\beta (2^{i+1} \eta_i f)| < \delta_i$$

EX E' continua la moltiplicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Omega) \times \mathcal{E}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{E}(\Omega) & (\text{usare la seminorma } \{\rho_m\} \\ f, g &\longmapsto fg & \text{e la regola di Leibnitz}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

lo e' certamente la restrizione a $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_K \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$

Usare la seminorma

$$\mathcal{E}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

EX Provare che la moltiplicazione per scalare dello sp. vett. $C_c^\infty(\Omega)$ e' continua

$$\mathbb{R} \times C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega) \quad \text{per la top. su } C_c^\infty(\Omega) \text{ dim. ind. top.}$$

Inoltre questa topologia e' invariante per traslazioni

EX** Per questa topologia (dim. ind. top.),

la somma $+: C_c^\infty \times C_c^\infty \longrightarrow C_c^\infty$ non e' continua (e' vero?)

DISTRIBUZIONI

Def. $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua è una distribuzione.
Indichiamo lo spazio delle distribuzioni su Ω come $\mathcal{D}'(\Omega)$
e $\mathcal{E}'(\Omega)$ è lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto

Equivalentemente, $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua se

- $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad u|_{C_c^\infty(K)}: C_c^\infty(K) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua
- $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \exists m \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ t.c. $|u(\varphi)| \leq C \rho_m(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K)$

Def. Una distribuzione u su Ω ha ordine finito $\leq m$ se
 $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \exists C > 0$ t.c. $|u(\varphi)| \leq C \rho_m(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K)$

- $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega), \forall \varphi_j \rightarrow \varphi$ in $C_c^\infty(K)$ vale $u(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi)$
- $\forall \varphi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ vale $u(\varphi_j) \rightarrow 0$ (u è seq. continua) [perché i C_c^∞ sono metrizzabili]
- $\exists \sigma, \mu \in C^0(\Omega)_+ \quad \text{t.c.} \quad |u(\varphi)| \leq \rho_{\sigma, \mu}(\varphi)$

esempio • valutazioni in un punto di funzioni e loro derivate

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0) \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, x_0 \in \Omega$$

di ordine finito $= |\alpha|$

- integrale contro $g \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega g \varphi$$

$$|\int_\Omega g \varphi| \leq \|g\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_{L^\infty(K)}$$

Quindi $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ (funzioni generalizzate)

- Sia $(x_j) \subseteq \Omega$ con $x_j \rightarrow +\infty$, cioè $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad x_j \notin K$ definitivamente

Sia $(\alpha_i) \subseteq \mathbb{N}^n, (c_i) \subseteq \mathbb{R}$. Allora

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} c_i \partial^{\alpha_i} \varphi(x_i) \quad \text{è una distribuzione}$$

- Se m è una misura di Borel, positiva, finita sui compatti

$$\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi \, dm, \quad \varphi \mapsto \int_\Omega g \partial^\alpha \varphi \, dm, \text{ etc.}$$

sono distribuzioni

Su $\mathcal{D}'(\Omega)$, si può considerare la topologia debole $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$,
la meno fine per cui sono continue tutte le valutazioni in $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

EX Provare che $i: L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ è continua
rispetto alle topologie di SVTL di $L^1_{loc}(\Omega)$ (associata alle
seminorme $\|\cdot\|_{L^1(K)}, K \in \mathcal{K}(\Omega)$) e alla debole su $\mathcal{D}'(\Omega)$

operazioni su distribuzioni

Idea: via dualità a partire da analoghe operazioni su $\mathcal{D}(\Omega)$

Derivazione

La derivata parziale $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$ come operatore su $\mathcal{D}(\Omega)$

si estende a $\mathcal{D}'(\Omega)$ definendo:

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle \partial_i u, \varphi \rangle = - \langle u, \partial_i \varphi \rangle$$

In questo modo, risulta un'estensione di ∂_i su $C(\Omega)$ visto come sottoinsieme di $\mathcal{D}'(\Omega)$ via l'immersione $C(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

Infatti $\forall f \in C(\Omega) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle T_{\partial_i} f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \partial_i f \cdot \varphi = - \int_{\Omega} f \cdot \partial_i \varphi = - \langle T_f, \partial_i \varphi \rangle = \langle \partial_i T_f, \varphi \rangle$$

cioè $T_{\partial_i} f = \partial_i T_f$

In altre parole, $\partial_i: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ è - l'operatore trasposto di $\partial_i: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$

In generale, da $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ lineare continuo si ottiene un operatore $T^*: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ f.c. $T^*(u) = u \circ T$

Similmente, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \text{ ossia } \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

EX • $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ è denso rispetto a $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$

• Se $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ è continuo, allora

$T^*: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ è continuo per $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$

(quindi è l'unica estensione continua).

Moltiplicazione per funzioni

Se $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, è definito l'operatore di moltiplicazione per f

$$M_f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\varphi \mapsto f\varphi$$

è continuo: $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega)$ la restrizione è continua rispetto alle seminorme $\{p_m\}$

$$\text{Infatti } \forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad p_m(f\varphi) = \max_{\substack{x \in K, \alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha (f\varphi)| \leq$$

$$\leq 2^m p_m(f) p_m(\varphi)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\Omega) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{D}_K & \longrightarrow & \mathcal{D}_K \end{array}$$

È già continua la moltiplicazione $M_f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ con $\{p_{m,K}\}$

Oss Il prodotto $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ è bilineare e continuo

$$\text{Infatti } \forall m \quad \forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \forall (f,g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad p_{m,K}(fg) \leq 2^m p_{m,K}(f) p_{m,K}(g)$$

dunque $(f,g) \mapsto fg$ è continua nella coppia in $(0,0)$

In generale, un'applicazione bilineare $B: X \times Y \rightarrow Z$ è continua

sse è separatamente continua e continua in $(0,0)$

$$B(x_0+h, y_0+k) = B(x_0, y_0) + B(x_0, k) + B(h, y_0) + B(h, k)$$

Similmente $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ è continuo

$$\forall s, \mu \in C^0(\Omega)_+, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}$$

$$q_{\mu, s}(fg) = \max_{\substack{x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq \mu(x)}} |\partial^\alpha (fg)| \leq \max_{\substack{x \in \Omega, |\alpha| \leq \mu(x) \\ |\beta| \leq \mu(x)}} |2^{\mu(x)} \partial^\alpha f \partial^\beta g| \leq$$

$$\leq q_{2^{\frac{1}{2}\mu}, s}(f) q_{2^{\frac{1}{2}\mu}, \mu}(g)$$

EX È bilineare continua $\mathcal{E} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$?

Comunque $\forall f \in \mathcal{E} \quad M_f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ è continuo,
 quindi è definito un operatore lineare continuo (per $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$)
 $M_f^*: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \forall u \in \mathcal{D}'$
 $\langle M_f^*(u), \varphi \rangle = \langle u, \varphi f \rangle$; indichiamo $M_f^* u =: fu$
 $(\forall f \in \mathcal{E} \quad \forall u \in \mathcal{D}' \quad fu \text{ è la distribuzione } \varphi \mapsto u(f\varphi))$

Per $u \in \mathcal{D}'$, $\text{ord}(u) \leq m$ sse
 $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \exists C = C_K$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad |u(\varphi)| \leq C \rho_m(\varphi)$
 e $\text{ord}(u) = m$ se m è il più piccolo numero intero

Oss Le distribuzioni di ordine $\leq m$ si estendono a funzionali
 lineari continui su $C_c^m(\Omega) = \overline{C_c^m(\Omega)}^{\rho_m} =$
 $\cong \{f \in C^m(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m \quad \partial^\alpha f \in C_0(\Omega)\}$
 dove $C_0(\Omega) = \{f \text{ restrizioni a } \Omega \text{ di funzioni } e^{C_0(\mathbb{R}^n)}\}$
 $= \{f \in C^0(\Omega) : \forall \varepsilon \exists K \in \mathcal{K}(\Omega) \text{ t.c. } \forall x \in \Omega \setminus K \quad |f(x)| \leq \varepsilon\}$ (compattificazione di Alexandrov)

Ex Provare che $C_c^m(\Omega)$ è denso nello spazio $(C_c^m(\Omega), \rho_m)$ (anche $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso)

Oss $C_c^m(\Omega)$ è Banach perché si può includere come ssp chiuso in
 $(C_0^m(\Omega), \rho_m) \hookrightarrow C_0^m(\Omega)^n$
 $f \mapsto (\partial^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}$
 e' un'inclusione isometrica (per def.)
 $\rho_m(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{\infty, \Omega}$

Infatti $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $C_c^m(\Omega)$ e
 $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua per la top indotta da $C_c^m(\Omega)$ (Fréchet)
 per def. di ordine $\leq m$ ($\forall K \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad |u(\varphi)| \leq C \rho_m(\varphi)$)
 quindi si estende alla

Fatto distribuzioni positive, cioè $u \in \mathcal{D}'$ t.c. $u(\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi \geq 0$
 hanno ordine 0:

$\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \exists C_K$ t.c. $|u(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C_K^\infty$
 Infatti, sia $\eta = \eta_K \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \leq \eta \leq 1$ con $\text{supp}(\eta) \subset \Omega$, $\eta|_K = 1$
 allora $\forall \varphi \in C_K^\infty \quad \|\varphi\|_\infty \eta \pm \varphi \geq 0$
 Quindi $u(\|\varphi\|_\infty \eta \pm \varphi) \geq 0$, cioè $u(\eta) \|\varphi\|_\infty \pm u(\varphi) \geq 0$
 $\Rightarrow |u(\varphi)| \leq u(\eta) \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C_K^\infty$

Quindi $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad u: C_K^\infty \xrightarrow[\cong]{C_0^0(K)} \mathbb{R}$ è continua per $\|\cdot\|_\infty$
 Quindi per HB si estende a un funzionale continuo su $C^0(K)$
 $\Rightarrow$ esiste una misura μ su K t.c. $\forall \varphi \in C_K^\infty \quad u(\varphi) = \int_K \varphi d\mu$

Si concluderà che: per u distribuzione positiva, esiste μ misura su Ω
 finita sui compatti t.c. $u(\varphi) = \int_\Omega \varphi d\mu$

Successioni in $\mathcal{D}'$

Sia $(u_j) \subseteq \mathcal{D}'$ convergente puntualmente,

cioè $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad u_j(\varphi)$ converge in $\mathbb{R}$;

Allora $\lim u_j(\varphi)$ definisce una distribuzione

Inoltre $\forall K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \exists C = C_K \quad \exists m = m_K$ t.c. $|u_j(\varphi)| \leq C p_m(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$

(quindi $|u(\varphi)| \leq C p_m(\varphi)$, da cui il punto sopra)

Conseguenza: se $(\varphi_j) \subseteq \mathcal{D}, \varphi_j \rightarrow \varphi$, allora $u_j(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi)$

Infatti $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ significa $\exists K \in \mathcal{K}(\Omega) : (\varphi_j) \subseteq \mathcal{D}_K$ e $\varphi_j \xrightarrow{C_c^\infty} \varphi$
 $|u_j(\varphi_j - \varphi)| \leq C p_m(\varphi_j - \varphi)$

Proviamo l'affermazione:

$\forall K \in \mathcal{K}(\Omega)$ la successione $u_j|_{C_c^\infty}$ è puntualmente limitata

Siccome C_c^∞ è uno spazio di Fréchet, è di II-categoria

Per Banach-Steinhaus, $(u_j|_{C_c^\infty})$ è equicontinua, cioè

$\exists C = C_K \quad \exists m = m_K$ t.c. $|u_j(\varphi)| \leq C p_m(\varphi) \quad \forall j$

Carattere locale delle distribuzioni

Oss Dati due aperti $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$, vi è l'inclusione $\mathcal{D}(U) \subseteq \mathcal{D}(V)$

e quindi un operatore di restrizione

$$(i_V^*) = \rho_V^* : \mathcal{D}'(V) \rightarrow \mathcal{D}'(U)$$

e $\rho_V^* = \rho_V^{**} \rho_V^*$ per $U \subseteq W \subseteq V$

[è un prefascio]

(scriviamo $u|_U = \rho_U^*(u)$ per $u \in \mathcal{D}'(U)$)

$$u|_U(\varphi) = u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U) \quad \forall u \in \mathcal{D}'(U)$$

Inoltre, se $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ aperti e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è t.c. $u|_{\Omega_j} = 0 \quad \forall j$

allora anche $u = 0$. ($\mathcal{D}(\Omega) = \bigoplus \mathcal{D}(\Omega_j)$)

Infatti, sia $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \exists F = J$ finito t.c. $K = \text{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{j \in F} \Omega_j$

$\exists \{\eta_j\}_{j \in F} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp}(\eta_j) \subseteq \Omega_j$ e $\sum \eta_j = 1$ su K

Allora $\varphi = \sum \eta_j \varphi$ e $u(\varphi) = \sum u(\eta_j \varphi) = 0$ perché $\eta_j \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_j)$

Incollamento: sia $\{\Omega_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}^n$, $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$.

