Fisica I

Corso di Bombaci I., Logoteta D., Messineo A. M.

Simone Saccani

A.A. 2022-2023

1 Grandezze fisiche e loro misurazione

Definizione 1.1 (Grandezza fisica)**.** Una gradezza fisica descrive in maniera quantitativa una proprietà di un sistema fisico. La grandezza deve essere fornita in maniera operativa, ossia fornendo una procedura e uno strumento per misurarla.
Data una grandezza fisica A, bisogna scegliere un'unità di misura u: $A = A_u u$.
Il campione dell'unità di misura deve essere: inalterabile e riproducibile con elevata precisione.

Esempio. Lunghezza, massa, tempo e velocità sono grandezze fisiche usate in Meccanica.

Definizione 1.2 (Grandezze fondamentali)**.** Un insieme di grandezze fondamentali è un insieme di grandezze tra loro indipendenti e capaci di rappresentare un sistema di grandezze completo. Le altre grandezze del sistema sono dette grandezze derivate.

Le grandezze fondamentali in Meccanica, e relative unità di misura SI (Sistema Internazionale di unità di misura, anche noto come MKS), sono:

Grandezze fondamentali della Meccanica		
Grandezza	Unità di misura	Simbolo
Lunghezza	Metro	m
Massa	Chilogrammo	kg
Tempo	Secondo	s

Il campione della lunghezza è stato più volte ridefinito:

- (1791, dall'Assemblea Nazionale Francese), 1 m $\equiv \frac{1}{10^7}$ della distanza polo-equatore lungo la meridiana che passa per Parigi;
- (1899) 1 m $\equiv$ distanza tra due sottili linee incise alle estremità di una barra in platino-iridio a $0°C$ ($\frac{\Delta L}{L} \sim 10^{-7}$);
- (1960) 1 m $\equiv$ la lunghezza pari a 1650763.73 volte la lunghezza d'onda λ_{Kr} nel vuoto della radiazione corrispondente alla transizione fra due livelli atomici ($2p^{10}$ e $5d^5$) dell'atomo di kripton-86, ^{86}Kr;
- (1983) 1 m $\equiv$ distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $\frac{1}{299792458}$ secondi; ciò equivale a porre $c \equiv 299792458$ m/s.

Il campione della massa è:

- 1 kg $\equiv$ massa del campione di platino-iridio a Sèvres (Parigi);
- spesso in fisica nucleare, si utilizza 1 u.m.a. $\equiv \frac{M_a(^{12}C)}{12} = 1.660 \cdot 10^{-27}$ kg.

Il campione del tempo è:

- in origine è stato posto 1 s $\equiv \frac{1}{86400}$ della durata del giorno solare medio; tuttavia il periodo di rotazione della Terra non è costante a causa delle forze di marea ($\dot{P} \sim \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1.7 \cdot 10^{-3}}{100yr}$);

- (1967) 1 s $\equiv (\nu(^{133}Cs))^{-1}$, dove $\nu(^{133}Cs) = 9.192631770$ Hz è la frequenza di una specifica transizione atomica del cesio-133.

Le grandezze fisiche si dividono in: scalari, vettoriali, tensoriali.

Definizione 1.3 (Grandezza scalare)**.** Una grandezza scalare è una grandezza definita unicamente da un numero del campo $\mathbb{K}$.

Esempio. Massa, temperatura e pressione sono grandezze scalari.

Definizione 1.4 (Grandezza vettoriale)**.** Una grandezza vettoriale è una grandezza descritta da un vettore $\vec{v}$, ossia :

(i) modulo o intensità $v \equiv |\vec{v}| \geq 0$;
(ii) direzione nello spazio;
(iii) verso.

Esempio. Lo spostamento $\vec{s}$, la velocità $\vec{v}$ e la forza $\vec{F}$ sono grandezze vettoriali.

Definizione 1.5 (Spazio vettoriale)**.** Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme con una somma $+ : V \times V \to V$ $(\vec{r} = \vec{a} + \vec{b})$ e un prodotto per scalare $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V(\vec{b} = k\vec{a})$, tale che:

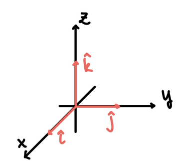
SV1 $\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
SV2 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
SV3 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
SV4 $\exists - \vec{a} : \vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$;
SV5 $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}, (k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$;
SV6 $k_1(k_2\vec{a}) = (k_1k_2)\vec{a}$;
SV7 $\exists 1 \in \mathbb{K} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$.

Definizione 1.6 (Vettori linearmente indipendenti)**.** Dato un insieme di n vettori $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, essi si dicono linearmente indipendenti se:

$$c_1\vec{a}_1 + ... + c_n\vec{a}_n = \vec{0} \implies c_1 = ... = c_n = 0$$

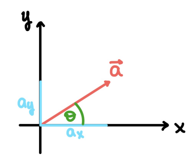
Poi si ha: $\vec{a} = a\hat{a}$, dove $a = |\vec{a}| \geq 0, a = \frac{a}{u_a}u_a$ è il modulo di $\vec{a}$ e $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}, |\hat{a}| = 1$ è il versore di $\vec{a}$.

1.1 Coordinate



In uno spazio di dimensione 3, si possono definire le componenti di un vettore $\vec{a}$ rispetto a un sistema di coordinate: $\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$.

In particolare, nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si può scegliere un sistema di coordinate destrorso (simmetrico per parità), determinato dai versori ortogonali $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, corrispondenti ai tre assi cartesiani. Quindi in un sistema di coordinate cartesiane si ha: $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ e $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
In forma vettoriale si può scrivere : $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$.



Dato un vettore nel piano $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$, esso può essere definito anche mediante le sue coordinate polari: $\vec{a} \equiv (a, \theta)$, con

$$\begin{cases} a_x = a\cos\theta \\ a_y = a\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \end{cases}$$

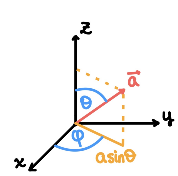
Dato un vettore nello spazio $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$, esso può essere anche definito mediante le sue coordinate sferiche: $\vec{a} \equiv (a, \theta, \varphi)$, con

$$\begin{cases} a_x = a\sin\theta\cos\varphi \\ a_y = a\sin\theta\sin\varphi \\ a_z = a\cos\theta \end{cases}$$

dove θ è l'angolo polare, φ è l'angolo azimutale.

1.2 Operazioni con i vettori

1.2.1 Somma di vettori



Dati due vettori $\vec{a}, \vec{b}$, il vettore somma $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ si può ottenere dal punto di vista geometrico con la regola del parallelogramma. La differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ può invece essere interpretata come $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, dove $-\vec{b}$ è il vettore che ha stesso modulo e direzione di $\vec{b}$, ma verso opposto.
Se $\vec{a}, \vec{b}$ sono espressi in coordinate $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$, si ha: $\vec{r} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k}$.

1.2.2 Prodotto per scalare

Dato un vettore $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$, il prodotto per scalare $\vec{b} = k\vec{a} = ka_x\hat{\imath} + ka_y\hat{\jmath} + ka_z\hat{k}$ è un vettore che ha modulo $b = |k|a$, stessa direzione di $\vec{a}$ e verso determinato dal segno di k: $\hat{b} = \frac{\vec{b}}{b} = \frac{k}{|k|}\hat{a}$.

1.2.3 Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}, \vec{b}$, tra i quali vi è un angolo θ, il loro prodotto scalare è:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$
In coordinate cartesiane $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$, si ha:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
poiché $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ e $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$.
Inoltre se $\vec{a} = \vec{b}$: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$.
Ponendo $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, si può ricavare il teorema dei coseni: $\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.
Si ricava anche: $a_x = \vec{a} \cdot \hat{\imath}, a_y = \vec{a} \cdot \hat{\jmath}, a_z = \vec{a} \cdot \hat{k}$.

Proprietà:
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

1.2.4 Prodotto vettoriale

Dati due vettori $\vec{a}, \vec{b}$, tra i quali vi è un angolo θ, il loro prodotto vettoriale è il vettore $\vec{a} \times \vec{b}$, con:
- modulo $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\theta$ con $0 \leq \theta \leq \pi$ (ossia $\sin\theta \geq 0$);
- direzione perpendicolare al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
- verso dato dalla regola della mano destra.

In coordinate cartesiane, dati $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$, si ha:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
poiché $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$ e $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$.

Proprietà:
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$;
- $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} // \vec{b}$;
- il modulo di $\vec{a} \times \vec{b}$ è l'area del parallelogramma che ha come lati $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Si può definire il triplo prodotto vettoriale:
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

Si può infine definire il triplo prodotto misto:
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$
Si ottiene che:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Geometricamente, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ è il volume del parallelepipedo di spigoli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2 Cinematica

Definizione 2.1 (Punto materiale)**.** L'approssimazione del punto materiale è l'approssimazione di un corpo di massa m, di cui vengono ignorate le dimensioni fisiche.

Definizione 2.2 (Sistema di riferimento, posizione, traiettoria, legge oraria)**.** Un sistema di riferimento S è una quadrupla $S \equiv (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Dato un punto P, si definiscono:

- $\vec{r} = \vec{OP}$ il vettore posizione del punto P;
- γ la traiettoria del punto P;
- $\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ la legge oraria del punto P.

Definizione 2.3 (Spostamento)**.** Dato un punto P e i vettori posizione $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$, si definisce il vettore spostamento di P:

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Definizione 2.4 (Velocità media)**.** La velocità media del punto materiale nell'intervallo di tempo Δt è:

$$\vec{v}_m(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Quindi $[v_m] = \frac{lunghezza}{tempo}$. Nel SI, v è misurata in m/s.

Definizione 2.5 (Velocità istantanea)**.** La velocità istantanea del punto materiale è: $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ ossia

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

La velocità istantanea è sempre tangente alla traiettoria γ.
In cordinate cartesiane si ha: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$. Perciò: $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$.

Definizione 2.6 (Ascissa curvilinea)**.** Data una curva orientata γ e fissata un'origine Ω, l'ascissa curvilinea di $P \in \gamma$ è $s \equiv \overset{\frown}{\Omega P}$.

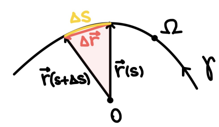
Da cui la traiettoria γ: $\vec{r} = \vec{r}(s) = \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$ e la legge oraria s=s(t).

Definizione 2.7 (Velocità scalare)**.** La velocità scalare di un punto materiale è: $v_s(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ ossia

$$v_s(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Dalla definizione, $v_s > 0$ se il punto si muove nel verso in cui è stata orientata γ; $v_s < 0$ se il punto si muove nel verso opposto rispetto al verso in cui è stata orientata γ.

Perciò $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$ e quindi $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds(t)} \cdot \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} v_s(t)$. Ponendo $\hat{\tau}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds(t)}$, si ha $\vec{v}(t) = v_s(t)\hat{\tau}(t)$. Quindi $\vec{v}//\hat{\tau}$ e $\hat{\tau}$ è tangente a γ. Geometricamente, si vede che il modulo di $\hat{\tau}$ è: $|\hat{\tau}| = |\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}| = 1$. Si conclude che $\hat{\tau}$ è un versore tangente alla curva γ. Quindi $v_s = \pm v$, dove il $+$ è dato se $\hat{v} = \hat{\tau}$, il $-$ se $\hat{v} = -\hat{\tau}$.



Definizione 2.8 (Accelerazione istantanea)**.** L'accelerazione istantanea del punto materiale è: $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$ ossia

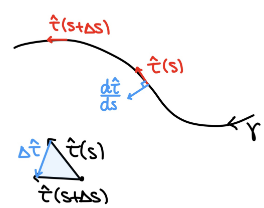
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Definizione 2.9 (Accelerazione scalare)**.** L'accelerazione scalare del punto materiale è:

$$a_s(t) = \frac{dv_s(t)}{dt}$$

In coordinate cartesiane: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}) = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$. Dato che $\vec{v}(t) = v_s(t)\hat{\tau}(t)$, possiamo riscrivere $\vec{a}$: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s(t)\hat{\tau}(t)) = \frac{dv_s(t)}{dt}\hat{\tau}(t) + v_s(t)\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = a_s\hat{\tau}(t) + v_s^2(t)\frac{d\hat{\tau}(t)}{ds}$, dove nell'ultimo passaggio si è usato $\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = \frac{d\hat{\tau}(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = v_s\frac{d\hat{\tau}(t)}{ds}$.

Supponiamo che γ giaccia su un piano. Allora dalla definizione $\frac{d\hat{\tau}(t)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\hat{\tau}(s+\Delta s) - \hat{\tau}(s)}{\Delta s}$, si deduce che $\frac{d\hat{\tau}(t)}{ds}$ è perpendicolare alla curva γ. Questo in realtà può essere ricavato anche da: $\hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = 1 \implies \frac{d}{ds}(\hat{\tau} \cdot \hat{\tau}) = 0 \implies 2\frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \hat{\tau} = 0 \implies \frac{d\hat{\tau}}{ds} \perp \hat{\tau}$. Possiamo quindi porre $|\frac{d\hat{\tau}}{ds}| = \frac{1}{\rho}\hat{n}$, dove $\hat{n}$, con $|\hat{n}| = 1$, è un versore perpendicolare a γ (nel semipiano localmente convesso) e ρ il raggio di curvatura locale, ossia il raggio della circonferenza tangente a γ in quel punto. Si dimostra che queste considerazioni valgono anche nello spazio: dato un punto $P \in \gamma$, è sempre possibile individuare il suo piano osculatore e la sfera a esso tangente di raggio ρ.



Quindi possiamo scrivere:

$$\vec{a} = a_s\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \tag{1}$$

dove $a_s\hat{\tau}$ è l'accelerazione tangenziale, e $\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$ è l'accelerazione centripeta.

2.1 Moto rettilineo uniforme

Definizione 2.10 (Moto rettilinea uniforme)**.** Il moto rettilineo uniforme è un moto in cui il vettore velocita $\vec{v}(t)$ è costante in modulo, direzione e verso: $\vec{v}(t) = \vec{v}$.

Equivalentemente, poiché $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$, possiamo scrivere $v_x = cost, v_y = cost, v_z = cost$.
Considerando la componente x abbiamo:
$v_x = \frac{dx}{dt} \implies dx = v_x dt \implies \int_{x_0}^{x} dx' = \int_{t_0}^{t} v_x dt' \overset{t_0=0, x_0=x(0)}{\implies} x(t) = x_0 + v_x t$.
Le equazioni sono analoghe per le altre componenti.
Si ottengono così le legge orarie del moto:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases} \iff \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \tag{2}$$

2.2 Moto uniformemente accelerato

Definizione 2.11 (Moto uniformemente accelerato)**.** Il moto rettilineo uniformemente accelerato è un moto in cui il vettore accelerazione $\vec{a}(t)$ è costante in modulo, direzione e verso: $\vec{a}(t) = \vec{a}$.

Equivalentemente, poiché $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{k}$, possiamo scrivere $a_x = cost, a_y = cost, a_z = cost$.
Considerando la componente x abbiamo:
$a_x = \frac{dv_x}{dt} \implies dv_x = a_x dt \implies \int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x' = \int_{t_0}^{t} a_x dt' \overset{t_0=0, v_{x,0}=v_x(t_0)}{\implies}$

$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x t \tag{3}$$

Ma abbiamo anche $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$, quindi:
$dx = v_x(t)dt \implies \int_{x_0}^{x} dx' = \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt' = \int_{0}^{t} v_{x,0} + a_x t' dt' \implies$

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{4}$$

Dall'equazione 3: $a_x = \frac{v_x(t) - v_{x,0}}{t}$, sostituendo nella 4:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x,0} + v_x(t))t \tag{5}$$

Abbiamo inoltre: $\frac{x(t) - x_0}{t} = \frac{1}{2}(v_{x,0} + v_x(t)) \implies$

$$v_m(t) = \frac{v_{x,0} + v_x(t)}{2}$$

Dall'equazione 3: $t = \frac{v_x(t) - v_{x,0}}{a_x}$,
sostituendo nella 5: $x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x,0} + v_x(t))\frac{v_x(t) - v_{x,0}}{a_x}$, cioé:

$$2a_x(x(t) - x_0) = v_x^2(t) - v_{x,0}^2 \tag{6}$$

Tutte le equazioni sono analoghe nelle componenti y e z. Possiamo quindi scrivere in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v}(t))t \\ \vec{v}^2 = \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \end{cases}$$

Quindi la traiettoria giace sul piano individuato da $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$, ossia il piano $z = z_0$, dove $\vec{r} = \vec{OP_0}$, con $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$.
Scegliamo $\hat{j}$ parallelo ad $\vec{a}$ e scegliamo $\vec{i}$, impostando un sistema destrorso (ossia dove $\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$).

Dunque $\vec{v}_0 = (v_{x,0}, v_{y,0}, 0)$ e $\vec{a} = (0, a_y, 0)$. Allora: $\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x,0}t \\ y(t) = y_0 + v_{y,0} + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$,

che è l'equazione parametrica di una parabola.
Infatti, eliminando il parametro t si ottiene:

$$y = y_0 + \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}(x - x_0) + \frac{a_y}{2v_{x,0}^2}(x - x_0)^2$$

2.3 Moto di caduta libera

Supporremo che i moti di caduta libera siano moti unformementi accelerati, con $\vec{a} \equiv \vec{g}$ accelerazione di gravità. Stiamo cioè supponendo che $\vec{g} = \vec{cost}, g = 9.81\frac{m}{s^2}$, che è un'approssimazione accettabile con variazioni piccole di altezza.

