Geometria e Topologia Differenziale

A.A. 2024-2025

SIMONE SACCANI

CURVE

Curve e superfici = "buoni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$"
Per le curve, conviene partire da

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo qualunque

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad C^\infty : \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I$

x, y, z funzioni C^∞ (se I non è aperto, sono restrizioni di f.ni C^∞ su un aperto che contiene I)

α è una curva parametrizzata

$\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ è la traccia

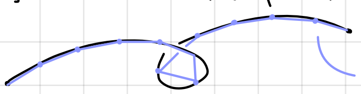
Def. Il vettore velocità è

$$\alpha'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha(t+\varepsilon) - \alpha(t)}{\varepsilon} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

esempio $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva parametrizzata



$\alpha([a,b])$

spezzata che approssima la traccia

FATTO: se la lunghezza max di un segmento tende a 0
la lunghezza della spezzata tende a

$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| \, du$ (lunghezza di α) (*)

Oss la lunghezza di α dipende solo dalla traccia

Introduciamo la def. formale di lunghezza di α tramite (*)

Ci aspettiamo che, se $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ c.p. con $\beta([c,d]) = \alpha([a,b])$,
allora $\ell(\alpha) = \ell(\beta)$

Verifichiamolo quando β è una riparametrizzazione di α

Def. β c.p. si dice riparametrizzazione di α c.p.
se $\exists\, h : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ C^∞ con $h'(t) \neq 0$ t.c. $\beta \circ h = \alpha$

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^3 \\
& {[c,d]} \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Verifichiamo che $\ell(\alpha) = \ell(\beta)$:

$\alpha(t) = \beta(h(t)) \quad \Rightarrow \quad \alpha'(t) = h'(t)\beta'(h(t))$

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| \, du = \int_a^b |h'(u)| \, \|\beta'(h(u))\| \, du = \begin{cases} \overset{h'>0}{\underset{s=h(t)}{=}} \int_c^d \|\beta'(s)\| \, ds = \ell(\beta) \\ \overset{h'<0}{=} -\int_d^c \|\beta'(s)\| ds = \ell(\beta) \end{cases} \quad \square$$

Se $h' > 0$, h crescente, quindi $h(a) = c, h(b) = d$

Se $h' < 0$, h decrescente, quindi $h(a) = d, h(b) = c$

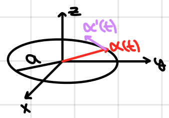
esempio (1) $P, Q \in \mathbb{R}^3,\ P \neq Q$

$\alpha(t) = P + t(Q-P),\ t \in [0,1]$

$\alpha'(t) = Q - P = \overrightarrow{PQ} \qquad \|\alpha'(t)\| = \|Q-P\|$

$\ell(\alpha) = \|Q-P\|$

(2) $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, 0),\ a > 0$



$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0) \qquad \|\alpha'(t)\| = a$

$\ell(\alpha) = 2\pi a$

DEF. Una c.p. $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ si dice **regolare** se $\alpha'(t)\neq 0 \ \forall t\in[a,b]$

> **Proposizione** Data $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ curva regolare,
> esiste una riparametrizzazione $\beta:[0,\ell(\alpha)]\longrightarrow\mathbb{R}^3$
> t.c. $\|\beta'(s)\|=1 \ \forall s\in[0,\ell(\alpha)]$

DIMOSTRAZIONE

Voglio
$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "s"'] & & \mathbb{R}^3 \\ & {[0,\ell(\alpha)]} \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$s(t)=\int_a^t \|\alpha'(u)\|du \ , \ t\in[a,b]$

$s'(t)=\|\alpha'(t)\|>0 \qquad s(a)=0,\ s(b)=\ell(\alpha)$

$\Rightarrow \exists\ \varphi:[0,\ell(\alpha)]\longrightarrow[a,b]$ C^∞ t.c. $s(\varphi(s))=s\ \forall s,\ \varphi(s(t))=t\ \forall t$

Definisco $\beta(s):=\alpha(\varphi(s)) \qquad \alpha(t)=\beta(s(t))\ \forall t\in[a,b]$

$\alpha'(t)=s'(t)\ \beta'(s(t))$

quindi $\|\beta'(s(t))\|=\frac{1}{|s'(t)|}\|\alpha'(t)\|=1$ $\square$

esempio (1) $\alpha(t)=P+t(Q-P)$

$\alpha'(t)=Q-P$ quindi α è regolare $\Leftrightarrow P\neq Q$

$s(t)=\int_0^t \|Q-P\|du = t\|Q-P\| \qquad \varphi(s)=\frac{s}{\|Q-P\|}$

$\beta(s)=\alpha(\varphi(s))=P+s\frac{Q-P}{\|Q-P\|}$ è la rip. p.l.a. di α

(2) $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t, 0) \qquad \alpha'(t)=(-a\sin t, a\cos t, 0) \qquad \|\alpha'(t)\|=a>0$

quindi α è regolare e ammette rip pla

$s(t)=\int_0^t \|\alpha'(u)\|du = ta \ , \ \varphi(s)=\frac{s}{a}$

$\beta(s)=\alpha(\varphi(s))=(a\cos(\frac{s}{a}), a\sin(\frac{s}{a}), 0)$

DEF. Una curva par. $\beta: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ si dice **p.l.a. (parametrizzata per lunghezza d'arco)** se $\|\beta'(s)\|=1\ \forall s\in I$