Siano $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$ t.c. $\forall i, j \quad u_j|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = u_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j}$

Allora vi è una (unica) distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.c. $u|_{\Omega_j} = u_j|_{\Omega_j} \quad \forall j \in J$

Definisco $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ il valore $u(\varphi)$

Sia $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ t.c. $\text{supp}(\varphi) \subseteq K$

Sia $F = J$ finito t.c. $K \subseteq \bigcup_{j \in F} \Omega_j$

Sia $\{\eta_j\}_{j \in F} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\forall j \in F \quad \text{supp}(\eta_j) \subseteq \Omega_j, 0 \leq \eta_j \leq 1, \sum \eta_j = 1$ su K

Allora definisco (essendo $\varphi = \sum \eta_j \varphi$)

$$u(\varphi) = \sum_{j \in F} u_j(\eta_j \varphi)$$

Verifichiamo che la def. non dipende dalla famiglia $\{\eta_j\}_{j \in F}$

Se $\{\eta'_j\}_{j \in F}$ ha le stesse proprietà, wlog $F = F'$

$\text{supp}(\eta'_j) \subseteq \Omega_j, 0 \leq \eta'_j \leq 1, \sum \eta'_j = 1$

$$\text{Allora} \quad \sum_{j \in F} u(\eta_j \varphi) = \sum_{j \in F} u(\sum_{i \in F} \eta_i \varphi \eta'_j) = \sum_{j \in F, i \in F} u_j(\eta_j \eta'_i \varphi) =$$

$$= \sum_{j \in F, i \in F} u_i(\eta_j \eta'_i \varphi) = \sum_{i \in F} u_i(\sum_{j \in F} \eta_j \eta'_i \varphi) = \sum_{i \in F} u(\eta'_i \varphi)$$

La famiglia $\{D(\varphi) | \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ con le restrizioni $\{\varphi^V\}$ è un fontore

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega)^\infty & \longrightarrow & \text{SVTLC} \\ \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\ \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\Omega) \\ \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\ \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\Omega) \end{array}$$

È un prefascio di SVTLC, e in effetti è un fascio (per le proprietà viste).

Oss Ciò si definisce più in generale su M varietà C^∞

Oss Data $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, esiste il massimo aperto $\Omega_0 \subseteq \Omega$ t.c. $u|_{\Omega_0} = 0$
(è l'unione di tutti gli aperti $U \subseteq \Omega$ t.c. $u|_U = 0$)

Def Data $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il supporto di u è
 $\text{supp}(u) = \Omega \setminus \Omega_0$ (chiuso in Ω)

Oss Per $f \in C^0(\Omega)$, vale
 $\text{supp}(f) = \text{supp}(f)$
come funzione come distribuzione

Vediamo che: le distribuzioni a supporto compatto in Ω si identificano (per estensione per densità) con elementi di $\mathcal{E}'(\Omega)$.

proposizione Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $K \in \mathcal{K}(\Omega)$.
Allora valgono le implicazioni seguenti:

- (i) $\text{supp}(u) \subseteq K$ [tale K esiste sse $\text{supp}(u) \in \mathcal{K}(\Omega)$]
- (ii) $\exists C \geq 0, \exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $|u(\varphi)| \leq C p_{m,K}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
quindi $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua per la topologia di $C^\infty(\Omega)$
- (iii) $\text{supp}(u) \subseteq K$

Dimostrazione

(i) $\Rightarrow$ (ii): vi è una funzione $\psi \in C^\infty$ t.c. $\psi = 1$ su un intorno U di $\text{supp}(u)$
e $\text{supp}(\psi) \subseteq K$

Quindi $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(1-\psi)\varphi$ si annulla su U

$\Rightarrow \{(1-\psi)\varphi \neq 0\} \subseteq \Omega \setminus U \subseteq \Omega \setminus \text{supp}(u) \Rightarrow \text{supp}((1-\psi)\varphi) \subseteq \Omega \setminus U$ disgiunto da $\text{supp}(u)$

$\Rightarrow 0 = u((1-\psi)\varphi) = u(\varphi) - u(\psi\varphi)$

Dunque $u(\varphi) = u(\psi\varphi)$ e $\text{supp}(\psi\varphi) \subseteq K$

Per la continuità di u su $\mathcal{D}_K(\Omega)$: esiste $C \geq 0, m \in \mathbb{N}$

talché $|u(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| \leq C p_{m,K}(\psi\varphi) = C \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha(\psi\varphi)\|_{\infty,K} \leq (C 2^m p_m(\psi)) p_{m,K}(\varphi)$.

Oss Quindi u è continua su $\mathcal{D}(\Omega)$ anche per la top. di $C^\infty(\Omega)$;
per Hahn-Banach, si estende a una forma lineare continua $\tilde{u}$ su $C^\infty(\Omega)$;
in effetti, non serve HB perché si può definire

$\tilde{u}(\varphi) = u(\psi\varphi) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$ e per densità $\tilde{u}$ si estende a $C^\infty(\Omega)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supponiamo che $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verifichi $|u(\varphi)| \leq C p_{m,K}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

In particolare, se φ ha $\text{supp}(\varphi) \cap K = \emptyset$, vale $p_{m,K}(\varphi) = 0$, e quindi $u(\varphi) = 0$

cioè $u|_{\Omega \setminus K} = 0 \Rightarrow \text{supp}(u) \subseteq K$.

□

Ex Non si possono invertire le implicazioni

(i) $\not\Rightarrow$ (ii): $K = \{x_j\}$, allora $\dot{K} = \emptyset$ ma vi sono

u con $\text{supp}(u) \subseteq K$ non nulle (ad es. la valutazione in x_0)

(iii) $\not\Rightarrow$ (ii): prendiamo $\Omega = \mathbb{R}$, $K = \{0, \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$

Definiamo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\varphi(\frac{1}{k}) - \varphi(0))$$

che è ben def. perché la serie è AC per il Teo del valor medio

$$|\varphi(\frac{1}{k}) - \varphi(0)| \leq \|\varphi'\|_{\infty} \frac{1}{k}, \text{ dunque } |u(\varphi)| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}) \|\varphi'\|_{\infty} \quad (C = \frac{\pi^2}{6})$$

però non vale (ii): non esistono C, m t.c. $|u(\varphi)| \leq C \rho_{m,K}(\varphi)$

Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq \frac{1}{n+2/5} \\ 1 & \text{per } 2 \geq x \geq \frac{1}{n+1/5} \end{cases}$$



allora $\varphi_n^{(j)}(x) = 0 \quad \forall x \in K, \forall j \geq 1$

$$\varphi_n(\frac{1}{k}) = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n+1 \end{cases}, \quad \varphi_n(0) = 0$$

$$u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \text{ mentre } \|\varphi_n\|_{\infty,K} = 1, \|\varphi_n^{(j)}\|_{\infty,K} = 0 \quad \forall j \geq 1$$

Quindi $|u(\varphi)| \leq C \rho_{m,K}(\varphi)$ non può valere per alcun m, C

Vale in realtà (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) per K "regolare"

Caso di $K = \{x_0\}$: distribuzioni con supporto in un punto

proposizione

Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\text{supp}(u) = \{x_0\}$. Allora esistono

$m \in \mathbb{N}$, $\{C_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$ tali che

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0)$$

In particolare, vale (iii).

Dimostrazione

Wlog $x_0 = 0 \in \Omega$.

Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\eta \equiv 1$ su $B(0,1)$ con $\text{supp}(\eta) = B(0,2)$

$$\text{e } \forall \varepsilon > 0 \quad \eta_\varepsilon(x) := \eta(\frac{x}{\varepsilon})$$

$$\text{Allora } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \partial^\alpha \eta_\varepsilon = \varepsilon^{-|\alpha|} \partial^\alpha \eta(\frac{x}{\varepsilon})$$

$$\eta_\varepsilon \equiv 1 \text{ su } B(0,\varepsilon) \text{ e } \text{supp}(\eta_\varepsilon) = B(0,2\varepsilon)$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(1-\eta_\varepsilon)\varphi$ è nulla su $B(0,\varepsilon)$

$$\text{quindi } \text{supp}((1-\eta_\varepsilon)\varphi) \subseteq \Omega \setminus B(0,\varepsilon)$$

$$\text{Perciò } 0 = u((1-\eta_\varepsilon)\varphi) = u(\varphi) - u(\eta_\varepsilon\varphi) \Rightarrow u(\varphi) = u(\eta_\varepsilon\varphi)$$

$$\text{Sia } \varepsilon_0 > 0 \text{ t.c. } \overline{B(0,\varepsilon_0)} \subseteq \Omega$$

Per la proprietà di continuità di u su $\overline{C_{B(0,\varepsilon_0)}}$

$$\text{esistono } C > 0, m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |u(\varphi)| \leq C \rho_m(\varphi) \quad \forall \varphi \in \overline{C_{B(0,\varepsilon_0)}}$$

Allora $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, essendo $\eta_\varepsilon\varphi \in \overline{C_{B(0,\varepsilon_0)}}$, vale

$$|u(\varphi)| = |u(\eta_\varepsilon\varphi)| \leq C \rho_m(\eta_\varepsilon\varphi)$$

Dico che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\partial^\alpha \varphi(x_0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m$ vale $u(\varphi) = 0$

(Quindi) per la formula di Taylor $\varphi(x) = o(|x|^m)$ e

$$\text{per } \varphi^{(\beta)} \text{ con } |\beta| \leq m \quad \varphi^{(\beta)}(x) = o(|x|^{m-|\beta|})$$

$$\rho_m(\eta_\varepsilon\varphi) \leq 2^m \max_{\substack{x \in B(0,2\varepsilon) \\ |\alpha| \leq m, |\beta| \leq m}} |\partial^{\alpha-\beta} \eta_\varepsilon(x) \cdot \partial^\beta \varphi(x)| \quad |\partial^{\alpha-\beta} \eta_\varepsilon| = O(\varepsilon^{|\beta|-m})$$

$$\text{Riassumendo: } \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \|\partial^{\alpha-\beta} \eta_\varepsilon\|_{\infty} = O(\varepsilon^{|\beta|-m}), \quad \|\varphi^{(\beta)}\|_{\infty, B(0,2\varepsilon)} = O(\varepsilon^{m-|\beta|})$$

$$\leq 2^m \max_{|\beta| \leq m} O(\varepsilon^{|\beta|-m}) O(\varepsilon^{m-|\beta|}) = o(1)$$

Conclusione: se $\partial^\alpha \varphi(x) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m$, allora $u(\varphi) = 0$

Per una $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qualunque, scriviamo

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha \varphi(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha + p(x), \text{ dove } p \text{ è t.c. } \partial^\alpha \varphi(x_0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m$$

Essendo $u(\varphi) = 0$,

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0) \quad \text{con} \quad C_\alpha := \frac{\langle u, (x-x_0)^\alpha \rangle}{\alpha!}$$

□

Ex* Trovare un risultato analogo con condizioni di regolarità su K .
(es. $K = B(0,1)$?)

Richiamo: Sviluppo di Taylor

• $n=1$ per $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(x,y,f) = T_n(x,y) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k \quad \text{se } f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } y$$

Proprietà:

- $T_n(y,y) = T_0(x,y) = f(y)$
- $\partial_x T_n(x,y,f) = T_{n-1}(x,y,f)$
- $\partial_y T_n(x,y,f) = f^{(n)}(y) \frac{(x-y)^n}{n!}$

Resto integrale: se $f \in C^{n+1}$

$$\begin{aligned} f(x) - T_n(x,y) &= T_n(x,x) - T_n(x,y) = \int_y^x \partial_t T_n(x,t) dt = \\ &= \int_y^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \end{aligned}$$

Resto di Lagrange: $f^{(n+1)}$ con ipotesi di Lagrange, cioè continua su $[x,y]$, derivabile su (x,y)

si fissa x,y , si scrive $f(x) = T_n(x,y) + C(x-y)^{n+1}$ dove $C = C(x,y) = \frac{f - T_n}{(x-y)^{n+1}}$

si considera sull'intervallo da x a y $g(t) = T_n(x,t) + C(x-t)^{n+1}$

Allora g verifica le ipotesi di Rolle, quindi

$$\exists \xi \in (x,y) \text{ t.c. } g'(\xi) = 0, \text{ da cui } C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

• Più variabili: per $\varphi: B(x_0, R) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile quanto basta (meglio $x_0 = 0$)

Ci si riconduce a $n=1$ via $f(t) = \varphi(tx)$

$$Df(t) = \nabla \varphi(tx) \cdot x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \partial_{x_k} \varphi(tx) = \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k \partial_{x_k} \right) \varphi \right](tx)$$

$$f^{(m)}(t) = \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k \partial_{x_k} \right)^m \varphi \right](tx)$$

I ∂_{x_k} commutano per Peano & altri ragazzi (Schwarz) con $\varphi \in C^{m+1}$

e in ogni anello commutativo

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^m = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = m}} \binom{m}{\alpha} x^\alpha$$

$$\text{Quindi } f^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha| = m} \binom{m}{\alpha} \partial^\alpha \varphi(tx) x^\alpha \quad \text{dunque}$$

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_m(x)$$

Resto integrale:

$$R_m(x) = \int_0^1 \sum_{|\alpha| = m+1} \binom{m+1}{\alpha} \partial^\alpha \varphi(tx) x^\alpha \frac{(1-t)^m}{m!} dt = \frac{(m+1)}{m!} \int_0^1 \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{\partial^\alpha \varphi(tx)}{\alpha!} x^\alpha (1-t)^m dt$$

Resto di Lagrange: $\exists \xi \in (0,1)$ t.c.

