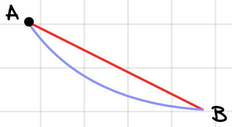
Elementi di Calcolo delle Variazioni

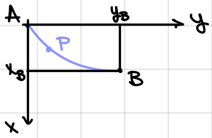
A.A. 2024-2025

SIMONE SACCANI

METODO CLASSICO ED ESEMPI

- Problema della brachistocrona: trovare la curva che congiunge A e B per la quale un grave impiega il tempo minimo partendo da A per arrivare a B





$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{costante}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad y = u(x) \qquad u(x(t)) = y(t)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)) - g\,x(t) = 0 \qquad \begin{cases} x(0)=0,\ y(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0,\ \dot{y}(0)=0 \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gx$$

Ora $\quad T = \int_0^T dt = \int_0^{x_B} \frac{1}{\dot{x}}\,dx$

$$\dot{y}(t) = u'(x(t))\,\dot{x}(t) \implies \dot{x}^2(1 + u'(x)^2) = 2gx$$

$$\implies T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{2gx}}\,dx$$

PROBLEMA: trovare una funzione u tale che $u(0)=0$, $u(x_B) = y_B$ $u \in C^1$ che rende minimo $T(u) = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{2gx}}\,dx$

Più in generale, possiamo considerare

$$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))\,dx$$

funzionale classico del CdV — lagrangiana

$V = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = y_a, u(b) = y_b\}$ è uno spazio affine

$TV = V - V = \{\varphi \in C^1([a,b]) : \varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0\} =: C^1_0([a,b])$ è uno spazio vettoriale

Data $\varphi \in C^1_0([a,b])$ e dato $\varepsilon \in \mathbb{R}$

se u è minimo di $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}(u) \le \mathcal{L}(u + \varepsilon\varphi)$ $\forall \varphi, \forall \varepsilon$

$F(\varepsilon) = \mathcal{L}(u + \varepsilon\varphi)$ quindi $F(0) \le F(\varepsilon)$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

Se $F'(0)$ esiste, allora $F'(0) = 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b L(x, u(x)+\varepsilon\varphi(x), u'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} L(x, u(x)+\varepsilon\varphi(x), u'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi')\cdot\varphi(x) + \frac{\partial L}{\partial z}(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi')\cdot\varphi'(x)\Big|_{\varepsilon=0}\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u')\cdot\varphi(x) + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\cdot\varphi'(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_0([a,b])$$

Integrando per parti:

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x))\right)\right]\varphi(x)\,dx + \left[\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x))\cdot\varphi(x)\right]_a^b =$$

$$= \int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{con } g(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x))\right)$$

Lemma fondamentale del CdV

Sia $g \in C^0([a,b])$. Se

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_c((a,b))$$

allora $g \equiv 0$.

NOTA $C^\infty_c(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty : \operatorname{spt}\varphi \subseteq \Omega \text{ compatto}\}$

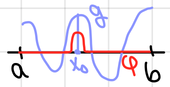
$\operatorname{spt}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo $x_0 \in (a,b)$. Per assurdo sia $g(x_0) \neq 0$. WLOG $g(x_0) > 0$

$\exists \varepsilon > 0 : \; g(x) > \frac{1}{2} g(x_0) > 0 \quad \forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subseteq (a,b)$

$\exists \varphi \in C_c^\infty((a,b))$ con $spt\,\varphi \subseteq [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $\varphi \geq 0$, $\varphi(x_0) > 0$



(ad es. $u(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x(1-x)}} & 0<x<1 \\ 0 & x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases}$)

Quindi $\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\varphi(x)\,dx \geq \frac{g(x_0)}{2} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\,dx > 0$ ↯ □

Quindi, per il lemma, $g(x) = 0$, cioè

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \qquad \text{(equazione di Eulero-Lagrange)}$$

Torniamo alla brachistocrona

$$L(x,y,z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{2gx}} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2gx}}$$

(EL) $0 = \frac{d}{dx} \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{1}{\sqrt{2gx}}$ quindi $\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{1}{\sqrt{x}} = c$

$$\Rightarrow u' = c\sqrt{1+u'^2}\sqrt{x} \quad \Rightarrow (u')^2 = c^2(1+(u')^2)x$$

$$\Rightarrow (u')^2(1-c^2x) = c^2x \quad \Rightarrow u' = \sqrt{\frac{c^2x}{1-c^2x}}$$

da cui $u = \int \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{1-c^2x}}\,dx = \int \frac{cx}{\sqrt{x-c^2x^2}}\,dx = -\frac{1}{c}\int \frac{c^2x}{\sqrt{x-c^2x^2}}\,dx =$

$$\left(D\sqrt{x-c^2x^2} = \frac{1}{2} \frac{1-2c^2x}{\sqrt{x-c^2x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{c}\left[\int \frac{1}{2\sqrt{x-c^2x^2}}\,dx - \sqrt{x-c^2x^2} \right]$$

Ora $\sqrt{x-c^2x^2} = \sqrt{\frac{1}{4c^2} - \left(\frac{1}{2c} - cx\right)^2} = \frac{1}{2c}\sqrt{1-(1-2c^2x)^2}$, quindi

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(1-2c^2x)^2}}\,dx - \frac{1}{c}\sqrt{x-c^2x^2} = -\frac{1}{2c^2}\arcsin(1-2c^2x) - \frac{1}{c}\sqrt{x-c^2x^2} + k =$$

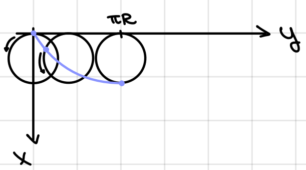
$$= -\frac{1}{2c^2}\arcsin(1-2c^2x) - \frac{1}{c}\frac{1}{2c}\sqrt{1-(1-2c^2x)^2} + k$$

$$u(0) = -\frac{\arcsin(1)}{2c^2} + k = 0 \quad \Rightarrow k = \frac{\pi}{4c^2}$$

Quindi $u(x) = \frac{1}{2c^2}\left[-\arcsin(1-2c^2x) + \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-(1-2c^2x)^2} \right] =$

$$= \frac{1}{2c^2}\left[\arccos(1-2c^2x) - \sqrt{1-(1-2c^2x)^2} \right]$$

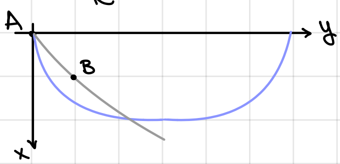
è una cicloide:



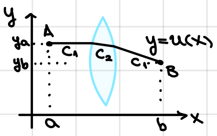
$$\begin{cases} x(\theta) = R - R\cos\theta \\ y(\theta) = \theta R - R\sin\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \theta = \arccos\left(1-\frac{x}{R}\right) \\ y = R\left[\arccos\left(1-\frac{x}{R}\right) - \sqrt{1-\left(1-\frac{x}{R}\right)^2}\,\right] = u_R(x) \end{cases}$$

<u>Oss</u> $u_R(x) = R\,u_1\left(\frac{x}{R}\right)$



- **Problema di Fermat**



$$\mathcal{L}(u)=\int_a^b g(x,u(x))\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx$$

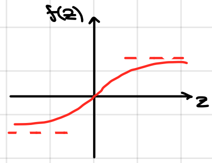
con $g(x,y)=\frac{1}{c(x,y)}$, $u(a)=y_a$, $u(b)=y_b$

$$L(x,y,z)=g(x,y)\sqrt{1+z^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial y}\sqrt{1+z^2}\qquad \frac{\partial L}{\partial z}=g(x,y)\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

(EL) $\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}$, cioè $\frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x))\sqrt{1+u'(x)^2}=\frac{d}{dx}g(x,u(x))\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}$

1. Dove g è costante. $0=g(x,u(x))\frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}$

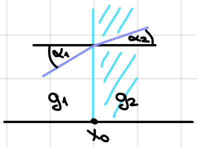


$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\underbrace{\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}}_{\text{curvatura}}=0 \quad\Rightarrow f(u'(x)):=\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}=\text{cost}$$

$$f'(z)=\frac{\sqrt{1+z^2}-\frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}}}{\sqrt{1+z^2}\,(1+z^2)}>0$$

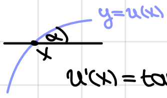
$\Longrightarrow u'(x)=m$ costante $\Longrightarrow u(x)=mx+q$

2. Sulla superficie della lente



$$\overset{=0}{\frac{\partial g}{\partial y}}\sqrt{1+u'(x)^2}=\frac{d}{dx}g\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}$$

NOTA $g(x,y)=g(x)$



$u'(x)=\tan\alpha \Rightarrow \sqrt{1+u'(x)^2}=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$

Quindi $\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}=\sin\alpha(x)$

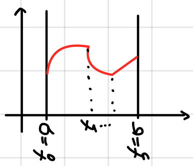
$\Longrightarrow g(x)\sin\alpha(x)=\text{cost} \Longrightarrow g_1\sin\alpha_1=g_2\sin\alpha_2 \Longrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{g_2}{g_1}=\frac{c_1}{c_2}$ (legge di Snell)

DEF. u è C^1 a pezzi, $u\in C^1_p([a,b])$ se

(i) $u\in C^0([a,b])$

(ii) esistono $n-1$ punti t.c. $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

$u\in C^1([x_k,x_{k+1}])$ $k=0,\ldots,n-1$

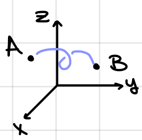


Quindi $\mathcal{L}(u)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}L(x,u(x),u'(x))\,dx$

- **Problema di Fermat vettoriale**

$\underline{u}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$x\longmapsto\underline{u}(x)$



$\mathcal{L}(\underline{u})=\int_a^b g(\underline{u}(x))\,|\underline{u}'(x)|\,dx$ $\qquad u(a)=A,\ u(b)=B$

$L(x,\underline{y},\underline{z})=g(\underline{y})|\underline{z}|$

In generale:

$L:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(u)=\int_a^b L(x,\underline{u}(x),\underline{u}'(x))\,dx$

Se $\underline{u}$ è minimo, $\forall\underline{\varphi}\in C^1_0([a,b],\mathbb{R}^n)$

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}=\int_a^b\frac{d}{d\varepsilon}L(x,\underline{u}+\varepsilon\underline{\varphi},\underline{u}'+\varepsilon\underline{\varphi}')\Big|_{\varepsilon=0}dx=$$

$$=\int_a^b\sum_{k=1}^n\frac{\partial L}{\partial y_k}(x,\underline{u},\underline{u}')\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^n\frac{\partial L}{\partial z_k}(x,\underline{u},\underline{u}')\varphi_k'\,dx\ =$$

$$= \int_a^b \left[\nabla_y L(x,y,y')\cdot \varphi(x) + \nabla_z L(x,y,y')\cdot \varphi'(x)\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\nabla_y L(x,y,y') - \frac{d}{dx}\nabla_z L(x,y,y')\right]\cdot \varphi(x)\, dx \qquad \text{(i termini di bordo si annullano)}$$

Se prendo $\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 = \int_a^b \left[\nabla_y L - \frac{d}{dx}\nabla_z L\right]_k \cdot \varphi_k \, dx \quad \forall \varphi_k$, quindi

$$\nabla_y L(x,y,y') = \frac{d}{dx}\nabla_z L(x,y,y') \qquad \text{(EL vettoriale)}$$

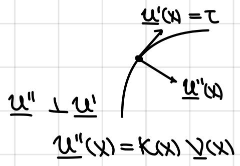
Torniamo al problema di Fermat

$\nabla_y L = \nabla g(y)\cdot |z| \qquad \nabla_z L = g(y)\cdot \frac{z}{|z|}$

EL: $\nabla g(u(x))\,|u'(x)| = \frac{d}{dx}\, g(u(x))\cdot \frac{u'(x)}{|u'(x)|} = (\nabla g(u)\cdot u'(x))\frac{u'(x)}{|u'(x)|} + g(u)\cdot \frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{|u'(x)|}$

Supponiamo u p.l.a., cioè $|u'(x)|=1$

$$\nabla g(u) = (\nabla g(u)\cdot \tau)\tau + g(u)\,u''(x)$$

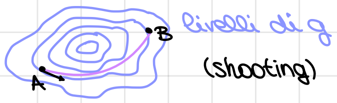


Quindi otteniamo

$$\nabla g(u) = (\nabla g(u)\cdot\tau)\tau + K g(u)\cdot \nu$$

Facendo il prodotto scalare con ν:

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = K g(u)$$



Equazione di Beltrami

$L(x,y,z) = L(y,z) \qquad \mathcal{L}(u) = \int_a^b L(u(x),u'(x))\,dx$

(EL) $\frac{\partial L}{\partial y}(u(x),u'(x)) = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(u(x),u'(x))$ equazione diff. del 2°ordine, autonoma

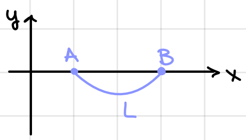
Moltiplicando per u'.

$$u'(x)\cdot\frac{\partial L}{\partial y}(u(x),u'(x)) = u'(x)\,\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(u(x),u'(x))$$

ma $\frac{d}{dx}L(u,u') = \frac{\partial L}{\partial y}u' + \frac{\partial L}{\partial z}u'' = u'\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(u,u') + u''\frac{\partial L}{\partial z}(u,u') = \frac{d}{dx}\left(u'\frac{\partial L}{\partial z}\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(L - u'\frac{\partial L}{\partial z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad L - u'\frac{\partial L}{\partial z} = \text{cost}$ (equazione di Beltrami)

- Problema della catenaria



La catena minimizza l'energia potenziale

$\mathcal{F}(u) = \int_a^b u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx$

$u:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(a)=0$, $u(b)=0$

Questo è un problema vincolato:

$\mathcal{G}(u) = \int_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx$

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) \ \min \\ \mathcal{G}(u) = L \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$$

Utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange "$\nabla\mathcal{F} = \lambda\nabla\mathcal{G}$"

$\mathcal{L}(u) = \mathcal{F}(u) - \lambda\mathcal{G}(u) = \int_a^b (u(x)-\lambda)\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx$

cioè $L(x,y,z) = (y-\lambda)\sqrt{1+z^2}$

Possiamo usare l'eq.ne di Beltrami

$\frac{\partial L}{\partial z} = (y-\lambda)\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

$$(u-\lambda)\sqrt{1+(u')^2} - u'\cdot(u-\lambda)\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = C$$

Quindi:

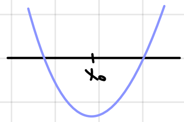
$$(u-\lambda)\left(1+(u')^2-(u')^2\right)=c\sqrt{1+(u')^2}$$
$$(u-\lambda)^2=c^2\left(1+(u')^2\right)$$
$$u'^2=\frac{(u-\lambda^2)-c^2}{c^2}=\left(\frac{u-\lambda}{c}\right)^2-1 \implies u'=\pm\sqrt{\left(\frac{u-\lambda}{c}\right)^2-1}$$
$$\implies \frac{u'}{\sqrt{\left(\frac{u-\lambda}{c}\right)^2-1}}=\pm 1 \implies \int_a^b \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{u-\lambda}{c}\right)^2-1}}=\pm(x-x_0)$$

NOTA $\quad \text{settsinh}=\sinh^{-1}$

$$D\,\text{settsinh}=\frac{1}{\cosh(\text{settsinh}\,s)}=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \qquad D\,\text{settcosh}=\frac{1}{\sinh(\text{settcosh}\,s)}=\frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$$

$$\implies c\cdot\text{settcosh}\left(\frac{u-\lambda}{c}\right)=\pm(x-x_0) \implies \text{settcosh}\left(\frac{u-\lambda}{c}\right)=\pm\frac{x-x_0}{c}\geq 0 \quad e \quad \frac{u-\lambda}{c}\geq 1$$

$$\implies \frac{u-\lambda}{c}=\cosh\left(\frac{x-x_0}{c}\right) \implies u=c\cosh\left(\frac{x-x_0}{c}\right)+\lambda$$



Ora $u(a)=u(b)=0$, $\quad x_0=\frac{a+b}{2}$

$$\implies 0=c\cosh\left(\frac{a-x_0}{c}\right)+\lambda \implies \lambda=-c\cosh\left(\frac{a-x_0}{c}\right)$$

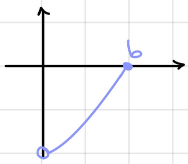
c si ricava da $G(u)=L$

Estremi liberi

$\mathcal{L}(u)=\int_a^b L(x,u(x),u'(x))\,dx$

$\mathcal{L}(u) \rightsquigarrow \min$

$u(b)=y_b$ ma $u(a)$ è libero



$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}=\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}\cdot\varphi+\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\varphi'=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}\right)\varphi(x)\,dx+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\varphi\right)_a^b$$

Se scelgo φ con anche $\varphi(a)=0$, ottengo (EL): $\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}$

$\implies$ il primo addendo è sempre nullo

$\implies \frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x))\,\varphi(a)=0$. Se scelgo φ con $\varphi(a)\neq 0$, allora $\frac{\partial L}{\partial z}(a,u(a),u'(a))=0$

Se avessi fissato $u(a)$ e lasciato libero $u(b)$, avrei $\frac{\partial L}{\partial z}(b,u(b),u'(b))=0$

Se avessi lasciato liberi entrambi, otterrei $\frac{\partial L}{\partial z}(a,u(a),u'(a))=0$, $\frac{\partial L}{\partial z}(b,u(b),u'(b))=0$

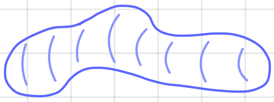
Nell'esempio della catenaria, EL è sempre la stessa.