<u>Oss</u> In generale, la rip. pla di una curva regolare non si può calcolare esplicitamente

esempio $\alpha:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^3 \qquad \alpha(t)=(t,t^2,t^3) \qquad \alpha'(t)=(1,2t,3t^2) \Rightarrow \alpha$ è regolare

quindi esiste rip. p.l.a. $\beta:[0,\ell(\alpha)]\longrightarrow\mathbb{R}^3$

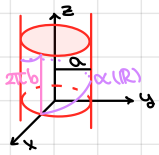
$s(t)=\int_0^t \sqrt{1+4u^2+9u^4}\,du$ non è semplice...

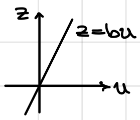
esempio (elica)

$F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3 \qquad F(u,z)=(a\cos u, a\sin u, z) \qquad a>0$

$\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3 \qquad \alpha(t)=F(t,bt) \qquad$ (b "passo" dell'elica)

$b>0$ elica destrorsa, $b=0$ circonferenza, $b<0$ elica sinistrorsa





$\alpha(t)=F(t,bt)=(a\cos t, a\sin t, bt)$

$\alpha'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b) \qquad \alpha'(t)\cdot\alpha'(t)=a^2+b^2>0 \Rightarrow \alpha$ regolare

$s(t)=\int_0^t \|\alpha'(u)\|du \qquad s:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ s'(t)>0$ con inversa $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$\Rightarrow s(t)=t\sqrt{a^2+b^2} \qquad \varphi(s)=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\beta(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

NOTA Se $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, abbiamo detto $\ell(\alpha)=\int_a^b \|\alpha'(u)\|\,du$
Questo valore non dipende dalla traccia, ma serve che α sia iniettiva.

DEF. Sia $\beta:[0,\ell]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ curva pla
Allora chiamiamo $T(s)=\beta'(s)$ il versore tangente

DEF. $K(s)=\|T'(s)\|$ è la curvatura di β in $\beta(s)$

esempio (1) $\beta:[0,2\pi a]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $\beta(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{a}\right),a\sin\left(\frac{s}{a}\right),0\right)$
allora $T(s)=\beta'(s)=\left(-\sin\left(\frac{s}{a}\right),\cos\left(\frac{s}{a}\right),0\right)$
$T'(s)=\frac{1}{a}\left(-\cos\left(\frac{s}{a}\right),-\sin\left(\frac{s}{a}\right),0\right)\Rightarrow K(s)=\|T'(s)\|=\frac{1}{a}$ costante
Quindi più grande è la circonferenza, più piccola è la curvatura, e viceversa.
(2) $P,Q\in\mathbb{R}^3$, $P\neq Q$, $\beta:[0,\|P-Q\|]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $\beta(s)=P+s\frac{Q-P}{\|Q-P\|}$ segmento pla
allora $T(s)=\frac{Q-P}{\|Q-P\|}$ e dunque $K(s)=\|T'(s)\|=0$

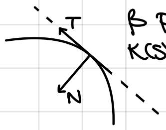
Oss Se $\beta:[0,\ell]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ pla con $K(s)=\|T'(s)\|>0$,
il vettore $N(s)=\frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ è ben definito

DEF. $N(s)$ è il versore normale di β pla in $\beta(s)$

Lemma $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ C^∞, allora
$[f(t)\cdot g(t)]'=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$

DIMOSTRAZIONE
$f=(f_1,f_2,f_3)$, $g=(g_1,g_2,g_3)$, allora basta derivare
$f(t)\cdot g(t)=\sum_{i=1}^{3}f_i(t)g_i(t)$ e otteniamo
$[f(t)\cdot g(t)]'=\left[\sum_{i=1}^{3}f_i(t)g_i(t)\right]'=\sum_{i=1}^{3}f_i'(t)g_i(t)+f_i(t)g_i'(t)=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$ $\square$

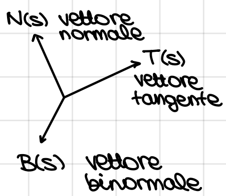
Ora osserviamo che $T(s)\cdot T(s)=1$, dunque $[T(s)\cdot T(s)]'=0$
e d'altra parte $[T(s)\cdot T(s)]'=2T'(s)\cdot T(s)=2K(s)N(s)\cdot T(s)$
$\Rightarrow N(s)\cdot T(s)=0$