2.3.1 Caduta libera verticale

Si parla di caduta libera verticale quando $\vec{v}_0 // \vec{g}$.

Possiamo quindi scegliere un sistema di riferimento cartesiano in modo che $\vec{g} = (0, -g, 0)$ e $\vec{v}_0 = (0, v_{y,0}, 0)$. Poniamo poi $t_0 = 0$ e $x_0 = x(t_0)$.

Si ricavano così le equazioni del moto:

$$\begin{cases} v_y = v_{y,0} - gt \\ y = y_0 + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ponendo come condizioni iniziali $y_0 = h$ e $v_{y,0} = 0$, si può ricavare il **tempo di caduta libera** τ_{ff}. Poniamo $y(\tau_{ff}) = 0 \implies 0 = h - \frac{1}{2}g\tau_{ff}^2 \implies$

$$\tau_{ff} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{7}$$

A questo punto possiamo ricavare la **velocità finale di caduta**, poiché $v_y(\tau_{ff}) = -g\tau_{ff} \implies$

$$v_y(\tau_{ff}) = -\sqrt{2gh} \tag{8}$$

Ponendo come condizioni iniziali $y_0 = h, v_{y,0} > 0, v_{x,0} = v_{z,0} = 0$, possiamo ricavare il **tempo di salita** τ_s. Infatti $v_y(\tau_s) = 0 \implies 0 = v_{y,0} - g\tau_s \implies$

$$\tau_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \tag{9}$$

A questo punto possiamo ricavare la **quota massima** h_{max}: $h_{max} = h + v_0\tau_s - \frac{1}{2}g\tau_s^2 \implies$

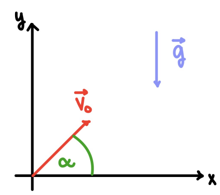
$$h_{max} = h + \frac{v_0^2}{2g} \tag{10}$$

2.3.2 Moto parabolico di caduta libera

Poniamo $t_0 = 0$ e consideriamo $x_0 = x(t_0) = 0, y_0 = y(t_0) = 0, z_0 = z(t_0) = 0$. Sia α l'angolo tra $\vec{v_0}$ e l'asse x. Scegliamo un sistema di riferimento in modo che $\vec{g} = (0, -g, 0)$ e $\vec{v_0} = (v_{x,0}, v_{y,0}, 0) = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, 0)$.

Ricaviamo così le equazioni del moto:

$$x : \begin{cases} a_x = 0 \\ v_x(t) = v_0 \sin\alpha \\ x(t) = v_{x,0}t = (v_0\cos\alpha)t \end{cases}$$



$$y : \begin{cases} a_y = -g \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \\ y(t) = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

In forma vettoriale, otteniamo: $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{\jmath}$.

La traiettoria è: $y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2$.

Per ricavare la **quota massima** h_{max}, poniamo:

$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha - \frac{g}{(v_0\cos\alpha)^2}x = 0 \implies x* = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$, da cui

$$h_{max} = \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g} \tag{11}$$

Invece, per ricavare il **tempo di salita** τ_s, poniamo:

$v_y(\tau_s) = v_{y,0} - g\tau_s = 0 \implies$

$$\tau_s = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \tag{12}$$

Inoltre: $h_{max} = \frac{1}{2}g\tau_s^2 \ \forall\alpha$.

Il **tempo di volo** τ_v è l'intervallo di tempo tra il lancio ($y_0 \equiv h_0 = 0$) e l'istante del punto di caduta ($y(R) = 0$, dove R è la gittata). Usando $y(t) = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2$, poniamo $y(t) = 0$, Troviamo così due soluzioni, ma scartiamo $\tau_v = 0$, quindi:

$$\tau_v = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} \tag{13}$$

La **gittata** R è la distanza orizzontale percorsa dal proiettile. Si ottiene risolvendo $y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2 = 0$, da cui $x = 0$ oppure $x = R$:

$$R = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \tag{14}$$

La gittata massima si ha in corrispondenza di $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$.
Si può inoltre dimostrare che $R(\frac{\pi}{2} - \alpha) = R(\alpha)$ e $x*(\frac{\pi}{2} - \alpha) = x*(\alpha)$.
Valgono inoltre le seguenti:

$$h_{max}(\alpha) + h_{max}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = h_{max}(\frac{\pi}{2})$$
$$\tau_v(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\frac{v_0}{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_v(\frac{\pi}{2})$$
$$\tau_v^2(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tau_v^2(\alpha) = \tau_v^2(\frac{\pi}{2})$$

Sappiamo inoltre che $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Usando che $\vec{a} = -g\hat{\jmath}$, $\vec{r}_0 = 0$, $\hat{\jmath}\cdot\vec{r} = h$, abbiamo:

$$v^2 = v_0^2 - 2gh \tag{15}$$

2.4 Moto circolare

Definizione 2.12 (Moto circolare)**.** Il moto circolare è il moto di un punto materiale P che ha come traiettoria γ una circonferenza o un arco di circonferenza.

Scegliamo un sistema di riferimento in modo che $P \equiv (x, y, 0)$ e $\Omega \equiv (R, 0, 0)$. Risulta:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$$

Il vettore posizione risulta $\vec{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} = R(\cos\theta(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}) = R\hat{r}(t)$, dove $\hat{r}(t) \equiv \cos\theta(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}$.

L'angolo θ viene misurato secondo la convenzione per cui cresce in senso antiorario e decresce in senso orario.

L'ascissa curvilinea è: $s(t) = R\theta(t)$.
Risulta: $v_x = \frac{dx}{dt} = -R\frac{d\theta}{dt}\sin\theta(t)$ e $v_y = \frac{dy}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\cos\theta(t)$.

Definizione 2.13 (Velocità angolare)**.** La velocità angolare di un punto che si muove di moto circolare è:

$$\omega(t) \equiv \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

Nel SI, $[\omega] = \frac{rad}{s}$.

La velocità scalare risulta: $v_s = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}(t) = R\omega(t)$; inoltre $v_x = -R\omega(t)\sin\theta(t)$ e $v_y = R\omega(t)\cos\theta(t)$.

Possiamo quindi scrivere $\vec{v}(t) = v_s(t)\hat{\tau}(t) = \omega(t)R\hat{\tau}(t)$, dove $\hat{\tau}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} = R\frac{d\hat{r}(t)}{ds}$.

Definizione 2.14 (Vettore velocità angolare). Il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ è un vettore tale che:

(i) $|\vec{\omega}| = \left|\frac{d\theta}{dt}\right| = |\omega(t)|$;

(ii) la sua direzione è ortogonale al piano xy in cui giace la curva;

(iii) il suo verso è dato dalla regola della vite destrorsa ($\hat{\omega} = \hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}$).

Vale quindi $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$ e $\hat{\omega} = \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\hat{k}$.

La velocità risulta: $\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)(-\sin\theta(t)\hat{\imath} + \cos\theta(t)\hat{\jmath})$ e $\vec{v} = v\hat{v} = v_s\hat{\tau}$, perciò $v_s(t) = R\dot{\theta}(t)$, $\hat{\tau}(t) = -\sin\theta(t)\hat{\imath} + \cos\theta(t)\hat{\jmath}$. In particolare $v = |\vec{v}| = R|\vec{\omega}|$.

Osserviamo ora che i versori $\hat{\omega}, \hat{r}, \hat{v}$ formano una terna destrorsa. Da questo segue che

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Infatti $\vec{v} = v\hat{v} = v(\hat{\omega} \times \hat{r}) = R|\dot{\theta}|\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\hat{k} \times \hat{r} = \dot{\theta}\hat{k} \times R\hat{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Nel moto circolare vario, l'accelerazione risulta:

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -R(\dot{\omega}(t)\sin\theta(t) + \omega^2(t)\cos\theta(t)) \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = R(\dot{\omega}(t)\cos\theta(t) - \omega^2(t)\sin\theta(t)) \end{cases}$$

Quindi $\vec{a}(t) = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = R\dot{\omega}(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}) - R\omega^2(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) = R\dot{\omega}\hat{\tau} - R\omega^2\hat{r}$.

Ossia $\vec{a}(t) = \dot{\omega}(t)R\hat{\tau}(t) + \omega^2(t)R\hat{n}(t)$, dove la prima componente è l'accelerazione tangenziale, la seconda l'accelerazione centripeta.

2.4.1 Moto circolare uniforme

Si parla di moto circolare uniforme se $v_s = cost$ o, equivalentemente, $\omega = cost$. Segue che $\ddot{s} = \frac{d}{dt}\dot{s} = \frac{d}{dt}v_s = 0$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$.

Abbiamo $\omega = \frac{d\theta}{dt} \implies d\theta = \omega dt \implies \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_{t_0=0}^{t} \omega dt'$, perciò:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \tag{16}$$

La velocità risulta: $\begin{cases} v_x(t) = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0) \\ v_y(t) = R\omega\cos(\omega t + \theta_0) \end{cases}$

Definizione 2.15 (Periodo, frequenza). Il periodo T di un moto circolare è il tempo necessario per compiere un giro completo. La frequenza ν è $\nu = T^{-1}$.

Nel SI, $[T] = s$, $[\nu] = s^{-1} = Hz$.

Nel moto circolare uniforme, si ha:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{|\omega|}{2\pi}$$

L'accelerazione risulta: $\begin{cases} a_x(t) = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0) \\ a_y(t) = -R\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$

Perciò: $\vec{a}(t) = -R\omega^2(\cos\theta(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}) = -R\omega^2\hat{r}(t)$.

Ora, usando che $\hat{n} = -\hat{r}$: $\vec{a}(t) = R\omega^2\hat{n} = \frac{(\omega R)^2}{R}\hat{n} = \frac{v_s^2}{R}\hat{n} = \frac{v^2}{R}\hat{n}$, che è un'accelerazione centripeta.

Usando che $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, abbiamo:

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}(t) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = -\omega^2\vec{r}$.

Quindi $\vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t) = \omega^2 R\hat{n}(t)$.

3 Dinamica

Definizione 3.1. Una forza $\vec{F}$ è una grandezza che descrive l'interazione tra due corpi. La massa m è una proprietà intrinseca del corpo.

Le interazioni fondamentali o forze fondamentali sono le forze della natura che permettono di descrivere i fenomeni fisici a tutte le scale di distanza e di energia e che non sono quindi riconducibili ad altre forze.
Esse sono:

- l'**interazione gravitazionale**, che determina la forza di gravità sulla Terra e l'attrazione fra i pianeti;
- l'**interazione elettromagnetica**, che è responsabile delle proprietà chimiche degli atomi e della struttura delle molecole;
- l'**interazione nucleare debole**, che è responsabile delle forze che intervengono nei decadimenti nucleari;
- l'**interazione nucleare forte**, che tiene uniti i quark, costituenti elementari dei protoni e dei neutroni, e anche questi ultimi all'interno del nucleo.

La prima, secondo la teoria della relatività generale è un effetto della geometria dello spazio-tempo, mentre le altre tre interazioni, che sono delle teorie di gauge, sono dovute a scambi di particelle, dette bosoni di gauge: il fotone γ per la forza elettromagnetica, i bosoni vettori W^+, W^-, Z per la forza nucleare debole e i gluoni g per la forza nucleare forte.
Il modello standard fornisce un riquadro coerente nel quale sono inserite le tre teorie di gauge, mentre ad oggi è stato impossibile ricondurre ad esso una versione quantistica della gravità, sebbene sia stata teorizzata una particella mediatrice (il gravitone) della quale non si hanno evidenze empiriche.

Proprietà delle forze

(1) **Additività**: la risultante di N forze è: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$;

(2) **Interazione**: la forza è una funzione che dipende da molteplici parametri, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, d_1, d_2)$;

(3) per $r \to +\infty$ si ha $\vec{F} \to \vec{0}$. Inoltre si ha $\vec{F} \sim \frac{1}{r^n}$ con $n \geq 2$. Ad esempio, $\vec{F}_g \sim \frac{1}{r^2}$, $\vec{F}_{Coul} \sim \frac{1}{r^2}$, $\vec{F} \sim \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$.

La forza ha un significato intrinseco e non dipende dal sistema di riferimento.

Allo stesso modo, la massa non dipende dal sistema di riferimento (solo in meccanica classica).

Anche la massa gode dell'**additività**: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.
(Anche questo vale solo in meccanica classica. Ad esempio: $M_{nucleo} < Zm_p + Nm_n$, infatti $M_{nucleo} = Zm_p + Nm_n - \Delta M$, dove ΔM rappresenta l'energia di legame $\Delta M = \frac{B}{c^2}$, con $\frac{\Delta M}{M_{nucleo}} \sim 0.001$.)

Principio : I principio della dinamica

Un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Principio : II principio della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Dal II principio, segue che $[\vec{F}] = [massa \cdot \frac{lunghezza}{(tempo)^2}]$.

Nel SI, l'unità di misura è il Newton: 1 N= 1 kg·m/s^2. Nel CGS, l'unità di misura è il dyne: 1 dyn= 1 g·cm/s^2.

Definizione 3.2 (Sistema di riferimento inerziale)**.** Un sistema di riferimento inerziale (SRI) è un sistema di riferimento in cui vale il I principio della dinamica.

Possiamo dire che un corpo non è soggetto a forze se è un corpo isolato.

Una volta individuato un SRI, tutti i sistemi che si muovono a velocità costante rispetto ad esso sono SRI.

Dalla II legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ si ricava l'equazione del moto del punto materiale.

Ad esempio, nel caso unidimensionale, ponendo $\vec{F} \equiv (F_x, 0, 0), F_x \equiv F, F = F(x, \dot{x}), a_x = \ddot{x}$, l'equazione diventa $m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$; risolvendola, si ricava la legge oraria $x = x(t)$. Poiché l'equazione è una EDO lineare omogenea del II ordine, la soluzione sarà $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$; ponendo anche le condizioni iniziali $x_0 = x(t_0)$ e $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$, si ricavano i parametri c_1, c_2.

Principio : III principio della dinamica

Dati due corpi, la forza $\vec{F}_{12}$ che il primo subisce a causa del secondo e la forza $\vec{F}_{21}$ subita dal secondo a causa del primo, vale:

(i) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$;

(ii) $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ sono dirette lungo la congiungente dei due corpi.

Quindi, detti $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ i vettori posizione dei due corpi, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|\hat{r}$ e $F \equiv |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$, vale: $\vec{F}_{12} = \pm F\hat{r}$ e $\vec{F}_{21} = \mp F\hat{r}$, dove valgono i primi segni se le forze sono attrattive, i secondi se sono repulsive.

Definizione 3.3 (Quantità di moto)**.** La quantità di moto di un punto materiale è definita come:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Avendo definito la quantità di moto, si può enunciare il II principio della dinamica nella forma originale scritta da Newton nei *Principia*.

Principio : II principio della dinamica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Osserviamo che, nel caso di massa costante, questa definizione è equivalente alla precedente. Infatti: $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$. Invece, se fosse $m = m(t)$, si avrebbe: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$.

Definizione 3.4 (Impulso di una forza)**.** L'impulso di una forza si definisce come:

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$$

Teorema 3.1: Teorema dell'impulso

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \Delta\vec{p}$$

Dimostrazione. Dal II principio della dinamica, abbiamo:
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \vec{F}dt = d\vec{p}$.
Integrando ambo i membri: $\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$. □

Definizione 3.5 (Momento di un vettore applicato)**.** Dato un vettore $\vec{v}$, il suo punto di applicazione A, la sua retta di applicazione, un polo Ω e il vettore posizione rispetto al polo $\vec{r} = \vec{\Omega A}$, il momento del vettore $\vec{v}$ è:

$$\vec{\mathscr{M}}_\Omega = \vec{r} \times \vec{v}$$

Il modulo vale $\mathscr{M}_\Omega = rv\sin\theta = vd$ dove $d = r\sin\theta$.

Si osserva che il momento del vettore è indipendente dal punto di applicazione sulla retta d'azione; infatti, sia B un altro punto di applicazione. Risulta: $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$, perciò $\vec{\mathscr{M}}_\Omega = \vec{r}_B \times \vec{v} = \vec{r}_A \times \vec{v} + \vec{r}_{AB} \times \vec{v} = \vec{r}_A \times \vec{v}$, dove si è usato che $\vec{r}_{AB} \times \vec{v} = 0$ poiché $\vec{v}$ e $\vec{r}_{AB}$ sono paralleli.

Definizione 3.6 (Momento di una forza)**.** Fissato un sistema $s = (O, x, y, z)$ e un polo Ω, il momento di una forza $\vec{F}$ che agisce nel punto $\vec{r}$ è:

$$\vec{\tau}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}$$

Definizione 3.7 (Momento angolare)**.** Fissato un sistema $s = (O, x, y, z)$ e un polo Ω, il momento angolare (o momento della quantità di moto) di un corpo di posizione $\vec{r}$ e con quantità di moto $\vec{p}$ è:

$$\vec{l}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}$$

Osserviamo ora:
$\frac{d}{dt}\vec{l}_\Omega = \frac{d}{dt}((\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times\vec{p}) = (\vec{v}-\vec{v}_\Omega)\times\vec{p}+(\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times\frac{d\vec{p}}{dt} = (\vec{v}-\vec{v}_\Omega)\times\vec{p}+(\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times\vec{F} = \vec{v}\times\vec{p}-\vec{v}_\Omega\times\vec{p}+\vec{\tau}_\Omega$.