In più ottengo $\frac{\partial L}{\partial z}(a,u(a),u'(a))=0$, cioè $(u(a)-\lambda)\frac{u'(a)}{\sqrt{1+(u'(a))^2}}=0$

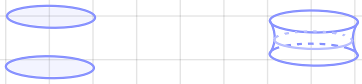
O $u(a)=0$ o $u'(a)=0$

↳ impossibile, infatti $\cosh s\neq 0$ (se $c\neq 0$)

- **Problema di Plateau**

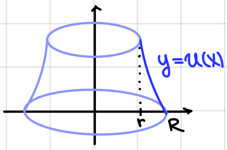


Fissata una curva nello spazio, trovare la superficie di area minima che "borda" la curva

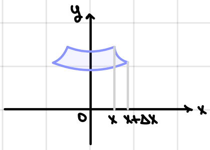


(superfici minime)

Supponiamo che la superficie sia una superficie di rotazione attorno all'asse comune dei due cerchi



$u: [r,R] \longrightarrow \mathbb{R}$
$u(R)=0,\ u(r)=h$



$\mathcal{L}(u) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$

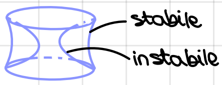
$L(x,y,z) = x\sqrt{1+z^2}$

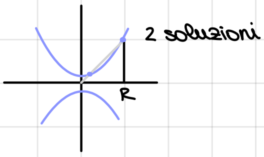
(EL) $0 = \frac{d}{dx}\left(x\frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right)$ (è la curvatura media della superficie)

$\Longrightarrow \frac{xu'}{\sqrt{1+(u')^2}} = c \Longrightarrow x^2(u')^2 = c^2(1+(u')^2) \Longrightarrow (u')^2 = \frac{c^2}{x^2-c^2}$

$\Longrightarrow u' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2-1}} \Longrightarrow u(x) = c\,\mathrm{settcosh}\left(\frac{x}{c}\right)+k$

Quindi il grafico di u è una catenaria, perciò la superficie è una catenoide





- **Meccanica Lagrangiana**

$\mathcal{L}(u) = \int L(x,u,u')$ $L=E-V$, $u(x)$ posizione al tempo x, $u'(x)$ velocità

$E = \frac{1}{2}m\,u'(x)^2$

$F(y) = -\nabla V(y)$ forza nel punto y

$L(x,y,z) = \frac{1}{2}m|z|^2 - V(y)$

$\nabla_y L = -\nabla V \qquad \nabla_z L = mz$

(EL) $-\nabla V(u(x)) = \frac{d}{dx}mu'(x) = mu''(x)$ cioè $F=ma$

Conservazione dell'energia:

$-\nabla V(u(x)) = mu''(x)$, moltiplicando ambo i membri per $u'(x)$, troviamo

$-\frac{d}{dx}V(u(x)) = \frac{d}{dx}\ \frac{1}{2}m(u'(x))^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}m(u'(x))^2 + V(u(x)) = \mathrm{cost}$

Equazioni di ordine superiore

$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x), u''(x))\, dx \qquad L = L(x,y,z,w)$

$u \in C^2([a,b]) \qquad u(a) = y_a,\ u(b) = y_b,\ u'(a) = z_a,\ u'(b) = z_b$

Affinché $u + \varepsilon\varphi$ abbia le stesse condizioni al bordo:

$\varphi \in C^2$ con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0,\ \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} L(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi', u''+\varepsilon\varphi'')\Big|_{\varepsilon=0} dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u',u'')\cdot\varphi(x) + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u',u'')\cdot\varphi'(x) + \frac{\partial L}{\partial w}(x,u,u',u'')\cdot\varphi''(x)\, dx \overset{\text{per parti}}{=}$$

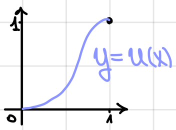
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\varphi - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\varphi - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial w}\cdot\varphi'\right) + \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\varphi\right]_a^b} + \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial w}\cdot\varphi'\right]_a^b} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial w}\right)\varphi\, dx + \cancel{\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial w}\varphi\right]_a^b} = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b)) \subseteq C_0^2([a,b])$$

Per il lemma fondamentale del CdV:

$$\text{(EL)} \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial w} = 0$$

- <u>Spline</u>



$u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$u(0) = 0,\ u(1) = 1,\ u'(0) = 0,\ u'(1) = 0$

$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 (u''(x))^2 dx \longrightarrow$ minimo

$L(x,y,z,w) = \frac{1}{2}w^2 \qquad \frac{\partial L}{\partial w} = w$

(EL) $\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial w} = 0$, cioè $\frac{d^2}{dx^2}u''(x) = u^{(4)}(x) = 0$

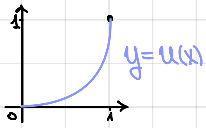
$\Longrightarrow u(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$u'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$u(0) = 0 \longrightarrow d = 0,\ u'(0) = 0 \longrightarrow c = 0,\ u(1) = a + b = 1,\ u'(1) = 3a + 2b = 0 \longrightarrow a = -2, b = 3$

$\Longrightarrow u(x) = -2x^3 + 3x^2$

- <u>Estremi liberi</u>



$u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$u(0) = 0,\ u(1) = 1,\ u'(0) = 0$

$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 (u''(x))^2 dx \longrightarrow$ minimo

In generale

$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x), u''(x))\, dx$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial w}\right)\varphi\, dx + \left[\frac{\partial L}{\partial w}\varphi'\right]_{x=b}$$

Posso comunque scegliere φ' con $\varphi'(b) = 0$ per ottenere la stessa equazione di prima:

(EL) $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial w} = 0$

Se poi scelgo φ con $\varphi'(b)\neq 0$, ottengo $\left.\frac{\partial L}{\partial w}\right|_{x=b} = 0$

Tornando all'esempio, $L=L(w)=\frac{1}{2}w^2$, $\frac{\partial L}{\partial w}=w$

la condizione aggiuntiva è $u''(1)=0$

$u(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\quad u'(x)=3ax^2+2bx+c$, $u''(x)=6ax+2b$

$u(0)=0 \longrightarrow d=0$, $u'(0)=0 \longrightarrow c=0$, $u(1)=a+b=1$, $u''(1)=6a+2b=0 \longrightarrow a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$

$u(x)=-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^3$

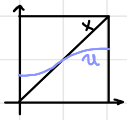
Se lascio libero anche $u(0)$, noto che $u(x)=x$ soddisfa le condizioni e $\mathcal{L}(u)=0$, quindi $u(x)=x$ è certamente un minimo

È anche facile dimostrare che se $\exists x_0 : u''(x_0)\neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(u)>0$

$\Longrightarrow u(x)=cx+d$ e solo $c=1, d=0$ soddisfano le condizioni al bordo

EX $\mathcal{L}(u)=\int_0^1 |u'(x)|^2+|u(x)-x|^2\,dx$, $u\in C^1([0,1])$, $u(0), u(1)$ liberi

$L(x,y,z)=z^2+(y-x)^2$ $\quad \frac{\partial L}{\partial z}=2z$, $\frac{\partial L}{\partial y}=2(y-x)$



Problemi in più variabili

$u:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \underline{x}\in\Omega$

$\underline{x}\longmapsto u(\underline{x})$

$\mathcal{L}(u)=\int_\Omega L(\underline{x}, u(\underline{x}), \nabla u(\underline{x}))\,d\underline{x}$ $\quad u\in C^1(\overline{\Omega})$, $u(\underline{x})=g(\underline{x})$ per $\underline{x}\in\partial\Omega$ con g data

$L=L(\underline{x},y,\underline{z})$, $\quad L:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Facciamo il solito procedimento per trovare punti stazionari, con $\varphi\in C_0^1(\overline{\Omega})$

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}=\int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}L(\underline{x}, u+\varepsilon\varphi, \nabla u+\varepsilon\nabla\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}d\underline{x} =$$

$$=\int_\Omega \frac{\partial L}{\partial y}(\underline{x},u,\nabla u)\cdot\varphi(\underline{x})+\nabla_z L(\underline{x},u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi \quad d\underline{x} =$$ teorema della divergenza

$$=\int_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\mathrm{div}_x(\nabla_z L)\right)\varphi\,d\underline{x}+\cancel{\int_{\partial\Omega}\varphi\,\nabla_z L\cdot\nu_\Omega\,d\sigma}$$

Per il lemma fondamentale del CdV (in più dimensioni):

(EL) $\frac{\partial L}{\partial y}(\underline{x},u(\underline{x}),\nabla u(\underline{x}))=\mathrm{div}(\nabla_z L(\underline{x},u(\underline{x}),\nabla u(\underline{x})))$

- Integrale di Dirichlet

$\mathcal{L}(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2+\int_\Omega f(x)u(x)\,dx$

$u\in C^1(\overline{\Omega})$, $f\in C^0(\Omega)$ data

$\begin{cases}\mathcal{L}(u)\longrightarrow \min \\ u(\underline{x})=g(\underline{x}) \quad \text{su } \partial\Omega\end{cases}$ $\quad$ con $g\in C^0(\partial\Omega)$ data

$L(\underline{x},y,\underline{z})=\frac{1}{2}|\underline{z}|^2+f(\underline{x})\cdot y$

$\frac{\partial L}{\partial y}=f$, $\nabla_z L=\underline{z}$

(EL) $f(\underline{x})=\mathrm{div}_x\nabla u(\underline{x})=\Delta u(\underline{x})$

Equazione di Poisson: $\begin{cases}\Delta u=f & \text{su } \Omega \\ u=g & \text{su } \partial\Omega\end{cases}$ (condizione di Dirichlet)

Senza le condizioni al bordo, otteniamo (EL), cioè $\Delta u = f$,
e $\frac{\partial u}{\partial \nu_\Omega} = 0$ (segue da $\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \cdot \varphi = 0 \ \forall \varphi$) (condizione di Neumann)

- Superfici minime : problema di Plateau

$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}\, dx$ $\qquad u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(area della superficie del grafico di u)

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) \longrightarrow \min \\ u(x) = g(x) \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

$L(x,y,z) = \sqrt{1+|z|^2}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}$

(EL) $\quad 0 = \operatorname{div} \nabla_z L = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ $\quad$ (traccia della 2° forma fondamentale)

$$2\, \underbrace{H_u(x)}_{\text{curvatura media}} = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

I minimi, se esistono e sono sufficientemente regolari, devono avere curvatura media nulla (superfici minime)

Metodo classico del CdV

(1) Risolvere (EL)

(2) Dimostrare che la soluzione è un minimo (convessità, ...)

Metodo diretto del CdV

- Per risolvere un'equazione, troviamo una formulazione variazionale (l'equazione è un'eq.ne di (EL) per un certo funzionale)

Dimostro che $\mathcal{L}$ ha minimo con Weierstraß:

(1) Prendiamo una successione minimizzante u_k (coercività: i sottolivelli sono compatti)
$\Longrightarrow$ abbiamo un'estratta convergente $u_{k_j} \longrightarrow u$

(2) Se c'è semicontinuità inferiore ($\mathcal{L}(u) \leq \liminf \mathcal{L}(u_k)$ se $u_k \longrightarrow u$)
allora $\exists u$ minimo di $\mathcal{L}$.

convessità

IDEA: Se f è convessa, $f'(x_0)=0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \ \forall x$

retta tangente

Consideriamo

$$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega L(x, u, \nabla u)\, dx \qquad u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Supponiamo che $\forall x \in \Omega$ $(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ sia convessa e derivabile.

Allora $\forall x \in \Omega$ $\forall y, y_0 \in \mathbb{R}$ $\forall z, z_0 \in \mathbb{R}^n$

$$L(x,y,z) \geq L(x,y_0,z_0) + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \nabla_z L(x,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)$$

(piano tangente in $(u(y_0,z_0), y_0, z_0)$)

$y=u(x)$, $z=\nabla u(x)$, $y_0=u_0(x)$, $z_0=\nabla u_0(x)$, dove u_0 è il candidato minimo e u è un competitore t.c. $u(x)=u_0(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$

$$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega L(x,u_0,\nabla u_0) + \frac{\partial L}{\partial y}(x,u_0,\nabla u_0)\cdot(u(x)-u_0(x)) + \nabla_z L(x,u_0,\nabla u_0)\cdot(\nabla u - \nabla u_0)\, dx =$$

$$= \mathcal{L}(u_0) + \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x,u_0,\nabla u_0) - \mathrm{div}_x \nabla_z L(x,u_0,\nabla u_0)\right](u-u_0)\, dx + \int_{\partial\Omega} \cancel{\nabla_z L(x,u_0,\nabla u_0)}\cdot \nu_\Omega \cancel{(u-u_0)}\, d\sigma =$$

$$= \mathcal{L}(u_0) + \cancel{\int_\Omega (EL)\cdot(u-u_0)\, dx} = \mathcal{L}(u_0)$$

se non ho condizioni al bordo

se $u=u_0$ su $\partial\Omega$

esempio Integrale di Dirichlet: $L(x,y,z) = \frac{1}{2}|z|^2$

Superfici minime: $L(x,y,z) = \sqrt{1+|z|^2}$

esempio Brachistocrona

$L(x,y,z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x}}$ è convessa in (y,z)

ma $\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{y}}$ non è convessa in (y,z)

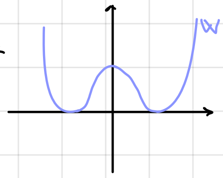
esempio Catenoide

$L(x,y,z) = x\sqrt{1+z^2}$ è convessa in (y,z)

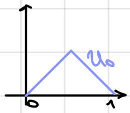
Esempi in cui le cose vanno male

<u>esempio</u> Doppio pozzo

$$\mathcal{L}(u)=\int_0^1 W(u'(x))\,dx \qquad \text{con } L(x,y,z)=W(z)=(1-z^2)^2$$



$$\begin{cases}\mathcal{L}(u)\longrightarrow \min\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$



$$u_0=\begin{cases}x & \text{se } 0\le x\le \frac12\\ 1-x & \text{se } \frac12<x\le 1\end{cases} \qquad u_0\in C^1_p([0,1])$$

$\Longrightarrow \mathcal{L}(u_0)=0 \Longrightarrow u_0$ è minimo assoluto su C^1_p (ma non è unico)

In C^1 non c'è soluzione

(EL) $0=\frac{d}{dx}\,-4u'(x)(1-u'(x)^2)$, cioè $W'(u'(x))$ è costante

Se $u\in C^1$, u' non salta, $W'(u'(x))$ costante $\Rightarrow u'(x)$ costante $\Longrightarrow u(x)=mx+q$

Ma con i dati al bordo, segue $u(x)=0$, che non è un minimo ($\mathcal{L}(0)=1$)

Quindi ci sono infiniti minimi in C^1_p, nessuno in C^1

<u>NOTA</u> Ci sono successioni minimizzanti in C^1:

$u_k\in C^1$ t.c. $\mathcal{L}(u_k)\longrightarrow 0$

Ovvero, possiamo approssimare $u_0\in C^1_p$ con $u_k\in C^1$ in modo che $\mathcal{L}(u_k)\longrightarrow \mathcal{L}(u)$

Lemma di allisciamento $\forall u\in C^1_p\ \forall \varepsilon>0\ \exists u_\varepsilon\in C^1([a,b])$ t.c. $\|u_\varepsilon-u\|_\infty\le\varepsilon$, $\|u'_\varepsilon\|_\infty\le 2(\|u'\|_\infty+1)$ e $|\{x\in[a,b]: u_\varepsilon(x)\neq u(x)\}|\le\varepsilon$

Se l'ambiente è C^1_p, posso ottenere delle condizioni nei punti di non derivabilità?
(EL non ha senso in quei punti)

$u\in C^1_p([a,b])$ $\quad \exists a=x_0<\ldots<x_n=b$, $u\in C^1([x_{k-1},x_k])$

$$\mathcal{L}(u)=\int_a^b L(x,u(x),u'(x))\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}L(x,u(x),u'(x))\,dx$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u')-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\right]}\varphi(x)\,dx+\sum_{k=1}^n\left[\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\varphi(x)\right]_{x_{k-1}}^{x_k}$$

Se φ si annulla su tutti i nodi, ottengo EL

La somma diventa
$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_+)\varphi(x)\Big|_{x=a}}_{\substack{=0\\ \text{se } \varphi(a)\neq 0}}+\sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_-)-\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_+)\right]\varphi\Big|_{x=x_k}}_{\substack{=0\\ \text{se scelgo } \varphi \text{ con } \varphi(x_k)\neq 0}}-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'_-)\varphi\Big|_{x=b}}_{\substack{=0\\ \text{se } \varphi(b)\neq 0}}$$

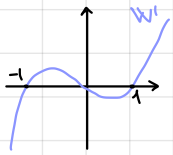
Otteniamo la condizione di Erdmann-Weierstraß:

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x_k,u(x_k),u'_-(x_k))=\frac{\partial L}{\partial z}(x_k,u(x_k),u'_+(x_k)) \qquad \text{per } k=1,\ldots,n-1$$

<u>NOTA</u> Se $\frac{\partial L}{\partial z}$ è iniettiva rispetto a z, la condizione dice che $u'_-(x_k)=u'_+(x_k) \Longrightarrow u\in C^1$

Nell'esempio precedente: $\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=4z(z^2-1)$

$\Longrightarrow u'_+((u'_+)^2-1)=u'_-((u'_-)^2-1)$



<u>Oss</u> Questa condizione è la condizione di Snell che abbiamo visto

esempio finto cattivo

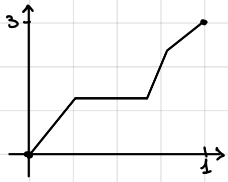
$\mathcal{L}(u)=\int_0^1 W(u')$

$\begin{cases}\mathcal{L}(u)\longrightarrow \min\\ u(0)=0,\ u(1)=3\end{cases}$

Si usa lo stesso metodo:

$W'(u')=\text{cost}$ dove u' è continua $\Rightarrow$ u' costante

$\Rightarrow$ u è lineare a pezzi



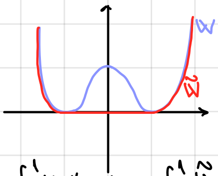
$u_0(x)=3x$ soddisfa $u_0(0)=0,\ u_0(1)=3$

$\mathcal{L}(u_0)=\int_0^1 W(3)$ $\quad$ u_0 è minimo assoluto in C^1_p?