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} = \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{\partial^\alpha \varphi(\xi x)}{\alpha!} x^\alpha$$

$$|R_m(x)| \leq \frac{1}{(m+1)!} \left(\max_{|y| \leq |x|} |\partial^{m+1} \varphi(y)| \right) \sum_{|\alpha| = m+1} \binom{m+1}{\alpha} |x^\alpha| = \frac{1}{(m+1)!} \max_{|y| \leq |x|} |\partial^{m+1} \varphi(y)| \left(\sum_{|\alpha| = m+1} |x^\alpha| \right) \leq \frac{1}{(m+1)!} P_{m+1}(\varphi) \cdot \|x\|_1^{m+1}$$

EX La forma lineare
 $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$
 è una ben definita distribuzione di ordine 1.

Per $\varphi \in \mathcal{D}[-M, M]$, $\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon < |x| \leq M} \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(0)}{x} dx \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{cambio di variabile}} \int_{-M}^M \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$

Per Teo. del valor medio $|\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}| \leq \|\varphi'\|_\infty$
 Quindi tale limite esiste e definisce $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare
 t.c. $\forall M \forall \varphi \in \mathcal{D}[-M, M] \quad |T(\varphi)| \leq 2M \|\varphi'\|_\infty$
 dunque T è una distribuzione di ordine ≤ 1 ; in realtà $= 1$
 perché se $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ha $\varphi_\varepsilon(0) = 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ su $[\varepsilon, 1]$, $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$
 Allora $T(\varphi_\varepsilon) \geq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = -\log \varepsilon \approx \|\varphi_\varepsilon'\|_\infty$ $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}[\varepsilon/2, 2]$

$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ e il valore principale
 $\forall \varphi \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$

EX La forma lineare
 $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0)$
 è una ben definita distribuzione di ordine 2.

Per $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}[-M, M]$
 $\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0) = \int_{\varepsilon < |x| \leq M} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx - \frac{2}{M} \varphi(0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \leq M} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx - \frac{2}{M} \varphi(0)$
 $\frac{2}{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^M \frac{1}{x^2} dx + \frac{2}{M}$ $|\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x| \leq \frac{1}{2} \|\varphi''\|_\infty x^2$

Quindi il limite esiste e

$\forall M > 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}[-M, M]$ il limite T si rappresenta:

$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x}{x^2} dx - \frac{2}{M} \varphi(0)$

quindi $|T(\varphi)| \leq M \|\varphi''\|_\infty + \frac{2}{M} \|\varphi\|_\infty$

cioè T è una distribuzione di ordine ≤ 2 , in realtà proprio 2 (EX)

EX "Rimozione di singolarità"

Sia $f \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \{0\}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \{0\})$ t.c. $f(x) = O(|x|^{-m})$ per $x \rightarrow 0$

Allora f (come distribuzione su $\mathbb{R}^n, \{0\}$) si estende a una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ di ordine $\leq m$.

Caratterizzare tali estensioni.

Definiamo $T(\varphi) = \int_{|x| \geq 1} f(x) \varphi(x) dx + \int_{|x| \leq 1} f(x) \left(\varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx$

Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \{0\})$, allora $T_{m-1}(x) \equiv 0$ e $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx$

è la distribuzione associata a f

Dalla stima del resto di Lagrange

$|\varphi(x) - T_{m-1}(x)| \leq \frac{1}{m!} \max_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \cdot \|x\|_1^m \leq \frac{n^m}{m!} \rho_m(\varphi) \|x\|_1^m$

Allora gli integrandi sono integrabili e

$$\forall R > 0 \quad \forall (\varphi \in \mathcal{D}(B(0, R))) \quad |T(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{L^1(B(0, R) \setminus B(0, 1))} \|\varphi\|_{\infty} + \frac{n}{m!} \| |x|^m \varphi \|_{L^1(B(0, 1))} P_m(\varphi)$$

quindi T estesa è di ordine $\leq m$.

Se S ha un'altra estensione di ord $\leq m$,

$$T-S \text{ è nulla su } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \implies \text{supp}(T-S) \subseteq \{0\}$$

$$\text{e quindi } S = T + \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} \partial^{\alpha}(\cdot)/x=0$$

Nell'altra direzione:

sia $\varphi \in L'_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ con $\varphi \geq 0$, $\frac{1}{\varphi} = o(|x|^m)$ $\forall m$ per $x \rightarrow 0$

Allora φ non ha estensioni a elementi di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ dove essere $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx$

Prendiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp}(\varphi) = B(0, 1) \setminus B(0, 1/2)$, $\varphi|_{B(0, 3/4) \setminus B(0, 1/2)} \equiv 1$, $\varphi(x) = g(|x|)$, $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

Sia $\varphi_k(x) = \varepsilon_k \varphi(kx)$ (con $\varepsilon_k > 0$), che vale ε_k se $\frac{1}{k} \leq |x| \leq \frac{2}{k}$

$$\partial^{\alpha} \varphi_k(x) = \varepsilon_k k^{|\alpha|} \partial^{\alpha} \varphi(kx), \text{ quindi } P_m(\varphi_k) \leq \varepsilon_k k^m P_m(\varphi)$$

Assumiamo $\forall m \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_k = o(k^m)$ per $k \rightarrow \infty$

allora $\varphi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Ma se φ è troppo singolare in 0, $T(\varphi_k)$ non è o.i.

$$\text{Infatti } T(\varphi) \geq \int_{\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{2}{2}} \varphi dx = \varepsilon_k \int_{\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{2}{2}} \varphi \geq 1 \quad \text{se } \varphi \text{ è troppo singolare}$$

$$\geq \frac{C}{k^n} \inf_{\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{2}{2}} \varphi \cdot \varepsilon_k$$

Ex Sia $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$

è definito φu da $\varphi u(\varphi) := u(\varphi \varphi)$

Se $\varphi \equiv 0$ su $\text{supp}(u)$, è vero che $\varphi u = 0$?

No: ad esempio, per $n=1$, $\Omega = \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = x, u = \delta'_0 \quad \text{supp}(u) = \{0\}, \varphi|_{\text{supp}(u)} = 0$$

$$\text{ma } \varphi u(\varphi) = \delta'_0(x\varphi) = -(x\varphi)'(0) = -\varphi(0) = -\delta_0(\varphi)$$

Oss Vale Leibnitz: $(\varphi u)' = \varphi u' + \varphi' u$ per $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}$)

Infatti $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(\varphi u)'(\varphi) = -\varphi u(\varphi') = -u(\varphi \varphi')$$

$$\varphi u'(\varphi) = u'(\varphi \varphi) = -u(\varphi' \varphi + \varphi \varphi') = -u(\varphi \varphi') - u(\varphi' \varphi) = (\varphi u)'(\varphi) - \varphi' u(\varphi)$$

EX Supponiamo $U \subseteq V$ aperti in $\mathbb{R}^n$.

Allora $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(V)$ e $p'_j: \mathcal{D}'(V) \rightarrow \mathcal{D}'(U)$ lineari cont.

E' vero che p'_j e' surgettiva: ogni $u \in \mathcal{D}'(U)$ si estende a una $v \in \mathcal{D}'(V)$?

Non si può applicare HB perché $\mathcal{D}(U)$ non e' ssp di $\mathcal{D}(V)$ se $U \neq V$:

sia $x_0 \in \partial U, x_0 \in V$. Sia $(x_k) \subseteq U, x_k \rightarrow x_0$, wlog $\text{dist}(x_k, U^c) > \frac{1}{k}$ per $k \geq k_0$, così $\overline{B}(x_k, \frac{1}{k}) \subseteq U$.

Sia $\varphi \in \mathcal{D}(B(0,1))$, $\varphi_k(x) := \frac{1}{k!} \varphi(k(x-x_k))$, $\text{supp} \varphi_k = \overline{B}(x_k, \frac{1}{k}) \subseteq K \subseteq V$ definitivamente

$$\|\partial^\alpha \varphi_k\|_\infty = \frac{k^{|\alpha|}}{k!} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty = O(1) \quad \forall \alpha$$

$$\varphi_k \rightarrow 0 \text{ in } C^\infty \text{ e } \text{supp}(\varphi_k) \subseteq K \subseteq V \Rightarrow \varphi_k \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(V)$$

però non vi e' alcun compatto K' di U t.c. $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K'$

$\Rightarrow (\varphi_k) \subseteq \mathcal{D}'(U)$ non e' limitata

$\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(V)$ non e' mai ssp se $\partial U \cap V \neq \emptyset$

La famiglia di seminorme per C_K^∞ e' per esempio

$$\{p_m\}_{m \geq 0}, \quad p_m(\varphi) := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

Si può semplificare: $p_m^0(\varphi) = \max_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$

Le due sono equivalenti:

$\forall \ell \leq m \quad \forall \varphi \in C_K^\infty$ vale $p_\ell^0(\varphi) \leq C p_m^0(\varphi)$

dove $C = \frac{R(K)^m}{(m-\ell)!}$, $R(K) = \max$ raggio delle palle $\|\cdot\|_1$ in K

$$R(K) = \max_{x \in K} \inf_{y \in K} |x - y|_1$$

Sia $y \notin K, x \in K, \varphi \in C_K^\infty$, allora i polinomi di Taylor di φ con centro y sono tutti nulli.

$\Rightarrow \varphi = \text{resto}$

$$\forall m \quad \varphi(x) = R_{m-1}(x, y) = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \varphi(x + t(y-x))|_{t=0} = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \partial^\alpha \varphi(x + \xi(y-x)) \cdot (y-x)^\alpha$$

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{m!} p_m^0(\varphi) \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} |y-x|^\alpha = \frac{1}{m!} p_m^0(\varphi) \left(\sum_i |x_i - y_i| \right)^m \leq \frac{1}{m!} p_m^0(\varphi) \|x-y\|_1^m$$

Vale $\forall y$, quindi $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{m!} p_m^0(\varphi) R^m$

$$\Rightarrow \|\varphi\|_\infty \leq \frac{1}{m!} p_m^0(\varphi) R^m$$

Quindi $\forall \beta$, con $|\beta| = \ell$ $\|\partial^\beta \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{m!} p_m^0(\partial^\beta \varphi) R^m \leq \frac{1}{m!} p_{m+\ell}^0(\varphi) R^m$

$$\Rightarrow p_\ell^0(\varphi) \leq \frac{R^m}{m!} p_{m+\ell}^0(\varphi) \quad \forall \ell, m \quad \forall \varphi \in C_K^\infty$$

Anche $\{\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty\}_{\alpha \in A}$ con $\sup_{\alpha \in A} \inf_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = +\infty$

ad esempio, $\varepsilon := (1, 1, \dots, 1)$, $A := \{m \varepsilon\}_{m \geq 0}$

e' equivalente a $\{p_m\}_{m \geq 0}$ su C_K^∞ .