Poiché $\vec{v}$ e $\vec{p}$ sono paralleli, $\vec{v}\times\vec{p} = 0$. Quindi:

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_\Omega = -\vec{v}_\Omega \times \vec{p} + \vec{\tau}_\Omega \tag{17}$$

Principio : II principio della dinamica per il moto angolare

Se il polo Ω è fisso ($\vec{v}_\Omega = 0$), allora:

$$\frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega$$

Teorema 3.2: Teorema dell'impulso angolare

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_\Omega dt = \vec{l}_\Omega(t_2) - \vec{l}_\Omega(t_1)$$

Dimostrazione. Dal II principio della dinamica per il moto angolare, si ha:
$\frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega \implies \vec{\tau}_\Omega dt = d\vec{l}_\Omega$.
Integrando ambo i membri: $\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_\Omega dt = \vec{l}_\Omega(t_2) - \vec{l}_\Omega(t_1)$. □

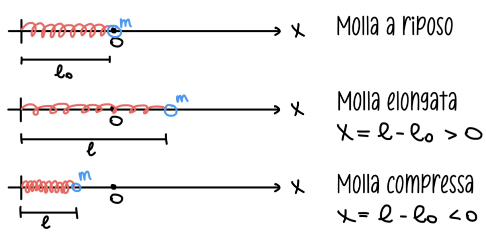
3.1 Oscillatore armonico

Se $\Delta l \ll l_0$, vale:

Teorema 3.3: Legge di Hooke

$$\vec{F} = -kx\hat{\imath}$$

dove k è la costante elastica della molla ($[k] = \frac{forza}{lunghezza}$; nel SI, $[k] = \frac{N}{m}$).



Definizione 3.8 (Molla ideale)**.**
Una molla viene definita ideale se:

(i) $m_{molla} = 0$ (nella realtà, $m_{molla} \ll m_{corpo}$);

(ii) $l_0 = 0$;

(iii) $F = -kx$.

Dunque per una molla ideale vale: $m\ddot{x} = -kx$.

Ponendo $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} = cost$, può essere riscritta come:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Risolvendo, si trova $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$, da cui la velocità è $v_x(t) = \dot{x}(t) = -c_1\omega \sin(\omega t) + c_2\omega \cos(\omega t)$.

Ponendo le condizioni iniziali all'istante $t_0 = 0$, si ricavano le costanti:

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ v_0 = v_x(t_0) \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

L'equazione può essere riscritta come:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

dove A si dice ampiezza e ϕ si dice fase.

Questo segue dalla formula di addizione del coseno: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, da cui $c_1 = A\cos\phi$, $c_2 = -A\sin\phi$.

La velocità è: $v_x(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$. Analogamente a prima, per le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ v_0 = v_x(t_0) \end{cases} \implies \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}} \\ \tan\phi = -\frac{v_0}{x_0\omega} = -\frac{v_0}{x_0}\sqrt{\frac{m}{k}} \end{cases}$$

Definizione 3.9 (Periodo del moto armonico)**.** Il periodo del moto armonico è il tempo $t \equiv T$ per cui $\omega T = 2\pi$. Perciò $\omega = \frac{2\pi}{T}$, da cui $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

L'accelerazione risulta: $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$.

Punti di massima elongazione:

$x = \pm A \implies v_x = 0 \implies a_x = \mp\omega^2 A$ ossia $|a_x| \equiv |a_{max}| = \omega^2 A$

Punto di elongazione nulla:

$x = 0 \implies |v_x| \equiv |v_x|_{max} = \omega A$, $a_x = 0$

Il moto circolare uniforme è la sovrapposizione di due moti armonici:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

Definizione 3.10 (Punto di equilibrio)**.** Un punto dello spazio P è definito punto di equilibrio se, ivi posto un punto materiale di massa m con velocità nulla, esso vi permane indefinitivamente.

Ciò equivale a dire che:

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_P \\ \vec{v}(t_0) = 0 \end{cases} \implies \vec{r}(t) = \vec{r}_P \ \forall t$$

Conseguentemente: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = 0 \ \forall t$ e $\vec{a}(t) = 0 \ \forall t \implies \vec{F}(\vec{r}_P) = m\vec{a} = 0$.

Definizione 3.11 (Equilibrio stabile e instabile)**.** Un punto di equilibrio si dice stabile se, perturbando il corpo nel punto, si instaura una forza che tende a farlo tornare nel punto d'equilibrio.

Un punto di equilibrio si dice instabile se, perturbando il corpo nel punto, si instaura una forza che tende ad allontanarlo dal punto di equilibrio.

3.1.1 Oscillatore armonico soggetto ad una forza costante

Supponiamo che sull'oscillatore armonico agisca una forza costante di modulo $F_0 = F_{x,0}$.

Allora $\vec{F} = (-kx + F_0)\hat{\imath}$.

Per la seconda legge della dinamica: $m\ddot{x} = -kx + F_0$.

Ponendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$, possiamo riscriverla come:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}$$

Una soluzione particolare è $\bar{x} \equiv x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{F_0}{k}$, che rappresenta un punto di equilibrio.

Quindi $x(t) = \bar{x} + A\cos(\omega t + \phi)$.

Altrimenti, osservando che $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m} = -\frac{k}{m}(x - \frac{F_0}{k})$, si può risolvere l'equazione con la sostituzione $x \to \xi = x - \frac{F_0}{k} = x - \bar{x}$. Da questa segue $\ddot{x} = \ddot{\xi}$ e $\ddot{\xi} = -\frac{k}{m}\xi$, da cui $\xi(t) = A\cos(\omega t + \phi)$; risostituendo, troviamo di nuovo $x(t) = \bar{x} + A\cos(\omega t + \phi)$.

3.1.2 Piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile

Consideriamo $F = F(x)$ (cioè F non dipende dalla velocita $\dot{x}$), e sia x_0 una posizione di equilibrio stabile.

Consideriamo l'espansione in serie di Taylor:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2 + ...$$

Poiché x_0 è un punto di equilibrio stabile, $F(x_0) = 0$ e $F'(x_0) < 0$. Ponendo $k \equiv -F'(x_0) > 0$, abbiamo:

$$F(x) = -k(x - x_0) + ...$$

il cui sviluppo al primo ordine coincide con la legge di Hooke.

3.2 Vincoli e reazioni vincolari

Definizione 3.12 (Vincolo)**.** Un vincolo è una condizione che limita il moto di un corpo. L'azione dei vincoli si applica attraverso un insieme di forze, la reazione vincolare $\vec{R}$ (queste possono essere ricondotte alle forze elettromagnetiche).

Vale quindi $m\vec{a} = \vec{F}_{attive} + \vec{R}$.

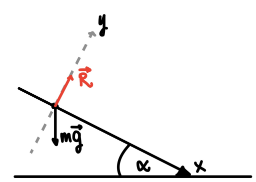
Esempio.
- (i) molecole di un gas in una scatola;
- (ii) moto su una superficie;
- (iii) moto lungo una traiettoria;
- (iv) pendolo.

Definizione 3.13 (Vincolo liscio)**.** Un vincolo si dice liscio se la superficie di contatto è priva di attrito.

Definizione 3.14 (Vincolo scabro)**.** Un vincolo si dice scabro se la superficie presenta una forza di attrito $\vec{f_a}$.

3.2.1 Piano inclinato liscio

Consideriamo un piano inclinato liscio, su cui è posto un punto materiale di massa m. Scegliamo gli assi x e y come in figura, in modo che $\vec{R} \equiv (0, R_y)$.



Abbiamo le seguenti condizioni:

$$x : m\ddot{x} = mg\sin\alpha$$

$$y : m\ddot{y} = R_y - mg\cos\alpha = 0$$

Quindi segue che $a_x \equiv \ddot{x} = g\sin\alpha$ (costante) e $R_y = mg\cos\alpha$.

Perciò, posto $t_0 = 0$, si ha $x(t) = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2$.

3.2.2 Fili, cavi, funi

Definizione 3.15 (Filo ideale)**.** Un filo viene detto ideale se ha massa nulla ed è indeformabile. La tensione del filo è la forza che esso trasmette; in un filo ideale la tensione è la stessa in tutti i punti del filo.

Definizione 3.16 (Carrucola ideale)**.** Una carrucola si dice ideale se ha massa nulla e ruota attorno al perno senza attrito

Esempio (Macchina di Atwood). Consideriamo una carrucola ideale munita di un filo ideale, cui sono agganciate due masse m_1, m_2, con $m_2 \geq m_1$. Scegliamo l'asse y rivolto verso l'alto. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 = T - m_1 g \\ m_2\ddot{y}_2 = T - m_2 g \end{cases}$$

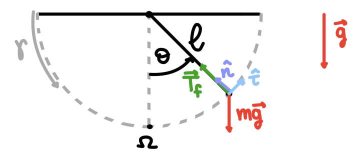
Usando che $\ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1$, troviamo:

$$\ddot{y}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \qquad T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

3.2.3 Pendolo semplice

Per il pendolo semplice, abbiamo:
$s(t) = l\theta(t)$, $v_s(t) = l\dot{\theta}(t)$, $a_s(t) = l\ddot{\theta}(t)$.

Abbiamo quindi:
$\vec{a}(t) = l\ddot{\theta}(t)\hat{\tau}(t) + l\dot{\theta}^2(t)\hat{n}(t)$.
Per la seconda legge di Newton, abbiamo anche $m\vec{a} = \vec{T}_f + m\vec{g}$.



Proiettamo su $\hat{\tau}$: $ml\ddot{\theta}(t) = -mg\sin\theta$

Proiettamo su $\hat{n}$: $ml\dot{\theta}^2(t) = T_f - mg\cos\theta$

Dalla seconda, ricaviamo: $T_f = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l}$.

Dalla prima: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$. Ponendo $\omega^2 \equiv \frac{g}{l}$, possiamo riscriverla come $\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$.

Usiamo ora l'approssimazione delle piccole oscillazioni: supponiamo $\theta(t) \ll 1\ rad$, così possiamo sostituire con la sua espansione di Taylor al primo ordine $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...$, ottenendo così:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

La soluzione è $\theta(t) = \Theta\sin(\omega t + \phi)$, da cui segue che $s(t) = l\Theta\sin(\omega t + \phi)$, $v_s(t) = l\Theta\omega\cos(\omega t + \phi)$.

Questo è un moto periodico con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, da cui segue:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Osservazioni:

(1) T non dipende da Θ (le oscillazioni sono isocrone);

(2) T non dipende da m;

(3) da questa relazione si può ricavare g: $g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$.

3.3 Attrito

Empiricamente, si vede che la legge per l'**attrito statico** è:

$$F_s \equiv |\vec{F}_s| \leq \mu_s N \equiv F_s^{max} = F_{min}$$

dove $N = |\vec{N}|$ è il modulo della forza normale e μ_s è il coefficiente di attrito statico, che dipende dalle proprietà delle superfici dei due corpi in contatto.

Se $F > \mu_s N \equiv F_s^{max} = F_{min}$, si ha **attrito dinamico**.
Empiricamente, si vede:

$$\vec{f}_d = -\mu_d N\hat{v}$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico: in generale $\mu_d \leq \mu_s$.

Nel caso di moto in un fluido, si ha **attrito viscoso**, dovuto alla forza viscosa $\vec{F}(\vec{v})$, con $\hat{F} = \frac{\vec{F}}{F} = -\hat{v}$.

Se $|\vec{v}| < |\vec{v}_{critica}|$, vale la legge di Stokes:

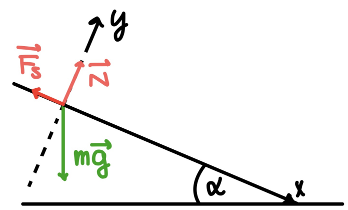
$$\vec{F} = -\beta\vec{v}$$

dove β è una costante positiva, $[\beta] = \frac{massa}{tempo}$. In generale, β dipende dalle proprietà del mezzo (viscosità), dalle dimensioni e dalla forma del corpo.

Se $|\vec{v}| > |\vec{v}_{critica}|$, ci sono delle turbolenze.

3.3.1 Piano inclinato scabro

Consideriamo una situazione come in figura.



La condizione affinché il corpo sia fermo è: $m\vec{g} + \vec{F}_s + \vec{N} = 0$, che scomponendola diventa

$$\begin{cases} F_s = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \implies F_s = (\tan\alpha)N \leq \mu_s N$$

Da questo segue che $\tan\alpha \leq \mu_s$.

In generale, definito $\alpha* \equiv \arctan\mu_s$, vale:

- se $\alpha \leq \alpha*$, il blocco resta fermo;
- se $\alpha > \alpha*$, il blocco comincia a scendere.

3.3.2 Moto in un mezzo viscoso

Supponiamo che l'unica forza sia quella viscosa e che per $t_0 = 0, \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) \neq 0$. Da $\vec{F} = -\beta\vec{v}$, segue che $\vec{a}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione, quindi si tratta di un moto unidimensionale.

Per la seconda legge di Newton:
$m\vec{a} = -\beta\vec{v} \implies ma_x = -\beta v_x \implies \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\beta}{m}v_x$.

Poniamo ora $\tau \equiv \frac{m}{\beta}$ ($[\tau] = tempo$), e troviamo:
$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau}v_x \implies \frac{1}{v_x}dv_x = -\frac{1}{\tau}dt \implies \int_{v_{x,0}}^{v_x} \frac{1}{v'_x}dv'_x = \int_{t_0}^{t} -\frac{1}{\tau}dt'$
$\implies \log v_x - \log v_{x,0} = -\frac{t}{\tau}$

Perciò: $v_x(t) = v_{x,0}e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Ora ricaviamo la legge del moto: $v_x = \frac{dx}{dt} \implies dx = v_x dt = v_{x,0}e^{-\frac{t}{\tau}}dt$

Integrando, otteniamo: $x(t) = x_0 + v_{x,0}\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Osserviamo che per $t \to +\infty$: $x(+\infty) - x_0 = v_{x,0}\tau$, quindi la traiettoria è un segmento. Inoltre dalle precedenti relazioni segue che $v_x = v_{x,0} - \frac{1}{\tau}(x - x_0)$.

Consideriamo ora il caso in cui, oltre alla forza viscosa, c'è una forza costante $\vec{F} = \vec{F}_0 = F_0\hat{\imath}$.

Abbiamo quindi: $m\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x + F_0 \implies \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau} = \frac{F_0}{m}$.

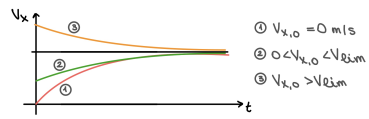
Questa equazione differenziale ha come soluzione partciolare $\tilde{v}(t) = \frac{F_0}{\beta} = \frac{F_0}{m}\tau = v_{lim}$. Nel caso particolare $\vec{F_0} = m\vec{g}$, vale $\vec{v}_{lim} = \tau\vec{g}$.

Dunque la soluzione generale è: $v_x(t) = ce^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F_0}{\beta}$.

Imponendo la condizione $v_x(0) = v_{x,0}$, ricaviamo $c = v_{x,0} - \frac{F_0}{\beta}$. Quindi

$$v_x(t) = (v_{x,0} - \frac{F_0}{\beta})e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F_0}{\beta} = (v_{x,0} - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$$

Il grafico della velocità al variare di $v_{x,0}$ è riportato in figura.



Supponiamo ora che $t \ll \tau$ e che $|v_{x,0}| = |v_0| \ll v_{lim}$. Considerando tempi molto piccoli, possiamo considerare lo sviluppo di Taylor $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau} + ...$

Allora $v_x(t) \approx (v_{x,0} - v_{lim})(1 - \frac{t}{\tau}) + v_{lim} = v_{x,0} - \frac{t}{\tau}v_{x,0} - v_{lim} + \frac{t}{\tau}v_{lim} + v_{lim} = v_{x,0} + \frac{t}{\tau}v_{lim} = v_{x,0} + \frac{F_0}{m}t$.

Nel caso particolare $\vec{F_0} = m\vec{g}$, vale $v_x(t) \approx v_{x,0} + gt$, quindi il moto è approssimabile con un moto uniformemente accelerato.

4 Lavoro ed energia

Funzioni di più variabili

Ananlogamente alle funzioni di una variabile, si definiscono le derivate per le funzioni di più variabili.
Consideriamo $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Definiamo una derivata parziale di F come:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{y,z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y, z) - F(x, y, z)}{\Delta x}$$

Analogamente si definiscono $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$.
Si definiscono poi le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{y,z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}$$

Analogamente si definiscono $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.
Si possono definire anche le derivate parziali seconde miste:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$$

Analogamente si definiscono per le altre combinazioni di variabili. In generale vale: $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. Vale però il seguente teorema:

Teorema (Teorema di Schwarz)**.** Data $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $F \in C^2$, allora:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \ldots$$

Definizione. Consideriamo la forma differenziale:

$$dQ = A_1(x, y, z)dx + A_2(x, y, z)dy + A_3(x, y, z)dz$$

Essa viene detta differenziale esatto (o differenziale totale) se esiste
$Q(x, y, z)$, detta potenziale, che soddisfa le conidizioni:
$A_1(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}, A_2(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial y}, A_3(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial z}$

Definizione 4.1 (Lavoro per forza costante)**.** Data una forza costante $\vec{F}$ che causa uno spostamento $\Delta\vec{r}$, da A a B, il lavoro compiuto da $\vec{F}$ è:

$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos\alpha$$

Definizione 4.2 (Campo di forza)**.** Un campo di forza è una forza $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ che dipende unicamente dalla posizione $\vec{r}$, e non dipende dalla velocità $\vec{v}$ e non dipende esplicitamente dal tempo.