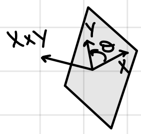
β pla
$K(s)>0$

I equazione di Frenet $T'(s)=K(s)N(s)$

DEF. Per $K(s)>0$, $B(s)=T(s)\times N(s)$ è il vettore binormale di β in $\beta(s)$



NOTA $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_3\end{pmatrix}$$
allora $(X\times Y)\cdot X=(X\times Y)\cdot Y=0$
Inoltre $\|X\times Y\|=\|X\|\,\|Y\|\sin\theta$ dove $\theta\in[0,2\pi]$



Di conseguenza $\|B\|=1$

DEF. $(T(s), N(s), B(s))$ è una base ortonormale, detta riferimento di Frenet

DEF. Sia $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare tale che la sua curva pla $\beta : [0, \ell(\alpha)] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ha curvatura positiva in ogni punto.
Allora diciamo che α è una curva di Frenet.

<u>Oss</u> la pla è unica

Quando useremo il parametro s, useremo la rip. pla
Data α curva di Frenet, $N'(s) \in \mathrm{Span}(T(s), N(s), B(s))$, che è base ortonormale
Osserviamo che $N(s) \cdot T(s) = 0 \implies N'(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot T'(s) = 0$, cioè
$N'(s) \cdot T(s) + K(s) N(s) \cdot N(s) = 0$, quindi $N'(s) \cdot T(s) = -K(s)$
Inoltre $N(s) \cdot N(s) = 1 \implies N'(s) \cdot N(s) = 0$
Abbiamo scoperto che $N'(s) = -K(s)T(s) + \tau(s)B(s)$ e τ è unico

DEF. Chiamiamo $\tau(s)$ la torsione di β in $\beta(s)$.

<u>II equazione di Frenet</u> $N'(s) = -K(s)T(s) + \tau(s)B(s)$

Adesso $B(s) \cdot B(s) = 1 \implies B'(s) \cdot B(s) = 0$
Inoltre $B(s) \cdot T(s) = 0 \implies B'(s) \cdot T(s) + \cancel{B(s) \cdot (K(s)N(s))} = 0$
e $B(s) \cdot N(s) = 0 \implies B'(s) \cdot N(s) + B(s) \cdot (\cancel{-K(s)T(s)} + \tau(s)B(s)) = 0$

<u>III equazione di Frenet</u> $B'(s) = -\tau(s)N(s)$

Quindi le equazioni di Frenet sono

$$\begin{cases} T'(s) = K(s)N(s) \\ N'(s) = -K(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

<u>esercizio</u> Verificare che l'<u>elica</u> è una curva di Frenet;
calcolare curvatura, torsione e riferimento di Frenet in ogni punto.

<u>SOLUZIONE</u> $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(s) = (a\cos(\frac{s}{c}), a\sin(\frac{s}{c}), \frac{bs}{c})$ con $a>0$
$T(s) = \beta'(s) = \frac{1}{c}(-a\sin(\frac{s}{c}), a\cos(\frac{s}{c}), b) \implies$ poiché $T(s)$ è unitario, $c = \sqrt{a^2+b^2} > 0$
Ora $T'(s) = \frac{1}{c^2}(-a\cos(\frac{s}{c}), -a\sin(\frac{s}{c}), 0)$, quindi $K(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0$
A questo punto $N(s) = -(\cos(\frac{s}{c}), \sin(\frac{s}{c}), 0)$
$B(s) = T(s) \times N(s) = -\frac{1}{c}(-b\sin(\frac{s}{c}), b\cos(\frac{s}{c}), -a) = \frac{1}{c}(b\sin(\frac{s}{c}), -b\cos(\frac{s}{c}), a)$
Infine $\tau = N' \cdot B$:
$N'(s) = \frac{1}{c}(\sin(\frac{s}{c}), -\cos(\frac{s}{c}), 0) \implies \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$
Vediamo allora che il segno della torsione è dato dalla "regola della mano destra", ossia
$b>0 \iff \tau>0$ (elica destrorsa) ; $b<0 \iff \tau<0$ (elica sinistrorsa)
$b=0 \iff \tau=0$ (curva planare)

Oss Se $b \to +\infty$, l'elica diventa simile a una retta
e $\tau \to 0$ (anche se la torsione non è definita per le rette)

esercizio $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}t^3, \sqrt{2}(t\sin t + \cos t), \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)\right)$
1. dimostrare che α è di Frenet in un intorno di 0
2. calcolare curvatura e riferimento di Frenet in $(0, \sqrt{2}, 0)$