Taylor con $x \in K, y \notin K$ per $t \mapsto \varphi(t, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial_1^{\alpha_1+1}}{\alpha_1!} \varphi(t_1, x_2, \dots, x_n) (x_1 - t_1)^{\alpha_1} dt_1 = \dots = \\ &= \int_{y_1}^{x_1} \dots \int_{y_n}^{x_n} \frac{\partial_1^{\alpha_1+1} \dots \partial_n^{\alpha_n+1}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \varphi(t_1, \dots, t_n) (x_1 - t_1)^{\alpha_1} \dots (x_n - t_n)^{\alpha_n} dt_n \dots dt_1 = \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \text{sgn}(x-y) \int_{\text{seg}(x,y)} \frac{\partial^{\alpha+\varepsilon}}{\alpha!} \varphi(t) (x-t)^\alpha dt \end{aligned}$$

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{\alpha!} \|\partial^{\alpha+\varepsilon} \varphi\|_\infty \underbrace{\max_{x \in K} \inf_{y \notin K} \|x-y\|_1^\alpha}_{R_{\alpha,0}(K)}$$

$$\Rightarrow \|\varphi\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha!} \|\partial^{\alpha+\varepsilon} \varphi\|_\infty R_{\alpha,0}(K)$$

$$\|\partial^\beta \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha!} \|\partial^{\alpha+\beta+\varepsilon} \varphi\|_\infty R_{\alpha,0}(K)$$

Rappresentazioni di distribuzioni come derivate

• Caso di $\mathcal{E}'(\Omega)$: sia $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Si è visto: $\exists C \exists m \in \mathbb{N} \exists K \in \mathcal{K}(\Omega)$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale $|u(\varphi)| \leq C p_{m,K}(\varphi)$

(e si può prendere: $m = \text{ord}(u)$, $K = \text{qualunque intorno di } \text{supp}(u)$)

Sia $T: \mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto (\partial^\alpha \varphi|_K)_{|\alpha| \leq m} \in C^0(K)^N$

dove $N = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\} = \binom{n+m-1}{m}$

su $\text{ran}(T)$ definisco una forma lineare:

$$\psi = (\psi_\alpha)_{|\alpha| \leq m} = (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m} \mapsto u(\varphi)$$

è ben definita perché: $\forall \psi = (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m} = T(\varphi)$

$$|\Delta \psi| = |u(\varphi)| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} = C \max_{|\alpha| \leq m} \|\psi\|_{\infty,K} \quad \text{norme per } C^0(K)^N$$

Per Hahn-Banach, Δ si estende a un funzionale continuo su $C^0(K)^N$:

esistono N misure di Radon tali che

$$\Delta \psi = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K \psi_\alpha d\mu_\alpha$$

$$\text{quindi } u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K \partial^\alpha \varphi d\mu_\alpha \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

• Caso di $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

Sia $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, $\overline{B_i} \subseteq \Omega$, ricoprimento loc. finito in Ω

e sia $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una p.d.u. C^∞ subordinata a $\{B_i\}$:

$$\text{supp}(\eta_i) \subseteq B_i, \quad \sum \eta_i = 1 \text{ su } \Omega$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale $\varphi = \sum \eta_i \varphi$ e

$\eta_i u \in \mathcal{D}'(B_i)$ e $\sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i u$ è ben def. (la somma è loc. finita)

$$\sum \eta_i u(\varphi) = \sum u(\eta_i \varphi) = u(\sum \eta_i \varphi) = u(\varphi)$$

Siccome $\eta_i u$ a supp. compatto in B_i ,

$$\exists \{\mu_{i,\alpha}\}_{|\alpha| \leq m_i} \text{ t.c. } \forall i \quad u(\eta_i \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_{B_i} \partial^\alpha \varphi d\mu_{i,\alpha}$$

$$\text{Allora } u(\varphi) = \sum_i \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_{B_i} \partial^\alpha \varphi d\mu_{i,\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\int_{\Omega} \partial^\alpha \varphi d(\sum_i \mu_{\alpha,i}) \right)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \mu_\alpha = \sum_i \mu_{\alpha,i}$$

cioè esiste una famiglia di misure di Radon $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$

$$\text{tali che } u(\varphi) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega} \partial^\alpha \varphi d\mu_\alpha$$

Se u ha ordine finito m , bastano $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ con $|\alpha| \leq m$.

Variante della costruzione: usare le norme equivalenti $\|\partial^{me} \varphi\|_{1,K}$

e il fatto che $L'(K)^* = L^\infty(K)$, ottenendo

$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ esiste $f \in L^\infty(K)$ e $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall \varphi \in C_c^\infty \quad u(\varphi) = \int_K f \partial^{me} \varphi dx$$

Infatti: $\exists C$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad |u(\varphi)| \leq C \|\partial^{me} \varphi\|_{1,K}$

$$\text{Si considera } S: \mathcal{D}_K \longrightarrow L^1(K) \\ \varphi \longmapsto \partial^{me} \varphi$$

e su $\text{ran}(S)$ considero

$$\Delta: \partial^{me} \varphi \longmapsto u(\varphi), \text{ per cui } |\Delta \psi| \leq C \|\psi\|_{1,K}$$

Dunque $\exists f \in L^\infty(K)$, $f=0$ su $\mathbb{R}^n \setminus K$ tale che

$$\Delta \psi = \int_K f \psi dx$$

$$\text{e in particolare } u(\varphi) = \int_{\Omega} f \partial^{me} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K$$

NOTA Se u ha ordine finito, si può prendere $m = \text{ord}(u) + 1$

Notare che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \partial_1 \dots \partial_n \varphi(y) dy_1 \dots dy_n = \int_{y \leq x} \partial^\varepsilon \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\varepsilon \varphi H(y-x) dx \quad \text{con } H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n}$$

$$= \partial^\varepsilon \varphi * H(x)$$

allora $u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\mu \varepsilon} \varphi f dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^{(\mu+\varepsilon)} \varphi * H) f dx =$
 definendo $\check{f}(x) := f(-x)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g) h dx = \int_{\mathbb{R}^n} (h * \check{g}) f$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f * \check{H}) \partial^{(\mu+\varepsilon)} \varphi dx$$

e ora $f * \check{H}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$ è continua per assoluta continuità dell'integrale

convoluzione

Richiamo: per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, è ben definita

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \quad \text{e} \quad f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Si considera prima $f, g \geq 0$ misurabili, la funzione $f(y)g(x-y)$ è misurabile ≥ 0

$$\text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right) dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \right)$$

Per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per Fubini,

$$f * g \in L^1 \quad \text{e} \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad \text{con} \quad \int f * g = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \right)$$

In generale, tipicamente " $L^1 * E = E$ "

con $E = L^p, W^{m,p}, C^\infty \cap L^1, \dots$

Per $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_c$, è ben definito $L^1_{loc} * L^1_c$

se $f \in L^1_{loc}$ e $\text{supp}(g) \subseteq B(0, R)$, l'integrando ha supporto $\subseteq B(x, R)$

In questo caso, con $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$f * g(x) = f(g(x-\cdot))$$

Per $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, definiamo $u * \phi$ come la funzione

$$(u * \phi)(x) = u(\phi(x-\cdot))$$

proposizione Se $u \in \mathcal{D}'$, $\phi \in \mathcal{D}$, allora $u * \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$
e $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \partial^\alpha (u * \phi) = u * \partial^\alpha \phi$.

Oss Sapendo che $u * \phi \in C^\infty$, basta fare il caso $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial y_j}$, $j=1, \dots, n$
e poi fare induzione su α .

Anche: provare direttamente che è C^∞ e fare induzione su α .

Lemma

Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti, $\phi \in C^\infty(U \times V)$ con
 $\text{supp}(\phi) \subseteq K \times V$ con $K \in \mathcal{K}(U)$.

Sia $u \in \mathcal{D}'(U)$. Allora $\Phi(y) := u(\phi(\cdot, y))$ definisce
una funzione $\Phi \in C^\infty(V)$ e $\forall \beta \in \mathbb{N}^m$
 $\partial^\beta \Phi(y) = u(\partial^\beta_\eta \phi(\cdot, y))$

DIMOSTRAZIONE

Proviamo per $|\beta|=1$ (e facciamo induzione sull'ordine $|\beta|$)

Sia $y \in V$, $\varepsilon > 0$ t.c. $\overline{B}(y, \varepsilon) \subseteq V$. Sia $h \in \mathbb{R}^m$, $|h| < \varepsilon$.

Allora lo sviluppo al 1° ord in y per $\phi(x, y)$

$$\phi(x, y+h) = \phi(x, y) + \sum_{|\beta|=1} h^\beta \partial^\beta_\eta \phi(x, y) + \psi(x, y, h)$$

dove $\psi(x, y, h)$ è il resto

• Applico u :

$$\Phi(y+h) = \Phi(y) + \sum_{|\beta|=1} h^\beta u(\partial^\beta_\eta \phi(\cdot, y)) + u(\psi(\cdot, y, h))$$

e concludiamo se l'ultimo termine è $O(h^2)$ per $h \rightarrow 0$

Siccome $u \in D'(0)$ e $\psi(\cdot, y, h) \in D_K$,

esiste $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ t.c. $u(\psi(\cdot, y, h)) \leq C \max_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |\partial^\alpha \psi(x, y, h)|$

• Applico ∂^α , $\alpha \in \mathbb{N}^n$ allo sviluppo (e Teo. di Peano)

$$\partial^\alpha \varphi(x, y, h) = \partial^\alpha \varphi(x, y) + \sum_{|\beta| \leq m} h^\beta \partial_2^\beta (\partial^\alpha \varphi(x, y)) + \partial^\alpha \psi(x, y, h)$$

dunque $\partial^\alpha \psi(x, y, h)$ è il resto dello sviluppo al 1° ordine in y per $\partial^\alpha \varphi(x, y)$.

Quindi (usando il resto di Lagrange al 1° ordine)

$$|\partial^\alpha \psi(x, y, h)| \leq C \|h\|^2 \max_{|\beta|=2} \|\partial_2^\beta \partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K \times \overline{B}(y, \varepsilon)}$$

□

In conclusione, anche $u * \varphi \in C^\infty$ (per $u \in D'$, $\varphi \in D$) e

$$\text{vale } \partial^\alpha (u * \varphi) = u * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha u * \varphi$$

Infatti: la prima segue dal lemma, la seconda da

$$\partial^\alpha u * \varphi(x) = \partial^\alpha u(\varphi(x - \cdot)) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi(x - \cdot)) = u(\partial^\alpha \varphi)(x - \cdot) = u * \partial^\alpha \varphi(x)$$

Inoltre: $\text{supp}(u * \varphi) \subseteq \text{supp}(u) + \text{supp}(\varphi)$

Infatti: $(u * \varphi)(x) = u(\varphi(x - \cdot)) \neq 0$ solo se

$$\emptyset \neq \text{supp}(u) \cap \text{supp}(\varphi(x - \cdot)) = \text{supp}(u) \cap (x - \text{supp}(\varphi)),$$

cioè se $x \in \text{supp}(u) + \text{supp}(\varphi)$

proposizione Vale $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$ per $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C_c^\infty$

Lemma Le somme di Riemann per $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \psi(y) dy$ seguenti
 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - \delta k) \psi(\delta k) \delta^n$ convergono uniformemente
in x a $\int \varphi(x-y) \psi(y) dy$ se $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - \delta k) \psi(\delta k) \delta^n = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_k \varphi(x - \delta k) \psi(\delta k) \chi_{\delta B_n}(y - \delta k) dy$$

d'integrandi degli approssimanti ha distanza uniforme

dall'integrandi $\varphi(x-y) \psi(y)$

$\forall y$ l'integrandi approssimante è $\neq 0$ se $0 \leq y_i - \delta k_i < \delta$,

$$\text{cioè } \|y - \delta k\|_\infty < \delta \quad 0 \leq k_i \leq \frac{y_i}{\delta} < k_i + 1, \text{ ossia } \lfloor \frac{y_i}{\delta} \rfloor = k_i : \delta k = \delta \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - \delta \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor) \psi(\delta \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor) dy$$

Se ω è il modulo di continuità di $\varphi(x-y) \psi(y)$ (che è UC),

$$\text{allora } |\varphi(x-y) \psi(y) - \varphi(x - \delta \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor) \psi(\delta \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor)| \leq \omega(\delta)$$

$$\text{Inoltre } \text{supp}(\varphi(x - \delta \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor) \psi(\delta \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor)) \subseteq \text{supp}(\psi) + [0, \delta]^n$$

Dunque le somme di R. convergono a $\varphi * \psi(x)$ unif. in x .

Se poi $\varphi \in C_c^m$, usando $\partial^\alpha \varphi$, $|\alpha| \leq m$, le somme di R. convergono in C_c^m

Se $\varphi \in D$, $\psi \in C_c^\infty$, $S_\delta(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - \delta k) \psi(\delta k) \delta^n$ convergono in $D(\mathbb{R}^n)$ a $\varphi * \psi$
con $\text{supp}(S_\delta) \subseteq \text{supp}(\varphi) + \text{supp}(\psi)$.

$$\text{Allora } (u * S_\delta)(x) = u(S_\delta(x - \cdot)) \longrightarrow u(\varphi * \psi(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$u * (\varphi * \psi)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} u * (\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - \delta k) \psi(\delta k) \delta^n) =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u(\varphi(x - \delta k - \cdot)) \psi(\delta k) \delta^n = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u * \varphi(x - \delta k) \psi(\delta k) \delta^n =$$

$$= (u * \varphi) * \psi(x)$$

qui basta la convergenza puntuale

□

Approssimazione

Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $u_\phi := u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $\phi \geq 0$, $\int \phi = 1$

Allora $u_\phi \longrightarrow u$ se $\text{supp}(\phi_j) \longrightarrow \{0\} : \forall \varepsilon \exists j \text{ t.c. } \text{supp}(\phi_k) \subseteq B(0, \varepsilon) \forall k \geq j$
nel senso debole delle distribuzioni, cioè

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad u_{\phi_j}(\psi) \longrightarrow u(\psi)$$

Oss In generale, $u(\phi) = (u * \check{\phi})(0)$ dalla def.