Definizione 4.3 (Lavoro per forza non costante)**.** Dato un campo di forza $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ e una curva γ da A a B, il lavoro compiuto da $\vec{F}$ è:

$$L_{\gamma(A,B)} = \sum \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Definizione 4.4 (Lavoro infinitesimo)**.** Dato un campo di forza $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, il lavoro infinitesimo o elementare compiuto da $\vec{F}$ è:

$$dL = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Perciò risulta:

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{18}$$

In generale: $L_{\gamma(A,B)} \neq L_{\gamma'(A,B)}$.

Fissiamo ora un sistema di riferimento cartesiano. Abbiamo: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\hat{\imath} + F_y(x,y,z)\hat{\jmath} + F_z(x,y,z)\hat{k}$ e $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$. Allora $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz$, quindi dL è una forma differenziale.

Allora

$$L_{\gamma(A,B)} =_\gamma \int_{x_A}^{x_B} F_x dx +_\gamma \int_{y_A}^{y_B} F_y dy +_\gamma \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

dove ${}_\gamma \int_{x_A}^{x_B} F_x dx \equiv \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y(x), z(x))dx$ (analogo per le altre due variabili).

Si ricavano quindi le equazioni della curva γ: $\begin{cases} x \in [x_A, x_B] \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

Proprietà del lavoro

(1) Data $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i$, vale $L_{\gamma(A,B)}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} L_{\gamma(A,B)}(\vec{f}_i)$.

Infatti $L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma(A,B)} \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma(A,B)} \vec{f}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} L_{\gamma(A,B)}(\vec{f}_i)$.

(2) Vale $L_{\gamma(A,B)}(\vec{F}) = -L_{\gamma(B,A)}(\vec{F})$

Definizione 4.5 (Energia cinetica)**.** Dato un punto materiale di massa m che si muove a velcità $\vec{v}$, la sua energia cinetica K è:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Dalla definizione segue che $[K] = (massa)(\frac{lunghezza}{tempo})^2$. Nel SI, l 'unità di misura dell'energia cinetica K è il Joule (pronunciato alla francese): 1 J=1 N·

m=1 kg (m/s)^2. Nel sistema CGS, è misurata in ergon: 1 erg=1 dyn $\cdot$ cm=1 g (cm/s)^2. Un'altra unità di misura usata è la caloria: 1 cal=4.186 J.

Teorema 4.1: Teorema delle forze vive

Dato un corpo di massa m su cui agisce la risultante $\vec{F}$, vale:

$$dL = dK$$

Dimostrazione. Date m e $\vec{F}$, sia γ la traiettoria di m. Allora $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Inoltre dalla seconda legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Poi per definizione: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \implies d\vec{r} = \vec{v}dt$.
Sostituendo nella prima: $dL = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt$.
Notiamo che $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \implies \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \implies \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$.
Quindi: $dL = \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt}dt = \frac{1}{2}mdv^2 = d(\frac{1}{2}mv^2) = dK$. $\square$

Equivalentemente, integrando ambo i membri, il teorema può essere espresso come:

$$L_{\gamma(A,B)} = K_B - K_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{19}$$

4.1 Forze conservative

Definizione 4.6 (Forza conservativa)**.** Una forza $\vec{F}$ si dice conservativa quando il lavoro compiuto da $\vec{F}$ non dipende dalla curva γ ma solo dagli estremi A e B.

Proposizione

$\vec{F}$ è una forza conservativa se e solo se dL è un differenziale esatto.

Poichè $dL = F_xdx + F_ydy + F_zdz$, esso è un differenziale esatto se esiste una funzione scalare $U(x, y, z)$ tale che: $dL = -(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz) = -dU$, dove $U(x, y, z)$ è di classe C^2.

Definizione 4.7 (Energia potenziale)**.** L'energia potenziale $U(x, y, z)$ è una funzione scalare di classe C^2 associata a una forza conservativa $\vec{F}$ tale che $dL = -dU$, ossia che $F_x(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial z}$.

Integrando tra A e B, troviamo:
$L_{AB}(\vec{F}) = \int_{\gamma(A,B)} dL = \int_A^B dL = -(U_B - U_A)$, dove $U_B \equiv U(\vec{r}_B)$.
Quindi: $U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
Fissando $\vec{r}_A = \vec{r}_0$ e considerando un punto generico $\vec{r}_B = \vec{r}$, vale:

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

dove $U(\vec{r}_0)$ è una costante additiva arbitraria (solitamente si pone $U(\vec{r}_0) = 0$).

Corollario

Se $\vec{F}$ è una forza conservativa, vale:

$$\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Definizione 4.8 (Gradiente)**.** Il gradiente ∇ è un operatore differenziale definito come:

$$\nabla \equiv \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Risulta quindi: $\vec{F} = -\nabla U$.

Definizione 4.9 (Rotore)**.** Il rotore $\nabla\times$ è un operatore differenziale definito come:

$$\nabla \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Nel caso $\vec{F}$ forza conservativa, abbiamo $\vec{F} = -\nabla U$. Dunque:

$$\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times \nabla U = - \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= -[\hat{\imath}(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y}) + \hat{\jmath}(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}) + \hat{k}(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x})] \overset{th.Schwarz}{=} 0$$

Viceversa, $\nabla \times \vec{F} = 0$ con D dominio di $\vec{F}$ semplicemente connesso, implica $\vec{F}$ conservativa.

Dunque $\vec{F}$ è una forza conservativa se:

(1) $L_{\gamma(A,B)}$ non dipende da γ ma solo dagli estremi A e B;

(2) $\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$

(3) esiste un'energia potenziale $U(x, y, z)$ tale che dL è un differenziale esatto;

(4) $\nabla \times \vec{F} = 0$.

Sia ora la risultante $\vec{F} = \vec{f} + \vec{F'}$, dove $\vec{f}$ è conservativa: dunque $\vec{F'} = \vec{F} - \vec{f}$.
Per il teorema delle forze vive: $L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}) = K_P - K_{P_0}$.
Inoltre $L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}) = L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{f}) + L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F'})$ e $L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{f}) = U_{P_0} - U_P$.
Quindi: $U_{P_0} - U_P + L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F'}) = K_P - K_{P_0}$.
Supponiamo ora che nello spostamento $P_0 \to P$ l'energia cinetica non vari:$K_{P_0} = K_P$. Perciò: $U_P = U_{P_0} + L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F'})$. Scegliamo ora $U_{P_0} \equiv 0$. Risulta:

$$U_P \equiv U(\vec{r}) = L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F'})$$

Definizione 4.10 (Energia meccanica)**.** Si definisce l'energia meccanica E di un punto materiale come:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

Teorema 4.2: Conservazione dell'energia

Se su un corpo agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica del corpo non varia: $\frac{dE}{dt} = 0$.

Dimostrazione. Sia m la massa del corpo, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ la risultante delle forze conservative. Dalla legge $\vec{F} = m\vec{a}$, si riava la traiettoria $\gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t)\}$. Allora per il teorema delle forze vive: $L_{\gamma(P_0,P)} = K_P - K_{P_0}$. Poiché le $\vec{F}_i$ sono conservative, posso associare a ciascuna un'energia potenziale: $U_P^{(i)} - U_{P_0}^{(i)} = -L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_i)$. Posso quindi associare un'energia potenziale totale a $\vec{F}$:
$U_P - U_{P_0} = \sum_{i=1}^{N} U_P^{(i)} - U_{P_0}^{(i)}$. Risulta:
$U_P - U_{P_0} = -L_{\gamma(P_0,P)} = K_{P_0} - K_P \implies K_P + U_P = K_{P_0} + U_{P_0} \forall P_0, P \in \gamma$. □

In caso agiscano delle forze non conservative sul sistema, si ha: $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$. Allora: $K_P - K_{P_0} = L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}) = L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_c) + L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_{nc}) = U_{P_0} - U_P + L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_{nc})$. Risulta quindi:

$$E_P - E_{P_0} = \Delta E = L_{\gamma(P_0,P)}(\vec{F}_{nc}) \tag{20}$$

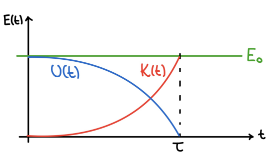
4.1.1 Forza di gravità

Si dimostra che la forza peso (ossia l'attrazione gravitazionale) è una forza conservativa (se si assume che l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ sia costante, con $g = 9.81$ m/s^2).
Infatti basta notare che, se $\vec{F} = m\vec{g} = (F_x, F_y, F_z)$, risulta $\frac{\partial F_x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F_y}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$. Quindi $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Consideriamo un sistema cartesiano in modo che risulti:$\vec{g} = (0, 0, -g)$ e quindi $\vec{F} \equiv (0, 0, -mg)$.
Prendendo due punti generici $\vec{r}_A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ e $\vec{r}_B \equiv (x_B, y_B, z_B)$, otteniamo: $L_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg_z(z_B - z_A) = -mg(z_B - z_A)$.

Ora possiamo ricavare un'espressione per l'energia potenziale del punto: $U_B - U_A = -L_{AB} = mg(z_B - z_A)$. Poniamo ora $z_A = 0$ e $U_A \equiv 0$. Risulta:

$$U(z) = mgz \tag{21}$$



Esempio (Energia per un corpo in caduta libera).
Consideriamo un corpo che all'istante $t_0 = 0$ si trova ad un'altezza $z_0 = h$ con velocità $v_0 = 0$ m/s. Le leggi del moto sono: $\begin{cases} z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_z(t) = -gt \end{cases}$. Si può quindi ricavare il tempo di caduta: $\tau_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ e la velocità finale $v_B = \sqrt{2gh}$.
La velocità finale si può ricavare anche dalla conservazione dell'energia $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$:
$mgh = E_0 = E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \implies v_B = \sqrt{2gh}$.
La conservazione di $E(t)$ si può anche vedere disegnando i grafici $K(t) = \frac{1}{2}mg^2t^2$ e $U(t) = mg(h - \frac{1}{2}gt^2)$.

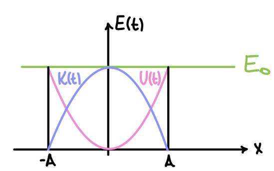
4.1.2 Forza elastica

Si dimostra che la forza elastica è una forza conservativa.
Infatti, data la forza elastica $\vec{F} = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$, possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza lungo una curva γ tra gli estremi A e B: $L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(P_0,P)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k\int_{x_A}^{x_B} xdx - k\int_{y_A}^{y_B} ydy - k\int_{z_A}^{z_B} zdz = -\frac{k}{2}[(x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2) + (z_B^2 - z_A^2)]$. Da ciò risulta che $L_{\gamma(A,B)}$ non dipende dalla curva γ, ma solo dagli estremi A e B.

Restringendoci ora al caso unidimensionale, possiamo quindi definire un'energia potenziale elastica: $U_B - U_A = -L_{\gamma(A,B)} = \frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$.
Poniamo ora $x_A = 0$ e $U_A \equiv 0$:

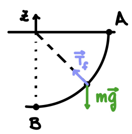
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{22}$$

Questo può essere applicato alla situazione fisica del pendolo semplice, dove la legge del moto è $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, dove $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Come si è visto, la legge oraria risulta $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ e la velocità $\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$.
Poniamo ora $t_0 = 0, x(t_0) = A, \dot{x}(t_0) = 0$, da cui $\varphi = 0$. Per la legge di conservazione dell'energia $E = K + U = cost = E_0$, dove $E_0 \equiv E(t_0) = \frac{1}{2}kA^2$.



Si può quindi ricavare $K(x) = \frac{1}{2}kA^2 - U(x) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$.
Altrimenti, se consideriamo U e K funzioni della posizione, si ha: $K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e $U = \frac{1}{2}kx^2$, da cui si ottiene $U(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) = E_0\cos^2(\omega t)$ e $K(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) = E_0\sin^2(\omega t)$.

Inoltre possiamo osservare che, data $E = E(x, \dot{x})$, vale: $cost = E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \implies \dot{x}^2 + \omega^2x^2 = \frac{2E}{m}$.
Derivando rispetto al tempo, si ottiene: $2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 x\dot{x} = 0 \implies \dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$, le cui soluzioni sono $x(t) \equiv 0$, che però non è fisicamente rilevante, e $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, che è proprio l'equazione del moto dell'oscillatore armonico.



Questo in realtà è vero in generale, ossia:
La legge di conservazione dell'energia meccanica è un integrale primo dell'equazione del moto.

Esempio. Consideriamo un pendolo semplice con una fune lunga l, a cui è appeso un corpo puntiforme di massa m, come in figura. Poniamo $z_B = 0$ e $U_B = 0$; in A vale $v_A = 0$. Determiniamo la tensione della fune nel punto B.

Poiché sul corpo agisce solo la forza di gravità, che è conservativa, vale $U(z) = mgz$. Applichiamo la legge di conservazione dell'energia meccanica $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = cost$; in particolare $E_A = mgl = E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \implies v_B = \sqrt{2gl}$.
Ora applichiamo la II legge di Newton al corpo nel punto B: $T_f - mg = ma$, dove $a = a_c = \frac{v_B^2}{l}$. Quindi $T_f = 3mg$.

Esempio (Lavoro di una forza non conservativa). Consideriamo la forza di attrito dinamico $\vec{f_d} = -\mu_d N\hat{v}$, dove $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$, e consideriamo $N = cost$.
Allora: $L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} -\mu_d N\hat{v} \cdot d\vec{r} = -\mu_d N \int_{\gamma(A,B)} \hat{v} \cdot \vec{v} dt$. Ora sappiamo che $\vec{v} = v\hat{v} = v_s\hat{\tau}$ e $\hat{v} = \hat{\tau}$, perciò $\hat{v} \cdot \vec{v} = v_s = \frac{ds}{dt}$.
Quindi $L_{\gamma(A,B)} = -\mu_d N \int_{\gamma(A,B)} v_s dt = -\mu_d N \int_{\gamma(A,B)} ds = -\mu_d N l_{\gamma(A,B)}$. Da questo risulta che il lavoro della forza d'attrito dinamico dipende dalla curva γ, perciò non è una forza conservativa.

5 Dinamica dei sistemi di N punti materiali

Fissiamo un sistema di riferimento $s = (O, x, y, z)$ e consideriamo un sistema di N punti materiali, con masse $\{m_i, i = 1, ..., N\}$, con $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$, e posizioni $\{\vec{r}_i(t), i = 1, ..., N\}$.

Definizione 5.1 (Centro di massa)**.** Il centro di massa di un sistema di N punti materiali è definito come:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Si osserva che, dividendo il sistema in due sistemi più piccoli, con $N = N_1 + N_2$ e $M = M_1 + M_2$, il centro di massa complessivo è uguale al centro di massa di due corpi di massa M_1 e M_2 situati nei centri di massa dei due sistemi, $\vec{R}_{CM_1}$ e $\vec{R}_{CM_2}$. Infatti:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_i + \sum\limits_{j=N_1+1}^{N_2} m_j \vec{r}_j}{M} = \frac{\frac{M_1 \sum\limits_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_i}{M_1} + \frac{M_2 \sum\limits_{j=N_1+1}^{N_2} m_j \vec{r}_j}{M_2}}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 \vec{R}_{CM_1} + M_2 \vec{R}_{CM_2}}{M_1 + M_2}$$

Inoltre, per un sistema di due corpi, il centro di massa giace sulla congiungente dei due corpi in una posizione intermedia. Infatti:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Definizione 5.2 (Quantità di moto di un sistema)**.** La quantità di moto di un sistema di N punti materiali è definita come:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

Teorema 5.1: I teorema del centro di massa

Se le masse dei corpi sono costanti, allora vale:

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM}$$

Dimostrazione. Se $m_i = cost$, allora $M = cost$.

Allora $\vec{V}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{R}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M} \implies \vec{P} = M \vec{V}_{CM}$. □

Teorema 5.2: I equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}^{(est)}$$

Dimostrazione. Consideriamo $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \vec{F}$, che è la risultante di tutte le forze agenti sul sistema. Ora scomponiamo la risultante come la risultante delle forze interne e la risultante delle forze esterne: $\vec{F} = \vec{F}^{(est)} + \vec{F}^{(int)}$.

Per il corpo i-esimo vale $\vec{F}_i = \vec{f}_i^{(est)} + \vec{f}_i^{(int)}$, con $\vec{f}_i^{(int)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\vec{f}_{ij}^{(int)}$.

Risulta quindi $\vec{F}^{(est)} = \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i^{(est)}$ e $\vec{F}^{(int)} = \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i^{(int)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\vec{f}_{ij}^{(int)}$.

Per la III legge di Newton, vale $\vec{f}_{ij}^{(int)} = -\vec{f}_{ji}^{(int)}\forall i, j, i \neq j$, perciò $\vec{F}^{(int)} = 0$.
Quindi $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(est)}$. □

Teorema 5.3: Teorema dell'impulso

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)$$

Dimostrazione. Dalla I equazione cardinale si ha: $\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}^{(est)} \implies d\vec{P} = \vec{F}^{(est)}dt$. Integrando ambo i membri: $\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{(est)}dt = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)$. □

Teorema 5.4: II teorema del centro di massa

Se le masse dei corpi sono costanti, allora vale:

$$\vec{F}^{(est)} = M\vec{a}_{CM}$$

Dimostrazione. Se m_i sono costanti, allora per il I teorema del centro di massa $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$. Allora $\vec{F}^{(est)} = \frac{d}{dt}\vec{P} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$. □

Da qui, integrando, si ricava la legge oraria $\vec{R}_{CM} = \vec{R}_{CM}(t)$.