SOLUZIONE 1. $\alpha'(t) = (t^2, \sqrt{2}\, t\cos t, \cos^2 t)$
allora $\dot\alpha(t) \cdot \dot\alpha(t) = t^4 + 2t^2\cos^2 t + \cos^4 t = (t^2 + \cos^2 t)^2 > 0 \quad \forall t$
quindi α è regolare
Adesso $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$, $s'(t) = t^2 + \cos^2 t > 0$
Sia β la riparametrizzazione pla di α, allora
per costruzione $\beta(s(t)) = \alpha(t) \; \forall t \in \mathbb{R}$, quindi $\beta'(s(t))\, s'(t) = \alpha'(t)$
Ora $T(s) = \beta'(s)$, $s \in \mathbb{R}$
È sufficiente mostrare che $T'(0) \neq 0$ per il punto 1.
D'altra parte, $s(0) = 0$, quindi $\beta'(0)\, s'(0) = \alpha'(0)$
(e $s'(0) = 1$, dato che $\alpha'(0) = (0,0,1)$)
Posso però scrivere $s'(t)\, T(s(t)) = \alpha'(t)$ (*) e derivare nuovamente rispetto a t:
$s''(t)\, T(s(t)) + s'(t)^2\, T'(s(t)) = \alpha''(t)$ (**)
Oss $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Se $\langle x \rangle = \langle y \rangle \Rightarrow x \times y = 0$
(anche perché $\|x \times y\| = \|x\|\,\|y\| \sin\theta$)
$\Rightarrow \alpha'(t) \times \alpha''(t) = s'(t)^3\, T(s(t)) \times T'(s(t))$
$s(0) = 0$, $\alpha'(0) = (0,0,1)$
$\alpha''(t) = (2t, \sqrt{2}(\cos t - t\sin t), -2\cos t \sin t) \to \alpha''(0) = (0, \sqrt{2}, 0)$
$\Rightarrow \alpha'(0) \times \alpha''(0) = (0,0,1) \times (0,\sqrt{2},0) = (-\sqrt{2}, 0, 0) \quad \Rightarrow T'(0) \neq 0$
$\Rightarrow T'(s) \neq 0$ in un intorno di 0
$k_\alpha(s) = \|T'(s)\| > 0 \quad \forall s$ in un intorno di 0
$\Rightarrow \alpha$ è di Frenet in un intorno di 0

2. $(0, \sqrt{2}, 0) = \alpha(0) \Rightarrow$ calcoliamo per $t = s = 0$
$s'(0) = 1$, $s''(t) = 2t - 2\sin t \cos t \Rightarrow s''(0) = 0$
$(*)|_{t=0}$ $T = T(0) = \alpha'(0) = (0,0,1)$
$(**)|_{t=0}$ $\underset{\substack{\| \\ k_\alpha(0) \cdot N(0)}}{T'(0)} = \alpha''(0) = (0, \sqrt{2}, 0)$ $\Rightarrow k_\alpha(0) = \sqrt{2}$, $N(0) = (0,1,0)$
$B = B(0) = T \times N = (0,0,1) \times (0,1,0) = (-1, 0, 0)$

Proviamo a trovare una formula per la curvatura di una curva $\alpha(t)$ (regolare) di Frenet non necessariamente pla

$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regolare, $\beta : [0, \ell(\alpha)] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rip. pla

$\beta(s(t)) = \alpha(t) \implies (*)\ s' \cdot T = \alpha' \implies (**)\ s'' T + s'^2 T' = \alpha''$

$(*) \times (**)$: $\alpha' \times \alpha'' = (s')^3\, T \times T' = k (s')^3\, T \times N \qquad k = \|T'\| > 0$

$\implies \dfrac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{(s')^3} = k \quad$ ma $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \implies s'(t) = \|\alpha'(t)\|$

$$\implies k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

2° eq.ne di Frenet: $N' = -kT + \tau B \implies \tau = N' \cdot B$

1° eq.ne di Frenet: $T'(s(t)) = k(s(t)) N(s(t))$

$\implies s'(t) T''(s(t)) = s'(t) k'(s(t)) N(s(t)) + k(s(t)) s'(t) N'(s(t))$

$\cancel{s'} T'' \cdot B = k s' N' \cdot B = \cancel{s'} k \tau$

$\frac{d}{dt}(**)$: $s''' T + s'' s' T' + 2 s' s'' T' + (s')^3 T'' = \alpha'''$

$\alpha' \times \alpha'' = (s')^3 k\, \underbrace{T \times N}_{B}$

$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = (s')^6 k (T \times N) \cdot T'' = (s')^6 k^2 \tau$

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha'\|^6 \dfrac{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}{\|\alpha'\|^6}} = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

<u>NOTA</u> $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\quad e_1, e_2, e_3$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$

Se $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, $(x \times y) \cdot z = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$

<u>esercizio</u> $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t, \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, \frac{1}{3} t^3)$

1. dimostrare che α è regolare
2. dimostrare che α è di Frenet

   Calcolare curvatura e torsione in ogni punto

<u>SOLUZIONE</u> 1. $\alpha'(t) = (1, \sqrt{2} t, t^2) \neq 0 \implies \alpha$ regolare