Quindi

$$u_\phi(\psi) = u * \phi(\psi) = [(u * \phi) * \check{\psi}](0) = u * (\phi * \check{\psi})(0) = u(\check{\phi} * \psi)$$

e siccome per funzioni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vale $\check{\phi} * \psi \xrightarrow{2} \psi$ per $\text{supp}(\check{\phi}) \longrightarrow \{0\}$

allora $u_\phi(\psi) \longrightarrow u(\psi)$

proposizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Siano $(\eta_j)_{j \geq 0} \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.c. $0 \leq \eta_j \leq 1$,

$\eta_j = 1$ contiene definitivamente per $j \rightarrow +\infty$

ogni fissato compatto $K \subseteq \Omega$.

Siano $\phi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leq \phi_j \leq 1$, $\int \phi_j = 1$, $\text{supp}(\phi_j) \subseteq B(0, \frac{1}{j})$

t.c. $\text{supp}(\phi_j) + \text{supp} \eta_j = \Omega$.

Allora $(\eta_j u) * \phi_j$ è una funzione C^∞ con

$$\text{supp}((\eta_j u) * \phi_j) \subseteq \text{supp}(\eta_j) + \text{supp}(\phi_j)$$

dunque $u_j := (\eta_j u) * \phi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $u_j \longrightarrow u$ nel senso debole delle distribuzioni.

Sia $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $K := \text{supp}(\psi) \in K(\Omega)$ fissato (ex)

Sia I intervallo aperto di $\mathbb{R}$

EX Sia $u \in \mathcal{D}'(I)$, $u' = 0$. Allora u è costante (nel senso $L^{\infty}(I) \hookrightarrow \mathcal{D}'(I)$)

Oss $u' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$ significa: $u(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi = \psi', \psi \in \mathcal{D}(I)$

e $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ è una derivata di una $\psi \in \mathcal{D}(I)$ sse $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 0$

Una antiderivata nulla $v: -\infty \rightarrow \infty$ è $\int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ e $\in \mathcal{D}(I)$ sse $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 0$

Fissiamo $\psi \in \mathcal{D}(I)$ con $\int \psi = 1$; scriviamo

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \quad \varphi(x) = (\varphi - (\int_{\mathbb{R}} \varphi) \psi) + (\int_{\mathbb{R}} \varphi) \psi$$

La u si annulla sul primo addendo (ha $\int_{\mathbb{R}} = 0$)

$$\text{quindi } u(\varphi) = u(\psi) \int_{\mathbb{R}} \varphi$$

$$\text{cioè } u = C \text{ con } C = u(\psi)$$

EX Risolvere $u' = Au + f$ nel senso delle distribuzioni, con $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f \in C^0(I; \mathbb{C}^n) \simeq C^0(I; \mathbb{C}^n)$

Precisamente, le soluzioni distribuzionali sono classiche

* Trovare $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{D}'(I)^n$ che risolvono il sistema

$$u'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j + f_i \quad \text{per } 1 \leq i \leq n$$

Supponiamo $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{D}'(I)^n$ risolva l'equazione.

Sia e^{-tA} l'esponenziale di $-tA \in C^\infty(I; M_n(\mathbb{C}))$

$$\text{Allora } e^{-tA} f = e^{-tA} (u' - Au) = [e^{-tA} u]'$$

Allora tutto segue da

EX Sia $g \in C^0(I)$ e $u \in \mathcal{D}'(I)$ t.c. $u' = g$ nel senso delle distribuzioni.

Allora $u \in C^1(I)$ e $u'_{\text{pt}} = u'_{\text{distr}} = g$

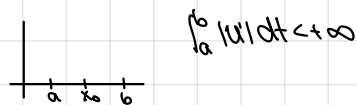
Infatti: sia $f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$, allora per il TFC $f \in C^1$, $f' = g$ (anche nel senso delle distr.)

Quindi, nel senso delle distr, $(u - f)' = 0 \Rightarrow u = f + c \in C^1$

Quindi $e^{-tA} u = (F_1, \dots, F_n) \in C^1(I)$, quindi anche la u .

EX Sia $u \in C^1(I \setminus \{x_0\})$, $u' \in L^{\infty}(I)$ ($u' \in C^0(I \setminus \{x_0\})$)

Allora chi è u'_{distr} ?



(1) Esistono i limiti per $x \rightarrow x_0^\pm$ di $u(x)$, $u(x_0^\pm)$

$$\text{Infatti per } x \in (a, x_0), u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t) dt \longrightarrow u(a) + \int_a^{x_0} u'(t) dt = u(x_0^-)$$

$$\text{e similmente per } x \in (x_0, b], u(x) = u(b) - \int_x^b u'(t) dt \longrightarrow u(b) - \int_{x_0}^b u'(t) dt = u(x_0^+)$$

Inoltre $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ (meglio avendo preso $a, b \in I$ t.c. $a < \text{supp } \varphi < b$)

$$\begin{aligned} u'(\varphi) &= -u(\varphi') = -\int_I u(t) \varphi'(t) dt = -\int_a^{x_0} u \varphi' - \int_{x_0}^b u \varphi' = \\ &= \lim_{y \rightarrow x_0^-} \left(-\int_a^y u \varphi' \right) - \int_y^b u \varphi' = \lim_{y \rightarrow x_0^-} \left(\int_a^y u \varphi' - \underbrace{[u \varphi]_a^y}_{u(y) \varphi(y)} + \int_y^b u \varphi' - \underbrace{[u \varphi]_y^b}_{-u(y) \varphi(y)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \int_a^{x_0} u' \varphi + (u(x_0^+) - u(x_0^-)) \varphi(x_0) = u'_{\text{pt}}(\varphi) + [u(x_0^+) - u(x_0^-)] \delta_{x_0}(\varphi)$$

$$\text{Quindi } u'_{\text{distr}} = u'_{\text{pt}} + [u(x_0^+) - u(x_0^-)] \delta_{x_0}$$

EX** Come generalizzare a $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u = \chi_\Omega$ con Ω aperto liscio

$$u = \chi_\Omega \neq f \quad f \in C(\bar{\Omega})$$

Ex Sia $u \in \mathcal{D}'(I)$ t.c. (i) $u' \geq 0$ oppure (ii) $u'' \geq 0$

Allora (i) u è una funz. crescente oppure (ii) u è una funz. convessa.

Oss Se u è una funzione (i) $C^1(I)$ o (ii) $C^2(I)$, allora è vero.

Idea: approssimare u con funzioni $C^\infty(I)$ e passare al limite.

Siano $\chi_j \in \mathcal{D}(I)$, $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$, $\int \varphi = 1$, $\varphi \geq 0$ e $\varphi_j(x) = j\varphi(jx)$, $\int \varphi_j = 1$, $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j})$

$\cup \{\chi_j = 1\} = I$, $\text{supp}(\chi_j) \subseteq [-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}] \subseteq I$

Definiamo $u_j = (\chi_j u) * \varphi_j \in \mathcal{D}(I)$

$$\begin{aligned} \text{Si è visto che } \forall \psi \quad u_j(\psi) &= (u_j * \check{\psi})(0) = [(\chi_j u) * \varphi_j * \check{\psi}](0) = \\ &= (\chi_j u)(\check{\varphi}_j * \psi) = u(\chi_j(\check{\varphi}_j * \psi)) = u(\check{\varphi}_j * \psi) \quad \text{definitivamente} \\ &\quad \downarrow \check{\varphi}_j * \psi \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi \\ &\quad u(\psi) \quad \quad (u_j \xrightarrow{\mathcal{D}} u) \end{aligned}$$

Caso (i). Sia $[a,b] \subseteq I$; $u_j \in \mathcal{D}(I)$

Proviamo che u_j come funzione ha $u'_j \geq 0$ in $[a,b]$, e quindi è crescente su $[a,b]$ definitivamente per $j \rightarrow +\infty$

$$\forall \psi \geq 0 \quad u'_j = (\chi_j u * \varphi_j)' = (\chi_j u)' * \varphi_j = (\chi'_j u + \chi_j u') * \varphi_j$$

$$u'_j(\psi) = u(\chi'_j(\check{\varphi}_j * \psi)) + u'(\chi_j(\check{\varphi}_j * \psi))$$

$\forall \psi \geq 0$ con $\text{supp}(\psi) \subseteq [a,b]$ vale (quindi $\check{\varphi}_j * \psi \geq 0$)

$$= 0 + u(\check{\varphi}_j * \psi) \quad \text{perché definitivamente } \text{supp}(\check{\varphi}_j * \psi) \subseteq \{\chi_j = 1\}$$

Caso (ii). Analogamente $u''_j \geq 0$ pt. su $[a,b]$ definitivamente

$$u''_j = (\chi''_j u) * \varphi_j + 2(\chi'_j u') * \varphi_j + (\chi_j u'') * \varphi_j$$

$$u''_j(\psi) = u(\chi''_j(\check{\varphi}_j * \psi)) + 2u'(\chi'_j(\check{\varphi}_j * \psi)) + u''(\chi_j(\check{\varphi}_j * \psi))$$

$$\text{Definitivamente} = 0 + 0 + u''(\check{\varphi}_j * \psi) \geq 0$$

Quindi abbiamo $(u_j) \subseteq \mathcal{D}(I)$ convergente in $\mathcal{D}'(I)$ a $u \in \mathcal{D}'(I)$ e

$\forall [a,b] \subset I$ u_j sono (i) crescenti su $[a,b]$ (ii) convesse su $[a,b]$ e limitate

Allora u è una funzione (i) crescente (ii) convessa.

(i) Helly Selection Principle: u_j crescenti, limitate uniformemente su $[a,b]$

Allora hanno una ssc. che converge pt. (salvo un insieme nem.)

$$\Rightarrow L^1([a,b]) \text{ (condom)}$$

Quindi anche nel senso delle distribuzioni

Quindi il limite della sssc. è u .

$\Rightarrow u$ è crescente su I

(ii) Analogamente: usiamo che $u_j: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ convesse e limitate in $\|\cdot\|_\infty$ hanno una sssc convergente unif. sui compatti $\subseteq (a,b)$

Infatti per $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Dip}(f, [a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \leq \max\left\{ \left| \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right|, \left| \frac{f(b) - f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} \right| \right\} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\varepsilon}$$

Per A.A., vi è una sssc. conv. unif. su $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.

Quindi, con argomento diagonale, vi è una sssc. conv. unif. sui compatti di I

Ex Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega \times I)$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ int. aperto)

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \supseteq \Omega \times I \ni y = (x, t))$$

Supponiamo che $\partial_{tt} u = 0$.

Allora "u dipende solo dalle variabili $x = (x_1, \dots, x_n)$ ", nel senso che

$$\exists u_0 \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ t.c. } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times I) \quad u(\varphi) = u_0\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot, t) dt\right)$$

(Notare che $\varphi_0(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) dt$ è in $\mathcal{D}(\Omega)$)

$$\text{supp}(\varphi_0) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp}(\varphi))$$

Fissiamo $\psi_0 \in \mathcal{D}(I)$ con $\int_{\mathbb{R}} \psi_0 = 1$ e

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times I) \quad \varphi(x, t) = (\varphi(x, t) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, s) ds \cdot \psi_0(t)) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, s) ds\right) \psi_0(t)$$

La prima parte è C^∞ (somma di $\varphi + 0$ prodotto di $\varphi_0(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, s) ds$ e di ψ_0),

ha supporto compatto in $\Omega \times I$ perché $\text{supp}(\varphi_0) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp}(\varphi)) \subseteq \Omega$,

dunque φ è somma di 2 funzioni in $\mathcal{D}(\Omega \times I)$

$$\text{Inoltre } \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, s) ds\right) \psi_0(t) dt = 0$$

e una funzione in $\mathcal{D}(\Omega \times I)$ è una derivata parziale ∂_{tt}

se ha $\int_{\mathbb{R}} (\cdot) dt = 0$. Infatti $\varphi = \partial_{tt} \psi$ se $\psi(x, t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x, s) ds$ ha supp. compatto, cioè se $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, s) ds = 0$

Applicando la u , e usando l'ipotesi $\partial_{tt} u = 0$, cioè $u(\partial_{tt} \eta) = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega \times I)$

$$u(\varphi) = u(\varphi_0 \otimes \psi_0) =: u_0(\varphi_0)$$

$$\text{dove } \varphi_0 \otimes \psi(x, t) := \varphi_0(x) \psi_0(t)$$

dove $u_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ponendo $\forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega) \quad u_0(\eta) = u(\eta \otimes \psi_0) \quad (\eta \otimes \psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega \times I) \text{ se } \eta \in \mathcal{D}(\Omega), \psi_0 \in \mathcal{D}(I))$

Ex $u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u_0(\varphi(\cdot, s)) ds$

Ex Sia $f \in C^0(\Omega \times I)$ con $\partial_{tt} f = g \in C^0(\Omega \times I)$ in senso distribuzionale.