Definizione 5.3 (Momento angolare di un sistema)**.** Il momento angolare di un sistema di N punti materiali è definito come:

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N}\vec{l}_\Omega^{(i)}$$

Teorema 5.5: II equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_\Omega = \vec{\tau}_\Omega^{(est)} - \vec{v}_\Omega \times M\vec{V}_{CM}$$

In particolare, se si sceglie un polo fisso ($\vec{v}_\Omega = 0$), oppure se $\vec{v}_\Omega // \vec{V}_{CM}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_\Omega = \vec{\tau}_\Omega^{(est)}$$

Dimostrazione. Consideriamo $\frac{d}{dt}\vec{L}_\Omega = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_\Omega^{(i)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}[(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega)\times\vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{N}(\vec{v}_i - \vec{v}_\Omega)\times\vec{p}_i + \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega)\times\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\vec{v}_\Omega\times\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i + \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega)\times\vec{f}_i = -\vec{v}_\Omega\times\vec{P} + \sum_{i=1}^{N}\vec{\tau}_\Omega^{(i)}$.

Poichè $\vec{\tau}_\Omega = \sum_{i=1}^{N}\vec{\tau}_\Omega^{(i)}$, si ha $\frac{d}{dt}\vec{L}_\Omega = \vec{\tau}_\Omega - \vec{v}_\Omega\times M\vec{V}_{CM}$.

Ora scomponiamo la risultante dei momenti delle forze nella risultante dei momenti delle forze interni e nella risultante dei momenti delle forze esterne: $\vec{\tau}_\Omega = \vec{\tau}_\Omega^{(est)} + \vec{\tau}_\Omega^{(int)}$.

Ora $\vec{\tau}_\Omega^{(int)} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega)\times\vec{f}_i^{(int)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega)\times\vec{f}_{ij}^{(int)}$. Fissiamo una coppia (i,j); abbiamo: $\vec{\tau}_{(i+j)} = (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega)\times\vec{f}_{ij}^{(int)} + (\vec{r}_j - \vec{r}_\Omega)\times\vec{f}_{ji}^{(int)}$. Per la III legge di Newton, $\vec{f}_{ij}^{(int)} = -\vec{f}_{ji}^{(int)}$, quindi $\vec{\tau}_{(i+j)} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{f}_{ij}^{(int)} = 0$, dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ e $\vec{f}_{ij}^{(int)}$ sono paralleli. Quindi $\vec{\tau}_\Omega^{(int)} = 0$.

Perciò: $\frac{d}{dt}\vec{L}_\Omega = \vec{\tau}_\Omega^{(est)} - \vec{v}_\Omega\times M\vec{V}_{CM}$. □

Teorema 5.6: III teorema del centro di massa

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM}\times M\vec{V}_{CM}$$

Dimostrazione. Dato un sistema di riferimento $s = (O, x, y, z)$, consideriamo i vettori posizione come somma della posizione del centro di massa e il vettore posizione rispetto ad esso: $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}_{CM}$. Allora $\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i' + \vec{R}_{CM})\times\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i'\times\vec{p}_i + \vec{R}_{CM}\times\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \vec{L}_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM}\times\vec{P}$. Dunque $\vec{L}_O = \vec{L}_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM}\times M\vec{V}_{CM}$. □

Definizione 5.4 (Sistema isolato)**.** Un sistema isolato è un sistema in cui $\vec{f}_i^{(est)} = 0$ per $i = 1, ..., N$, da cui:

(i) $\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{(est)} = \vec{F}^{(est)} = 0 \implies \vec{P}(t) = \vec{cost}$

(ii) $\vec{\tau}_{i\Omega}^{(est)} = (\vec{r}_j - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_i^{(est)} = 0 \implies \vec{\tau}_\Omega^{(est)} = 0 \implies \vec{L}_\Omega = \vec{cost}$

5.1 Leggi di conservazione e III legge di Newton

Le leggi di conservazione della quantità di moto e del momento angolare per un sistema isolato in realtà discendono da delle particolari proprietà di simmetria dello spazio considerato; in particolare, la quantità di moto si conserva perché lo spazio è **omogeneo** (i suoi punti sono indistinguibili, ossia non c'è un punto privilegiato), il momento angolare si conserva perché lo spazio è **isotropo** (le direzioni sono indistinguibili, ossia non c'è una direzione privilegiata). Questi principi discendono dalla III legge di Newton, ma si dimostra che in realtà sono equivalenti.

Proposizione

In un sistema isolato, la conservazione della quantità di moto e la conservazione del momento angolare implicano la III legge di Newton.

Dimostrazione. Poiché siamo in un sistema isolato, vale: $\vec{f}_i^{(est)} = 0$, $\vec{\tau}_{\Omega_i}^{(est)} = 0$, che implicano $\vec{F}^{(est)} = 0$, $\vec{\tau}_\Omega^{(est)} = 0$. Ma allora $0 = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(est)} + \vec{F}^{(int)} \implies \vec{F}^{(int)} = 0$, dove $\vec{F}^{(int)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_{ij}$.

Fissando ora una coppia (i, j) (ci stiamo quindi riconducendo al caso $N = 2$ [1]), vale: $\vec{F}^{(int)} = \vec{f}_{ij}^{(int)} + \vec{f}_{ji}^{(int)} = 0 \implies \vec{f}_{ij}^{(int)} = -\vec{f}_{ji}^{(int)}$.

Analogamente per il momento angolare, abbiamo: $0 = \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{(est)} + \vec{\tau}_\Omega^{(int)} \implies \vec{\tau}_\Omega^{(int)} = 0$.

Nuovamente fissando ora una coppia (i, j), abbiamo: $\vec{\tau}_\Omega^{(int)} = (\vec{r_1} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r_2} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_{21} = (\vec{r_1} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_{12} - (\vec{r_2} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_{12} = (\vec{r_1} - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12} = 0$, che implica che le forze $\vec{f}_{12}$, $\vec{f}_{21}$ giacciono sulla congiungente dei due corpi. □

Tuttavia, la III legge di Newton prevede delle reazioni istantanee causate dalle forze, e ciò è in contraddizione con il principio di relatività ristretta, secondo il quale non può esistere un corpo con $v > c$. Perciò si preferisce assumere come principi la conservazione della quantità di moto e la conservazione del momento angolare.

[1] Qui in realtà stiamo anche supponendo che l'aggiunta di un corpo al sistema non modifichi le forze già presenti tra gli altri corpi.

5.2 Corpi macroscopici come sistemi di punti materiali: limite del continuo

Dato un corpo esteso di massa M e volume V, consideriamo le sue $N = \frac{V}{\Delta V}$ porzioni di volume ΔV e massa Δm_i, dove $\Delta V \ll V$ e $\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = M$.

Definizione 5.5 (Densità media del corpo)**.** La densità media del corpo descrive come la massa del corpo in $\vec{r}_i$ è distribuita nello spazio, ed è definita come:

$$\rho_m(\vec{r}_i) = \frac{\Delta m_i}{\Delta V}$$

Passando al limite del continuo:
$N \to +\infty : \Delta V \to 0$ (poiché $V = cost$).

Definizione 5.6 (Densità volumetrica)**.** La densità volumetrica di un corpo esteso è definita come:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Definizione 5.7 (Massa di un elemento infinitesimo)**.** La massa di un elemento infinitesimo di un corpo esteso è definita come:

$$dm = \rho(\vec{r})dV$$

Da queste definizioni, si possono generalizzare tutte le altre per i corpi estesi.

Definizione 5.8 (Massa di un corpo esteso)**.** La massa di un corpo esteso è:

$$M = \int dm = \int_V \rho(\vec{r})dV$$

Definizione 5.9 (Centro di massa di un corpo esteso)**.** Il centro di massa di un corpo esteso è definito come:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\rho(\vec{r})dV$$

Definizione 5.10 (Quantità di moto di un corpo esteso)**.** La quantità di moto di un corpo esteso è definita come:

$$\vec{P} = \int \vec{v}\rho(\vec{r})dV$$

Definizione 5.11 (Momento angolare di un corpo esteso)**.** Il momento angolare di un corpo esteso è definito come:

$$\vec{L}_\Omega = \int (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{v}\rho(\vec{r})dV$$

5.3 Sistemi di punti materiali soggetti a forze parallele

Proposizione

Un sistema di punti materiali in cui agisce un insieme di forze parallele $\vec{f_i} = f_i \hat{u}$ è equivalente allo stesso sistema in cui è applicata la forza $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} f_i \hat{u}$ nel punto $\vec{R}_f = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i}$.

Dimostrazione. I due sistemi hanno chiaramente la stessa risultante, quindi basta mostrare che i due sistemi hanno lo stesso momento. Questo è immediato da $\vec{\tau}_\Omega = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times f_i \hat{u} = \sum_i \vec{r}_i \times f_i \hat{u} - \sum_i \vec{r}_\Omega \times f_i \hat{u} = (\sum_i f_i \vec{r}_i) \times \hat{u} - \vec{r}_\Omega \times (\sum_i f_i \hat{u}) = (\sum_i f_i) \vec{R}_f \times \hat{u} - \vec{r}_\Omega \times \vec{F} = \vec{R}_f \times (\sum_i f_i \hat{u}) - \vec{r}_\Omega \times \vec{F} = (\vec{R}_f - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}$. $\square$

Nel caso della forza peso, abbiamo $\vec{f_i} = -m_i g \hat{k}$, da cui $\vec{F} = -Mg\hat{k}$.

Allora $\vec{R}_f = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{R}_G$, che è il baricentro del corpo (e coincide con il centro di massa).

5.4 Sistema di riferimento del centro di massa

Fissiamo un SRI $s = (O, x, y, z)$. Dato il centro di massa $\vec{R}_{CM}$, i vettori posizione rispetto ad esso sono $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$.
Sia ora il sistema di riferimento $s' = (O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', z')$ (in generale non SRI).
In s vale $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$, mentre in s' vale $\vec{R}_{CM}' = 0 \implies \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0$, perciò $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i' = \vec{P}' = 0$.

Supponiamo x', y', z' abbiano un'orientazione costante rispetto a s.
Allora risulta: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_{CM}$ e $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_{CM}$.

Teorema 5.7: Teorema di König per il momento angolare

Consideriamo un sistema di N punti materiali, un SRI $s = (O, x, y, z)$ e il sistema di riferimento $s' = (\Omega_{CM}, x', y', z')$, e supponiamo s' si muova di moto traslatorio rispetto a s. Allora:

$$\vec{L}'_{\Omega_{CM}} = \vec{L}_{\Omega_{CM}}$$

Dimostrazione. Abbiamo che $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R}_{CM}$, $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{V}_{CM}$ e $\sum m_i \vec{r'_i} = 0$. Ora risulta:

$$\begin{aligned}
\vec{L}'_{\Omega_{CM}} &= \sum \vec{r'_i} \times m_i \vec{v'_i} = \sum \vec{r'_i} \times m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_{CM}) \;\; = \\
&= \sum \vec{r'_i} \times m_i \vec{v}_i - \sum \vec{r'_i} \times m_i \vec{V}_{CM} \;\; = \\
&= \sum (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i - \cancel{\sum m_i \vec{r'_i} \times \vec{V}_{CM}} \;\; = \\
&= \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \sum \vec{R}_{CM} \times m_i \vec{v}_i \;\; = \\
&= \vec{L}_0 - \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} \overset{IIIth.CM}{=} \vec{L}_{\Omega_{CM}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.8: Teorema di König per l'energia cinetica

Consideriamo un sistema di N punti materiali, un SRI $s = (O, x, y, z)$ e il sistema di riferimento $s' = (\Omega_{CM}, x', y', z')$, e supponiamo s' si muova di moto traslatorio rispetto a s. Allora:

$$K = K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

Dimostrazione. Vale $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v'_i} + \vec{V}_{CM})^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{N} m_i) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot 2 \vec{v'_i} \cdot \vec{V}_{CM} = K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + 0$, dove l'annullamento del terzo termine deriva dal fatto che $\vec{P'} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v'_i} = 0$. □

Teorema 5.9: Teorema delle forze vive per un sistema di N punti materiali

Dato un sistema di N punti materiali, vale:

$$dL = dK$$

Dimostrazione. Per ciascun punto materiale, vale $dL_i = dK_i$, dove la risultante sul punto i-esimo si può scomporre $\vec{f_i} = \vec{f}_i^{(est)} + \vec{f}_i^{(int)}$. Dunque $dL = \sum_{i=1}^{N} dL_i = \sum_{i=1}^{N} (dL_i^{(est)} + dL_i^{(int)}) = \sum_{i=1}^{N} dK_i = dK$. □

Definizione 5.12 (Configurazione di un sistema di N punti materiali)**.** La configurazione $\{A\}$ di un sistema di N punti materiali al tempo t_A è l'insieme delle posizioni e delle velocità di ciascun punto in quell'istante:

$$\{A\} = \{\vec{r}_i(t_A), \vec{v}_i(t_A)\}$$

Perciò, in generale, dati due istanti t_A e t_B e le rispettive configurazioni $\{A\} = \{\vec{r}_i(t_A), \vec{v}_i(t_A)\}$ e $\{B\} = \{\vec{r}_i(t_B), \vec{v}_i(t_B)\}$, vale:

$$L_{\{A\}\{B\}} = K_{\{B\}} - K_{\{A\}}$$

5.5 Lavoro delle forze interne di un sistema di N punti materiali

Consideriamo il caso $N = 2$: abbiamo $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = r_{12}\hat{r}_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|\hat{r}_{12}$.

Il lavoro delle forze interne vale: $dL^{(int)} = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{f}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_{12} = f\hat{r}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}$, dove si è usata la III legge di Newton ($\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$).

Ora calcoliamo $\frac{d}{dt}\vec{r}_{12} = \frac{dr_{12}}{dt}\hat{r}_{12} + r_{12}\frac{d\hat{r}_{12}}{dt}$. Inoltre vale $\frac{d\hat{r}_{12}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{\tau}$, dove $\vec{\tau}$ è un versore con $\vec{\tau} \perp \hat{r}_{12}$ e $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ è la velocità angolare di $\hat{r}_{12}$.

Vale quindi:

$$dL^{(int)} = f\hat{r}_{12} \cdot \left(\frac{dr_{12}}{dt}\hat{r}_{12} + r_{12}\frac{d\theta}{dt}\vec{\tau}\right) dt = f\frac{dr_{12}}{dt}dt = f dr_{12} = f d|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

Supponendo che aggiungendo un corpo, le forze già presenti non vengano modificate, si può generalizzare il discorso per tutte le coppie.

Quindi in generale le forze interne di un sistema di N punti materiali compiono lavoro. Tuttavia se il corpo è rigido (ossia le distanze tra i punti non variano nel tempo), le forze interne non compiono lavoro.

5.6 Sistemi di due corpi

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale $s = (O, x, y, z)$ in cui sono presenti due corpi. Definiamo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Il centro di massa è $\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$.

Consideriamo ora il sistema di riferimento del centro di massa $s' = (O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', z')$, in cui vale $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_{CM}$, $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_{CM}$, $\vec{r}' = \vec{r}$. Allora valgono le seguenti:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_1}\vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r} \qquad \vec{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} = \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

dove μ è la massa ridotta, definita come $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ oppure equivalentemente $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$.

Supponiamo che s' si muova di moto traslatorio rispetto a s. Allora le velocità dei corpi sono $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM}$, $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM}$ e $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = \vec{v}'$. Possiamo quindi riscriverle come

$$\vec{v}'_1 = -\frac{\mu}{m_1}\vec{v} \qquad \vec{v}'_2 = \frac{\mu}{m_2}\vec{v}$$

Le quantità di moto risultano $\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = -\mu\vec{v}$ e $\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = \mu\vec{v}$, da cui $\vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$.

L'energia cinetica in s' risulta $K' = \frac{1}{2}m_1{v'}_1^2 + \frac{1}{2}m_2{v'}_2^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$. Per il teorema di König per l'energia cinetica con $N = 2$, abbiamo:

$$K = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2$$

Analogamente, applichiamo il teorema di König per il momento angolare con $N = 2$ e il III teorema del centro di massa: $\vec{L}_O = \vec{L}_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} = \vec{L}'_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$, dove $\vec{L}'_{\Omega_{CM}} = \vec{r}_1' \times \vec{p}_1' + \vec{r}_2' \times \vec{p}_2' = \vec{r} \times \mu\vec{v}$, da cui otteniamo

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \mu\vec{v} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$$

Consideriamo ora un sistema isolato di due punti: vale quindi $\vec{f}_1^{est} = 0$ e $\vec{f}_2^{est} = 0$, da cui $\vec{P} = \vec{cost}$ e $\vec{L} = \vec{cost}$.

Definizione 5.13 (Urto elastico e anelastico)**.** Un urto si dice elastico se l'energia cinetica si conserva durante l'urto. un urto si dice anelastico se l'energia cinetica non si conserva durante l'urto; si dice totalmente anelastico se i due corpi, dopo l'urto, si muovono con la stessa velocità e rimangono uniti a formare un unico corpo.

Studiamo un urto elastico tra due corpi nel caso unidimensionale.