In C^1_p $\quad$ EW : condizioni incompatibili

In C^1 $\quad$ u_0 è l'unica soluzione che soddisfa EL e le condizioni al bordo.

IDEA



$\tilde{W}(z)=\begin{cases}W(z) & \text{se } |z|\geq 1\\ 0 & \text{se } |z|\leq 1\end{cases}$ $\quad$ (convessificato di W)

$\mathcal{L}(u_0)=\int_0^1 W(u_0')\underset{\uparrow}{=}\int_0^1 \tilde{W}(u_0')\underset{\uparrow}{\leq}\int_0^1 \tilde{W}(u)\leq\int_0^1 W(u)=\mathcal{L}(u)$

$W(3)=\tilde{W}(3)$ $\quad$ $\forall u\in C^1,\ u(0)=0,\ u(1)=3$

poiché $\tilde{W}$ è convesso e u_0 soddisfa EL per $\tilde{W}$

$\Rightarrow$ u_0 è minimo per $\mathcal{L}$

Idea banale $\quad$ se u_0 è minimo di $\tilde{\mathcal{L}}(u_0)$ e $\tilde{\mathcal{L}}(u_0)=\mathcal{L}(u_0)$ e $\tilde{\mathcal{L}}\leq\mathcal{L}$, allora u_0 minimizza $\mathcal{L}$. $\quad$ $\mathcal{L}(u_0)=\tilde{\mathcal{L}}(u_0)\leq\tilde{\mathcal{L}}(u)\leq\mathcal{L}(u)$

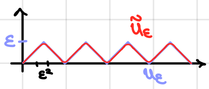
esempio più cattivo

$\mathcal{L}(u)=\int_0^1\left[W(u')+\frac{1}{2}(u(x))^2\right]dx$

$\begin{cases}u(0)=0\\ u(1)=0\\ \mathcal{L}(u)\longrightarrow\min\end{cases}$

$\mathcal{L}\geq 0$, $\nexists u:\mathcal{L}(u)=0$

Ma $\forall\varepsilon>0\ \exists u\in C^1_p$ t.c. $\mathcal{L}(u)<\varepsilon$ $\quad\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ non ha minimo



$\mathcal{L}(u_\varepsilon)=\int_0^1 0+\frac{1}{2}|u_\varepsilon|^2\leq\frac{1}{2}\int_0^1\varepsilon^2=\frac{\varepsilon^2}{2}$

$u_\varepsilon\in C^1_p$ ma grazie al lemma di allisciamento si ottiene $\tilde{u}_\varepsilon$:

$\mathcal{L}(\tilde{u}_\varepsilon)=\int_0^1 W(\tilde{u}_\varepsilon')+\frac{1}{2}\int_0^1|\tilde{u}|^2\leq W(0)N\varepsilon^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2\underset{N\sim\frac{2}{\varepsilon}}{\sim}W(0)\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$

($u_\varepsilon\in C^1_p$, $\tilde{u}_\varepsilon\in C^1$ sono successioni minimizzanti)

Oss $\quad$ $u_k\longrightarrow 0$ uniformemente, ma $\mathcal{L}(u_k)\longrightarrow 0$ mentre $\mathcal{L}(0)=\int_0^1 W(0)=1$

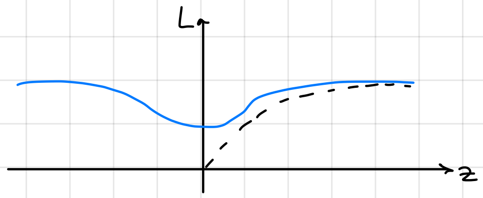
$\mathcal{L}$ non è semicontinuo inferiormente

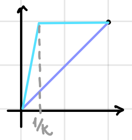
NOTA $\quad$ se scelgo la topologia di C^1 ($u_k\xrightarrow{C^1}u\iff \begin{smallmatrix}u_k\xrightarrow{U}u\\ u_k'\xrightarrow{U}u'\end{smallmatrix}$)

allora $\mathcal{L}$ è continuo, ma $u_k\not\xrightarrow{C^1}0$

esempio $\mathcal{L}(u)=\int_0^1 \sqrt[3]{1+(u'(x))^2}\,dx$ $u(0)=0,\ u(1)=1$

$L(x,y,z)=\sqrt[3]{1+z^2}$





$\int_0^1 |u'(x)|\,dx = u(1)-u(0)$

qualunque funzione crescente paga uguale (caso lineare)

Nel caso sublineare, conviene avere derivata grossa

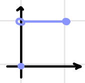
$u_k(x)=\begin{cases} kx & \text{se } x\le \frac{1}{k} \\ 1 & \text{se } x>\frac{1}{k}\end{cases}$ $u_k\in C^1_p([0,1])$

$$\mathcal{L}(u_k)=\int_0^{1/k}\sqrt[3]{1+k^2}+\int_{1/k}^1\sqrt[3]{1} = \frac{\sqrt[3]{1+k^2}}{k}+1-\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

$\mathcal{L}(u)=\int_0^1\sqrt[3]{1+(u'(x))^2}\,dx\ge 1$, quindi $\inf_{C^1_p}\mathcal{L}=1=\inf_{C^1}\mathcal{L}$ (per allisciamento)

Se fosse $\mathcal{L}(u)=1 \Rightarrow (u')^2=0 \Rightarrow u'=0$, cioè u costante

Moralmente il minimo è $v(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0\\ 1 & \text{altrimenti}\end{cases}$



esempio (Weierstraß)

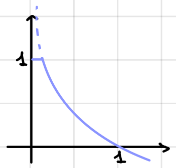
$\mathcal{L}(u)=\frac{1}{2}\int_0^1 x|u'(x)|^2\,dx$ $u(0)=1,\ u(1)=0$

$L(x,y,z)=xz^2$ è convessa in z $\forall x$ ma non uniformemente

$\frac{\partial L}{\partial y}=0,\ \frac{\partial L}{\partial z}=2xz$

(EL) $0=\frac{d}{dx}2xu'(x) \rightarrow xu'(x)=c \Rightarrow u'(x)=\frac{c}{x}\Rightarrow u(x)=c\log x+d$

$u(1)=0\rightarrow d=0$, $u(0)\rightarrow \pm\infty \ne 1$



$u_\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\le\varepsilon \\ \frac{\log x}{\log\varepsilon} & \text{se } x>\varepsilon\end{cases}$

$$\mathcal{L}(u_\varepsilon)=\int_0^\varepsilon x\cdot 0+\int_\varepsilon^1 x\left(\frac{1}{x\log\varepsilon}\right)^2dx=\frac{1}{\log^2\varepsilon}\int_0^1\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{\log\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0^+$$

Inoltre $\mathcal{L}(u)\ge0 \Rightarrow \inf_{C^1_p}\mathcal{L}=\inf_{C^\infty}\mathcal{L}=0$

ma se fosse $\mathcal{L}(u)=0\Rightarrow u=$ costante   impossibile

esempio $\mathcal{L}(u)=\int_0^1(u'(x))^3\,dx$ $u(0)=u(1)=0$

non esistono i minimi

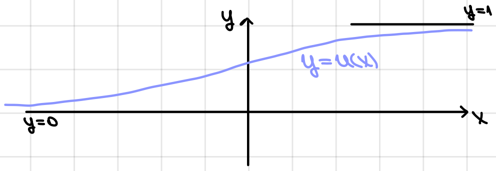
esempio $L(x,y,z)$ è convessa in z ma non in (y,z)

(transizione di fase)

$\mathcal{L}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [W(u(x)) + \frac{1}{2}|u'(x)|^2]\,dx$ con $W(y) = \frac{1}{2}y^2(1-y^2)$

$\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 1$



$L(x,y,z) = W(y) + \frac{1}{2}z^2$

(EB) $L - u'\frac{\partial L}{\partial z} = \text{cost}$ se L non dipende da x

$\frac{\partial L}{\partial z} = z \implies W(u(x)) + \frac{1}{2}|u'(x)|^2 - (u')^2 = \text{cost}$

$\frac{1}{2}u^2(1-u)^2 - \frac{1}{2}(u')^2 = c$

$\implies (u')^2 = u^2(1-u)^2 - 2c$ $\qquad u \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \implies u^2(1-u)^2 \longrightarrow 0$, cioè $(u')^2 \longrightarrow -2c$

quindi $c=0$

$\implies u' = \pm u(1-u)$

- $0 \leq u \leq 1$
- $u' \geq 0$

Quindi considero $u' = u(1-u)$

$\implies \int \frac{1}{u(1-u)}\,du = x + c \implies \log u - \log(1-u) = x+c$

$\implies \log\frac{u}{1-u} = x + c \implies \frac{u}{1-u} = e^{x+c} \implies u(x) = \frac{e^{x+c}}{1+e^{x+c}}$

c dà una traslazione lungo le x (infinite soluzioni)

Scegliamo $c=0$: $u_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

u_0 è minimo di $\mathcal{L}$?

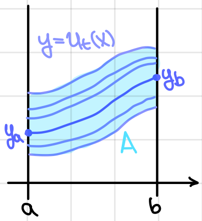
$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(1-u)^2 + (u')^2 \underset{\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab}{\geq} \int_{-\infty}^{+\infty} u(1-u)u'(x)\,dx \underset{\substack{u=u(x)\\ du = u'(x)dx}}{=} \int_0^1 u(1-u)\,du = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{6} \iff a^2+b^2 = 2ab \iff a=b$, cioè $u' = u(1-u) \implies u = u_0$

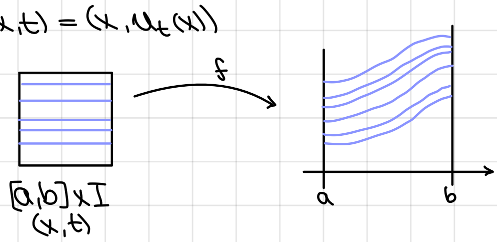
calibrazioni o campi di Weierstraß

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))\,dx \\ u(a) = y_a \\ u(b) = y_b \end{cases}$$

con L convessa in z $\forall (x,y)$



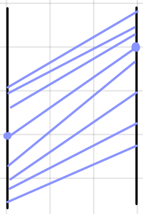
Al variare di $t \in I$ intervallo intorno di 0,
trovo delle soluzioni di (EL) $u_t(x)$ che "fibrano" una regione A,
cioè $f(x,t) = (x, u_t(x))$



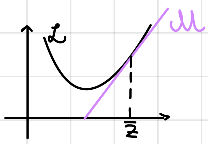
con f iniettiva (in realtà sarà diffeomorfismo)

Teorema Allora $u_t(x)$ realizza il minimo di $\mathcal{L}$ sulla classe di tutte le $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $u(a) = u_t(a)$, $u(b) = u_t(b)$ e $(x, u(x)) \in A$

<u>esempio</u> Geodetiche



DIMOSTRAZIONE



<u>Passo 1</u> Usare la convessità per rendere il funzionale lineare in z

Fissati (x,y)

$$L(x,y,z) \geq L(x,y,\bar{z}(x,y)) + \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,\bar{z}(x,y)) \cdot (z - \bar{z}(x,y)) \quad \text{(per convessità)}$$

Scelgo $\bar{z}(x,y) = \bar{z}(x, u_t(x)) = u_t'(x)$

$(x,y) \in A \Rightarrow \exists! t : (x,y) = (x, u_t(x))$

Poniamo $M(x,y,z) := L(x,y,\bar{z}(x,y)) + \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,\bar{z}(x,y)) \cdot (z - \bar{z}(x,y))$

$$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x,u(x),u'(x))\,dx \geq \int_a^b M(x,u(x),u'(x))\,dx = \mathcal{M}(u)$$

$$\mathcal{L}(u_t) = \int_a^b L(x,u_t(x),u_t'(x))\,dx = \int_a^b L(x,u_t(x),\bar{z}(x,u_t(x)))\,dx = \int_a^b M(x,u_t(x),u_t'(x))\,dx = \mathcal{M}(u)$$

$u_t'(x) = \bar{z}(x, u(x))$

Lemma Se $\mathcal{L}(u) \geq \mathcal{M}(u)$ $\forall u$ t.c. $(x,u(x)) \in A$ e $\mathcal{L}(u_t) = \mathcal{M}(u_t)$, se u_t è minimo per $\mathcal{M}$ allora u_t è minimo per $\mathcal{L}$.

Quindi basta mostrare che $\mathcal{M}(u_t)$ è minimo per $\mathcal{M}(u) = \int_a^b M(x,u(x),u'(x))\,dx$.

DEF. Se $\exists S$ tale che $L(x,u(x),u'(x)) = \frac{d}{dx} S(x,u(x))$
allora L si dice Lagrangiana nulla (null-Lagrangian)

$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x,u(x),u'(x))dx = \int_a^b \frac{d}{dx} S(x,u(x))dx = S(b,u(b)) - S(a,u(a))$
dipende solo dai dati al bordo
$\Rightarrow \mathcal{L}$ è costante sulla classe delle funzioni con dato al bordo fissato
$\Rightarrow$ ogni u è minimo per $\mathcal{L}$

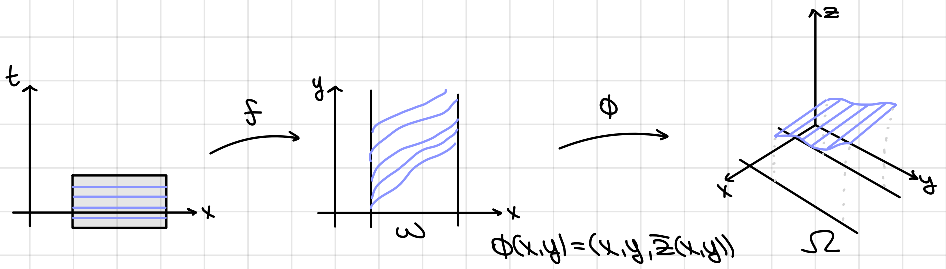
Passo 2 Basta mostrare che $\mathcal{M}$ è una Lagrangiana nulla

$$\mathcal{M}(u) = \int_a^b L(x,u(x),\bar{z}(x,u(x))) + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),\bar{z}(x,u(x)))\cdot(u'(x) - \bar{z}(x,u(x))) =$$

$$= \int_\gamma \omega \qquad \text{con} \quad \gamma(x) = \binom{x}{u(x)},\ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\omega = \Big(L(x,y,\bar{z}(x,y)) - \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,\bar{z}(x,y))\cdot\bar{z}(x,y)\Big)dx + \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,\bar{z}(x,y))dy$$

$\mathcal{M}$ è una Lagrangiana nulla $\Leftrightarrow \omega$ è esatta, cioè $\omega = dS$:
$\mathcal{M}(u) = \int_\gamma \omega = S(\gamma(b)) - S(\gamma(a)) = S(a,u(a)) - S(b,u(b))$
$\omega = \alpha dx + \beta dy$ con $\alpha(x,y) = L(x,y,\bar{z}) - \bar{z}\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,\bar{z})$, $\beta(x,y) = \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,\bar{z})$



$\Omega = (L(x,y,z) - z\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z))dx + \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)dy$ (forma di Beltrami)
Si nota che $\omega = \Phi^*\Omega$

$$\omega \text{ è esatta} \underset{\text{A semplicemente connesso}}{\Leftrightarrow} \omega \text{ è chiusa} \underset{f \text{ diffeomorfismo } (\omega = f^{-1*}f^*\omega)}{\Leftrightarrow} f^*\omega \text{ è chiusa}$$

$f^*\omega = (\Phi\circ f)^*\Omega$

$$\begin{aligned} x &= x & dx &= dx \\ y &= u_t(x) = g(x,t) & dy &= \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial t}dt \\ z &= u_t'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) & dz &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}dt \end{aligned}$$

$$(\Phi\circ f)^*\Omega = \Big(L(x,u_t(x),u_t'(x)) - \cancel{u_t'(x)\frac{\partial L}{\partial z}(x,u_t(x),u_t'(x))}\Big)dx + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u_t(x),u_t'(x))\Big(\cancel{\overset{u_t'(x)}{\overset{\|}{\frac{\partial g}{\partial x}}}dx} + \frac{\partial g}{\partial t}dt\Big) =$$

$$= L(x,u_t,u_t')dx + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u_t,u_t')\cdot\frac{\partial g}{\partial t}dt$$

è chiusa se:

$$0 = \frac{d}{dt}L(x,u_t,u_t') - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial L}{\partial z}(x,u_t,u_t')\frac{\partial g}{\partial t}\Big) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial L}{\partial y}(x,u_t,u_t')\frac{\partial g}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial z}(x,u_t,u_t')\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial x}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial y}(x,u_t,u_t')\frac{\partial g}{\partial t}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial z}(x,u_t,u_t')\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial x}}$$

u_t soddisfa (EL) $\frac{\partial L}{\partial y}(x,u_t,u_t') = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x,u_t,u_t')$

$\square$

esempio $\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}\int_0^b |u'(x)|^2 - |u(x)|^2 dx \qquad u(a)=u(b)=0$

$L(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}y^2$

(EL) $-u = \frac{d}{dx}u'(x)$ cioè $u'' + u = 0 \qquad (\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i)$

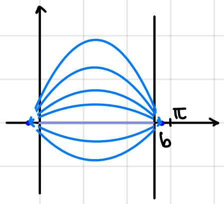
$\Rightarrow u(x) = A\cos x + B\sin x = C\sin(x-x_0)$

$u(0)=0 \Rightarrow A=0 \longrightarrow u(x) = B\sin x$

$u(b)=0$: se $b<\pi$, allora $B=0$

$\Longrightarrow u=0$ è l'unica soluzione di EL

$\mathcal{L}(0)=0$



$u_t(x) = t\sin(x-x_0)$ con $x_0 = -\frac{\pi-b}{2}$

Ogni u_t è minimo di $\mathcal{L}$ con il suo dato al bordo e u_0 è il minimo di $\mathcal{L}$ con dato nullo.