2. $\|\alpha'\| = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = t^2 + 1$

$\alpha''(t) = (0, \sqrt{2}, 2t)$, $\alpha' \times \alpha'' = (\sqrt{2} t^2, -2t, \sqrt{2})$

$\|\alpha' \times \alpha''\| = (2t^4 + 4t^2 + 2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(t^2+1)$

$k(s(t)) = \dfrac{\sqrt{2}(t^2+1)}{(t^2+1)^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{(t^2+1)^2}$

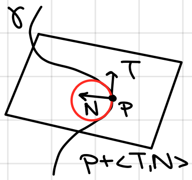
$\alpha''' = (0, 0, 2)$

$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2}t & t^2 \\ 0 & \sqrt{2} & 2t \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} \quad \implies \tau(s(t)) = \dfrac{2\sqrt{2}}{2(t^2+1)^2} > 0$

DEF. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ curva di Frenet pla

Definiamo il cerchio osculatore di γ in $\gamma(s_0)$, $s_0 \in I$,
come il cercio C di centro P e raggio R contenuto nel piano osculatore (il piano affine $\gamma(s_0)+\langle T(s_0), N(s_0)\rangle$)
di γ in $\gamma(s_0)$ che meglio approssima γ intorno a s_0, nel senso che

- $\gamma(s_0) \in C$
- $f(s) := \|\gamma(s)-P\|^2 - R^2$ è tale che $f'(s_0), f''(s_0) = 0$



esercizio Mostrare che il cerchio osculatore esiste ed è unico, esprimendo P e R in funzione di γ

SOLUZIONE Unicità: $f(s) = (\gamma(s)-P)\cdot(\gamma(s)-P) - R^2$

$$f'(s) = 2T(s)\cdot(\gamma(s)-P)$$
$$f''(s) = 2T'(s)\cdot(\gamma(s)-P) + 2T(s)\cdot T(s)$$
$$0 = f'(s_0) \iff \gamma(s_0) - P \in T(s_0)^{\perp} = \langle N(s_0), B(s_0)\rangle$$
$$C \subseteq \gamma(s_0) + \langle T(s_0), N(s_0)\rangle$$
$$\Rightarrow \gamma(s_0) - P \in \langle T(s_0), N(s_0)\rangle \Rightarrow \gamma(s_0) - P \in \langle N(s_0)\rangle$$
$$\Rightarrow P = \gamma(s_0) + \lambda N(s_0)$$
$$\|\gamma(s_0) - P\| = R \Rightarrow R = |\lambda|$$

Ora $T'(s) = k(s)N(s)$, quindi

$$f''(s_0) = 2[k(s_0)N(s_0)\cdot(-\lambda N(s_0)) + 1] = -2k(s_0)\lambda + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{k(s_0)} > 0$$
$$\Rightarrow R = \lambda = \frac{1}{k(s_0)} \qquad P = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0)$$

Esistenza: Sia C la circonferenza contenuta in $\gamma(s_0)+\langle T(s_0), N(s_0)\rangle$ di centro $P = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0)$ e raggio $R = \frac{1}{k(s_0)}$

- $\gamma(s_0) \in C$
- $f(s) = \|\gamma(s) - \gamma(s_0) - \frac{1}{k(s_0)}N(s_0)\|^2 - R^2$

$$f'(s_0) = 2T(s_0)\cdot(\gamma(s_0) - \gamma(s_0) - \tfrac{1}{k(s_0)}N(s_0)) = 0$$
$$f''(s_0) = 2[k(s_0)N(s_0)\cdot(\gamma(s_0) - \gamma(s_0) - \tfrac{1}{k(s_0)}N(s_0)) + T(s_0)\cdot T(s_0)] = 0$$

esercizio $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ curva regolare, allora
$K_\alpha \equiv 0 \iff \text{traccia}(\alpha) \subseteq$ retta affine

SOLUZIONE E' sufficiente fare la verifica per la curva pla associata, $\beta : [0, \ell(\alpha)] \to \mathbb{R}^3$

($\Rightarrow$) $T(s) = \beta'(s) \Rightarrow T'(s) = \beta''(s) \Rightarrow k_\alpha(s) = \|\beta''(s)\|$

$k_\alpha \equiv 0 \iff \beta'' \equiv 0 \iff \beta'(s) = v \in \mathbb{R}^3$ costante

Quindi $\beta(s) = p + sv \in p + \langle v\rangle$ retta affine

($\Leftarrow$) $\text{traccia}(\beta) \subseteq p + \langle v\rangle$ retta affine (v versore)

$\Rightarrow \beta(s) = p + f(s)v \qquad \beta'(s) = f'(s)v = T(s) \Rightarrow |f'(s)| \equiv 1$