Porre la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia cinetica equivale e a:

$$\begin{cases} m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i}$$

6 Corpi rigidi

6.1 Trasformazione della velocità e dell'accelerazione

Calcoliamo la derivata di un vettore $\vec{u} = \vec{u}(t)$ rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$$

Fissando un sistema di riferimento $s \equiv (O, x, y, z)$, abbiamo $\vec{u}(t) = u_x(t)\hat{\imath} + u_y(t)\hat{\jmath} + u_z(t)\hat{k}$, e quindi $\dot{\vec{u}} \equiv \frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x(t)\hat{\imath} + \dot{u}_y(t)\hat{\jmath} + \dot{u}_z(t)\hat{k}$.

Consideriamo ora il versore $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, con $|\hat{u}| = 1$.

Da questo segue che $\hat{u}^2 = 1 \implies \frac{d}{dt}\hat{u}^2 = 0$, ma $\hat{u}^2 = \hat{u} \cdot \hat{u}$, perciò $\frac{d}{dt}\hat{u}^2 = \frac{d}{dt}(\hat{u} \cdot \hat{u}) = 2\frac{d\hat{u}}{dt} \cdot \hat{u} = 0 \implies \frac{d\hat{u}}{dt} \perp \hat{u}$.

Ora calcoliamo $\frac{d\hat{u}}{dt}$. Abbiamo $\Delta\hat{u} \equiv \hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t)$; sia θ l'angolo tra $\hat{u}(t)$ e $\hat{u}(t + \Delta t)$, allora $\frac{|\Delta\hat{u}|}{2} = |\hat{u}| \sin\frac{\Delta\theta}{2} \implies |\Delta\hat{u}| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$.

Ora possiamo scrivere $\frac{\Delta\hat{u}}{\Delta t} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t}\frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|}$: per il primo termine vale $\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ che, per $\Delta t \to 0 (\Delta\theta \to 0)$, tende a $\frac{d\theta}{dt}$. Definiamo poi $\hat{\tau} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|}$, e vale $|\hat{\tau}| = 1$.

Perciò, per $\Delta t \to 0$, abbiamo $\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\tau}$.

Inoltre, poiché $\frac{d\hat{u}}{dt} \perp \hat{u}$, vale $\hat{\tau} \perp \hat{u}$.

Possiamo quindi introdurre un terzo versore $\hat{\eta}$ in modo da avere una terna di versori destrorsa $(\hat{u}, \hat{\tau}, \hat{\eta})$.

Definiamo ora $\vec{\omega}(t) \equiv \frac{d\theta}{dt}\hat{\eta} \equiv \dot{\theta}\hat{\eta}$. Abbiamo che $\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\tau} = \frac{d\theta}{dt}(\hat{\eta} \times \hat{u})$, da cui

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}$$

Inoltre $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\eta} = \frac{d\theta}{dt}(\hat{u} \times \hat{\tau}) = \hat{u} \times \frac{d\theta}{dt}\hat{\tau}$, da cui

$$\vec{\omega} = \hat{u} \times \frac{d\hat{u}}{dt}$$

Tornando alla derivata di un generico vettore $\vec{u}(t) = u(t)\hat{u}(t)$, abbiamo: $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\hat{u} + u\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\hat{u} + u(\vec{\omega} \times \hat{u})$, perciò:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\hat{u} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

Consideriamo un SRI $s \equiv (O, x, y, z)$, e un sistema (in generale non inerziale) $s' \equiv (O', x', y', z')$. Sia $\vec{R} = \vec{OO'}$: allora $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R}$.

Sia ora $\vec{u} = \vec{u}(t)$ un vettore con rappresentazione in coordinate cartesiane in s e s' $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k} = u'_x\hat{\imath}' + u'_y\hat{\jmath}' + u'_z\hat{k}'$.

In s vale: $\frac{d\vec{u}}{dt}|_s = \frac{u'_x}{dt}|_s\hat{\imath}' + u'_x\frac{d\hat{\imath}'}{dt}|_s + \frac{u'_y}{dt}|_s\hat{\jmath}' + u'_y\frac{d\hat{\jmath}'}{dt}|_s + \frac{u'_z}{dt}|_s\hat{k}' + u'_z\frac{d\hat{k}'}{dt}|_s$. Se il tempo è assoluto, $\frac{u'_x}{dt}|_s = \frac{u'_x}{dt}|_{s'}$ (analogo per le altre variabili). Inoltre

$\frac{d\hat{\imath}'}{dt}|_s = \vec{\omega} \times \hat{\imath}'$ (analogo per gli altri versori). Otteniamo così la relazione di Poisson:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}|_s = \frac{d\vec{u}}{dt}|_{s'} + \vec{\omega} \times \vec{u} \tag{23}$$

Perciò vale $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}|_s = \frac{d\vec{R}}{dt}|_s + \frac{d\vec{r}'}{dt}|_s$. Inoltre per Poisson: $\frac{d\vec{r}'}{dt}|_s = \frac{d\vec{r}'}{dt}|_{s'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$.

Allora, posto $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}|_s$ la velocità di O' misurata in s, otteniamo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) = \vec{v}'(t) + \vec{v}_\tau(t) \tag{24}$$

dove $\vec{v}_\tau(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$ è la velocità di trascinamento.

Come casi particolari, se il moto è di traslazione pura, $\vec{\omega}(t) = 0\ \forall t \implies \vec{v}_\tau = \vec{V}$. Se il moto è di rotazione pura, $\vec{V}(t) = 0\ \forall t \implies \vec{R}(t) = cost$ (cioè O' è fisso in s) $\implies \vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$.

Riapplicando lo stesso ragionamento per l'accelerazione, otteniamo:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})] + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{Co} \tag{25}$$

dove $\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$ è l'accelerazione di trascinamento e $\vec{a}_{Co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ è l'accelerazione di Coriolis.

6.2 Cinematica dei corpi rigidi

Definizione 6.1 (Corpo Rigido)**.** Chiameremo corpo rigido un corpo indeformabile, cioè un corpo per il quale le distanze $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ fra ogni coppia dei punti del corpo rimangono costanti nel tempo indipendentemente dalle forze esterne che agiscono sul corpo stesso.

Un corpo rigido possiede 6 gradi di libertà[2] e quindi il suo moto può essere determinato dalle due equazioni (vettoriali) cardinali della meccanica dei sistemi di punti materiali. In natura non esistono corpi perfettamente rigidi. Un corpo reale può essere approssimato ad un corpo rigido entro certi limiti che riguardano sia l'intensità delle forze esterne sia la dinamica interna (vale a dire, le forze interne) del corpo. Vediamo adesso la cinematica dei corpi rigidi.

Consideriamo il sistema di riferimento solidale al centro di massa $s' = \{O', x', y', z',\ \vec{v_i}' = 0\ \forall i\}$. Allora per la formula di trasformazione della velocità si ha che $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$, dove $\vec{R} \equiv \overrightarrow{OO'}$ e $\vec{V} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_s$; riscrivendo la precedente relazione per due punti del corpo A e B, otteniamo la relazione $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, e ponendo $A \equiv CM$ segue

$$\vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}_{CM})\ ,$$

dove $\vec{R}_{CM} = \vec{R}_{CM}(t)$ e $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

[2] Ad esempio le tre coordinate del centro di massa (CM) del corpo e i coseni direttori del sistema di riferimento (SR) del centro di massa rispetto ad un sistema di riferimento inerziale esterno. Questi ultimi sono 9, ma si riconducono a tre per le condizioni di ortonormalità dei vettori di base.

6.2.1 Moto di pura traslazione

Supponiamo che un corpo rigido abbia velocità angolare nulla $\vec{\omega}(t) = 0 \ \forall t$, e si muova dunque di moto puramente traslatorio: la relazione precedente ci dice che ogni punto del corpo rigido ha velocità $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM}$. Per la prima equazione cardinale vale $\vec{F}^{est} = M\vec{a}_{CM}$; per quanto riguarda la quantità di moto si ha invece che $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$, infatti

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \left(\sum m_i\right) \vec{V}_{CM} = M\vec{V}_{CM} \ \ .$$

Mostriamo a questo punto che nel sistema di riferimento s vale $\vec{L}_{\Omega_{CM}} = 0$, ossia il momento angolare totale con polo il centro di massa è nullo. Difatti,

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{\Omega_{CM}} &= \sum(\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i = \sum(m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i) - \vec{R}_{CM} \times \sum m_i \vec{v}_i \ = \\
&\overset{*}{=} \left(\sum m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{V}_{CM} - \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} \ = \\
&= M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} - \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} \ = \ 0.
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo usare il III teorema del centro di massa:

$$\vec{L}_{\Omega} = \cancel{\vec{L}_{\Omega_{CM}}} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{L}_{\Omega} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} \ \ .$$

6.2.2 Moto rotatorio attorno ad un asse fisso

IMMAGINI VARIE

Consideriamo il sistema di riferimento solidale al corpo $s' = \{O' \equiv O, x', y', z', \ \vec{v}_i{}' = 0 \ \forall i\}$, dove $z' \equiv z$. Segue $\vec{R} = 0$ e $\vec{V} = 0$; supponiamo che il sistema abbia velocità angolare $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$, dove $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. L'espressione della velocità nel sistema di riferimento s è $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Dato che per il I teorema del centro di massa $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$, si ha che $\vec{P} = M(\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM})$; pertanto se il centro di massa si trova su z (vale a dire $x_{CM} = 0$, $y_{CM} = 0$) vale $\vec{R}_{CM} = z_{CM}\hat{k}$ e di conseguenza $\vec{P} = 0$.

Si hanno dunque due possibilità a seconda della posizione del centro di massa: se

$$\vec{P} = 0 \ \ \forall t, \quad \text{allora} \quad \vec{F}^{est} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \ \ ;$$

se invece

$$\vec{P} = M(\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}) \neq 0 \quad \text{vale che} \quad \vec{F}^{est} \neq 0 \ \ .$$

Ci occupiamo a questo punto di calcolare il momento angolare totale per il moto di un corpo rigido attorno ad un asse fisso. Dimostriamo quindi la seguente

Proposizione : Momento angolare totale

Il momento angolare totale $\vec{L}$ di un corpo rigido ruotante attorno ad un asse fisso, in generale, non è parallelo ad $\vec{\omega}$ ma possiede anche una componente ad esso perpendicolare:

$$\vec{L} = \vec{L}_{//} + \vec{L}_{\perp} \ \ .$$

IMMAGINE

Dimostrazione. Scomponiamo come nel grafico il vettore posizione di ogni punto in $\vec{r}_i = z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i$, con $\vec{\rho}_i \perp \hat{k}$ e di conseguenza $\vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}$. Sia s' il sistema di riferimento solidale al corpo. Calcoliamo quindi il momento angolare totale dal sistema s:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \sum (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i[\vec{\omega} \times (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i)] = \\ &= \sum (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) = \\ &= \sum m_i z_i \hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \qquad * \end{aligned}$$

Ricordiamo che vale la relazione del triplo prodotto vettoriale $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$. Il secondo termina della ($*$) diventa allora

$$\begin{aligned} \sum m_i[\vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)] &= \sum m_i[\rho_i^2\vec{\omega} - \cancel{(\vec{\rho}_i \cdot \vec{\omega})}\vec{\rho}_i] = \\ &= \left(\sum m_i\rho_i^2\right)\vec{\omega} \qquad := \ \vec{L}_{//} \ ; \end{aligned}$$

il primo termine della relazione della ($*$) si trasforma invece in

$$\begin{aligned} \sum m_i z_i[\hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)] &= \sum m_i z_i[\cancel{(\hat{k} \cdot \vec{\rho}_i)}\vec{\omega} - (\hat{k} \cdot \vec{\omega})\vec{\rho}_i] = \\ &- \sum m_i z_i \vec{\rho}_i \omega \qquad := \ \vec{L}_{\perp} \ . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato che $\vec{L} = \vec{L}_{//} + \vec{L}_{\perp}$. □

Definizione 6.2 (Momento di inerzia)**.** Definiamo momento di inerzia I il valore $I = \sum m_i\rho_i^2$. Possiamo quindi scrivere $\vec{L}_{//} = I\vec{\omega}$ e $\vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}$.

6.2.3 Momento di inerzia

IMMAGINE

Teorema 6.1: Teorema di Huygens-Steiner

Siano I_{CM} il momento di inerzia rispetto ad una asse passante per il centro di massa del corpo, I il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa e posto a distanza d da quest'ultimo e M la massa del corpo. Allora vale la relazione

$$I = I_{CM} + Md^2 \ \ .$$

DISEGNI, MOLTI DISEGNI

Dimostrazione. Fissiamo l'asse z di s come asse rispetto al quale vogliamo calcolare I. Possiamo poi scegliere l'asse x in modo che il centro di massa del corpo cada su di esso, cioè in modo tale che si abbia: $x_{CM} = d$, $y_{CM} = 0$, $z_{CM} = 0$. Consideriamo ora un generico punto materiale P_i del corpo e sia P_i^* la proiezione di P_i sull'asse z (si ha quindi $P_i \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_i^* \equiv (0, 0, z_1)$); allora il quadrato della distanza del punto materiale P_i dall'asse z è

$$(\overline{P_i^* P_i})^2 = x_i^2 + y_i^2 \quad ,$$

e dalla definizione di momento d'inerzia si ha $I = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$. A questo punto osserviamo che $x_i = x_i' + d$, $y_i = y_i'$ e $z_i = z_i'$ e sostituiamo nell'espressione di I:

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\sum m_i[(x_i' + d)^2 + y_i'^2] = \sum m_i[x_i'^2 + d^2 + 2x_i'd + y_i'^2] = \\ &= \textstyle\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + (\sum m_i)\, d^2 + 2\,(\sum m_i x_i')\, d = \\ &= I_{CM} + Md^2 + \cancel{2Mx'_{CM}d} = I_{CM} + Md^2 \quad . \end{aligned}$$

□

Abbiamo definito il momento di inerzia come somma dei vari $\{m_i \rho_i^2\}_{i=1\_N}$, ma abbiamo anche definito il corpo rigido come un corpo continuo: è quindi più appropriato definire I passando al limite del continuo interpretando l'integrale come limite della somma ($\rho_i^2 \to r^2$)

$$I = \int r^2 dm \quad .$$

Abbiamo già incontrato la densità (o densità volumetrica) che abbiamo indicato con ρ. Introduciamo altre due grandezze analoghe che sono spesso utili per trattare momenti di inerzia.

Definizione 6.3 (Densità lineare e densità superficiale)**.** Chiamiamo densità lineare λ e densità superficiale σ rispettivamente la derivata della massa rispetto alla lunghezza e la derivata della massa rispetto alla superficie:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} \qquad \text{e} \qquad \sigma = \frac{dm}{dS} \quad .$$

Calcoliamo alcuni momenti di inerzia notevoli. (**DISEGNI**)

Disco omogeneo Sia M la massa del disco e R il suo raggio. Dal momento che il disco è omogeneo,

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \quad \text{è costante e vale} \quad \sigma = \frac{M}{\pi R^2} \quad ;$$

inoltre si ha che $dm = \sigma dS = \sigma d(\pi r^2) = \sigma 2\pi r dr$. Possiamo quindi concludere che

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2(\sigma 2\pi r dr) = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr$$

$$\Rightarrow \qquad I = \frac{1}{2} M R^2 \quad .$$

Barra omogenea sottile Sia M la massa della barra e sia ℓ la sua lunghezza. Ricaviamoci il momento di inerzia della barra quando ruota attorno ad un asse passante per il suo punto medio e quando ruota attorno ad un asse passante per una delle sue estremità. Dal momento che la barra è omogenea si ha che

$$\lambda = \frac{dm}{dx} \quad \text{è costante e vale} \quad \lambda = \frac{M}{\ell} \ ;$$

pertanto

$$I = \int x^2 dm = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \lambda x^2 dx = \frac{1}{12} M \ell^2 \ .$$

Per ricavare il momento nel secondo caso usiamo il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} M \ell^2 \ .$$

Cilindro cavo Sia M la massa del cilindro cavo, R_1 il suo raggio interno e R_2 il suo raggio esterno, e sia ℓ la sua altezza. Poiché il cilindro è omogeneo, la sua densità volumetrica è costante:

$dm = \rho dV = \rho 2\pi r \ell dr$, pertanto

$$I = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho 2\pi r \ell dr = 2\pi\rho\ell \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \ .$$

Cilindro pieno Nel caso di cilindro pieno si ha $R_1 = 0$, $R_2 \equiv R$, e il momento di inerzia coincide con quello di un disco $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Anello Nel caso di un anello, ossia quando $R_1 \to R_2 \equiv R$, il momento di inerzia vale doppio: $I = MR^2$.

Sfera omogenea (**mia dim, se non ti piace sostituiscila o toglila pure**) Sia M la massa della sfera e R il suo raggio. Dal momento che la sfera è omogenea, la densità

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{è costante e vale} \quad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \ .$$

Usiamo nuovamente la relazione $dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr$, con $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Pertanto

$$I = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} dr = 4\pi\rho R \mathcal{I} \quad \text{dove}$$

$$\mathcal{I} = \int_0^R r^3 \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr \underset{\substack{r/R = \sin t \\ dr = R\cos t}}{=} R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^2 t dt =$$

$$= R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos^2 t - \sin t \cos^4 t) dt = R^4 \left| -\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15} R^4 \ .$$

Per concludere

$$I = 4\pi\rho R \cdot \frac{2}{15} R^4 = 4\pi \frac{3M}{4\pi R^3} R^5 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{5} M R^2 \ .$$

6.3 Dinamica dei corpi rigidi con asse fisso

Consideriamo il sistema dato da un corpo rigido in moto rotatorio attorno ad un asse fisso (DISEGNO). Sia $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ la velocità angolare del sistema s' rispetto al sistema s, e sia $\theta = \theta(t)$ la legge oraria del moto. Per la seconda equazione cardinale della meccanica

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{\,est} - \vec{v}_\Omega \times M \vec{V}_{CM} \ ,$$

e nel nostro caso prendiamo Ω sull'asse z, così che $\vec{v}_\Omega = 0$: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\,est}$.