$\mathcal{L}(u) \geq \mathcal{L}(u_0) = 0 \Longrightarrow \int_0^b |u'(x)|^2 dx \geq \int_0^b |u(x)|^2 dx$ se $b<\pi$, $\forall u \in C_0^1([a,b])$

disuguaglianza di Poincaré

superfici minime: problema di Plateau

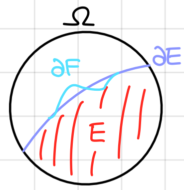
Approccio geometrico

$E \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ E abbastanza regolare, B aperto in Ω

$Per(E,B) =$ "area della frontiera di E contenuta in B" $= \int_{B\cap\partial E} d\sigma$

In generale, Per si definisce sugli insiemi di Caccioppoli

Def. E si dice localmente minimo se $\forall F$ t.c. $E\Delta F \Subset \Omega$ si ha $Per(E,B) \leq Per(F,B)$ dove B è un aperto limitato con $E \Delta F \Subset B$



Ha senso anche quando Ω è illimitato, ad esempio $\Omega = \mathbb{R}^n$. B serve a localizzare e rendere finito il perimetro.

esempio E semispazio. vedremo che E è localmente minimo

Con questa definizione, si ha l'esistenza dei minimi. Ci si chiede poi la regolarità di tali minimi.

Metodo delle calibrazioni

Def. Dato $E \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice calibrazione un campo vettoriale $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ t.c.

(i) $|\xi(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$

(ii) $\xi(x) = \nu_E(x) \quad \forall x \in \partial E$

(iii) $\operatorname{div}\xi(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

(iii)' $\operatorname{div}\xi \geq 0$ su $F \setminus E$, $\operatorname{div}\xi \leq 0$ su $E\setminus F$ (sub-calibrazione)

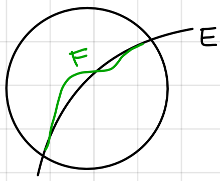
Teorema Se esiste una (sub-)calibrazione ξ per $E \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora E è localmente minimo

DIMOSTRAZIONE

$$Per(F,B) - Per(E,B) = \int_{\partial F\cap B} d\sigma - \int_{\partial E \cap B} d\sigma \geq$$

$$\overset{(i)}{\geq} \int_{\partial F\cap B} \langle \xi, \nu_F\rangle d\sigma - \int_{\partial E\cap B} d\sigma \overset{(ii)}{=} \int_{\partial F\cap B} \langle \xi, \nu_F\rangle d\sigma - \int_{\partial E\cap B} \langle \xi, \nu_E\rangle d\sigma =$$

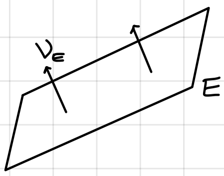
$$\overset{E\Delta F \Subset B}{=} \int_{\partial(B\cap F)} \langle \xi, \nu_F\rangle d\sigma - \int_{\partial(E\cap B)} \langle \xi, \nu_E\rangle d\sigma \overset{\text{Teo. Div.}}{=} \int_{B\cap F} \operatorname{div}\xi - \int_{B\cap E} \operatorname{div}\xi \underset{(iii')}{\overset{(iii)}{\substack{=\\ \geq}}} 0$$



□

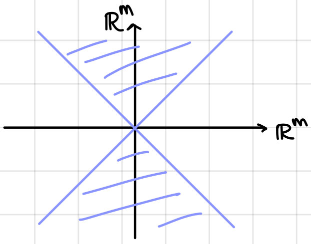
esempio E semispazio

ν_E è costante: pongo $\xi \equiv \nu_E$



esempio Cono di Simons

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m : |y|\ge|x|\}$



Teorema Se $m\ge 4$, E è minimo.

DIMOSTRAZIONE

$f(x,y)=\frac{1}{4}(|x|^4-|y|^4)$

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m : f(x,y)\le 0\}$

<u>IDEA</u> $\xi=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ è una sub-calibrazione

(i) $|\xi(x,y)|\equiv 1$

(ii) $\xi(x,y)=\nu_E(x,y)$ se $(x,y)\in\partial E$

E è un sottolivello di f, $\partial E=\{f=0\}\Rightarrow \nabla f\perp\partial E$ ed è uscente

$\Rightarrow \xi\equiv\nu_E$

(iii)' Calcoliamo $\operatorname{div}\xi$

$\nabla f(x,y)=(x|x|^2,-y|y|^2)$

$|\nabla f(x,y)|=\sqrt{x^2|x|^4+y^2|y|^4}=\sqrt{|x|^6+|y|^6}$

$\xi=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{1}{\sqrt{|x|^6+|y|^6}}(x|x|^2,-y|y|^2)$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}|x|^2x_k=2x_k^2+|x|^2,\quad \frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial f}{\partial y_k}=-2y_k^2-|y|^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|\nabla f|}=\frac{\partial}{\partial x_k}(|x|^6+|y|^6)^{-\frac12}=-\frac{1}{2}\frac{3|x|^4\cdot 2x_k}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}=-\frac{3x_k|x|^4}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\xi_k=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}}{|\nabla f|}=\frac{2x_k^2+|x|^2}{|\nabla f|}-\frac{3|x|^4x_k\cdot|x|^2x_k}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}=\frac{(2x_k^2+|x|^2)(|x|^6+|y|^6)-3x_k^2|x|^6}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

$$\operatorname{div}\xi=\frac{1}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}\Big[(2|x|^2+m|x|^2)(|x|^6+|y|^6)-3|x|^6|x|^2-(2|y|^2+m|y|^2)(|x|^6+|y|^6)+3|y|^6|y|^2\Big]=$$

$$=\frac{1}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}\Big[(m+2)(|x|^2-|y|^2)(|x|^6+|y|^6)-3|x|^8+3|y|^8\Big]=$$

$$=\frac{1}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}\Big[(m-1)(|x|^8-|y|^8)+(m+2)|x|^2|y|^2(|y|^4-|x|^4)\Big]=$$

$$=\frac{1}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}(|x|^4-|y|^4)\underbrace{\Big[(m-1)(|x|^4+|y|^4)-(m+2)|x|^2|y|^2\Big]}_{\text{vorrei fosse di segno costante:}}$$

Ponendo $t=\frac{|y|^2}{|x|^2}$ e dividendo per $|x|^4$:

$(m-1)(1+t^2)-(m+2)t=(m-1)t^2-(m+2)t+(m-1)$

$\Delta=(m+2)^2-4(m-1)^2=m^2+4m+4-4m^2+8m-4=-3m^2+12m$

$\Delta\le 0 \iff 12-3m\le 0 \iff m\ge 4$

$\square$

SPAZI DI SOBOLEV

Def. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ misurabile}, \int_\Omega |u|^p < +\infty\} / \sim$
dove $u \sim v$ se $u = v$ $\overset{\sim}{\forall} x \in \Omega$

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ misurabile}, \exists M \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq M \ \overset{\sim}{\forall} x \in \Omega\} / \sim$

$L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach con norma . $\|u\|_{L^p} = (\int_\Omega |u|^p)^{1/p}$
$L^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Banach con norma : $\|u\|_{L^\infty} = \sup\text{ess}_\Omega |u|$

Def. $L^p_{loc}(\Omega) = \{u : u_{|B} \in L^p(B) \ \forall B \subset\subset \Omega\}$

Se Ω ha misura finita
$L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega) \quad \forall p > q$

Def. $C^\infty_c = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \varphi \in C^\infty, \operatorname{spt}\varphi \subset\subset \Omega\}$
dove $\operatorname{spt}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$

Def. $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \psi \in C^\infty_c$
$(u * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\psi(x-y)\,dy$

Def. I mollificatori sono $\rho_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$,
$\operatorname{spt}\rho_n \subset B(0,\varepsilon)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon = 1$, $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\rho_\varepsilon = f(|x|)$

Detto $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, valgono:
(1) $\frac{\partial}{\partial x_k}(u * \psi) = u * \frac{\partial}{\partial x_k}\psi$
(2) $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon \in C^\infty$
(3) se $u \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$, $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$
(4) $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$
(5) Dato $K \subset\subset \Omega$ esiste $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$ t.c.
$\mathbb{1}_K(x) \leq \psi(x) \leq 1$

Lemma fondamentale del CdV

Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che
$\int_\Omega u(x)\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)$
Allora $u = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto, sia $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$ t.c. $\mathbb{1}_K(x) \leq \psi(x) \leq 1$
$u\psi \in L^1(\Omega)$, anzi $u\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$
$u_\varepsilon = (u\psi) * \rho_\varepsilon \in C^\infty_c(\Omega)$ se $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{spt}\psi, \partial\Omega)$
$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\underbrace{\psi(y)\rho_\varepsilon(x-y)}_{C^\infty_c(\Omega)}\,dy = 0$

Ma $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} u\psi \implies u\psi = 0$
Ma $\psi \equiv 1$ su $K \implies u = 0$ su $K \quad \forall K \subset\subset \Omega$
$\implies u = 0$ su Ω $\square$

Lemma di Du Bois-Reymond Se $u \in L^1_{loc}(a,b)$ tale che
$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$
Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $u = c$ in $L^1_{loc}(a,b)$.

<u>Oss</u> se fosse $u \in C^1$: $\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b u'\varphi = 0 \implies u' = 0$

<u>Oss</u> se $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$, allora $\int_a^b \varphi = 0$
$\iff \exists \psi \in C_c^\infty(a,b)$ t.c. $\varphi = \psi'$

DIMOSTRAZIONE
($\Leftarrow$) chiaro
($\Rightarrow$) $\psi(x) = \int_a^x \varphi$: $\psi(x) = 0$ in $[a, a+\varepsilon]$, $\psi(b) = \int_a^b \varphi = 0$
ma anche $\psi(x) = 0$ in $[b-\varepsilon, b]$ $\square$

DIMOSTRAZIONE
Sia $\psi \in C_c^\infty(a,b)$
Prendo $\mu \in C_c^\infty(a,b)$ t.c. $\int_a^b \mu = 1$
$k = \int_a^b \psi$ e notiamo che $\psi - k\mu \in C_c^\infty$:
$\int_a^b \psi - k\mu = \int_a^b \psi - k\int_a^b \mu = 0$
Per l'oss, $\exists \varphi \in C_c^\infty$ t.c. $\varphi' = \psi - k\mu$
Per ipotesi
$$0 = \int_a^b u\varphi' = \int_a^b u\psi - k\overbrace{\int_a^b u\mu}^{c} = \left(\int_a^b u\psi\right) - kc =$$
$$= \int_a^b u\psi - \psi c = \int_a^b (u-c)\psi$$
Per il lemma fondamentale, $u - c = 0$ $\square$

Def. Sia $u \in L^1(a,b)$, $v \in L^1(a,b)$
v si dice derivata debole di u se
$$\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b v\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

<u>Oss</u> Se $u \in C^1$, allora $\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b u'\varphi \implies v = u'$

Lemma La derivata debole, se esiste, è unica.

DIMOSTRAZIONE
Siano v, w derivate deboli di u:
$\forall \varphi \in C_c^\infty \quad \int_a^b u\varphi' = -\int_a^b v\varphi = -\int_a^b w\varphi$
$\implies \int_a^b (v-w)\varphi = 0 \implies v = w$ $\square$

<u>NOTAZIONE</u> Se v è la derivata debole di u, scriveremo $v = u'$

spazi di sobolev 1D

Sia $p \in [1,+\infty]$

$W^{1,p}(a,b) = \{u \in L^p(a,b) : \exists v \in L^1(a,b) \text{ t.c. } v = u'\}$

$\|u\|_{1,p} = \sqrt{\|u\|_{L^p}^2 + \|u'\|_{L^p}^2}$ (è equivalente a $\|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$)

Se $p=2$, $W^{1,2}$ è uno spazio euclideo.

> **Teorema** $W^{1,p}$ è uno spazio di Banach.
> Quindi $W^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert.

DIMOSTRAZIONE

Sia $(u_k) \subset W^{1,p}$ di Cauchy

$\Longrightarrow (u_k), (u_k') \subset L^p$ sono di Cauchy

$\Longrightarrow u_k \longrightarrow u$ in L^p, $u_k' \longrightarrow v$ in L^p

Mostriamo che $u' = v$

$\forall \varphi \in C_c^\infty \quad 0 = \int_a^b u_k \varphi' + u_k' \varphi \xrightarrow[k \to +\infty]{} \int_a^b u\varphi' + v\varphi$

poiché $u_k \varphi' \xrightarrow{L^1} u\varphi'$, $u_k'\varphi \xrightarrow{L^1} v\varphi$ $\square$

<u>Oss</u> se $-\infty < a < b < +\infty$

$W^{1,p}(a,b) \subset W^{1,q}(a,b) \quad \forall p > q$

$C^1([a,b]) \subset W^{1,p}(a,b) \quad \forall p$

<u>esempio</u> $u(x) = |x|$, $v(x) = \frac{x}{|x|}$ $\qquad u, v \in L^\infty$

$\int_a^b u\varphi' + v\varphi = \int_a^0 -x\varphi' + (-1)\varphi + \int_0^b x\varphi' + 1\cdot\varphi = -\int_a^0 (x\varphi)' + \int_0^b (x\varphi)' =$

$a<0<b \qquad = -[x\varphi]_a^0 + [x\varphi]_0^b = -0\cdot\varphi(0) + a\varphi(a) + b\varphi(b) - 0\cdot\varphi(0) = 0$

$u, v \in L^p \ \forall p \in [1,+\infty] \implies u \in W^{1,p} \setminus C^1([a,b])$ se $a<0<b$

<u>esempio</u> $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad u : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\exists \varepsilon > 0 : \varphi = 0$ su $[0,\varepsilon] \Rightarrow \varphi' = 0$ su $[0,\varepsilon]$

$\int_0^b \sqrt{x}\varphi' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi = \int_\varepsilon^b (\sqrt{x}\varphi)' = \sqrt{b}\varphi(b) - \sqrt{\varepsilon}\varphi(\varepsilon) = 0$

$u \in L^p \ \forall p \in [1,+\infty]$

$v \in L^p \ \forall p \in [1,2) \qquad \implies u \in W^{1,p} \ \forall p \in [1,2)$

> **Lemma** Sia $v \in L^1([a,b])$, $u(x) = \int_a^x v$.
> Allora $u' = v$.
> (Nota: $u \in C^0$)

DIMOSTRAZIONE

Sia $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$

$\int_a^b u\varphi' = \int_a^b \int_a^x v(y)dy\, \varphi'(x)dx \overset{FT}{=} \iint_{\substack{(a,b)^2 \\ y \le x}} v(y)\varphi'(x)\, dx\, dy =$

$\overset{FT}{=} \int_a^b \int_y^b \varphi'(x)dx\, v(y)dy = \int_a^b -\varphi(y)v(y)dy = -\int_a^b v\varphi$ $\square$

Lemma Se $u\in W^{1,1}(a,b)$ allora $\exists c$ t.c. $\tilde\forall x\in(a,b)$: $u(x)=\int_a^x u'(y)dy+c$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $w(x)=\int_a^x u'$.