Allora $\partial_{tt} f = g$ puntualmente.

Ex Sia $(u_j) \subseteq \mathcal{E}'(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\text{supp}(u_j) \subseteq K \in \mathcal{K}(\Omega) \quad \forall j$

e $u_j \rightarrow u$ nel senso di $\mathcal{D}'(\Omega)$

È vero che $u_j \rightarrow u$ in $\mathcal{E}'(\Omega)$?

Sr: Sia $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\{\chi=1\}$ sia un intorno N di K .

$$\text{Allora } u((1-\chi)\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$$

perché $\text{supp}((1-\chi)\varphi) \subseteq N^c$ dunque disgiunto da $\text{supp}(u) \subseteq K$.

cioè $u_k(\varphi) = u_k(\chi\varphi) \rightarrow$ perché $\chi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

EX Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.c.

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \partial_i \partial_j u = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \partial_i \partial_j u \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Allora u è convessa su Ω .

$$\frac{d^2}{dt^2} u(x+th)$$

Sia $\bar{B} = \bar{B}(x_0, r) \subseteq \Omega$, $x \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\{x=1\}$ un intorno di $\bar{B}$

$u_k := (\chi u) * \phi_k$ con $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\phi_k \geq 0$, $\text{supp } \phi_k \rightarrow \{0\}$, $\int \phi_k = 1$ (cioè $\phi_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$)

$u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ definitivamente

$u_k(\psi) = (\chi u)(\phi_k * \psi)$. Ora $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \partial_i \partial_j (\chi u)(\phi_k * \psi) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} (\partial_i \partial_j \chi \cdot u + \partial_i \chi \partial_j u + \partial_j \chi \partial_i u + \chi \partial_i \partial_j u)(\phi_k * \psi)$$

I primi 3 termini sono nulli su $\phi_k * \psi$, perché $\text{supp}(\phi_k * \psi) \subseteq B$ definitivamente dunque

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \partial_i \partial_j u_k(\psi) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \partial_i \partial_j u(\phi_k * \psi) \geq 0$$

dunque la funzione u_k su B è convessa.

Inoltre u_k convergono $L^1(B(x_0, r/2))$ perché sono equi-Lipschitz

(perché $\text{Lip}(f, B(x_0, r/2)) \leq \frac{4\|f\|_{\infty, B(r)}}{r}$). Per finire serve provare che

le u_k sono limitate $\|\cdot\|_{\infty, B(r)}$

EX Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace $\Delta u = f$

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & n=2 \\ -\frac{|x|^{2-n}}{(n-2)c_n} & n>2 \end{cases} \quad \text{dove } c_n := |\partial B_n(0,1)| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Allora: (1) $\partial_j E \in L'_{loc}$ (puntuale) ed è la derivata distribuzionale

(2) $\Delta E = \delta_0$

$$\text{quindi } \Delta(E * f) = \Delta E * f = \delta_0 * f = f$$

$$|x|^\lambda \in L'_{loc}(\mathbb{R}^n) \iff \lambda > -n$$

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^\lambda = c_n \int_0^1 r^\lambda r^{n-1} dr < +\infty$$

$$\text{sse } \lambda + n - 1 > -1$$

Infatti:

$$(1) \quad \partial_j E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_j}{|x|} = O(\frac{1}{r}) & (n=2) \\ O(r^{1-n}) & (n>2) \end{cases} \quad \text{per } |x|=r$$

$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \partial_j E(\phi) &= \int E(x) \partial_j \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} E(x) \partial_j \phi(x) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{|x| \geq \epsilon} \partial_j E \cdot \phi dx - \int_{|x|=\epsilon} E \cdot \phi \frac{x_j}{|x|} ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -\partial_j E \cdot \phi + 0 = \begin{cases} O(\epsilon \log \epsilon) & n=2 \\ O(\epsilon) & n>2 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $\partial_j E_{\text{distr}} = \partial_j E_{\text{pt}}$

(per Ω aperto limitato con bordo C^1 e $f \in C^1(\bar{\Omega})$)

$$\int_{\Omega} \partial_i f dx = \int_{\partial \Omega} f \cdot \nu_i ds \quad \text{dove } \nu \text{ è la normale esterna}$$

$$0 \int_{\Omega} g \partial_i f dx = - \int_{\Omega} f \partial_i g + \int_{\partial \Omega} f g \nu_i ds$$

Poi

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx = \int_{\partial \Omega} \sum (\partial_i f g - f \partial_i g) \nu_i ds = \int_{\partial \Omega} g \frac{\partial f}{\partial \nu} - f \frac{\partial g}{\partial \nu} ds$$

$$\Delta E(\phi) = E(\Delta \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} E(x) \Delta \phi(x) dx$$

$$\int_{|x| \geq \epsilon} E \Delta \phi = \underbrace{\int_{|x| \geq \epsilon} \Delta E \phi}_{=0 \text{ perché } \Delta E = 0 \quad \forall x \neq 0} + \int_{|x|=\epsilon} \underbrace{E \frac{\partial \phi}{\partial \nu}}_{O(\epsilon \log \epsilon)} - \phi \frac{\partial E}{\partial \nu} = \int_{|x|=\epsilon} \phi \frac{\partial E}{\partial \nu} ds \quad \text{normale esterna}$$

$$\text{Inoltre per } |x|=r \quad \frac{\partial E}{\partial \nu} = -\frac{(2-n)r^{1-n}}{c_n(n-2)} = \frac{n-1}{c_n}, \text{ quindi}$$

$$= \int_{|x|=\epsilon} \phi(x) ds = \phi(0) + o(1)$$

Dunque $\Delta E = \delta_0$ in senso distribuzionale

Operatori di convoluzione : $\varphi \mapsto u * \varphi$

Se $u \in \mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, resta definito l'operatore

$$\mathcal{D} \ni \varphi \mapsto u * \varphi \in \mathcal{E}$$

- lineare
- commuta con ogni traslazione ($\tau_h : \varphi \mapsto \varphi(\cdot - h)$)
dalla def : $u * \varphi(x) = u(\varphi(x - \cdot))$

$$\tau_h(u * \varphi(x)) = u * \tau_h \varphi(x)$$

- continuo $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, cioè equivalentemente

$$\forall R > 0 \quad \mathcal{D}_{\overline{B(R)}} \rightarrow \mathcal{E} \text{ è continuo :}$$

La continuità di $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice :

$$\forall R \quad u \text{ è continua } \mathcal{D}_{\overline{B(R)}} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ cioè}$$

$$\exists C(R) \exists M(R) \text{ t.c. } \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\overline{B(R)}} \quad |u(\varphi)| \leq C(R) \rho_{M(R)}(\varphi)$$

Allora anche: $\forall m_1 \in \mathbb{N}, \forall R_1 > 0, \forall \alpha$ con $|\alpha| \leq m_1$

$$\|\partial^\alpha (u * \varphi)\|_{\infty, B(R_1)} \leq C(R_1) \rho_{M(R_1 + m_1)}(\varphi)$$

$$u * \partial^\alpha \varphi(x) = u(\partial^\alpha \varphi(x - \cdot)) \text{ sono in } \mathcal{D}(B(R_1 + R_1))$$

Quindi $\forall R, R_1, m_1$

$$\rho_{m_1, B(R_1)}(u * \varphi) \leq C(R_1) \rho_{M(R_1 + m_1)}(\varphi)$$

$$\text{cioè } \forall R \quad u * \cdot : \mathcal{D}_{\overline{B(R)}} \rightarrow \mathcal{E} \text{ è continua}$$

EX e se $u \in \mathcal{E}'$, allora

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\quad} \mathcal{D} \quad \text{è continuo}$$

$$\varphi \mapsto u * \varphi$$

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\quad} \mathcal{E} \quad \text{è continuo}$$

$$\varphi \mapsto u * \varphi$$

Se $u \in \mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, è definito un operatore di convoluzione

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$\varphi \mapsto u * \varphi, \quad (u * \varphi)(x) = u(\varphi(x - \cdot))$$

Teorema

(a) L'operatore di convoluzione di $u \in \mathcal{D}'$ è

- lineare
- commuta con $\tau_h \forall h \in \mathbb{R}^n$
- continuo

(b) Se $u \in \mathcal{D}'$, l'operatore di convoluzione $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ è

- lineare
- commuta con $\tau_h \forall h \in \mathbb{R}^n$
- continuo

In questo caso, sappiamo che u si estende (per densità)

ad un unico elemento $u \in \mathcal{E}'$, e l'operatore corrispondente è

- lineare
- commuta con $\tau_h \forall h \in \mathbb{R}^n$
- continuo $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$

DIMOSTRAZIONE

La linearità è ovvia;

$$T_h(U * \varphi) = T_h U * \varphi = U * T_h \varphi$$

NOTA per $u \in \mathcal{D}'$, $T_h u := u \circ T_h$, che estende la def.

di $T_h(\varphi) = (\varphi(\cdot - h))$ per $L^{\infty} \hookrightarrow \mathcal{D}'$

Continuità (caso a.): significa $\forall R > 0 \quad \mathcal{D}_{\overline{B(R)}} \longrightarrow \mathbb{E}$ è continuo

dunque $\forall R > 0 \quad \forall R_1, m_1 \exists M, C$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}_{\overline{B(R)}} \quad p_{m_1, \overline{B(R_1)}}(U * \varphi) \leq C p_M(\varphi)$

Ciò segue dall'analoga proprietà di continuità di $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ come funzionale $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$,

cioè $\forall R \exists C = C(R) \exists M = M(R)$ t.c. $|u(\varphi)| \leq C p_M(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\overline{B(R)}}$

Infatti: $\forall R \quad \forall R_1, m_1$

$$p_{m_1, \overline{B(R_1)}}(U * \varphi) = \max_{\substack{\|x\| \leq R_1 \\ |a| \leq m_1}} |u(\partial^a \varphi(x - \cdot))| \leq C(R + R_1) p_{m(R) + m_1}(\varphi)$$

(Caso b.) se u è a supp. compatto, $\text{supp}(u) \subseteq \overline{B(R_0)}$, l'operatore di convoluzione applica ogni $\mathcal{D}_{\overline{B(R)}}$ in $\mathcal{D}_{\overline{B(R+R_0)}}$ e ciò garantisce la continuità.

(un op. lin. $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ è continuo sse è (seq.) continuo sugli $\mathcal{D}_{\overline{B(R)}}$,

cioè $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies L\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}$ cioè in $\mathbb{E}$ con supp. equib.)

(Caso c.) Sia $u \in \mathbb{E}'$. La continuità di $u: (\mathbb{E}, \{p_{m, \overline{B(R)}}\}_{m, R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ è

$$\exists C_0, R_0, m_0 \text{ t.c. } \forall \varphi \in \mathbb{E} \quad |u(\varphi)| \leq C_0 p_{m_0, \overline{B(R_0)}}(\varphi)$$

La continuità di $u * \cdot: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ è

$$\forall m_1, R_1 \exists C, R, m \text{ t.c. } \forall \varphi \in \mathbb{E} \quad p_{m_1, \overline{B(R_1)}}(U * \varphi) \leq C p_{m, \overline{B(R)}}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti: } \forall m_1, R_1 \quad p_{m_1, \overline{B(R_1)}}(U * \varphi) &= \max_{\substack{\|x\| \leq R_1 \\ |a| \leq m_1}} |u(\partial^a \varphi(x - \cdot))| \leq \max_{\substack{\|x\| \leq R_1 \\ |a| \leq m_1}} C_0 p_{m_0, \overline{B(R_0)}}(\partial^a \varphi(x - \cdot)) \leq \\ &\leq C_0 p_{m_0 + m_1, \overline{B(R_0 + R_1)}}(\varphi) \end{aligned}$$

□

Teorema

Sia $U: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{E}$

- lineare
- commut. con $\{T_h\}_{h \in \mathbb{R}^n}$
- continuo puntualmente: $\forall \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies (U\varphi_j)(x) \longrightarrow 0$ in $\mathbb{C}$.

Allora U è un operatore di convoluzione per una unica $u \in \mathcal{D}'$.

DIMOSTRAZIONE

UNICITÀ: sia $u \in \mathcal{D}'$ con tale proprietà

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad u(\varphi) = u * \check{\varphi}(0) = U\check{\varphi}(0)$$

e u è determinata.

ESISTENZA: definiamo $u(\varphi) := U\check{\varphi}(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

che è una forma lineare e continua per l'ipotesi (3).

Inoltre $\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (U * \varphi)(x) &= u(\varphi(x - \cdot)) = u(\tau_{-x} \check{\varphi}) = U(\tau_{-x} \check{\varphi})(0) = \\ &= \tau_{-x} U \check{\varphi}(0) = \tau_{-x}(U\check{\varphi})(0) = U\check{\varphi}(x) \end{aligned}$$

Dunque $u * \varphi = U\varphi$.