Definizione 6.4 (Momenti assiali)**.** Definiamo il *momento assiale delle forze esterne* come la componente assiale del momento totale delle forze esterne:

$$\tau_z^{est} = \vec{\tau}^{\,est} \cdot \hat{k} \ .$$

Dall'equazione precedente ricaviamo che

$$\tau_z^{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{k} = \frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \hat{k}) \ ;$$

a tal proposito denomimiamo *momento angolare assiale* proprio la componente assiale del momento angolare $L_z = \vec{L} \cdot \hat{k}$, per cui vale la relazione tra i momenti assiali $\tau_z^{est} = \dfrac{dL_z}{dt}$.

Scrivendo la scomposizione del momento angolare in componente parallela e perpendicolare all'asse troviamo

$$\begin{aligned} L_z &= \vec{L} \cdot \hat{k} = (I\vec{\omega} + \vec{L}_\perp) \cdot k = I\vec{\omega} \cdot k + \cancel{\vec{L}_\perp \cdot k} = \\ &= I\omega \ . \end{aligned}$$

Dato che il momento di inerzia è costante nel corpo rigido, possiamo concludere che

$$\tau_z^{est} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \ ,$$

dove abbiamo chiamato α *l'accelerazione angolare*

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \ .$$

Da ciò possiamo scrivere l'equazione del moto che produce la legge oraria:

$$\tau_z^{est} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \theta(t) \ .$$

(a questo punto bombaci mette un disegno e scrive di nuovo le equazioni cardinali... secondo me possiamo evitare)

La scomposizione in componenti del momento angolare induce anche una scomposizione del momento torcente:

$$\vec{\tau}^{\ est} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_{//} + \vec{L}_\perp) = \frac{d\vec{L}_{//}}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{\tau}_{//}^{\ est} + \vec{\tau}_\perp^{\ est} \ .$$

Per la componente parallela si ha

$$\vec{\tau}_{//}^{\ est} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}\hat{k} = \frac{dL_z}{dt}\hat{k} = \tau_z^{est}\hat{k} \ .$$

Per la componente perpendicolare, invece, vale che

Proposizione

$$\vec{\tau}_\perp^{\ est} \equiv \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp + \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp \ .$$

BELLISSIMI DISEGNI

Dimostrazione. Definiamo

$$\vec{\tau}_{\perp 1} := \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_{\perp 2} := \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp$$

e mostriamo che $\vec{\tau}_\perp^{\ est} = \vec{\tau}_{\perp 1} + \vec{\tau}_{\perp 2}$. Partiamo dalla definizione di momento angolare perpendicolare all'asse di rotazione: $\vec{L}_\perp = -\sum m_i z_i \omega \vec{\rho}_i$, con $\vec{r}_i = z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i$ e $\vec{\rho}_i \perp \hat{k}\ \forall i$. Inoltre $\hat{k}$ è costante nel riferimento di s, mentre z_i e $|\vec{\rho}_i|$ sono costanti perché il corpo è rigido. Allora si ha

$$\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\omega\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i\right) = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\left[-\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i\right] + \left[-\omega\sum_i m_i z_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}\right] =$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp + \left[-\omega\sum_i m_i z_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}\right] \ ;$$

per quanto riguarda il secondo termine osserviamo che

$$\vec{r}_i = z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \ ,$$

pertanto

$$-\omega\sum_i m_i z_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = -\omega\sum_i m_i z_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) = \vec{\omega} \times \left(-\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i\right) = \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp \ .$$

□

6.3.1 Pendolo fisico

Si dice *pendolo fisico* (o *pendolo composto*) un corpo rigido vincolato a ruotare, senza attrito, attorno ad un asse fisso orizzontale non passante per il centro di massa del corpo. Fissiamo come nel grafico (grafico) un sistema di riferimento ponendo in z l'asse di rotazione e scegliendo O in modo che $\vec{R}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, 0)$, $d = |\vec{R}_{CM}|$. A questo punto calcolo il momento delle forze esterne (la forza peso è l'unica ad intervenire): $\vec{\tau}^{\,est} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = -Mgd\sin\theta\hat{k}$. Il momento assiale vale invece $\tau_z = -Mgd\sin\theta$, dunque si ha

$$\tau_z = I\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta \quad \text{ossia} \quad \ddot{\theta} + \frac{Md}{I}g\sin\theta = 0 \ ;$$

$$\text{ponendo} \quad \omega = \sqrt{\frac{Md}{I}g} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0 \ ,$$

dove abbiamo ritrovato l'equazione differenziale lineare del pendolo semplice (attenzione: in questo caso ω è una costante e non ha nulla a che vedere con $\dot{\theta}$). Anche in questo caso possiamo fare l'*approssimazione per piccole oscillazioni*, ossia quando $\theta(t) \ll 1$ *rad*, allora $\sin\theta \sim \theta$, e pertanto l'equaione differenziale precedente diventa $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ che descrive la legge oraria del moto armonico $\theta(t) = \Theta\sin(\omega t + \phi_0)$, il cui periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}} \ .$$

Definizione 6.5. Lunghezza ridotta Definiamo la lunghezza ridotta del pendolo fisico come il valore $\ell^* = \frac{I}{Md}$. Sostituendo nell'espressione del periodo, possiamo scrivere che $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^*}{g}}$, ossia un pendolo fisico ha lo stesso periodo di oscillazione di un pendolo semplice di lunghezza ℓ^*.

Adesso utilizzando il teorema di Huygens-Steiner possiamo scrivere il momento di inerzia I del corpo attorno all'asse fisso di rotazione (asse z) in termini del momento di inerzia I_{CM} rispetto ad un asse parallelo a z e passante per il centro di massa del corpo:

$$I = I_{CM} + Md^2 \quad \Longrightarrow \quad \ell^* = \frac{I_{CM}}{Md} + d \ .$$

figura cerchietto

Dalla relazione precedente segue immediatamente che se si prende un altro asse qualsiasi (ad esempio un asse uscente dal punto P in figura) parallelo all'asse z (asse uscente dal punto O in figura) la lunghezza ridotta ℓ^* non cambia e di conseguenza il pendolo fisico oscilla con lo stesso periodo.

Più in generale, se si prende un altro asse di sospensione parallelo all'asse z (o ad uno degli assi ad esso paralleli passanti per i punti P precedentemente individuati) e passante per un punto P_1 del corpo che dista d_1 dal centro di massa ($\overline{\Omega_{CM}P_1} = d_1$) il periodo di oscillazione del pendolo fisico non cambia se è soddisfatta la seguente relazione: $\ell^* \equiv \ell^*(P) = \ell^*(P_1) \equiv \ell_1^*$, cioè

$$\frac{I_{CM}}{Md} + d = \frac{I_{CM}}{Md_1} + d_1 \quad \Rightarrow \quad (d_1 - d)I_{CM} = Md_1 d(d_1 - d) \ ;$$

si hanno dunque due casi:

(1) $d_1 = d$, ossia il caso precedenteo in cui gli assi sono equidistanti dal centro di massa;

(2) $d_1 \neq d$ e di conseguenza $I_{CM} = Md_1 d$, ovvero

$$(*) \qquad d_1 = \frac{I_{CM}}{Md} = \ell^* - d \quad \text{e} \quad d + d_1 = \ell^* \ .$$

DISEGNONE Si ottiene dunque una situazione anaolga a quella rappresentata nel grafico: l'ellisse azzurra rappresenta la sezione del corpo rigido (intersezione del corpo con il piano $z = 0$). Tutti gli assi di sospensione tra loro paralleli che soddisfano l'equazione $(*)$ danno, per costruzione, lo stesso periodo T di oscillazione del pendolo fisico. Tali assi costituiscono due cilindri, detti *cilindri coniugati*, di raggi d e d_1 e aventi come asse una linea retta passante per il centro di massa del corpo.

Calcoliamo ora il periodo di oscillazione minimo T_{min} del pendolo fisico che si ha in corrispondenza del valore minimo della lunghezza ridotta ℓ^*. Abbiamo ricavato le relazioni

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^*}{g}} \quad \text{e} \quad \ell^* = \frac{I_{CM}}{Md} + d \ ;$$

(grafico di $\ell^* = \ell^*(d)$), cerchiamo allora il valore minimo tra i punti in cui si annulla la derivata, e scopriamo che ne esiste uno soltanto:

$$\frac{\partial}{\partial d}(\ell^*) = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = \sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} \ ;$$

in corrispondenza di tale punto le funzioni assumono i valori

$$\ell^*_{min} = 2\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} \quad \text{e} \quad T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}} \ .$$

Esempio di pendolo fisico - barra rigida omogenea e sottile. DISEGNO

Siano rispettivamente L la lunghezza e M la massa della barra. Per quanto visto il momento di inerzia vale

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 \ \text{, per cui vale} \quad \ell^* = \frac{1}{12}\frac{L^2}{d} + d \ :$$

$$d(\ell^*_{min}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}L \simeq 0.2887 \ L \ ,$$

$$\ell^*_{min} = \frac{1}{\sqrt{3}} L \simeq 0.577 \;\; L \;\; ,$$

$$T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell^*_{min}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L}{g}} \;\; .$$

Poniamo

$$T_0 := 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

T_0 ha le dimensioni di un tempo ed è uguale al periodo di un pendolo semplice di lunghezza L; allora si ha

$$T_{min} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} T_0 \;\; .$$

Riscriviamo a questo punto T come segue

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell^*}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{1}{12} \frac{L}{d} + \frac{d}{L}}$$

e poniamo $x := \frac{d}{L}$, con $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ in quanto il centro di massa si trova a metà della lunghezza dell'asta (omogenea). Allora possiamo scrivere il periodo come funzione di x

$$T = \sqrt{\frac{1}{12x} + x} \;\; T_0 \;\; .$$

Pertanto nel caso di una barra omogenea sottile, la lunghezza ridotta del pendolo fisico e il suo periodo di oscillazione possono essere scritti in forma adimensionale come segue:

$$\frac{\ell^*}{L} = \frac{1}{12x} + x$$

$$\tau := \frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{12x} + x} \;\; .$$

molti ma molti disegni.

Abbiamo visto che $\tau_z^{est} = \dfrac{dL_z}{dt}$. In particolare se $\tau_z^{est} = 0$, allora L_z è costante, e dato che $L_z = I\omega$, allora anche $\omega = \omega(t)$ è costante. In questo caso $\omega = \dot{\theta}$ implica $\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t - t_0)$.

6.3.2 Energia cinetica di un corpo rigido

Consideriamo i sistemi di riferimento $s = \{O, x, y, z\}$ e $s' = \{O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', z', \;\; \vec{v}'_i = 0 \;\; \forall i\}$. Per la legge di trasformazione della velocità, dal sistema s vale

$$\vec{v}_i = \vec{v}_\tau = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \qquad \text{pertanto}$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 =$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \left\{ \vec{V}^2_{CM} + \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 + 2 \vec{V}_{CM} \cdot \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right] \right\}$$

III termine:

$$
\begin{aligned}
\sum m_i \vec{V}_{CM} \cdot \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})\right] &= \\
= \vec{V}_{CM} \cdot \left\{\vec{\omega} \times \left[\sum m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})\right]\right\} &= \\
\vec{V}_{CM} \cdot \left\{\vec{\omega} \times \left[\sum m_i \vec{r}_i - M\vec{R}_{CM}\right]\right\} &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

II termine:
Ricordiamo che $\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM} = \vec{\rho}_i{}' + z_i \hat{k}'$, con $\vec{\rho}_i \perp \hat{k}'$, e che $\vec{\omega} = \omega \hat{k}'$ (bombastic mette un disegno,..., si può evitare imho), pertanto

$$
\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_i{}' = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i{}' + \cancel{\vec{\omega} \times z_i \hat{k}'} =
$$

$$
= |\vec{\omega}||\vec{\rho}_i{}'| \frac{\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i{}'}{|\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i{}'|} \ ,
$$

per cui elevando al quadrato si ha $\left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})\right]^2 = \omega^2 \rho_i{}'^2$, e di conseguenza il secondo termine si riduce a

$$
\sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})\right]^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left[m_i \rho_i'^2\right] \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \ .
$$

Abbiamo allora dimostrato che

Proposizione : Energia cinetica di un corpo rigido

$$
K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2
$$

Analizziamo adesso un altro caso particolare, e andiamo a calcolare l'energia cinetica per un corpo rigido che sta solo ruotando attorno ad un asse che non passa per il suo centro di massa (disegno, volendo).

Poniamo $O' \equiv O$, da cui $R = 0$ e dunque $V = 0$. Allora la legge per la velocità è $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$:

$$
K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \ ,
$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato l'identità $\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \rho_i^2 \omega^2$. A questo punto, usando il teormea di Huygens-Steiner possiamo sostituire $I = I_{CM} + Md^2$ (disegno) e trovare

$$
K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 \ ;
$$

usiamo per concludere che $|\vec{\rho}_{CM}| = d$, che $\left[\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}\right]^2 = [\omega R_{CM} \sin\alpha]^2 = \omega^2 d^2$ (in quanto il quadrato scalare di un vettore è sempre uguale al quadrato del suo modulo), e che $\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}$. Allora

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M (\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM})^2 = \\ &= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad : \end{aligned}$$

il primo termine rappresenta l'energia cinetica rotazionale attorno ad un asse passante per il centro di massa, mentre il secondo è l'energia cinetica rotazionale associata alla rotazione di un punto di massa M posto nel centro di massa attorno all'asse fissato (z), non passante per il centro di massa. DISEGNO ULTIMA FRASE

6.4 Moto rototraslatorio

6.5 Statica dei corpi rigidi

Supponiamo che nel sistema s si abbia la condizione $\vec{v}_i(t) = 0 \ \forall t$: allora seguono immediatamente $\vec{P}(t) = 0$ e $\vec{L}_\Omega(t) = 0 \ \forall t$, e dato che per le equazioni cardinali

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{est} \qquad \text{e} \qquad \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{\,est}$$

si ha anche $\vec{F}^{est} = 0$ e $\vec{\tau}_\Omega^{\,est} = 0 \ \forall t$.

Teorema 6.2

Sia $\vec{f}_i$, $i = 1, \dots, N$, la risultante dei vettori che agiscono sull'i-esimo punto, e supponiamo che $\vec{F} = \sum \vec{f}_i = 0$. Allora il momento totale $\vec{\tau}_\Omega = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_i$ non dipende da Ω, ossia

$$\vec{\tau}_\Omega = \vec{\tau}_{\Omega'} \quad .$$

disegno in cui spiega quello che sta facendo

Dimostrazione. La semplice osservazione alla base si questo teorema è che

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega'} = \vec{r}_i - \vec{r}_\Omega - \overrightarrow{\Omega\Omega'}$$

(infatti in generale $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \vec{r}_{\Omega'} - \vec{r}_\Omega$). Pertanto

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{\Omega'} &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega'}) \times \vec{f}_i = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}_i - \overrightarrow{\Omega\Omega'} \times \sum \vec{f}_i = \\ &= \vec{\tau}_\Omega - \cancel{\overrightarrow{\Omega\Omega'} \times \vec{F}} = \vec{\tau}_\Omega \quad . \end{aligned}$$

$\square$

7 Gravitazione

Uno dei problemi scientifici che ha impegnato il genere umano per vari millenni (a partire dall' antica civiltà babilonese (1800 AC) e a seguire assira e greca, fino al XVII secolo) è stato quello di descrivere e spiegare il moto apparente dei pianeti (e in particolare il moto retrogrado) sulla sfera celeste.

Il moto retrogrado apparente di questi corpi celesti sconcertò gli astronomi greci e fu una delle ragioni per cui essi chiamarono questi oggetti pianeti, che in greco significa erranti(vagabondi).

Il sistema geocentrico è un modello astronomico che pone la Terra al centro dell'Universo mentre tuti gli altri corpi celesti (pianeti e stelle fisse) ruotano attorno ad essa. Questo modello fu alla base dell'astronomia di tutte le civiltà antiche ed ha ricevuto contributi (documentati) da parte di vari astronomi, matematici e filosofi. Tra questi ricordiamo: Eudosso di Cnido (408 a.C. –355 a.C.), Callippo di Cizico(370 a.C. circa –300 a.C. circa), Aristotele (384 a.C. –322 a.C.), Ipparco di Nicea (200 a.C. –120 a.C.), Claudio Tolomeo (100 circa –175 circa DC) .

Visione Aristotelica del mondo Mondo sublunare: ≪corruttibile≫ Moto dei corpi verso il luogo naturale Mondo sovralunare: ≪perfetto≫ e ≪incorruttibile≫ Moto dei pianeti e delle stelle circolare.

Per interpretare il moto retrogrado dei pianeti le loro orbite attorno alla Terra furono descritte come combinazioni di moti circolari (a volte eccentrici) [Ipparco, Tolomeo].