Per il lemma precedente, $w'=u'$

Dobbiamo mostrare che $w-u$ è costante q.o.

Vogliamo usare il lemma di Du Bois-Reymond

Sia $\varphi\in C_c^\infty(a,b)$:

$$\int_a^b (u-w)\varphi' = \int_a^b u\varphi' - \int_a^b w\varphi' = -\int_a^b u'\varphi + \int_a^b w'\varphi = \int_a^b (w'-u')\varphi = 0$$

$\Longrightarrow u-w=$ costante ∎

corollario Se $u\in W^{1,1}(a,b)$, allora $u(x)=\int_a^x u'(y)dy+c$, quindi $u=\tilde u$ q.o., $\tilde u\in C^0$.

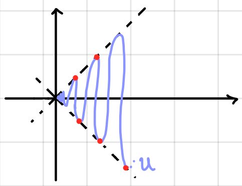
Vogliamo dire un po' di più.

Def. $u:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ si dice **assolutamente continua** se $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c. se $I_k=(a_k,b_k)$, $k=1,\dots,N$ intervalli disgiunti con $\sum_{k=1}^N|b_k-a_k|<\delta$, allora $\sum_{k=1}^N|u(b_k)-u(a_k)|<\varepsilon$.

Si scrive $u\in AC(a,b)$.

Se $N=1$, questa è la definizione di uniforme continuità

$$AC(a,b)\subseteq C^0(a,b)$$



esempio $u\in C^0([0,1])\setminus AC(0,1)$

$$u(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$[a_k,b_k]=\left[\frac{1}{(2k+1)\pi},\frac{1}{2k\pi}\right]$: $\cos\frac{1}{a_k}=-1$, $\cos\frac{1}{b_k}=1$

$$|b_k-a_k|=\frac{2k+1-2k}{(2k+1)2k\pi}=\frac{1}{(4k^2+2k)\pi}\sim\frac{1}{4\pi k^2}$$

$$|u(b_k)-u(a_k)|=b_k+a_k=\frac{4k+1}{(4k^2+2k)\pi}\sim\frac{1}{\pi k}$$

$\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k-a_k|=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4k^2+2k)\pi}$ è convergente

$\Longrightarrow\forall\delta>0\ \exists n$: $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(4k^2+2k)\pi}<\delta$

ma $\sum_{k=1}^{+\infty}|u(b_k)-u(a_k)|=+\infty$

Scelto $\varepsilon=1$, $\exists N$ t.c. $\sum_{k=n}^N|u(b_k)-u(a_k)|>\varepsilon$

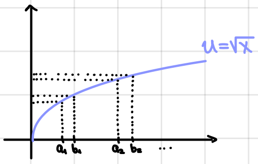
Oss $u\in Lip([a,b])\Longrightarrow u\in AC$

Infatti $|u(x)-u(y)|\le L|x-y|$

$\sum_{k=1}^n|u(b_k)-u(a_k)|\le L\sum_{k=1}^n|b_k-a_k|\le L\delta<\varepsilon$ se $\delta<\frac{\varepsilon}{L}$ ∎

esempio $u \in AC([0,1]) \setminus Lip([0,1])$

$u(x) = \sqrt{x}$ $\quad \notin Lip([0,1])$



u è concava, crescente e continua

Fissato h, $u(x+h)-u(x)$ è decrescente in x

$\sum_{k=1}^{n} |u(b_k)-u(a_k)| \le u\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\right) - u(0) \le u(\delta)-u(0)$

ma u è continua in 0 $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta : u(\delta)-u(0) \le \varepsilon$

FATTO $\quad Lip \cong W^{1,\infty} \subseteq W^{1,p} \subseteq W^{1,1} \cong AC$

$\quad \cap$

$\quad C^{0,\alpha}$ con $\alpha = 1-\frac{1}{p}$

> **Teorema** Sia $u \in W^{1,p}(a,b)$. Allora $\exists \tilde{u}$ t.c. $u = \tilde{u}$ q.o. e $\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x) = \int_x^y u'$ $\forall x,y \in [a,b]$.
> In particolare $\tilde{u} \in AC([a,b])$.

DIMOSTRAZIONE

$\tilde{v}(x) = \int_a^x u' \Rightarrow \tilde{v}' = u' \Rightarrow \tilde{v} = u+k$ q.o.

$u = \tilde{v}-k = \tilde{u}$ continua, e $\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x) = \left(\int_a^y u' - k\right) - \left(\int_a^x u' - k\right) = \int_x^y u'$

Ora $\sum_{k=1}^{n} |\tilde{u}(b_k)-\tilde{u}(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{a_k}^{b_k} u'\right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |u'| = \int_{\cup I_k} |u'|$

Assoluta continuità dell'integrale: se $f \in L^1$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : |A|<\delta \Rightarrow \int_A f < \varepsilon$

Questo conclude, poiché $u' \in L^1$ $\square$

> **Teorema** Se $u \in AC([a,b])$, allora $u \in W^{1,1}(a,b)$.

> **Teorema** Se $u \in W^{1,\infty}(a,b)$, allora $\exists \tilde{u}$ t.c. $u = \tilde{u}$ q.o. e $\tilde{u} \in Lip([a,b])$.

DIMOSTRAZIONE

$\exists \tilde{u}$ t.c. $\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x) = \int_x^y u'$, $u' \in L^\infty$

$|\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x)| \le \int_x^y |u'| \le \|u'\|_{L^\infty} |y-x|$

$\Rightarrow \tilde{u}$ è L-Lipschitz con $L = \|u'\|_{L^\infty}$ $\square$

> **Teorema** Se $u \in Lip([a,b])$, allora $u \in W^{1,\infty}(a,b)$.

> **Teorema** Se $u \in W^{1,p}(a,b)$, $1<p<+\infty$, allora $\exists \tilde{u}$ t.c. $u = \tilde{u}$ q.o. e $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}$ con $\alpha = 1-\frac{1}{p}$.

DIMOSTRAZIONE

$\exists \tilde{u}$ t.c. $\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x) = \int_x^y u'$ $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\Rightarrow |\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x)| \le \int_x^y |u'| \overset{H}{\le} \|u'\|_{L^p(x,y)} \cdot \|1\|_{L^q(x,y)} \le \|u'\|_{L^p}\left(\int_x^y 1^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|u'\|_{L^p} |y-x|^\alpha$ $\square$

In più variabili, dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare con $|\Omega|<+\infty$, si ha

$W^{m,p} \hookrightarrow C^{\lfloor k \rfloor, \{k\}}$ per $k < m-\frac{n}{p}$

(è il Teorema delle immersioni di Sobolev)

DEF. Sia $L = L(x,y,z)$, $x,y,z \in \mathbb{R}$.
L si dice **di Caratheodory** se
(1) $\forall y, z$ $\quad x \longmapsto L(x,y,z)$ è Lebesgue misurabile
(2) $\tilde{\forall} x$ $\quad (y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ è continua

> **Teorema** Sia $L = L(x,y,z)$ di Caratheodory e siano $u = u(x)$, $v = v(x)$ misurabili. Allora
> $x \longmapsto L(x, u(x), v(x))$ è misurabile.

<u>Dim</u> vedi lez. 11 anno scorso

DEF. Sia $\mathcal{L} : V \subseteq W^{1,p}(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $V + C_c^\infty \subseteq V$
u si dice **minimo debole** di $\mathcal{L}$ se
$\exists \delta > 0$ t.c. $\mathcal{L}(u) \leq \mathcal{L}(u+\varphi)$ $\forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$ con $\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty \leq \delta$

<u>Oss</u> se u è un minimo debole di $\mathcal{L}$ allora
$\forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$ si ha che $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c.
$$\mathcal{L}(u) \leq \mathcal{L}(u + \varepsilon\varphi) \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$
Infatti $\|\varepsilon\varphi\|_\infty + \|\varepsilon\varphi'\|_\infty = \varepsilon_0(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty) \leq \delta$ se ε_0 è abbastanza piccolo

<u>Oss</u> Se u è un minimo assoluto di $\mathcal{L}$, cioè
$$\mathcal{L}(u) \leq \mathcal{L}(u+\varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$
allora u è un minimo debole.

> **Teorema: equazione di Eulero-Lagrange**
>
> Sia $L = L(x,y,z)$, $x \in [a,b]$, $y,z \in \mathbb{R}$.
> Supponiamo che $\tilde{\forall} x \in [a,b]$ $\exists \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)$, e
> (i) $L, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}$ sono di Caratheodory (ipotesi di struttura)
> (ii) $\exists C > 0$ $\tilde{\forall} x \in [a,b]$ (ipotesi di crescita)
> $$\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)\right| \leq C(1 + |y|^p + |z|^p)$$
> Consideriamo $\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))\,dx$.
> Sia $u \in W^{1,p}(a,b)$ tale che $\mathcal{L}(u) \in \mathbb{R}$, u minimo debole.
> Allora $\frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \in W^{1,1}(a,b)$ e
> $$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x)).$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$
$$\frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi) - \mathcal{L}(u)) = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b L(x, u(x)+\varepsilon\varphi(x), u'(x)+\varepsilon\varphi'(x)) - L(x,u(x),u'(x))\,dx$$
$$(*)\quad \frac{L(x,u(x)+\varepsilon\varphi(x), u'(x)+\varepsilon\varphi'(x)) - L(x,u(x),u'(x))}{\varepsilon} = \frac{L(x,u+\varepsilon\varphi,u'+\varepsilon\varphi') - L(x,u,u'+\varepsilon\varphi') + \overbrace{L(x,u,u'+\varepsilon\varphi') - L(x,u,u')}^{\in L^1}}{\varepsilon} =$$
$$= \frac{\partial L}{\partial y}(x, u+\theta\varphi, u'+\varepsilon\varphi')\cdot \underbrace{\varphi(x)}_{\in L^\infty} + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'+\tau\varphi')\,\underbrace{\varphi'(x)}_{\in L^\infty} \qquad \text{con} \quad |\theta|, |\tau| < |\varepsilon|$$
$$\left|\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'+\tau\varphi')\right| \overset{(ii)}{\leq} C(1 + |\underbrace{u}_{\in L^1}|^p + |u'+\tau\varphi'|^p) \leq \dots$$

Oss $|a+b|^p \le \begin{cases} |2a|^p & \text{se } |a|\ge|b| \\ |2b|^p & \text{se } |b|\ge|a| \end{cases} \le |2a|^p + |2b|^p = 2^p(|a|^p+|b|^p)$

Quindi $|u'+\tau\varphi'|^p \le 2^p(|u'|^p + |\tau|^p|\varphi'|^p) \le C'(1+|u'|^p)$

$\dots \le C''(1+|u|^p+|u'|^p) \in L^1(a,b)$ stima uniforme in ε

Similmente $\left|\frac{\partial L}{\partial z}(x,u+\theta\varphi,u'+\varepsilon\varphi')\right| \le C'''(1+|u|^p+|u'|^p) \in L^1(a,b)$

Quindi $\mathcal{L}(u)\in\mathbb{R}$ e $\int L(x,u+\varepsilon\varphi,u'+\varepsilon\varphi') - L(x,u,u')dx \in\mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\in\mathbb{R}$

$\frac{\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)-\mathcal{L}(u)}{\varepsilon} = \int_a^b * = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x,u+\theta\varphi,u'+\varepsilon\varphi')\varphi + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'+\tau\varphi')\varphi'\,dx$

e questo tende a $\frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u')\varphi + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\varphi'$

Possiamo applicare convergenza dominata:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)-\mathcal{L}(u)}{\varepsilon} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u')\varphi + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\varphi' = \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

(EL in forma integrale) perché u è un minimo locale

Quindi $\forall\varphi\in C_c^\infty$ $\int_a^b u\varphi + v\varphi' = 0$, cioè $\int_a^b u\varphi = -\int_a^b v\varphi'$

che equivale a $v' = u$, con $u,v\in L^1 \Longrightarrow v\in W^{1,1}$

Quindi $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) \in W^{1,1}(a,b)$ e vale (E-L). $\square$

> **Teorema** Sia $L = L(x,y,z)$, $L\in C^0$, $u\in W^{1,p}(a,b)$, $p>1$, t.c.
> - $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) \in W^{1,1}$
> - $z\longmapsto L(x,y,z)$ convessa e derivabile $\forall x,\forall y$
> - $L(x,y,z) \ge \alpha|z|^p - \varphi(y)$ con $\alpha>0$, $\varphi\in C^0$
>
> Allora $u\in W^{1,\infty}(a,b) \simeq Lip([a,b])$.

DIMOSTRAZIONE

$L(x,y,\cdot)$ convessa $\Longrightarrow L(x,y,0) \ge L(x,y,z) - z\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)$

$\Longrightarrow z\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) \ge L(x,y,z) - L(x,y,0) \ge \alpha|z|^p - \varphi(y) - L(x,y,0)$

Ora per $y=u(x)$, $z=u'(x)$:

$$u'(x)\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) \ge \alpha|u'(x)|^p \overbrace{-\varphi(u(x)) - L(x,u(x),0)}^{C^0([a,b]):\text{ è limitato}} \ge \alpha|u'(x)|^p - C$$

$$\Longrightarrow C + |u'(x)|\,\Big|\underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x))}_{W^{1,1}\subseteq L^\infty}\Big| \ge \alpha|u'(x)|^p$$

Dove $|u'(x)|\ge1$: $|u'(x)|\left(C + \left\|\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x))\right\|_{L^\infty}\right) \ge \alpha|u'(x)|^p$

quindi $|u'(x)|^{p-1} \le C'$

Dove $|u'(x)|<1$, vale a maggior ragione $|u'(x)|\le C'$

$\Longrightarrow |u'(x)|$ è limitata $\Longrightarrow u\in W^{1,\infty}$ $\square$

Teorema Sia $L = L(x,y,z)$, $L \in C^0$, $u \in Lip([a,b])$ t.c.
- $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) \in C^0$
  $z \longmapsto \frac{\partial}{\partial z}L(x,y,z)$ iniettiva $\forall (x,y)$
- $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) \in W^{1,1}$

Allora $u \in C^1([a,b])$

DIMOSTRAZIONE

Rademacher: $u \in Lip \implies u'(x)$ esiste per q.o. x

$\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) = g(x)$ $\tilde{\forall} x$, $g \in C^0([a,b])$

Sia $E = \{x \in [a,b] : \exists u'(x), \frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),u'(x)) = g(x)\}$: $|[a,b] \setminus E| = 0 \implies E$ è denso

<u>Claim</u> $\forall x \in [a,b]$, se $x_k, x_k' \in E$, $x_k \longrightarrow x$, $x_k' \longrightarrow x$, $u'(x_k) \longrightarrow v$, $u'(x_k') \longrightarrow w$
allora $v = w$ e $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),v) = g(x)$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial L}{\partial z}(x_k,u(x_k),u'(x_k)) & = & g(x_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),v) & = & g(x) \end{array}$$

ma anche $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),w) = g(x) \implies v = w$.

Posso definire $v(x)$. Presa $x_k \in E$, $x_k \longrightarrow x$, $u'(x_k)$ è limitata ($u \in Lip$)
$\implies \exists k_j$ t.c. $u'(x_{k_j}) \longrightarrow v$ (non dipende dalla successione scelta)
dunque $v(x) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \in E}} u'(t)$

Ovviamente $v(x) = u'(x)$ se $x \in E \implies v(x) = u'(x)$ $\tilde{\forall} x$
e $\forall x \in [a,b]$ $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),v(x)) = g(x)$

<u>Claim</u> $v \in C^0$

Fissato $x \in [a,b]$, $\forall x_k$ $x_k \longrightarrow x$ devo mostrare che $v(x_k) \longrightarrow v(x)$
v limitata $\implies \exists k_j$ $\exists w$ t.c. $v(x_{k_j}) \longrightarrow w$

$$\begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial z}(x_{k_j},u(x_{k_j}),v(x_{k_j})) = g(x_{k_j}) \\ \downarrow \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),w) = g(x) \end{array}$$

ma anche $\frac{\partial L}{\partial z}(x,u(x),v(x)) = g(x) \implies v(x) = w \implies v \in C^0$

Quindi $u'(x) = v(x)$ $\tilde{\forall} x$ e $v \in C^0$
$\tilde{u}(x) = \int_a^x v(t)dt$, $\tilde{u} \in C^1$ perché $v \in C^0$
$\tilde{u}'(x) = v(x) = u'(x)$ $\tilde{\forall} x \implies u = \tilde{u} + c$ $\tilde{\forall} x \overset{u \in C^0}{\implies} u \in C^1$ $\square$

Teorema Sia $L = L(x,y,z)$, $L \in C^k$, $2 \leq k \leq +\infty$, $u \in C^1$ t.c.
u soddisfa (EL) in senso debole;
• $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$.
Allora $u \in C^k([a,b])$.