$f' : [0, \ell(\alpha)] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto f'(s) \in \{\pm 1\}$, ma $f \in C^\infty$ e $[0,\ell(\alpha)]$ è connesso,
quindi $f'([0,\ell(\alpha)]) = \begin{cases}\{1\}\\ \{-1\}\end{cases}$. A meno di considerare $-v$,
posso supporre che $f'(s) \equiv 1 \Rightarrow f(s) = s_0 + s$

$\Rightarrow \beta(s) = p + s_0 v + sv \Rightarrow T(s) \equiv v \Rightarrow T'(s) \equiv 0 \Rightarrow k_\alpha \equiv 0$

esercizio Sia $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet, allora

$$\tau_\alpha \equiv 0 \iff \text{traccia}(\alpha) \subseteq \text{piano affine}$$

SOLUZIONE È sufficiente fare la verifica per la curva pla associata, $\beta : [0, \ell(\alpha)] \to \mathbb{R}^3$

$(\Rightarrow)$ 3° eq.ne di Frenet $B' = -\tau N \Rightarrow B \equiv v \in \mathbb{R}^3$ costante

$0 \equiv T(s) \cdot v = \beta'(s) \cdot v = (\beta(s)\ v)' \Rightarrow \beta(s) \cdot v = c \quad \forall s \in [0, \ell(\alpha)]$

$\Rightarrow \text{traccia}(\beta) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x\, v = c\}$ piano affine

$(\Leftarrow)$ $\beta(s) \cdot v \equiv c$, $\|v\| = 1$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow T(s) \cdot v \equiv 0 \Rightarrow T'(s)\, v = k(s) N(s) \cdot v = 0$ e $k(s) > 0$

$\Rightarrow v^\perp = \langle T(s), N(s) \rangle \iff \langle v \rangle = \langle B(s) \rangle$

$\Rightarrow B(s) = \varphi(s)\, v$ con $\varphi(s) \in \{\pm 1\} \Rightarrow \varphi([0, \ell(\alpha)]) = \begin{cases}\{1\} \\ \{-1\}\end{cases}$

$\Rightarrow B(s) = \begin{cases} v \\ -v \end{cases} \Rightarrow B'(s) = -\tau(s) N(s) = 0 \Rightarrow \tau \equiv 0$

esercizio S sfera di raggio R in $\mathbb{R}^3$, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| = R\}$

Mostrare che se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ curva regolare con $\text{traccia}(\alpha) \subseteq S$, allora $k_\alpha(s) \geq \frac{1}{R}$

SOLUZIONE È sufficiente fare la verifica per la curva pla associata, $\beta : [0, \ell(\alpha)] \to \mathbb{R}^3$

$\text{traccia}(\beta) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\|^2 = R^2\} \Rightarrow (\beta(s) - P) \cdot (\beta(s) - P) \equiv R^2$

$\Rightarrow 2T(s) \cdot (\beta(s) - P) \equiv 0$

$\Rightarrow T'(s) \cdot (\beta(s) - P) + T(s) \cdot T(s) \equiv 0$

$|T'(s) \cdot (\beta(s) - P)| \leq \|T'(s)\|\, \|\beta(s) - P\| = k_\alpha(s) R$

$\Rightarrow |T'(s) \cdot (\beta(s) - P)| \equiv 1 \Rightarrow k_\alpha R \geq 1 \Rightarrow k_\alpha \geq \frac{1}{R}$

Sia $\beta : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ curva pla di Frenet. Sia $A \in SO(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$

$\tilde{\beta}(s) := A\beta(s) + b$

$\Rightarrow T_{\tilde{\beta}}(s) = A T(s) \Rightarrow k_{\tilde{\beta}}(s) N_{\tilde{\beta}}(s) = A k_\beta(s) N_\beta(s)$

Passando alle norme, $k_{\tilde{\beta}}(s) = k_\beta(s)$, quindi $N_{\tilde{\beta}}(s) = A N_\beta(s)$

$B_{\tilde{\beta}}(s) = T_{\tilde{\beta}}(s) \times N_{\tilde{\beta}}(s) = A T_\beta(s) \times A N_\beta(s) = A(T_\beta(s) \times N_\beta(s)) = A B_\beta(s)$

NOTA $AX \times AY = A(X \times Y)$

Infatti $AX = A^1 x_1 + A^2 x_2 + A^3 x_3$, $AY = A^1 y_1 + A^2 y_2 + A^3 y_3$

$A^1 \times A^2 = A^3$, $A^2 \times A^3 = A^1$, etc...