Il sistema eliocentrico è il modello astronomico che pone il Sole al centro dell'Universo mentre tuti gli altri corpi celesti, cioè i pianeti (inclusa la Terra) e stelle fisse ruotano attorno ad esso. L'eliocentrismo fu introdotto nella prima metà del III secolo a.C. dall'astronomo greco Aristarco di Samo (310 a.C. circa –230 a.C. circa) e riproposto nel 1543 dall'astronomo polacco Niccolò Copernico (1473-1543), con il suo De Revolutionibus orbium coelestium(Le rivoluzioni dei mondi celesti).

Le≪stelle nuove≫(novae) erano considerate dagli antichi come possibili segnali di eventi infausti. Tycho Brahe osservò una nova(Supernova) nella costellazione di Cassiopea nel 1572 e usando i suoi dati osservativi dimostrò che la nova era molto più distante della Luna, demolendo in tal modo la visione aristotelica di perfezione ed incoruttibilità del mondo sovralunare.(T. Brahe, De nova et nullius aevi memoria prius visa stella, 1573)

Le tavole astronomiche di Tycho Brahe (in particolare i dati osservativi su Marte) consentirono a Keplero di confermare la validità del sistema copernicano contro l'imperante sistema tolemaico attraverso la formulazione delle tre leggi sul movimento dei pianeti che a loro volta rappresentarono il punto di partenza per le scoperte di Isaac Newton.

7.1 Leggi di Keplero

Teorema 7.1: I legge di Keplero

Le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono delle ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Teorema 7.2: II legge di Keplero

Il raggio vettore che congiunge il Sole con il pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati per descriverle.

Perciò, detta S l'area spazzata dal raggio vettore, vale $\Delta S = k_0 \Delta t$ con $k_0 = cost$, da cui $\frac{\Delta S_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta S_B}{\Delta t_B}$.

Definizione 7.1 (Velocità areolare)**.** Si definisce la velocità areolare come

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt}$$

Quindi la II legge di Keplero equivale ad affermare $\dot{S} = k_0 = cost$.

Teorema 7.3: III legge di Keplero

I quadrati del periodo di rivoluzione T sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori a delle orbite ellittiche:

$$T^2 = Ka^3$$

7.2 Legge di gravitazione universale

Newton intuì che la forza che provoca la caduta dei corpi sulla Terra è la stessa che governa il moto dei pianeti intorno al Sole.

Principio : Legge di gravitazione universale

Un punto materiale di massa m_2 è attratto da un altro punto materiale di massa m_1, a distanza r, con una forza di modulo

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

In forma vettoriale:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12}$$

La costante G è detta costante di gravitazione universale e vale

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Per i corpi estesi, vale $\vec{f}_{21} \approx -G \sum_i \sum_j \frac{\Delta m_{1i} \Delta m_{12j}}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$. Passamdo al limite del continuo, otteniamo:

$$\vec{f}_{21} = -G \int_{m_1} \int_{m_2} \frac{dm_1 dm_2}{r^2} \hat{r}$$

Il termine massa è stato utilizzato per riferirsi a due concetti distinti:

- la **massa inerziale**, che misura la resistenza di un corpo al cambiamento dello stato di movimento quando viene applicata una forza, secondo la legge $\vec{F} = m_I \vec{a}$;
- la **massa gravitazionale**, che misura l'interazione di un corpo con un campo gravitazionale, secondo la legge $\vec{F} = -G \frac{M m_G}{r^2} \hat{r}$. Di fatto, la massa gravitazionale può essere vista come la carica della forza gravitazionale (in analogia con le cariche della legge di Coulomb).

Ponendo $a = g$, abbiamo $F = m_I a$ e $F = G \frac{M_T m_G}{R_T^2}$, da cui $a = \frac{F}{m_I} = \frac{G M_T}{R_T^2} \frac{m_G}{m_I}$, ma $a_1 = a_1 \implies (\frac{m_G}{m_I})_1 = (\frac{m_G}{m_I})_2 = ...$

Perciò $\frac{m_G}{m_I} = cost$: questo è noto come **principio di equivalenza**. Definiamo poi

$$R = 2 \frac{(\frac{m_G}{m_I})_1 - (\frac{m_G}{m_I})_2}{(\frac{m_G}{m_I})_1 + (\frac{m_G}{m_I})_2}$$

Questo rapporto (che può essere misurato sperimentalmente) ci permette di stabilire entro quale precisione è valido il principio di equivalenza, ovvero ci dà un limite superiore della sua eventuale violazione.

Nel 1909, Eötvös ha stimato $R < 3 \cdot 10^{-9}$. Nel 1970 Braginski ha stimato $R < 3 \cdot 10^{-11}$.

7.3 Forze centrali

Definizione 7.2 (Forza centrale)**.** Una forza $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$ si dice forza centrale se vale $\vec{f} = f(\vec{r})\hat{r}$. Se inoltre si ha $f(\vec{r}) = f(r)$, la forza si dice centrale a simmetria sferica.

Esempio. La forza di attrazione gravitazionale $\vec{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$ è una forza centrale a simmetria sferica.

Proposizione

Se $\vec{f}$ è una forza centrale ($\vec{f} = f(r)\hat{r}$) e $f(r)$ è una funzione integrabile, allora $\vec{f}$ è una forza conservativa.

Dimostrazione. Abbiamo $dL = \vec{f} \cdot d\vec{r}$. Ora $\vec{r} = r\hat{r}$, da cui $d\vec{r} = dr\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}dt$, con $\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{r}$, $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k}$, $\frac{d\hat{r}}{dt} \perp \hat{r}$. Allora $dL = f(r)\hat{r} \cdot (dr\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}dt) = f(r)dr \equiv -dU$. □

Abbiamo quindi $f(r) = -\frac{dU}{dt}$; segue che $U_A - U_B = L_{AB} = \int_A^B f(r)dr$.

In particolare, nel caso della forza di attrazione gravitazione $f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, per $r_B \to +\infty$, ponendo $U_B = U(+\infty) \equiv 0$, possiamo definire l'energia potenziale gravitazionale:

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{26}$$

Proposizione : Conservazione del momento angolare

Sotto l'azione di una forza centrale a simmetria sferica $\vec{f} = f(r)\hat{r}$, il momento angolare si conserva:

$$\vec{l} = cost$$

Dimostrazione. Calcoliamo il momento della forza $\vec{f}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = r\hat{r} \times f(r)\hat{r} = 0$$

Quindi, per la II equazione cardinale con polo O fisso, abbiamo

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \implies \vec{l} = cost$$

□

Quindi, in generale possiamo scegliere come piano il piano su cui giacciono $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$, in modo che $\vec{l} = l_z\hat{k}$.

7.4 Il problema di Keplero: moto di un corpo in un campo centrale a simmetria sferica

Studiamo ora il moto di un corpo sotto l'azione di una forza centrale a simmetria sferica $\vec{f} = f(r)\hat{u}_r$ (dove si è posto $\hat{r} \equiv \hat{u}_r$).

Abbiamo che:

- $\vec{l}$ è costante;
- $\vec{f}$ è conservativa, quindi l'energia meccanica E si conserva.

FIGUIRA

Fisso come in figura i versori $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$, tali che $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$ e $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{u}_r$.

Posto $\vec{r} = r\hat{u}_r$, abbiamo che $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$, dove $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$. Perciò:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

Allora il momento angolare risulta: $\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{u}_r \times (\dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}(\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta)$, da cui

$$\vec{l} = mr^2\dot{\theta}\hat{k} = l_z\hat{k}$$

dove si è posto $l_z = mr^2\dot{\theta}$.

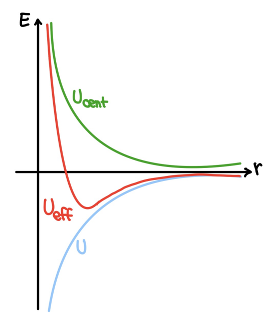
L'energia meccanica invece risulta $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$; nel caso della forza gravitazionale, $U(r) = -\frac{GMm}{r}$.

Svolgendo i calcoli, risulta $v^2 = (\dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta)^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2$. Sostituendo, otteniamo:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r} + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 r^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r} + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

Da questa e da $l_z = mr^2\dot{\theta}$ si ricava la legge oraria della traiettoria.

Nel caso della forza di gravità, definiamo il potenziale efficace e il potenziale centrifugo:



$$U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \qquad U_{cent} = \frac{l^2}{2mr^2}$$

Vale $\frac{1}{2}m\dot{r} \geq 0$, perciò: $E \geq U_{eff}$.

Studiando il grafico dell'energia potenziale efficace possiamo fare delle interessanti considerazioni sul tipo di moto del corpo in base ai valori del momento angolare l e dell'energia meccanica E, che sono delle costanti del moto.

Caso $l = 0$

Vale $l_z = mr^2\dot{\theta} = 0$, quindi si hanno due casi:

(a) $r(t) = 0 \ \forall t$, quindi il corpo è fermo nell'origine;

(b) $\dot{\theta}(t) = 0 \ \forall t \implies \theta(t) = \theta_0 = cost$, quindi il moto è puramente radiale. Qui distinguiamo due sottocasi:

  (b1) $E = E_1 > 0 \implies 0 \leq r < +\infty$: se $\vec{v}_0 = |\vec{v}_0|\hat{u}_r$, il pianeta si allontana dall'origine; se $\vec{v}_0 = -|\vec{v}_0|\hat{u}_r$, il pianeta si avvicina all'origine.

  (b2) $E = E_2 < 0 \implies 0 \leq r \leq r_{max}$, si tratta cioè di un sistema legato.

Caso $l \neq 0$

Vale $E \geq U_{eff}(r_c)$. Distinguiamo tre casi:

(a) $E = U_{eff}(r_c) \implies r(t) = r_c \ \forall t$, ossia si ha un'orbita circolare, dove vale $E_c = U_{eff}(r_c) = \frac{l^2}{2mr_c^2} - \frac{GMm}{r_c} =$

(b) $E_c < E < 0 \implies r_{min} \leq r \leq r_{max}$: si ha un'orbita ellittica;

(c) $E \geq 0 \implies r \geq r_{min}$: si ha un sistema non legato. In particolare, se $E = 0$, si ha un'orbita parabolica; se $E > 0$, si ha un'orbita iperbolica.

Nel piano del moto fissiamo l'asse x in modo che il perielio (P) sia su di esso, cioè in modo che si abbia: $\vec{r}_{min} = r_{min}\hat{\imath} \equiv (r_{min}, \theta = 0)$. Abbiamo inoltre $\hat{u}_r(\theta = 0) = \hat{\imath}$, $\hat{u}_\theta(\theta = 0) = \hat{\jmath}$.

FIGURA

Per ricavare la traiettoria del corpo partiamo dalla seconda legge della dinamica di Newton, dove si è posto $\alpha \equiv GMm$: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{u}_r = \frac{\alpha}{\dot{\theta}r^2}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$, da cui segue che $\frac{d}{dt}(\vec{v} - \frac{\alpha}{l_z}\hat{u}_\theta) = 0$, quindi $\vec{v} - \frac{\alpha}{l_z}\hat{u}_\theta = cost$.

Definiamo allora:

$$\vec{e} = \frac{l_z}{\alpha}\vec{v} - \hat{u}_\theta = cost$$

Esplicitando $\vec{v}$, otteniamo:

$$\vec{e} = \frac{l_z}{\alpha}\dot{r}\hat{u}_r + (\frac{l_z}{\alpha}\dot{\theta}r - 1)\hat{u}_\theta = cost$$

Al perielio abbiamo $r = r_{min}$, $\dot{r} = 0$, $\hat{u}_\theta = \hat{\jmath}$, quindi $\vec{e} = e\hat{\jmath}\ \forall t$, dove

$$e = \frac{l_z}{\alpha}\dot{\theta}(r_{min})r_{min} - 1 = \frac{l^2}{m\alpha r_{min}^2} - 1$$

Adesso consideriamo l'uguaglianza $\vec{e}(t) \cdot \hat{u}_\theta = e\hat{\jmath} \cdot \hat{u}_\theta$; da questa segue $\frac{l_z}{\alpha}\dot{\theta}r - 1 = e\cos\theta$. Sostituendo $\dot{\theta} = \frac{l_z}{mr^2}$, otteniamo l'equazione della traiettoria:

$$r = \frac{l^2}{m\alpha}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

Inoltre abbiamo che $r \geq r_{min}$, da cui segue che $e\cos\theta \leq e$ che equivale a $e \geq 0$.

Quindi l'equazione della traiettoria è l'equazione polare di una conica, da cui abbiamo:

- $e = 0$: l'orbita è una circonferenza;
- $0 < e < 1$: l'orbita è un'ellisse;
- $e = 1$: l'orbita è una parabola;
- $e > 1$: l'orbita è un'iperbole.

7.4.1 Orbite circolari

Nel caso di orbite circolari, si ha $r(t) = r_c \implies \dot{r}(t) = 0$.

Allora $l_z = mr_c^2\dot{\theta}(t) = cost \implies \omega(t) \equiv \dot{\theta}(t) = cost$.

Dall'espressione della velocità, otteniamo $v = |\omega|r_c = cost$: si tratta in conclusione di un moto circolare uniforme.

Per calcolare il raggio dell'orbita, poniamo $\frac{dU_{eff}}{dt} = 0$, da cui segue

$$r_c = \frac{l^2}{GMm^2}$$

Da questo segue $l^2 = GMm^2 r_c$, e sostituendo nella velocità:

$$v = \frac{GMm}{l} = \frac{\alpha}{l}$$

dove si è posto $\alpha \equiv GMm$.

Quindi, nel caso di un'orbita circolare, l'energia cinetica risulta:

$$K = \frac{l^2}{2mr_c} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2$$

L'energia potenziale invece risulta:

$$U(r_c) = -\frac{GMm}{r_c} = -\frac{l^2}{mr_c^2} = -2K$$

Quindi, per la conservazione dell'energia, concludiamo che

$$E = K + U = -K = \frac{U}{2} = -\frac{l^2}{2mr_c^2}$$

7.4.2 Orbite ellittiche

7.4.3 Variazione di g con l'altezza

Finora abbiamo supposto che $\vec{g}$ fosse costante, tuttavia il modulo di questo vettore varia con l'altezza dal suolo, poiché $F = G\frac{Mm}{r^2} = ma \implies a = G\frac{M}{r^2}$.

Al livello del mare abbiamo quindi:

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9.80665 \ \frac{m}{s^2}$$

dove $M_T = 5.97 \cdot 10^24 \ kg$ è la massa della Terra e $R_T = 6.371 \cdot 10^6 \ m$ è il raggio terrestre.

Ad un'altezza h dal livello del mare abbiamo quindi:

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\frac{1}{(1 + \frac{h}{R_T})^2}$$

Per altezze tali che $\frac{h}{R_T} \ll 1$, possiamo considerare lo sviluppo di Taylor attorno a $x = 0$ e ottenere

$$g(h) = g_0[1 - 2\frac{h}{R_t} + 3\left(\frac{h}{R_T}\right)^2 + ...]$$

7.4.4 Velocità di fuga e raggio di Schwarzschild

La velocità di un pianeta o di una stella è la velocità iniziale minima per riuscire a sfuggire da un campo gravitazionale, allontanandosene indefinitivamente.

Poniamo quindi $E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{r} = E_\infty = 0$, da cui segue

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

La luna non possiede un'atmosfera. Un motivo di questo è che la velocità di fuga dalla Luna è molto più bassa rispetto a quella dalla Terra. L'assenza di atmosfera sulla Luna è anche dovuta al valore molto piccolo del campo magnetico lunare rispetto a quello terrestre. Il campo magnetico terrestre infatti protegge l'atmosfera del nostro pianeta dagli effetti del vento solare (un flusso di particelle cariche emesse dal Sole) che tende a "strappare" le atmosfere planetarie.

Il raggio di Schwarzschild di un corpo di massa M è il raggio massimo che può avere il corpo perché la relativa velocità di fuga sia maggiore o uguale della velcoità della luce. Risulta quindi

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

7.5 Dimostrazioni delle leggi di Keplero

Possiamo ora dimostrare le tre leggi di Keplero (che è anche il motivo per cui Newton ha inventato l'analisi *cit. Alberti*).

I legge di Keplero

Dimostrazione. □

II legge di Keplero

Dimostrazione. Consideriamo l'area spazzata dal vettore $\vec{r}$ nel tempo infinitesimo dt: questa vale $\frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$, da cui risulta

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})dt$$

Perciò la velocità areolare risulta:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{\vec{l}}{2m} = cost$$

poiché il momento angolare si conserva.

Quindi in generale vale:

$$A_{t_1 \to t_2} = \frac{l}{2m}(t_2 - t_1)$$

□

III legge di Keplero

Dimostrazione. Dimostriamo la III legge innanzitutto per orbite circolari.

Vale: $a = |\vec{a}| = \frac{f(r)}{m_I} = \frac{GM}{r^2}\frac{m_G}{m_I} = \frac{GM}{r^2}$. Ponendo $r(t) = d$: $a = \frac{GM}{d^2}$. Poiché il moto è circolare, si tratta di un'accelerazione centripeta:

$$a = \frac{v^2}{d} = \omega^2 d = \frac{(2\pi)^2}{T^2} d$$

Quindi:

$$\frac{GM}{d^2} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} d \implies \frac{T^2}{d^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}$$

Dimostriamolo ora per orbite ellittiche.

$\square$