DIMOSTRAZIONE

$\underline{k=2}$: $H(x,z) = \overset{C^1}{\frac{\partial L}{\partial z}}(x, \overset{C^1}{u(x)}, z) - \overbrace{\int_a^x \overset{C^1}{\frac{\partial L}{\partial y}}(t, u(t), \overset{C^0}{u'(t)})dt}^{C^1} \quad \in C^1$

$$\frac{d}{dx} H(x, u'(x)) = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) = 0$$

derivata debole

$\Longrightarrow$ $H(x, u'(x))$ è costante q.o., ma è C^0 $\Longrightarrow$ è costante

$(x, u'(x))$ è contenuto in un insieme di livello di H

Vogliamo applicare il Teorema del Dini

$H \in C^1$, $\frac{\partial H}{\partial x}(x,z) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x, u(x), z) + u'(x)\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x, u(x), z) - \frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x))$

$\frac{\partial H}{\partial z}(x,z) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, u(x), z)$

$\frac{\partial H}{\partial z}(x, u'(x)) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x)) > 0$

Quindi, fissato $x_0 \in (a,b)$, c'è un intorno di x_0 in cui la curva $(x, u'(x))$ è un grafico C^1: $\exists! z \in C^1$ t.c. $u'(x) = z(x)$

$\Longrightarrow$ $u' \in C^1$, $H(x, u'(x)) = \text{costante}$ $\Longrightarrow u \in C^2$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, u'(x)) + u''(x)\frac{\partial H}{\partial z}(x, u'(x)) = 0$$

$$\Longrightarrow u''(x) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(x, u'(x))}{\frac{\partial H}{\partial z}(x, u'(x))} = -\frac{\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x, u(x), u'(x)) + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x, u(x), u'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x))}{\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x))}$$

Poi si fa Bootstrap per $k > 2$:

$u \in C^k, L \in C^{k+1} \Longrightarrow u'' \in C^{k-1} \Longrightarrow u \in C^{k+1}$ $\square$

METODO DIRETTO

$\mathcal{L}(u) = \int_I L(x, u(x), u'(x))\,dx$

Cerchiamo $\min\{\mathcal{L}(u) : u \in \mathcal{A}\}$

con $\mathcal{A}$ classe di funzioni con una nozione di convergenza

(1) $u_n \in \mathcal{A}$ successione minimizzante

$\mathcal{L}(u_n) \longrightarrow \inf \mathcal{L}$, in particolare $\mathcal{L}(u_n) \le C \ \forall n$

$\exists u_{n_k} \longrightarrow u \in \mathcal{A}$ (compattezza) scelta di $\mathcal{A}$ + ipotesi su $\mathcal{L}$

(2) $\mathcal{L}(u) \le \liminf_k \mathcal{L}(u_{n_k})$ (semicontinuità) ipotesi su $\mathcal{L}$

(3) u min in $\mathcal{A}$ $\Longrightarrow u \in Lip$, $u \in C^1$ o $u \in C^k$ ipotesi su $\mathcal{L}$

esempi di $\mathcal{A}$: $C^1(I)$, $Lip(I)$, $W^{1,p}(I)$, $AC(I) = W^{1,1}(I)$

con eventuali vincoli o condizioni al bordo

Elementi di analisi funzionale

Def. E spazio di Banach (cioè E spazio vettoriale normato e completo)

E^* spazio duale

$E^* = \{u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineari e continue$\}$

con $\|u\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \le 1} u(x) = \sup_{x \ne 0} \frac{u(x)}{\|x\|_E}$

E^* è uno spazio vettoriale normato

Proposizione E^* è uno spazio di Banach.

DIMOSTRAZIONE

$\{u_n\} \subseteq E^*$ di Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\|u_n - u_m\|_{E^*} \le \varepsilon \ \forall n, m \ge n_\varepsilon$,

cioè $|u_n(x) - u_m(x)| \le \varepsilon \|x\|_E \ \forall n, m \ge n_\varepsilon \ \forall x \in E$

In particolare $u_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} u(x)$

$u(ax+by) = \lim_n u_n(ax+by) = \lim_n a u_n(x) + b u_n(y) = a u(x) + b u(y)$

quindi u è lineare

u_n di Cauchy $\Longrightarrow u_n$ limitata, cioè $|u_n(x)| \le C\|x\|_E \ \forall n, \forall x$

$\Longrightarrow |u(x)| \le C\|x\|_E \ \forall x \Longrightarrow u \in E^*$

$\lim_{m \to +\infty} |u_n(x) - u_m(x)| = |u_n(x) - u(x)| \le \varepsilon \|x\|_E \ \forall n \ge n_\varepsilon \ \forall x$

$\Longrightarrow u_n \longrightarrow u$ in E^*

□

Oss $u \in E^*$: $|u(x) - u(y)| = |u(x-y)| \le \|u\|_{E^*} |x-y|$

$\Longrightarrow u$ è Lipschitz di costante $\|u\|_{E^*}$

Oss $E = \mathbb{R}^n$. $u \in \mathbb{R}^{n*} \Longleftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n : u(x) = \langle v, x \rangle$

$\Longrightarrow \mathbb{R}^{n*} \cong \mathbb{R}^n$

Lo stesso vale in spazi di Hilbert (Teorema di Riesz)

Oss $\dim_{\mathbb{R}} E = +\infty \Longrightarrow \exists u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare non continua

Possiamo munire E di una topologia debole, cioè con meno aperti ma più compatti rispetto alla topologia usuale.

DEF. $\sigma(E,E^*)$ è la topologia meno fine che rende continue le funzioni $u \in E^*$

Una base di intorni di 0 sono gli aperti del tipo

$$\bigcap_{i=1}^{n} u_i^{-1}((-\varepsilon_i,\varepsilon_i)) \quad \text{con } u_i \in E^*, \varepsilon_i > 0$$

V aperto in $\sigma(E,E^*) \Longrightarrow V = \bigcup_{j\in J} (U_j + x_j)$ con $x_j \in E$, U_j come sopra

Lemma $x_n \xrightarrow[n]{} x$ rispetto a $\sigma(E,E^*) \iff u(x_n) \xrightarrow[n]{} u(x)$ $\forall u \in E^*$
(x_n converge debolmente a x).

<u>Oss</u> Se $x_n \longrightarrow x$, allora $x_n \longrightarrow x$; non è vero il viceversa se $\dim E = +\infty$.

<u>Oss</u> Se $\dim E < +\infty$, $\sigma(E,E^*)$ è la topologia forte

<u>esempio</u> $\ell^2 = \{(x_n) : \sum_n x_n^2 < +\infty\}$ $\quad \|x\|_{\ell^2} = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ spazio di Hilbert ($\ell^{2*} \cong \ell^2$)
dove $\langle x,y\rangle = \sum_n x_n y_n$

$e_i = (0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0,\dots)$ base canonica

$e_i \xrightarrow[i]{} 0$ ma $\|e_i\|_{\ell^2} = 1$, quindi $e_i \not\to 0$

<u>esempio</u> $\ell^p = \{(x_n) : \sum_n |x_n|^p < +\infty\}$ $\quad \|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\quad 1 \le p < +\infty$

$\ell^\infty = \{(x_n) : \sup_n |x_n| < +\infty\}$ $\quad \|x\|_{\ell^\infty} = \sup_n |x_n|$

$\ell^{p*} \cong \ell^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

<u>esempio</u> $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile, $\int_\Omega |u|^p < +\infty\}/\sim$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile, $\operatorname{ess\,sup}_x |u(x)| < +\infty\}/\sim$

$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_x |u(x)|$

$L^{p*} \cong L^q$ per $1 \le p < +\infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

DEF. E^{**} è il biduale di E.

Esiste $i : E \longrightarrow E^{**}$ immersione lineare iniettiva

$i(x)(u) = u(x)$ $\quad \forall x \in E, \forall u \in E^*$

$i(E) \subset E^{**}$ è chiuso

Se $i(E) = E^{**}$, E si dice spazio riflessivo.

<u>Oss</u> Se $E = H$ Hilbert, allora E è riflessivo

<u>esempio</u> ℓ^p, L^p sono riflessivi per $1 < p < +\infty$

$\ell^1, L^1, \ell^\infty, L^\infty$ non sono riflessivi

esempio $c_0 = \{(x_n) : x_n \longrightarrow 0\} \subset \ell^\infty$: $c_0^* = \ell^1$, $\ell^{1*} = \ell^\infty$

Def. E di Banach è separabile se esiste $F \subseteq E$ denso e numerabile

esempio c_0, ℓ^p $(p<+\infty)$, $L^p(\Omega)$ $(p<+\infty)$ sono separabili
ℓ^∞, $L^\infty(\Omega)$ non sono separabili

Def. E Banach
$\sigma(E^*, E)$ è la topologia meno fine su E^* che rende continue le funzioni $u \longmapsto u(x)$ $\forall x \in E$.
$\sigma(E^*, E)$ si dice topologia debole*
ed è meno fine di $\sigma(E^*, E^{**})$ poiché $E \cong i(E) < E^{**}$

> **Teorema di Banach-Alaoglu sequenziale**
> E Banach separabile.
> $u_n \in E^*$ con $\|u_n\|_{E^*} \leq C$
> Allora $\exists u_{n_k} \xrightarrow[*]{} u \in E^*$ in $\sigma(E^*, E)$
> cioè $u_{n_k}(x) \xrightarrow[k]{} u(x)$ $\forall x \in E$.

DIMOSTRAZIONE
$\{x_j\} \subseteq E$ denso numerabile : $|u_n(x_j)| \leq \|u_n\|_{E^*} \|x_j\|_E \leq C\|x_j\|_E$ $\forall n$
$\Rightarrow \exists u_{n_k^1}$ ssc t.c. $u_{n_k^1}(x_1) \xrightarrow[k]{} u(x_1) \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists u_{n_k^2}$ ssc t.c. $u_{n_k^2}(x_2) \xrightarrow[k]{} u(x_2) \in \mathbb{R}$
$\vdots$
$\Rightarrow \exists u_{n_k^j}$ ssc t.c. $u_{n_k^j}(x_j) \xrightarrow[k]{} u(x_j)$
Considero la successione $\tilde{u}_k = u_{n_k^k}$
Osserviamo che $\tilde{u}_k(x_j) \xrightarrow[k \to +\infty]{} u(x_j)$ $\forall j$
$|u(x_j) - u(x_\ell)| = \lim_k |u_k(x_j) - u_k(x_j)| \leq C\|x_j - x_\ell\|_E$
$\Rightarrow u$ è C-Lipschitz $\Rightarrow \exists! \tilde{u}. E \longrightarrow \mathbb{R}$ estensione C-Lipschitz di u
Inoltre $\tilde{u}(x) = \lim_k \tilde{u}_k(x)$ $\forall x \in E$
Infatti $|\tilde{u}(x) - \tilde{u}_k(x)| \leq |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x_j)| + |\tilde{u}(x_j) - \tilde{u}_k(x_j)| + |\tilde{u}_k(x_j) - \tilde{u}_k(x)| \leq$
$\leq 2C\|x - x_j\| + |\tilde{u}(x_j) - \tilde{u}_k(x_j)|$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists j$: $|x - x_j| \leq \varepsilon$ ed $\exists k_\varepsilon$ t.c. $|\tilde{u}(x_j) - \tilde{u}_k(x_j)| \leq \varepsilon$ $\forall k \geq k_\varepsilon$
$\Rightarrow |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_k(x)| \leq (2C+1)\varepsilon$ $\forall k \geq k_\varepsilon$
Ne segue che $\tilde{u} \in E^*$ e $\tilde{u}_k \xrightarrow[*]{} \tilde{u}$ in $\sigma(E^*, E)$ $\square$

Oss E separabile, $B_R^{E^*} = \{u \in E^* \mid \|u\|_{E^*} < R\}$
$(B_R^{E^*}, \sigma(E^*, E))$ è metrizzabile
$\Rightarrow$ la compattezza di $\overline{B_R^{E^*}}$ è equivalente alla compattezza sequenziale

Teorema di Banach-Alaoglu E Banach.
Allora $\overline{B_R^{E^*}}$ è compatto per $\sigma(E^*,E)$.

corollario
- ℓ^p e $L^p(\Omega)$ è riflessivo e separabile per $1<p<+\infty$, con $\ell^{p*}=\ell^q$, $L^p(\Omega)^*=L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
  Allora le palle chiuse di ℓ^p e $L^p(\Omega)$ sono sequenzialmente debolmente compatte.
- $\ell^\infty=\ell^{1*}$, $L^\infty=L^{1*}$, ℓ^1 e L^1 sono separabili
  $\Rightarrow$ le palle chiuse di ℓ^∞ e L^∞ sono sequenzialmente debolmente$*$ compatte
- Le palle chiuse di ℓ^1 e L^1 non sono sequenzialmente debolmente compatte

esempio in ℓ^1, la base canonica e_n
$\nexists x\in\ell^1$ t.c. $e_n(y)=y_n \xrightarrow[n]{} \sum x_k y_k \quad \forall y\in\ell^\infty$
ma $y=e_k$: $\forall n>k$ $e_n(y)=0=x_k \Rightarrow x=0$
ma $y=\mathbb{1}$: $e_n(y)=1=\sum x_k=0$ ↯

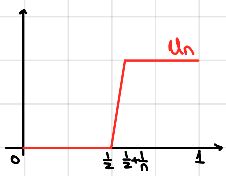
Esistenza in $W^{1,p}$
Sia $1<p<+\infty$.
Sia $u_n\in W^{1,p}$ con $\|u_n\|_{W^{1,p}}\le C$
Per Banach-Alaoglu sequenziale, $\exists u,v\in L^p$ t.c.
$u_{n_k}\rightharpoonup u$, $u_{n_k}'\rightharpoonup v$ debolmente in L^p
$\int v\varphi=\lim\int u_{n_k}'\varphi=-\lim\int u_{n_k}\varphi'=-\int u\varphi' \quad \forall\varphi\in C_c^1(I)$
$\Rightarrow u\in W^{1,p}$ e $u'=v$
Scriviamo $u_{n_k}\rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$

Proposizione Se $u_n\rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$, allora $u_n\xrightarrow{U}u$ e in particolare $u_n\to u$ in L^p.

DIMOSTRAZIONE
$\|u_n\|_{W^{1,p}}\le C \Rightarrow \|u_n\|_{L^\infty}\le C$ e u_n equi-Hölder $\Rightarrow$ equicontinue
$|u_n(x)-u_n(y)|\le\int_x^y|u_n'(x)|\underset{H.}{\le}\|u_n'\|_{L^p}\left(\int_x^y 1^q\right)^{1/q}\le C|x-y|^{1/q}$
la tesi segue dal Teorema di Ascoli-Arzelà □

Oss $\exists u_n\in W^{1,1}$, $\|u_n\|\le C$ t.c. $\lim_n u_n(x)=u(x)$ per q.o. x ma $u\notin W^{1,1}$

esempio



$$u_n(x)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\le x\le\frac12\\ nx-\frac{n}{2} & \text{se } \frac12\le x\le\frac12+\frac1n\\ 1 & \text{se } \frac12+\frac1n\le x\le 1\end{cases}$$

$$u(x)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\le x\le\frac12\\ 1 & \text{se } \frac12<x\le 1\end{cases}$$

Teorema di esistenza

Sia $1<p<+\infty$, $\mathcal{L}(u)=\int_I L(x,u(x),u'(x))dx$ t.c.

(1) L è di Caratheodory

(2) $z\longmapsto L(x,y,z)$ convessa $\forall x,y$

(3) $L(x,y,z)\geq \alpha|z|^p+\beta$ $\quad \alpha>0$ (coercività)

Allora $\exists \min_{\mathcal{A}} \mathcal{L}$ dove $\mathcal{A}=\{u\in W^{1,p}: u-u_0\in W_0^{1,p}, u_0 \text{ fissata}, \mathcal{L}(u_0)<+\infty\}$

Inoltre, se $(y,z)\longmapsto L(x,y,z)$ è strettamente convessa $\tilde{\forall} x$, allora il minimo è unico.

DIMOSTRAZIONE

Sia u_n succ. minimizzante, cioè $\mathcal{L}(u_n)\longrightarrow \inf_{\mathcal{A}}\mathcal{L}\leq \mathcal{L}(u_0)=C$

$\mathcal{L}(u_n)\leq C \implies \int_I \alpha|u_n'|^p+\beta|I|\leq \mathcal{L}(u_n)\leq C$

$\implies \int_I |u_n'|^p\leq C \implies \int |(u_n-u_0)'|^p\leq C+\|u_0'\|_{L^p}=C_2$

$\underset{\text{Poincaré}}{\implies} \|u_n-u_0\|_{L^p}\leq C_3 \implies \|u_n\|_{L^p}\leq C_4 \implies \|u_n\|_{W^{1,p}}\leq C^5$

Per Banach-Alaoglu, $\exists u\in\mathcal{A}$ e n_k t.c. $u_{n_k}\longrightarrow u$ in $W^{1,p}$.