□

EX In particolare $T_h: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \hookrightarrow \mathbb{E}$ e $\partial^\alpha: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \hookrightarrow \mathbb{E}$ soddisfanno le ipotesi, dunque sono operatori di convoluzione. Chi sono le $u, v \in \mathcal{D}'$ t.c. $T_h \varphi = u * \varphi$, $\partial^\alpha \varphi = v * \varphi$?

Convoluzione di distribuzioni (di cui almeno una $\mathcal{D}'_c$)

Def. Siano $u, v \in \mathcal{D}'$ di cui almeno una in $\mathcal{D}'_c$.

$u * v = w \in \mathcal{D}'$ sse $\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad u * (v * \varphi) = w * \varphi$,
cioè w è la distribuzione il cui associato operatore di convoluzione
è composizione degli operatori di convoluzione di v poi u .

Precisamente

$$\mathcal{D} \xrightarrow[v \in \mathcal{D}]{{v} * \cdot} \mathcal{E} \xrightarrow[u \in \mathcal{E}']{{u} * \cdot} \mathcal{E}$$

oppure

$$\mathcal{D} \xrightarrow[v \in \mathcal{D}_c]{{v} * \cdot} \mathcal{D} \xrightarrow[u \in \mathcal{D}']{{u} * \cdot} \mathcal{E}$$

Proprietà (per $u, v \in \mathcal{D}'$, almeno una in $\mathcal{D}'_c$)

- $(u * v) * \varphi = u * (v * \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$
- $(u * v) * w = u * (v * w) \quad \forall u, v, w \in \mathcal{D}'$ con almeno due in $\mathcal{D}'_c$
(è l'associatività di composizione di applicazioni)
- $u * v = v * u$; equivalentemente (pensando agli op. di convoluzione associati)

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad u * v * \varphi = v * u * \varphi$$

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D} \quad u * v * \varphi * \psi = v * u * \varphi * \psi$$

Infatti: siccome la convoluzione di funzioni è commutativa

$$\begin{aligned} u * v * \varphi * \psi &= u * ((v * \varphi) * \psi) = (u * \psi) * (v * \varphi) = (v * \varphi) * (u * \psi) \\ &= v * ((\varphi * u) * \psi) = v * \psi * u * \varphi = v * u * \varphi * \psi \end{aligned}$$

- $\text{supp}(u * v) \subseteq \text{supp}(u) + \text{supp}(v) \quad (u \in \mathcal{D}', v \in \mathcal{D}'_c)$

Sia $x \notin \text{supp}(u) + \text{supp}(v)$ chiuso

Oss chiuso + compatto = chiuso · considerare successioni

$$\text{Quindi } \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } B(x, \varepsilon) \cap (\text{supp}(u) + \text{supp}(v) + B(0, \varepsilon)) = \emptyset$$

Siano $\varphi \in \mathcal{D}_{B(x, \varepsilon)}$ e $\psi \in \mathcal{D}_{B(0, \varepsilon)}$, cioè $\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(u * v * \psi) = \emptyset$,

perché la tesi vale per convoluzione di distribuzione e funzione

$$\text{supp}(u * v * \psi) \subseteq \text{supp}(u) + \text{supp}(v) + \text{supp}(\psi),$$

$$\text{dunque } 0 = (u * v * \psi)(\varphi) = (u * v * \psi * \check{\varphi})(\alpha) = (u * v)(\check{\psi} * \varphi)$$

Se $\psi_j \in \mathcal{D}_{B(0, \varepsilon)}$ hanno $\int \psi_j = 1$, $\text{supp} \psi_j \rightarrow \{0\}$

$$\check{\psi}_j * \varphi \rightarrow \varphi \text{ e quindi } (u * v)(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B(x, \varepsilon))$$

cioè $B(x, \varepsilon) \cap \text{supp}(u * v) = \emptyset$ e in particolare $x \notin \text{supp}(u * v)$

Trasformata di Fourier

In $L^1(\mathbb{R}^n)$: per $f \in L^1$ la trasformata è

$$\hat{f}(\xi) := \int f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$$

(ben definita e continua per Lebesgue, e limitata $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$;
inoltre $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (Riemann-Lebesgue))

Dimostrazione

Sia $S := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ t.c. } \hat{f}(\xi) = 0 \text{ per } |\xi| \rightarrow +\infty\}$

• S è chiuso: $f \in S, g \in S$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{g}(\xi)| + |(\hat{f} - \hat{g})(\xi)| \leq |\hat{g}(\xi)| + \|f - g\|_{L^1}$$

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1} \quad \forall g \in S$$

$$\Rightarrow \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$$

• S è denso: è un sottospazio vettoriale; basta provare

che contiene χ_Q per $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$

Inoltre, essendo $\chi_Q(x_1, \dots, x_n) = \chi_{[a_1, b_1]}(x_1) \dots \chi_{[a_n, b_n]}(x_n)$,

e dalla def. di trasformata, se $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_n(\xi_n)$$

Denote basta provare la tesi per $n=1, f = \chi_{[a, b]}$

$$\hat{\chi}_{[a, b]}(\xi) = \int_a^b e^{-i\xi x} dx = \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_a^b = i \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{\xi} = O\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

□

Un ambiente buono per la trasformata è lo spazio di Schwartz

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \quad x^\alpha \partial^\beta f \in L^\infty\} \quad (\text{funzioni a decrescenza rapida})$$

(ad esempio, $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$)

che è uno SVTL con le seminorme

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^\infty} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

Una famiglia di seminorme equivalente è

$$\{\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^1} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\} \quad \text{o anche } \{\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^p} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \text{ per } 1 \leq p \leq +\infty\}.$$

Ex Provare l'equivalenza. Notare che: $\forall f \in \mathcal{S}$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^\alpha f(y) dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 \dots \partial_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

da cui si ottiene la maggiorazione delle

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^\infty} \text{ con le } \|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^1}$$

Vi sono altre conclusioni continue

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$$

La prima è anche densa:

Sia $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{B}(0, 2))$, $\chi \equiv 1$ su $\mathbb{B}(0, 1)$, $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$

allora per $f \in \mathcal{S}$ la successione $f_j = \chi_j f \in \mathcal{D}$

converge a f in $\mathcal{S}$: infatti $\forall \alpha, \beta$

$$x^\alpha \partial^\beta (f - f_j) = x^\alpha \partial^\beta (1 - \chi_j) f \text{ converge unif. a } 0, \text{ cioè } f_j \xrightarrow{\mathcal{S}} f$$

$$|x^\alpha \partial^\beta (1 - \chi_j) f| \leq |x^\alpha \sum_{|\gamma| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} \partial^{\beta-\gamma} (1 - \chi_j) \partial^\gamma f|$$

$$\max_{|x| \geq j} |x^\alpha \partial^\beta (1 - \chi_j) f| \leq \max_{|x| \geq j} 2^{|\beta|} p_{|\beta|} (1 - \chi_j) \max_{|x| \leq |x|} \|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^\infty, \mathbb{R}^n} = o(1)$$

perché $\forall \alpha, \beta \quad x^\alpha \partial^\beta f = o(1)$ per $|x| \rightarrow +\infty$

Proprietà dello spazio di Schwartz

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \quad \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty < +\infty\}$$

- $\mathcal{S}$ è un SVTL con le seminorme

$$\|f\|_{\alpha, \beta, \infty} := \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$$

- le famiglie equivalenti (per $1 \leq p \leq +\infty$):

$$\|f\|_{\alpha, \beta, p} := \|x^\alpha \partial^\beta f\|_p$$

EX Provare l'equivalenza (usare che per $f \in \mathcal{S}$ vale $f(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \partial_1 \dots \partial_n f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta f dx$, da cui $\|f\|_\infty \leq \|\partial^\beta f\|_1$)

o anche la famiglia $\{\|x^\alpha \partial^\beta f\|_p\}_{\alpha, \beta}$

- convergenza: $f_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 : \forall m, \alpha \quad \|x^\alpha \partial^m f_j\|_\infty \rightarrow 0$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{S}$ è un'algebra topologica con il prodotto puntuale (è bil. continuo)

$$\|x^\alpha \partial^\beta (fg)\|_\infty \leq 2^{|\beta|} (\max_{\gamma \leq \beta} \|x^\alpha \partial^\gamma f\|_\infty) (\max_{\gamma \leq \beta} \|\partial^\gamma g\|_\infty)$$

- $\mathcal{S}$ è un'algebra anche rispetto alla convoluzione

$$* : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$x^\alpha (f * g)(x) = \int [y + (x - y)]^\alpha f(y) g(x - y) dy = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int y^\beta f(y) (x - y)^{\alpha - \beta} g(x - y) dy = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (M^\beta f) * (M^{\alpha - \beta} g).$$

$$\|f * g\|_{\alpha, 0, \infty} \leq 2^{|\alpha|} \max_{\beta \leq \alpha} \|f\|_{\beta, 0, \infty} \cdot \max_{\gamma \leq \alpha} \|g\|_{\gamma, 0, \infty}$$

Poiché $\partial^\beta (f * g) = (\partial^\beta f) * g$ si ha subito la stima anche per $\|f * g\|_{\alpha, \beta, \infty}$

- Gli operatori M^α di moltiplicazione per x^α e gli operatori $\partial^\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ sono ben definiti e continui per definizione di $\mathcal{S}$.

- Le inclusioni $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ sono continue e dense

(la prima: f si approssima con $f_j = f \chi_j$, $\chi_j(x) = \chi(\frac{x}{j})$, con $\chi \in \mathcal{D}$, $\text{supp}(1 - \chi) = \overline{B(0, 1)}$

(così $\partial^\alpha \chi_j(x) = j^{-|\alpha|} \partial^\alpha \chi(\frac{x}{j})$); $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ è denso perché già $\mathcal{D}$ è denso: funziona lo stesso

schema: per $f \in \mathcal{E}$, $f \chi_j$ sono funzioni in $\mathcal{D}$ che, $\forall K$ compatto, sono definitivamente $= f$;

inoltre le seminorme di $\mathcal{S}$ (estese a $+\infty$ su $\mathcal{E}$) sono $\mathcal{E}$ -lsc:

$$f_j \in \mathcal{S}, f_j \xrightarrow{\mathcal{E}} f \text{ allora } \|f\|_{\alpha, \beta, \infty} \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \|f_j\|_{\alpha, \beta, \infty}$$

$$\text{Infatti se } f_j \xrightarrow{\mathcal{E}} f \text{ allora } \forall \alpha, \beta \quad x^\alpha \partial^\beta f_j \xrightarrow{\mathcal{E}} x^\alpha \partial^\beta f$$

$$\text{e si conclude } \liminf_{j \rightarrow +\infty} \|x^\alpha \partial^\beta f_j\|_{\alpha, \beta, \infty} \geq \|x^\alpha \partial^\beta f\|_{\alpha, \beta, \infty}$$

Segue (per motivi generali) che $\mathcal{S}$ è completo:

sia $(f_j) \subseteq \mathcal{S}$ di Cauchy; allora (f_j) è di Cauchy in $\mathcal{E}$, che è completo, quindi

convergente in $\mathcal{E}$ e limitata in $\mathcal{S}$; dunque converge in $\mathcal{E}$ a una $f \in \mathcal{S}$ per

la semicontinuità delle norme su $\mathcal{S}$, per lo stesso motivo

$$\|f - f_j\|_{\alpha, \beta, \infty} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f_j\|_{\alpha, \beta, \infty} = o(1) \text{ per } j \rightarrow +\infty \text{ perché } (f_j) \text{ è } \mathcal{S}\text{-Cauchy.}$$

Dunque $\mathcal{S}$ è uno spazio di Fréchet (SVTL metrizzabile completo).

Trasformata di Fourier su $\mathcal{S}$

- Se $f \in \mathcal{S}$, anche $\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx$ è in $\mathcal{S}$.

Idea: se $f \in \mathcal{D}$, vale

$$\xi_j \hat{f}(\xi) = \int \xi_j e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx = i \int \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-i\xi \cdot x}) f(x) dx =$$

$$\stackrel{\text{i.p.p. (p.p. 2.2)}}{=} -i \int e^{-i\xi \cdot x} \partial_j f(x) dx$$

e le relazioni passano al limite alle $f \in \mathcal{S}$.