Quindi

$-\tau_{\tilde{\beta}}(s) N_{\tilde{\beta}}(s) = -\tau_\beta(s) A N_{\tilde{\beta}}(s) \Rightarrow \tau_{\tilde{\beta}}(s) = \tau_\beta(s)$

Teorema fondamentale delle curve

Siano $\tilde{\beta},\beta:[0,\ell]\to\mathbb{R}^3$ due curve p.l.a. di Frenet.
Se $k_{\tilde{\beta}}(s)=k_\beta(s)$ e $\tau_{\tilde{\beta}}(s)=\tau_\beta(s)$ $\forall s\in[0,\ell]$, allora
$\exists b\in\mathbb{R}^3, A\in SO(3)$ t.c. $\tilde{\beta}(s)=A\beta(s)+b$ $\forall s\in[0,\ell]$

DIMOSTRAZIONE

$(T_\beta(0),N_\beta(0),B_\beta(0))$ e $(T_{\tilde{\beta}}(0),N_{\tilde{\beta}}(0),B_{\tilde{\beta}}(0))$ sono due basi ortonormali (positive) di $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow \exists! A\in SO(3)$ che manda B_1 in B_2

Pongo $b=\tilde{\beta}(0)-A\beta(0)$

$\beta^*(s):=A\beta(s)+b$ è sufficiente dimostrare che $\beta^*(s)\equiv\tilde{\beta}(s)$

Pongo $\tilde{T}=T_{\tilde{\beta}}$, $T^*=T_{\beta^*}$, analogo per gli altri

$f(s):=\tilde{T}(s)\cdot T^*(s)+\tilde{N}(s)\cdot N^*(s)+\tilde{B}(s)\cdot B^*(s)\le 3$

$s\in[0,\ell]$ $f(0)=3$

$$k^*=k_{\beta^*}\overset{\text{costruz.}}{=}k_\beta\overset{hp}{=}k_{\tilde{\beta}}=:k$$
$$\tau^*=\tau_{\beta^*}=\tau_\beta=\tau_{\tilde{\beta}}=:\tau$$

$f'(s)=\tilde{T}'\cdot T^*+\tilde{T}\cdot T^{*\prime}+\tilde{N}'\cdot N^*+\tilde{N}\cdot N^{*\prime}+\tilde{B}'\cdot B^*+\tilde{B}\cdot B^{*\prime}=$

$=k\tilde{N}\cdot T^*+k\tilde{T}\cdot N^*+(-k\tilde{T}+\tau\tilde{B})\cdot N^*+\tilde{N}\cdot(-kT^*+\tau B^*)-\tau\tilde{N}\cdot\tilde{B}-\tau\tilde{B}\cdot N^*=0$

Quindi $f\equiv3\Rightarrow\forall s$ $\tilde{T}(s)=T^*(s)$, cioè $\tilde{\beta}'(s)=\beta^{*\prime}(s)$

Inoltre $\tilde{\beta}(0)=\beta^*(0)$, quindi $\tilde{\beta}\equiv\beta^*$ □

esercizio $\beta:[0,\ell]\to\mathbb{R}^3$ curva p.l.a. con $k_\beta(s)\equiv k_0$, $\tau_\beta(s)\equiv\tau_0$
Allora $\beta(s)=A\tilde{\beta}(s)+b$, $A\in SO(3)$, $b\in\mathbb{R}^3$, dove
$\tilde{\beta}:[0,\ell]\to\mathbb{R}^3$ soddisfa traccia$(\tilde{\beta})\subseteq$ elica

SOLUZIONE Per il teorema, è sufficiente mostrare che esiste un'elica $\tilde{\beta}:[0,\ell]\to\mathbb{R}^3$ con curvatura k_0 e torsione τ_0

$\tilde{\beta}(s)=(a\cos(\frac{s}{c}),a\sin(\frac{s}{c}),\frac{bs}{c})$, con $c=\sqrt{a^2+b^2}$

$k_{\tilde{\beta}}=\frac{a}{a^2+b^2}$, $\tau_{\tilde{\beta}}=\frac{b}{a^2+b^2}$

$$\begin{cases}\frac{a}{a^2+b^2}=k_0\\ \frac{b}{a^2+b^2}=\tau_0\end{cases}\Leftrightarrow k_0^2+\tau_0^2=\frac{1}{a^2+b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{k_0}{k_0^2+\tau_0^2}\\ b=\frac{\tau_0}{k_0^2+\tau_0^2}\end{cases}$$

esercizio $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ curva di Frenet ha curvatura costante e torsione nulla $\Leftrightarrow$ traccia$(\alpha)\subseteq$ circonferenza

SOLUZIONE Supponiamo α p.l.a.