Mostriamo che $\mathcal{L}(u)\leq \liminf \mathcal{L}(u)=\inf_{\mathcal{A}}\mathcal{L}$

Rafforziamo le ipotesi:

(4) $\tilde{\forall} x$ $\quad (y,z)\longmapsto L(x,y,z)$ è convessa, C^1, e si ha

$$|L_y(x,y,z)|+|L_z(x,y,z)|\leq C(1+|y|^{p-1}+|z|^{p-1})$$

$$\mathcal{L}(u_n)=\int_I L(x,u_n,u_n')\geq \int \underbrace{L(x,u,u')}_{\mathcal{L}(u)}+L_y\cdot\underbrace{(u_n-u)}_{\downarrow n\ 0}+L_z\cdot\underbrace{(u_n'-u')}_{\downarrow n\ 0}$$

Se $(y,z)\longmapsto L(x,y,z)$ è strettamente convessa anche $u\longmapsto\mathcal{L}(u)$ è strettamente convessa

$\implies$ il minimo è unico. $\square$

Teorema di esistenza e regolarità

$\mathcal{L}(u)=\int_a^b L(x,u,u')dx$, $\mathcal{A}=\{u\in W^{1,p}: u(a)=\alpha, u(b)=\beta\}$, $1<p<+\infty$.

(1) L continua e C^1 in (y,z)

(2) $|L_y|+|L_z|\leq C(1+|y|^p+|z|^p)$

(3) $z\longmapsto L(x,y,z)$ strettamente convessa

(4) $L(x,y,z)\geq c|z|^p+d$ $\quad$ con $\alpha>0$

Allora esiste un minimo $\bar{u}$ di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$ e $\bar{u}\in C^1$.

<u>Oss</u> Vale (EL): $\frac{d}{dx}\left[L_z(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\right]=L_y(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))$

Teorema di esistenza di Tonelli

$\mathcal{L}(u)=\int_a^b L(x,u,u')dx$, $\mathcal{A}=\{u\in W^{1,1}: u(a)=\alpha, u(b)=\beta\}$

(1) L continua

(2) L differenziabile in z e L_z continua

(3) $z\longmapsto L(x,y,z)$ convessa

(4) $L(x,y,z)\geq \psi(z)$ con ψ superlineare,

cioè $\lim_{z\to\pm\infty}\frac{\psi(z)}{z}=+\infty$

Allora esiste un minimo di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

<u>Oss</u> Non si applica a $\mathcal{L}(u)=\int\sqrt{1+(u')^2}+g(u)$

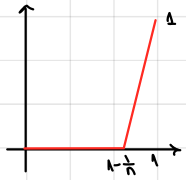
esempio

(1) $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2 + u'^2}$ $\qquad \mathcal{A} = \{u \in W^{1,1} : u(0)=0, u(1)=1\}$

$\mathcal{L}(u) > \int_0^1 |u'| > \left|\int_0^1 u'\right| = 1 \quad \forall u \in \mathcal{A}$

Vediamo che $\inf \mathcal{L} = 1 \implies \nexists$ min

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1-\frac{1}{n}] \\ nx - n + 1 & \text{se } x \in [1-\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



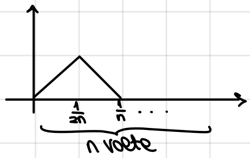
$$\mathcal{L}(u_n) = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{(nx-n+1)^2 + n^2} \le \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{1+n^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

(2) $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 x^2 u'^2$ $\qquad \mathcal{A} = \{u \in W^{1,2} \mid u(0)=1, u(1)=0\}$

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1-\frac{1}{n}) \\ -\frac{\log x}{\log n} & \text{se } x \in [1-\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(u_n) = \int_{1/n}^1 \frac{x^2}{x^2 (\log n)^2} \le \frac{1}{\log(n^2)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$ ma $\mathcal{L}(u) > 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}$

(3) (Bolza) $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 (1-u'^2)^2 + u^2$, $\mathcal{A} = W_0^{1,2}$



$\mathcal{L}(u) > 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}$

$u_n' = \pm 1$, $\|u_n\|_{L^\infty} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$\mathcal{L}(u_n) = \int_0^1 u_n^2 \, dx \le \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$

(4) $\int_0^1 u'^2 + (u-f)^2$ con $f \in L^2$

$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2} : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ $\qquad \exists!$ min di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$

se $f \in C^0 \implies$ il minimo è C^1 e si ha

$\frac{d}{dx}(u') = u - f \implies u \in C^2$ e verifica $u'' = u - f$

(5) (Manià) $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 (u^3 - x)^2 u'^6$ non è coercivo

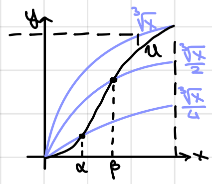
$\mathcal{L}(u) = 0 \iff u = \sqrt[3]{x} \in W^{1,p} \quad \forall p < \frac{3}{2}$

$u' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ $\qquad \int_0^1 |u'|^p \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{2p/3}} dx < +\infty \iff 2p < 3$

Quindi $\exists$ min di $\mathcal{L}$ in $W^{1,p}$ $\forall 1 \le p < \frac{3}{2}$ ed è $u(x) = \sqrt[3]{x} \notin C^1$

Proposizione: Fenomeno di Laurentiev $\quad \exists c > 0$ t.c. $\forall u \in Lip$ con $u(0)=0, u(1)=1$, si ha $\mathcal{L}(u) \ge c > 0$

DIMOSTRAZIONE



$u \in Lip$, $u(0)=0, u(1)=1$

$0 < \alpha < \beta < 1$ t.c. $u(\alpha) = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{4}$, $u(\beta) = \frac{\sqrt[3]{\beta}}{2}$: $\quad \sqrt[3]{x}/4 \le u(x) \le \sqrt[3]{x}/2$ su $[\alpha, \beta]$

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 (u^3 - x)^2 u'^6 \ge \int_\alpha^\beta x^2 \left(\frac{u^3}{x} - 1\right)^2 u'^6 \ge \left(\frac{7}{8}\right)^2 \int_\alpha^\beta x^2 u'^6$$

$x \in [\alpha, \beta]$: $\frac{1}{64} \le \frac{u^3}{x} \le \frac{1}{8}$

$\tilde{u}(y) = u(x)$, $y = x^{3/5}$, $x = y^{5/3}$, $dx = \frac{5}{3} y^{2/3} dy$

$u'(x) = \frac{3}{5} y^{-\frac{2}{3}} \tilde{u}'(y)$

$$\mathcal{L}(u) \ge \left(\frac{7}{8}\right)^2 \int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} y^{10/3} \left(\frac{3}{5}\right)^6 y^{-\frac{12}{3}} \tilde{u}'^6 \, \frac{5}{3} y^{2/3} dy = k \int_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} \tilde{u}'^6 dy \qquad \text{con } k = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

Per Jensen abbiamo:

$$\mathcal{L}(u) \ge k(\beta^{3/5} - \alpha^{3/5}) \fint_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} \tilde{u}'^6 dy \overset{J}{\ge} k(\beta^{3/5} - \alpha^{3/5}) \left(\fint_{\alpha^{3/5}}^{\beta^{3/5}} \tilde{u}'\right)^6 = \frac{k}{(\beta^{3/5} - \alpha^{3/5})^5} (u(\beta) - u(\alpha))^6 =$$

$$= \frac{k}{(\beta^{3/5} - \alpha^{3/5})^5} \left(\frac{\beta^{\frac{1}{3}}}{2} - \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^6 = \frac{k \beta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^6}{\beta^3 \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3/5}\right)^5} = \frac{k}{2^6 \beta} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^6}{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^5} \ge$$

$$\ge \frac{k}{2^6} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^6 \ge \frac{k}{2^{12}} > 0$$

$\square$

semicontinuità e rilassamento

Def. X metrico, $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinuo inferiormente (sci)
se $\forall x_n \to x$ $F(x) \leq \liminf_n F(x_n)$
$F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinuo superiormente (scs)
se $\forall x_n \to x$ $F(x) \geq \limsup_n F(x_n)$

<u>Oss</u> F sci $\iff \{F \leq c\}$ chiuso

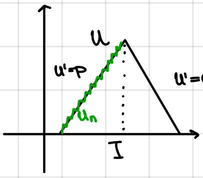
<u>Oss</u> F_i sci $\implies \sup_i F_i$ è sci

Teorema di Weierstraß Se $E \subseteq X$ compatto, F sci, allora esiste $\min_E F$.

Teorema $\mathcal{L}(u) = \int_I L(x, u, u')\,dx : W^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $1 \leq p < +\infty$, L di Carathéodory e $L \geq c$ con $c \in \mathbb{R}$.
Allora $\mathcal{L}$ è sci per la convergenza debole se e solo se $z \longmapsto L(x, y, z)$ convessa $\tilde{\forall} x\ \forall y$.

DIMOSTRAZIONE (traccia)
($\Leftarrow$) Supponiamo $L = L(z)$
Osserviamo che $u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$, $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ e $u_n'(x) \longrightarrow u'(x)$ $\tilde{\forall} x$.
$\mathcal{L}(u) = \int_I \liminf_n L(u_n) \underset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_n \int_I L(u_n) = \liminf_n \mathcal{L}(u_n)$.
In particolare $\{\mathcal{L} \leq M\}$ è chiuso in $W^{1,p}$
L convessa $\implies \{\mathcal{L} \leq M\}$ convesso chiuso $\implies$ debolmente chiuso
$\implies \mathcal{L}$ sci per la convergenza debole.
($\Rightarrow$) Supponiamo $\mathcal{L}$ sci ma non convessa, cioè
$\exists p = \frac{p_1 + p_2}{2}$ t.c. $L(p) > \frac{L(p_1) + L(p_2)}{2}$

$$u_n' = \begin{cases} p_1 & x \in [\frac{2k}{n}, \frac{2k+1}{n}) \\ p_2 & x \in [\frac{2k+1}{2}, \frac{2k+2}{2}) \end{cases}$$



$\mathcal{L}(u) = L(p) + L(q) > \mathcal{L}(u_n) = \frac{1}{2}(L(p_1) + L(p_2)) + L(q)$

Def. X metrico, $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\overline{F}: X \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $\overline{F}(x) = \inf_{x_n \to x} \liminf_n F(x_n)$
si dice rilassato di F.

Proposizione $\overline{F}$ è sci e $\overline{F} = \max\{G \le F : G \text{ sci}\}$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $x \in X$, e sia $x_n \longrightarrow x$ t.c. $\liminf F(x_n) \le \overline{F}(x) + \varepsilon$

Allora $\forall G \le F$ sci, $G(x) \le \liminf_n G(x_n) \le \liminf_n F(x_n) \le \overline{F}(x) + \varepsilon \Longrightarrow G \le \overline{F}$

$\overline{F}$ è sci: $x_n \longrightarrow \overline{x}$, $\tilde{x}_n$ t.c. $d(x_n, \tilde{x}_n) \le \frac{1}{2^n}$ e $F(\tilde{x}_n) \le \overline{F}(x_n) + \varepsilon$

$\tilde{x}_n \longrightarrow \overline{x} \Rightarrow \overline{F}(\overline{x}) \le \liminf F(\tilde{x}_n) \le \liminf \overline{F}(x_n) + \varepsilon$ ◻

Teorema $\mathcal{L}(u) = \int_I L(x,u,u')$, L di Caratheodory, $L \ge c$

Allora $\overline{\mathcal{L}}(u) = \int L^{**}(x,u,u')$, dove L^{**} è il convessificato di $\mathcal{L}$ in z, cioè $\forall x \forall y$ $L^{**}(x,y,z) = \max\{G(z) : G \text{ convessa e } G(\cdot) \le L(x,y,\cdot)\}$.

<u>Oss</u> $L^{**} \le L$ e $L^{**} = L \Leftrightarrow z \longmapsto L(x,y,z)$ convessa

DIMOSTRAZIONE (traccia)

Sia $L = L(z)$ continua, $L \ge c$.

$\tilde{\mathcal{L}} = \int_I L^{**}(u) \le \mathcal{L}$ e $\tilde{\mathcal{L}}$ è sci $\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} \le \overline{\mathcal{L}}$

Data $u \in W^{1,p}$ $\exists u_n \in W^{1,p}$ t.c. $u_n \longrightarrow u$ e

$\mathcal{L}(u_n) = \int L(u_n') \longrightarrow \int L^{**}(u') = \tilde{\mathcal{L}}(u)$

$\overline{\mathcal{L}}(u_n) \le \lim \mathcal{L}(u_n) = \tilde{\mathcal{L}}(u)$

Vediamo come si costruisce u_n:

- posso supporre u lineare a tratti
- posso supporre u lineare, $u' = p$
- $L^{**}(p) = \lambda L(p_1) + (1-\lambda) L(p_2)$ ◻

<u>esempio</u> (Bolza) $\mathcal{L}(u) = \int_I (1-u'^2)^2 + u^2$

$\overline{\mathcal{L}}(u) = \int L^{**}(u) = \int f(u') + u^2$

con $f(z) = \begin{cases} (1-z^2)^2 & \text{se } |z| > 1 \\ 0 & \text{se } |z| \le 1 \end{cases}$

<u>esempio</u> (doppio pozzo)

$\mathcal{L}(u) = \int_I u'^2 + (1-u^2)^2$ $\quad L = L^{**}$, $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$

FUNZIONI BV

<u>Motivazione</u>: Problemi geometrici

$E \subseteq \mathbb{R}^n$: $P(E)$ = misura $(n-1)$-dimensionale di ∂E

lo spazio degli insiemi E non è uno spazio vettoriale

$E \longleftrightarrow \chi_E = \mathbb{1}_E$

u_ε approssimano $\mathbb{1}_E$

$\nabla u_\varepsilon \longrightarrow \nu_E$ normale interna , $\quad V(u_\varepsilon) = \int |\nabla u_\varepsilon| \rightsquigarrow P(E)$

variazione (totale)

$$\int |\nabla u_\varepsilon| = \int \sup_{|v| \le 1} \langle \nabla u_\varepsilon(x), v \rangle \, dx = \sup_{|\varphi| \le 1} \int \langle \nabla u_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle dx = \sup_{|\varphi| \le 1} \int u_\varepsilon \cdot \operatorname{div} \varphi$$

palla unitaria in C^0 (norma uniforme)

norma di un operatore lineare

$\Longrightarrow P(E) = \int |D\chi_E|$

misura (limite debole di ∇u_ε)

Se E è regolare $|D\chi_E|$ = misura di superficie su ∂E

$D\chi_E$ è una misura vettoriale concentrata su ∂E

$D\chi_E = \nu_E(x) \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E$

Def. $V(u;a,b) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| : a \le x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_N \le b \right\}$ ("$= \ell(u;a,b)$")

Ma se u non è continua non è propriamente una lunghezza

Def. $BV = \{ u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid V(u;a,b) < +\infty \}$ $\quad$ (p^{BV}, puntuale)

<u>Oss</u> Ricordiamo che $u \in AC \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |x-y| < \delta \Rightarrow V(u;x,y) < \varepsilon$

<u>esempio</u> $u(x) = |x|$

$V(|x|;a,b) = |b-a|$

<u>esempio</u> $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\qquad V(u;a,b) = 3$ se $a \le 0 \le b$

<u>esempio</u> $u(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

x_k t.c. $\sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = (-1)^k$

$\sum |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \ge \sum |x_{k+1} + x_k| \ge \sum \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = +\infty$

$\Longrightarrow u \in C^0 \setminus BV$

<u>Oss</u> Se $u \in C^1$, $\quad \sum |u(x_{k+1}) - u(x_k)| = \sum |u'(\xi_k)| (x_{k+1} - x_k) \longrightarrow \int |u'(x)| dx$

<u>Oss</u> $0 \le V(u;a,b) = V(u;a,c) + V(u;c,b)$ se $a \le c \le b$ (additività)

<u>Oss</u> $\sum |u(x_{k+1})-u(x_k)| \geq |\sum (u(x_{k+1})-u(x_k))| \geq |u(b)-u(a)|$

$\Longrightarrow |u(b)-u(a)| \leq V(u;a,b)$

Quindi $u \in BV \Longrightarrow |u(x)-u(a)| \leq V(u;a,x) \leq V(u;a,b) < +\infty$

$\Longrightarrow u$ limitata

cioè $BV(a,b) \subseteq L^\infty(a,b)$

Teorema Se $u \in BV(a,b)$, allora u è differenza di due funzioni crescenti.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo $v(x) = V(u;a,x)$ funzione crescente:

se $x_1 < x_2$ $v(x_1) \leq v(x_2)$ $(v(x_2)-v(x_1) = V(u;x_1,x_2))$

$v(x_2)-v(x_1) \geq |u(x_2)-u(x_1)| \geq \begin{cases} u(x_2)-u(x_1) \\ u(x_1)-u(x_2) \end{cases}$

$(v(x_2)-u(x_2))-(v(x_1)-u(x_1)) = (v(x_2)-v(x_1))-(u(x_2)-u(x_1)) \geq 0$

$(v(x_2)+u(x_2))-(v(x_1)+u(x_1)) = (v(x_2)-v(x_1))-(u(x_1)-u(x_2)) \geq 0$

$\Longrightarrow v-u$ e $v+u$ sono crescenti

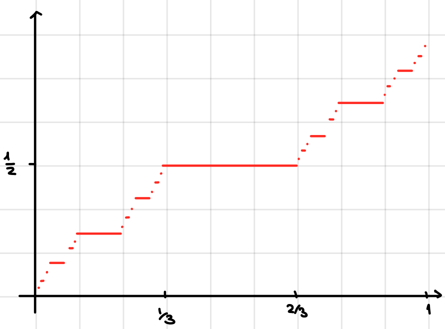
Quindi $u = \frac{1}{2}((v+u)-(v-u))$ $\square$

<u>Oss</u> $u: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente,

allora $\#\{x \in [a,b] \mid u \text{ non è continua in } x\} \leq \aleph_0$

corollario $u \in BV$ allora u ha una quantità numerabile di discontinuità, e sono discontinuità a salto.