NOTAZIONE $D_j = -i\partial_j$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Quindi:

$$\xi_j \hat{f}(\xi) = \widehat{D_j f} \text{ e più in generale } \xi^\alpha \hat{f} = \widehat{D^\alpha f}$$

$$\bullet D_j \hat{f}(\xi) \stackrel{\text{d. 2.2.1}}{=} -i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx = - \int e^{-i\xi \cdot x} (x_j f(x)) dx = - \widehat{x_j f}$$

e quindi più in generale: $D^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}$

Giustificiamo la derivata sotto segno di integrale:

dallo sviluppo elementare ($h \in \mathbb{R}$) $|e^{it} - 1 - it| \leq \frac{t^2}{2}$ per $h \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\xi + h e_j) - \hat{f}(\xi) + i(\widehat{x_j f})(\xi)h = \int e^{-i\xi \cdot x} (e^{-ihx_j} - 1 + ihx_j) f(x) dx$$

e quindi il resto si maggiora in l.o. con:

$$\leq \frac{h^2}{2} \int |x_j^2 f(x)| dx = \frac{h^2}{2} \|f\|_{2,0,0} = O(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

- $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$: scriviamo $e^{-ix \cdot \xi} = e^{-ix \cdot y} \cdot e^{-ix \cdot (x-y)}$. Allora

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot x} \left(\int f(y) g(x-y) dy \right) dx \stackrel{\text{Fub.}}{=} \int \left(\int e^{-i\xi \cdot y} f(y) e^{-i\xi \cdot (x-y)} g(x-y) dy \right) dx = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

- $\int \hat{f} \hat{g} = \int \hat{f} g$ (da usare per estendere la trasformata $\mathcal{S} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ a $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$)
 $\int f(y) \int e^{-ix \cdot y} g(x) dx dy \stackrel{\text{Fub.}}{=} \iint e^{-ix \cdot y} f(y) g(x) dx dy$ simmetrico in (f, g)

NB Dalle inclusioni dense $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$, seguono inclusioni $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$

lo spazio $\mathcal{S}'$ si chiama spazio delle distribuzioni temperate;

per $u \in \mathcal{S}'$, possiamo definire $\hat{u} \in \mathcal{S}'$ come $\hat{u}(\phi) := u(\hat{\phi}) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$, allora

questo estende la trasformata da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ (via $L'_{\text{tr}} \hookrightarrow \mathcal{D}'$, che manda

$\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, perché $\forall \phi \in \mathcal{S}, \mathcal{S} \ni \phi \mapsto \phi \in \mathcal{S}$ è continuo)

- La trasformata è (a meno di costanti) isometrica rispetto alla norma L^2 :

$$\int \hat{f} \bar{\hat{g}} = (2\pi)^n \int f \bar{g}$$

(dunque $f \mapsto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f}$ è isometrica)

- Invertibilità. $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è biettiva; se $R : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è l'applicazione $\phi \mapsto \check{\phi} = \phi(-\cdot)$, vale $RF = FR$, $RF^2 = (2\pi)^n I$

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che l'operatore lineare $L = RF^2 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ commuta con ∂_j

e con M_j con 2 cambi di segni

$$M_j L = M_j R F^2 = R F^2 M_j; \quad D_j L = D_j R F^2 = R F^2 D_j$$

Allora $L = c \cdot I$; la costante si determina con il calcolo di $\hat{f}$ per $f = e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$\partial_j f = -x_j f, \text{ allora } \partial_j \hat{f} + \xi_j \hat{f} = 0 \text{ e quindi } \hat{f}(\xi) = k e^{-\frac{\xi^2}{2}} \text{ con}$$

$$k = \hat{f}(0) = \int f(x) dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

Riassunto:

1. Per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\hat{f}(\xi) = \int e^{-i x \cdot \xi} f(x) dx$ continua $L^1 \rightarrow L^\infty$ $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$
 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (per con. Dom + Riemann- Lebesgue)
2. $\widehat{f \otimes g} = \hat{f} \otimes \hat{g}$ (per Fubini)
3. Se $f \in \mathcal{S}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $\partial^\alpha f, x^\alpha f \in \mathcal{S}$ ($D_j = -i \partial_j$)
 $D^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}$ (derivata sotto segno di integrale + sviluppo di e^{it})
 $\widehat{\xi^\alpha f} = D^\alpha \hat{f}$ (integrazione per parti per $f \in \mathcal{D} + \mathcal{D}' = \mathcal{S}$)
4. $f \mapsto \hat{f}$ è continua $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ (per 1, 3.)
8. $\check{f} = \hat{f}$ dove $\check{f}(x) := f(-x) = R x$ $\forall R = R^T$
9. $\tau_h \hat{f} = \widehat{e^{i h \cdot} f}$
10. $e^{i h \cdot} \hat{f} = \widehat{\tau_h f}$
11. $\delta^\lambda \hat{f} = \widehat{\lambda^n \delta^{\lambda^{-1}} f}$ dove $\delta^\lambda f(x) := f(\lambda x)$
Oss δ^λ è un'isometria L^∞ ; $\lambda^{-n} \delta^{\lambda^{-1}}$ è un'isometria L^1
 anche $(\lambda^{\frac{n}{2}} \delta^\lambda) \hat{f} = \widehat{(\lambda^{\frac{n}{2}} \delta^{\lambda^{-1}})^{-1} f}$ (isometrie L^2)
12. Più in generale: per $L \in GL_n(\mathbb{R})$ (μ è con $L = \lambda I$)
 $\hat{f} \circ L = (\det L)^{-1} \widehat{f \circ L^{-T}}$
13. $g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ $\int g = (2\pi)^{n/2}$
 $\hat{g} = (2\pi)^{n/2} g$
 $\forall j \partial_j g = -x_j g \Rightarrow \partial_j \hat{g} = -\xi_j \hat{g} \Rightarrow \hat{g} = c g$ con $c = \hat{g}(0) = \int g dx$
15. Inversione: $f \in \mathcal{S}$, $\check{f} = (2\pi)^n f$ $R^{\check{f}} = (2\pi)^n I$
 (da 13 + comportamento di $\check{f}$ con τ_h e δ^λ , si può dimostrare 14.)
 In effetti.
16. Per $f \in \mathcal{S}$ $\delta^\varepsilon g \cdot \check{f} \stackrel{(*)}{=} (2\pi)^{n/2} (\varepsilon^{-n} \delta^{\frac{1}{\varepsilon}} g) * f = (2\pi)^n (\varepsilon^{-n} \delta^{\frac{1}{\varepsilon}} (2\pi)^{-n/2} g) * f =$
 $= (2\pi)^n g_\varepsilon * f$ con $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} g(\frac{x}{\varepsilon})$, $\int g_\varepsilon = 1$
 Dunque, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$:
 $\check{f} = (2\pi)^n f$
 (*) segue dalle identità viste
14. $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ (per Fubini)
17. $\int \hat{f} \hat{g} = \int \hat{f} g$ (per simmetria)
18. Allora si può estendere $\check{f}$ a $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$
 ponendo $\hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi})$
19. Altra dim. della formula di inversione:
 con il Teorema " $L: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ che commuta con ∂_j e x_j
 è multiplo dell'identità"; qui $L = R^{\check{f}^2}$
 segue.
20. $\forall f \in \mathcal{S}$ con $f(a) = 0$ vale:
 $f(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f_j(x)$ con $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}$

EX Proviamo 20.

Wlog $a=0$,

$$f(x) = \int_0^1 \partial_t f(tx) dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \partial_j f(tx) dt$$

però $x \mapsto \int_0^1 \partial_j f(tx) dt$ in generale non è in $\mathcal{S}$, è solo $O(\frac{1}{|x|})$

oppure

$$f(x) = - \int_1^{+\infty} \partial_t f(tx) dt = - \sum_{j=1}^n x_j \int_1^{+\infty} \partial_j f(tx) dt$$

Sia $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } \chi \subseteq B(0,2)$, $\chi|_{B(0,1)} \equiv 1$

Definiamo $f_j(x) := \chi(x) \int_0^1 \partial_j f(tx) dt - (1-\chi(x)) \int_1^{+\infty} \partial_j f(tx) dt$

allora $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f_j(x)$

Controlliamo che $f_j \in \mathcal{F}$.

Se $f \in \mathcal{F}$, anche $\partial_j f \in \mathcal{F}$, quindi basta

$\forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\Phi(x) := \int_0^1 g(tx) t^p dt \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Infatti $\forall x \forall h$, per Lagrange

$$|g(x+h) - g(x) - h \cdot \nabla g(x)| \leq h^2 \|\nabla^2 g\|_{\infty, [0,x]}.$$

e per tx, th e integrando:

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x) - h \cdot \int_0^1 \nabla g(tx) t^{p+1} dt| \leq C h^2 \|\nabla^2 g\|_{\infty, \text{co}(0,x,x+h)} = O(h^2) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Per induzione: $\Phi \in C^\infty$ e $\partial_j \Phi(x) = \int_0^1 \partial_j g(tx) t^{p+1} dt$

Poi, se $g \in \mathcal{F}$, $\Phi(x) = \int_1^{+\infty} g(tx) t^p dt$ è differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

e $\forall m \exists C \Phi(x) \leq \frac{C}{|x|^m}$ per $|x| \geq 1$, con $\partial_j \Phi = \int_1^{+\infty} \partial_j g(tx) t^{p+1} dt$

(quindi C^∞ per induzione)

In effetti, come sopra: $\forall m \exists C$ t.c. $|g(x)| \leq \frac{C}{|x|^m}$ per $|x| \geq 1$

$$\text{Quindi } |\Phi(x)| \leq \int_1^{+\infty} |g(tx)| t^p dt \leq C \int_1^{+\infty} \frac{t^p}{|x|^m t^m} dt \leq \frac{C}{|x|^m}$$

Come prima: per $\|h\| \leq \frac{\|x\|}{2}$

$$|\psi(x+h) - \psi(x) - h \cdot \int_1^{+\infty} \nabla g(tx) t^{p+1} dt| \leq h^2 \int_1^{+\infty} t^{p+2} \max_{0 \leq s \leq 1} |\nabla^2 g(tx+sth)| dt$$

e $\forall m \exists C: \|\nabla^2 g\| \leq \frac{C}{|x|^{m+p+2}}$, quindi il resto si stima

$$\leq C h^2 \int_1^{+\infty} \frac{t^{p+2-(m+p+2)}}{(|x|-\|h\|)^{m+p+2}} dt = \frac{C h^2}{|x|^{m+p+2}}$$

Allora ψ è differenziabile con

$$\partial_j \psi(x) = - \int_1^{+\infty} \partial_j g(tx) t^{p+1} dt$$

e per induzione $\psi \in C^\infty$ con $\partial^\alpha \psi = o(|x|^{-m})$

L'esercizio è interessante perché vale il seguente:

teorema sia $L: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ lineare t.c. $\partial_j L = L \partial_j$ e $M_j L = L M_j, j=1, \dots, n$.
Allora L è un multiplo dell'identità.

DIMOSTRAZIONE

Sia $f \in \mathcal{F}$, con $f(a)=0$: $f(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f_j(x)$ con $f_j \in \mathcal{F}$.

Applicando L , trovo: $Lf = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) Lf_j$ che si annulla per $x=a$.

Quindi se f e g coincidono in a , anche Lf e Lg coincidono:

$(Lf)(x)$ dipende solo da $f(x) \Rightarrow Lf(x) = c(x)f(x)$; c è C^∞ perché

per es. con $f(x) = e^{-|x|^2}$, $c(x) = e^{-|x|^2} L(e^{-|x|^2})$

Derivando: $L(\partial_j f) = \partial_j Lf = \partial_j (cf) = c \partial_j f + \partial_j c \cdot f = L(\partial_j f) + f \cdot \partial_j c$

Dunque $f \partial_j c = 0$; scegliendo $f = e^{-|x|^2}$, segue $\partial_j c = 0$, cioè c è costante. $\square$

Ex Soluzione fondamentale dell'equazione del calore $(\partial_t - \Delta)u = 0$

Def. E nucleo di Weierstrass e

$$E(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Allora $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

essendo $L^1(\mathbb{R}^n)$, definisce un elemento di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

• Puntualmente: per $1 \leq j \leq n$

$$\partial_j E = -\frac{x_j}{2t} E$$

$$\partial_{jj} E = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_j^2}{4t^2}\right) E$$

$$\Delta_x E = \sum_{j=1}^n \partial_{jj} E = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) E$$

$$\partial_t E = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) E$$

Quindi $(\partial_t - \Delta_x)E = 0$ puntualmente in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Calcolo di $(\partial_t - \Delta_x)E$ distribuzionale.

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle (\partial_t - \Delta_x)E, \varphi \rangle = -\langle E, (\partial_t + \Delta_x)\varphi \rangle =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{t > \varepsilon \\ x \in \mathbb{R}^n}} E(t, x) (\partial_t + \Delta_x)\varphi(t, x) dt dx =$$

(per ass. continuit  dell'integrale)

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\int_{\mathbb{R}^n} \int_{t > \varepsilon} E \partial_t \varphi dt dx - \int_{t > \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} E \Delta_x \varphi dx dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t > \varepsilon} -\partial_t E \cdot \varphi dt - E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) dx + \int_{t > \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta E \cdot \varphi =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t > \varepsilon} -(\partial_t - \Delta_x)E \cdot \varphi dt dx - \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) dx$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) dy \xrightarrow{\text{cambio}} \varphi(0, 0)$$

Dunque $(\partial_t - \Delta_x)E = \delta_0$ in senso distribuzionale.