<u>esempio</u> (Cantor-Vitali)



u crescente, continua, $u(0)=0$, $u(1)=1$

$V(u;0,1) = u(1)-u(0) = 1$

ma è derivabile q.o. con $u'=0$,

non ha salti: $\int |u'| = 0$

u avrà una derivata puntuale u',

delle δ di Dirac sui salti $D_s u$, e qualcos'altro $D_c u$ (parte cantoriana)

con $D_s u$, $D_c u$ misure

corollario Data $u \in BV$, poniamo $\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x^-) & \text{se } x > a \\ u(a^+) & \text{se } x = a \end{cases}$.

Allora $\tilde{u}$ è continua a sinistra e $\tilde{u}(x) = u(x)$ $\tilde{\forall} x$

$V(\tilde{u})$ è definita q.o.

Def. Una misura di Borel μ a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione σ-additiva definita sui boreliani.

esempio
(1) $\mathcal{L}$ misura di Lebesgue su (a,b)
(2) δ_{x_0} delta di Dirac
(3) C insieme di Cantor : $C = \frac{C}{3} \cup \left(\frac{C}{3}+\frac{2}{3}\right)$
C ha "dimensione" frazionaria δ : $\mathcal{H}^\delta(\lambda C) = \lambda^\delta \mathcal{H}^\delta(C)$
quindi $\mathcal{H}^\delta(C) = \frac{\mathcal{H}^\delta(C)}{3^\delta} + \frac{\mathcal{H}^\delta(C)}{3^\delta} \Rightarrow \delta = \log_3 2$
$\mu(A) = \mathcal{H}^\delta(C \cap A)$
(4) μ_1, μ_2 misure finite positive, allora $\mu = \mu_1 - \mu_2$ è una misura con segno.

Denotiamo con $\mathcal{M}(a,b)$ l'insieme delle misure di Borel $\mu : \mathcal{B}(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\mathcal{M}(a,b)$ è uno spazio vettoriale;
diventa uno spazio di Banach se scelgo come norma la variazione totale.

Def. La variazione $|\mu| \in \mathcal{M}(X)$ è una misura definita come
$$|\mu|(A) = \sup\left\{ \sum_k |\mu(A_k)| \text{ con } A_k \text{ disgiunti}, A_k \subseteq A \right\}$$
La variazione totale di μ è
$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = |\mu|(X)$$

$\mathcal{M}(a,b)$ è lo spazio duale di $C_0([a,b])$
Ogni $L : C_0([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare continuo si scrive
nella forma $L_\mu(\varphi) = \int_a^b \varphi \, d\mu$ con $\mu \in \mathcal{M}(a,b)$
$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} L_\mu(\varphi) = \sup\left\{ \int_a^b \varphi \, d\mu : \varphi \in C_0(a,b), |\varphi| \leq 1 \right\}$$

Su $\mathcal{M}(a,b)$ c'è quindi una topologia debole *
$\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ se $L_{\mu_n}(\varphi) \longrightarrow L_\mu(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0([a,b])$
cioè $\int_a^b \varphi \, d\mu_n \longrightarrow \int_a^b \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0([a,b])$

Teorema di Banach-Alaoglu	Se μ_k è limitata in $\mathcal{M}(a,b)$, allora $\exists \mu \in \mathcal{M}(a,b)$ e $\exists k_j$ t.c. $\mu_{k_j} \xrightarrow{*} \mu$. Inoltre $\|\mu\|_{\mathcal{M}} \leq \liminf \|\mu_n\|_{\mathcal{M}}$.

esempio $\mu_k = \delta_{\frac{1}{k}} \qquad \mu_k \xrightarrow{*} \delta_0$
infatti $\int \varphi \, d\mu_k = \varphi\left(\frac{1}{k}\right) \longrightarrow \varphi(0) = \int \varphi \, d\delta_0$
ma $\|\delta_{\frac{1}{k}} - \delta_{\frac{1}{k+1}}\| = 2$, quindi μ_k non converge forte.

Def. Siano $\mu, \nu \in \mathcal{M}(a,b)$, $\nu \geq 0$.
μ è assolutamente continua rispetto a ν, $\mu \ll \nu$, se
$$\nu(A) = 0 \implies |\mu|(A) = 0$$
μ è singolare rispetto a ν se esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che
$$\nu(B) = 0 \quad e \quad |\mu|(X \setminus B) = 0$$

Se $u \in L^1_\nu(X)$, $u\nu$ è la misura:
$$u\nu(B) = \int_B u \, d\nu$$
Vale sempre $u\nu \ll \nu$

> **Teorema** (i) Data $\mu \in \mathcal{M}(a,b)$, posto $u(x) = \mu((a,x)) = \int_{(a,x)} dx$,
> si ha $u \in BV(a,b)$, $u(a) = u(a^+) = 0$, $u(x) = u(x^-)$ $\forall x \in (a,b]$
> e $V(u;a,x) = V(u;a,x^-) \leq |\mu|((a,x))$.
> (ii) Viceversa, se $u \in BV(a,b)$, $\exists! \, \mu \in \mathcal{M}(a,b)$ tale che
> $u(x) = u(a^+) + \mu((a,x))$ e inoltre $V(u;a,x^-) = |\mu|((a,x))$.

DIMOSTRAZIONE

(i) <u>Passo 1</u> supponiamo $\mu \geq 0$. Posto $u(x) = \mu((a,x))$, si ha
$u(a) = u(a^+)$ e $u(x) = u(x^-)$ $\forall x \in (a,b]$
$\mu \geq 0 \implies u$ crescente $\implies V(u,a,x) = u(x)$
$V(u;a,b) = u(b) = \mu((a,b)) < +\infty \implies u \in BV(a,b)$.

<u>Passo 2</u> data $\mu \in \mathcal{M}(a,b)$ qualunque, $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ con $\mu^+, \mu^- \geq 0$.
Quindi posto $u(x) = \mu((a,x)) = \mu^+((a,x)) - \mu^-((a,x)) =: u^+(x) - u^-(x)$
$u^+, u^- \in BV$ crescenti $\implies u \in BV$
$u^\pm(a) = u^\pm(a^+) = 0$, $u^\pm(x) = u^\pm(x^-) \implies u(a) = u(a^+) = 0$, $u(x) = u(x^-)$
Vogliamo mostrare che $V(u;a,x) \leq |\mu|(a,x)$.
$$\sum_k |u(x_{k+1}) - u(x_k)| = \sum_k |\mu(a,x_{k+1}) - \mu(a,x_k)| = \sum_k |\mu([x_k, x_{k+1}))| \leq$$
$$\leq \sum_k |\mu|([x_k, x_{k+1})) = |\mu|(\bigcup_k [x_k, x_{k+1})) = |\mu|(a,x).$$

(ii) Sia $u \in BV((a,b))$

<u>Passo 1</u> supponiamo $u(a) = u(a^+) = 0$, $u(x) = u(x^-)$ e u crescente.
Per $A \in \mathcal{B}(a,b)$, definiamo $\mu(A) = |\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A, y \in [u(x^-), u(x^+)]\}| : \mu \geq 0$.
Allora $\mu((a,x)) = u(x^-) - u(a^+) = u(x)$ (u crescente)
$$V(u;a,x) = V(u;a,x^-) = u(x) = \mu((a,x)) \underset{\mu \geq 0}{=} |\mu|(a,x).$$

<u>Passo 2</u> supponiamo solo $u(a) = u(a^+) = 0$, $u(x) = u(x^-)$ con $u \in BV(a,b)$.
Sappiamo che $u = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 crescenti, $u_{1,2}(a) = u_{1,2}(a^-)$, $u_{1,2}(x) = u_{1,2}(x^-)$
e $V(u;a,x) = u_1(x) + u_2(x)$.
Per il passo 1, esistono $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ tali che $u_{1,2}(x) = \mu_{1,2}(a,x)$
$$u(x) = u_1(x) - u_2(x) = \mu_1(a,x) - \mu_2(a,x) \underset{\mu := \mu_1 - \mu_2}{=} \mu(a,x)$$
$$v(x) = V(u;a,x) = u_1(x) + u_2(x) = \mu_1(a,x) + \mu_2(a,x) \underset{\lambda := \mu_1 + \mu_2}{=} \lambda(a,x)$$

Dunque $|\mu(E)| \leq \lambda(E)$ $\forall E \in \mathcal{B}(a,b) \implies |\mu| \leq \lambda$

Ma per (i), $|\mu|(a,x) \geq V(u;a,x) = \lambda(a,x)$

$\Longrightarrow |\mu|([\alpha,\beta)) \geq \lambda([\alpha,\beta)) \quad \forall \alpha,\beta \in (a,b) \quad \Longrightarrow |\mu| \geq \lambda$

$\Longrightarrow |\mu| = \lambda$ con $\mu_1 = \mu^+$ e $\mu_2 = \mu^-$

Quindi $u(x) = \mu(a,x)$, $V(u;a,x) = |\mu|(a,x)$.

<u>Passo 3</u> Sia $u \in BV(a,b)$ qualunque.

Pongo $\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = a \\ u(x^-) - u(a^+) & \text{se } x \in (a,b] \end{cases}$

$\tilde{u}$ soddisfa le ipotesi del Passo 2.

La misura μ di $\tilde{u}$ va bene anche per u.

<u>UNICITA'</u> se $u(x) = \mu(a,x) = \nu(a,x)$, allora μ e ν coincidono sugli intervalli $\Longrightarrow \mu = \nu$. $\square$

DEF. $\mathrm{BV}(a,b) = BV(a,b)/\sim$

dove $u \sim v$ se $u(x) = v(x)$ $\tilde{\forall} x \in (a,b)$, ovvero $\begin{cases} u(a^+) = v(a^+) \\ u(x^-) = v(x^-) \ \forall x \in (a,b] \end{cases}$

$V(u;a,b)$ è ben definito su BV se ignoro il valore di u nei punti di discontinuità.

$\mathrm{BV}(a,b) \subseteq L^\infty(a,b)$ perché $v \in BV$ è limitata.

<u>Oss</u> $u \in \mathrm{BV} \Longleftrightarrow \exists \mu \in \mathcal{M}(a,b)$ t.c. $u(x^-) = u(a^+) + \mu(a,x)$

Inoltre $V(u;a^+,x^-) = |\mu|(a,x)$

Dunque u è continua in $x_0 \Longleftrightarrow |\mu|(\{x_0\}) = 0$

poiché $|u(x_0^+) - u(x_0^-)| = |\mu|(\{x_0\})$

Ricordando che $u \in W^{1,1} \Longleftrightarrow \exists v \in L^1$ t.c. $u(x) = \int_a^x v$

$AC(a,b) \simeq W^{1,1}(a,b) \subseteq \mathrm{BV}(a,b)$, $u \in W^{1,1} \Rightarrow u$ continua

Inoltre μ rappresenta la "derivata distribuzionale" di $u \in \mathrm{BV}$, $u(x) = \mu(a,x)$.

$\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b) \quad \int_a^b u\varphi' = \int_a^b \mu(a,x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b \int_{(a,x)} d\mu(y)\,\varphi'(x)\,dx =$

$= \int_a^b \int_y^b \varphi'(x)\,dx\,d\mu(y) = -\int_a^b \varphi(y)\,d\mu(y)$

$\mu := Du \in \mathcal{M}(a,b)$ è la derivata distribuzionale di u.

$BV(a,b) = \{u \in L^1(a,b) : u' \in \mathcal{M}(a,b)\}/\sim$, con $u \sim v$ se $u(x) = v(x)$ $\tilde{\forall} x$

Norma su BV:

$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + \underbrace{\|u'\|_{\mathcal{M}}}_{\text{variazione totale}}$

<u>Oss</u> $W^{1,1} \subseteq BV$: $u' \in L^1$, cioè è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}$

$\|u\|_{W^{1,1}} = \|u\|_{BV}$

<u>Oss</u> (Radon-Nikodyn) $u \in BV \Rightarrow u' = f\,dx + D^s u$, $f \in L^1(a,b)$

con $D^s u \perp \mathcal{L}$, cioè $\exists E \subseteq (a,b)$, $|E| = 0$ t.c. $|D^s u|((a,b) \setminus E) = 0$

$D^s u$ parte singolare di u' :

$D^s u = \underbrace{\sum \alpha_j \delta_{x_j}}_{\text{parte di salto}} + \underbrace{D^c u}_{\text{parte cantoriana}}$ con $D^c u(\{x\}) = 0$ $\forall x$

> **Proposizione** BV è uno spazio di Banach.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\{u_n\} \subseteq BV$ di Cauchy.

Allora $u_n \longrightarrow u$ in L^1 e $u_n' \longrightarrow \mu$ in $\mathcal{M}$

$\forall \varphi \in C_c^1(a,b)$: $\int_a^b u\varphi' = \lim_n \int_a^b u_n \varphi' = -\lim_n \int_a^b \varphi \, du_n' = -\int_a^b \varphi \, d\mu$

Quindi $u' = \mu$ e $u_n \longrightarrow u$ in BV. □

Def. $u_n \longrightarrow u$ in BV se $u_n \longrightarrow u$ in L^1 e $u_n' \xrightarrow{*} u'$ in $\mathcal{M}$

<u>Oss</u> $u_n \xrightarrow[BV]{} u \iff u_n \xrightarrow[L^1]{} u$ e $\|u_n'\|_{\mathcal{M}} \leq C$ e $\|u'\|_{\mathcal{M}} \leq \liminf_n \|u_n'\|_{\mathcal{M}}$

<u>Oss</u> $u \in BV \Rightarrow \underset{x<y}{|u(x^+) - u(y^-)|} \leq \int_x^y |u'| \leq \|u'\|_{\mathcal{M}} \Rightarrow \|u\|_{L^\infty} \leq \left|\int_a^b u\right| + \|u'\|_{\mathcal{M}}$

> **Teorema** Siano $u_n \in BV$, $\|u_n\|_{BV} \leq C$
> Allora $\exists u \in BV$ t.c. $u_{n_k} \xrightarrow[BV]{} u$.

DIMOSTRAZIONE

$\|u_n'\|_{\mathcal{M}} \leq C \Rightarrow \exists \mu \in \mathcal{M}$ e n_k t.c. $u_{n_k}' \xrightarrow{*} \mu$ in $\mathcal{M}$.

Sia $x_0 \in (a,b)$ t.c. $u_n'(\{x_0\}) = 0$ e $\mu(\{x_0\}) = 0$ $\forall n$

$$u_n(x) = \begin{cases} u_n(x_0) + \int_{x_0}^x du_n' & \tilde{\forall} x > x_0 \\ u_n(x_0) - \int_x^{x_0} du_n' & \tilde{\forall} x < x_0 \end{cases}$$

$\|u_n(x_0)\| \leq C' \Rightarrow$ Posso supporre $u_{n_k}(x_0) \xrightarrow[k]{} c$

$$u(x) = \begin{cases} c + \int_{x_0}^x d\mu & x > x_0 \\ c - \int_x^{x_0} d\mu & x < x_0 \end{cases}$$

$u \in BV$ con $u' = \mu$, $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ $\tilde{\forall} x$ $\Rightarrow u_{n_k} \longrightarrow u$ in L^1 $\Rightarrow u_{n_k} \xrightarrow[BV]{} u$ □

Esistenza in BV

$L(x,z) : (a,b)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sci, $z \longmapsto L(x,z)$ convessa $\forall x$

$L^\infty(x,z) = \lim_{t\to+\infty} \frac{L(x,z_0+tz)}{t} : (a,b)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (funzione recessione)

<u>Oss</u> $L^\infty(x,z)$ non dipende da z_0,

$z \longmapsto L^\infty(x,z)$ convessa e positivamente 1-omogenea: $L^\infty(x,tz) = tL^\infty(x,z)$ per $t>0$.

<u>esempio</u> $L(z) = \sqrt{1+z^2}$, $L^\infty(z) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2z^2}}{t} = |z|$

Teorema $L(x,z)$ sci, $z \longmapsto L(x,z)$ convessa $\forall x$ (semicontinuità)
$L(x,z) \geq \alpha|z|$, con $\alpha>0$, $\forall x$ (coercività)
Allora $\exists$ minimo in BV di $\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x,f)\,dx + \int_a^b L^\infty(x,g)\,d|D^s u|$,
dove $u' = f\,dx + D^s u$, $D^s u = g|D^s u|$,
$g \in L^1((a,b), |D^s u|)$, $|g| = 1$ $|D^s u|$-q.o