($\Rightarrow$) Per quanto visto, α è una rototraslazione di un'elica, e tale elica è una circonferenza avendo torsione nulla

($\Leftarrow$) Sia C la circonferenza di centro P contenuta in $P+\langle v\rangle^\perp$
Poiché la curva è planare, la torsione è nulla.
Ora $(\alpha(s)-P)\cdot v\equiv0\Rightarrow T(s)\cdot v\equiv0$ e $N(s)\cdot v\equiv0$
pertanto $\langle v\rangle^\perp=\langle T(s),N(s)\rangle$
quindi $\forall s$ $\alpha(s)+\langle T(s),N(s)\rangle$ è il piano osculatore
Allora C deve coincidere con il cerchio osculatore $\Rightarrow k=\frac{1}{R}$

esercizio Sia $\alpha : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, \log t\right)$

1. Mostrare che α è regolare
2. Calcolare K_α in ogni punto e mostrare che α è di Frenet
3. Calcolare il riferimento di Frenet in ogni punto

SOLUZIONE

1. $\alpha'(t) = \left(t, \sqrt{2}, \frac{1}{t}\right) \implies \alpha'(t)\cdot\alpha'(t) = \left(t+\frac{1}{t}\right)^2 > 0$
2. $s(t) = \int_1^t \|\alpha'(u)\| du$ e $s'(t) = t + \frac{1}{t} > 0$, $s''(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$

$\exists \beta : \beta(s(t)) = \alpha(t)$ p.l.a.

$\implies T(s(t))s'(t) = \alpha'(t) = \left(t, \sqrt{2}, \frac{1}{t}\right) \implies T(s(t)) = \frac{1}{t^2+1}(t^2, \sqrt{2}t, 1)$

$\implies T'(s(t))(s'(t))^2 + T(s(t))\, s''(t) = \alpha''(t) = \left(1, 0, -\frac{1}{t^2}\right)$

$\implies T'(s(t))(s'(t))^2 = \left(1, 0, -\frac{1}{t^2}\right) - \frac{t^2-1}{t^2}\frac{1}{t^2+1}(t^2, \sqrt{2}t, 1) = \frac{1}{t^2+1}\left(2, -\frac{\sqrt{2}(t^2-1)}{t}, -2\right) \neq 0$

quindi la curva è di Frenet

Ora $K(s(t))N(s(t)) = T'(s(t)) = \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\left(2, -\frac{\sqrt{2}(t^2-1)}{t}, -2\right)$

$\implies K(s(t)) = \left\|\frac{t^2}{(t^2+1)^3}\left(2, -\frac{\sqrt{2}(t^2-1)}{t}, -2\right)\right\| = \frac{\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}$

Adesso $N(s(t)) = \frac{1}{K(s(t))}T'(s(t)) = \frac{1}{1+t^2}(\sqrt{2}t, 1-t^2, -\sqrt{2}t)$

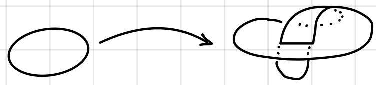
Infine $B(s(t)) = T(s(t)) \times N(s(t)) = \frac{1}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{2}t \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}t \\ 1-t^2 \\ -\sqrt{2}t \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}t \\ -t^2 \end{pmatrix}$

SUPERFICI

Vogliamo definire un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ che corrisponde alla nostra idea di superficie liscia

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione buona

- se $\underline{x}$ non fosse iniettiva, si potrebbe avere



- non vogliamo $\underline{x} =$

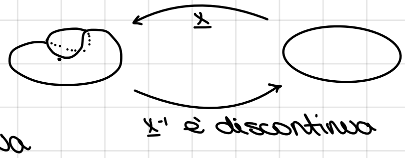
ora $\underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\underline{x}_u(u,v) := \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right), \quad \underline{x}_v(u,v) := \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

Chiediamo che $\forall (u,v)$ $J_{\underline{x}}(u,v)$ abbia rango massimo (cioè 2)

ossia $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ (o anche $\underline{x}_u, \underline{x}_v$ lin. indip.)

- non vogliamo cose del tipo



cioè vogliamo $\underline{x}^{-1}: \underline{x}(U) \longrightarrow U$ continua

DEF. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, una mappa $\underline{x}: U \to \mathbb{R}^3$ C^∞ è una **parametrizzazione regolare** se
- $\underline{x}$ è iniettiva
- $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$
- $\underline{x}^{-1}$ è continua

DEF. $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una **superficie liscia** se $\forall p \in S$ esiste una parametrizzazione regolare $\underline{x}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{x}(U) \subseteq S$ è un intorno di p

In particolare $\underline{x}: U \to \mathbb{R}^3$ par. regolare $\Longrightarrow S = \underline{x}(U)$ superficie

<u>esempio</u> (1) $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞, $\Gamma_f = \{(u,v,f(u,v)) \mid (u,v) \in U\}$ grafico di f

$$\underline{x}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \underline{x}(U) = \Gamma_f$$
$$(u,v) \longmapsto (u,v,f(u,v))$$

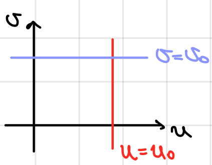
Chiaramente $\underline{x}$ è iniettiva; inoltre $\underline{x}_u = (1,0,\frac{\partial f}{\partial u})$, $\underline{x}_v = (0,1,\frac{\partial f}{\partial v})$ che sono indipendenti

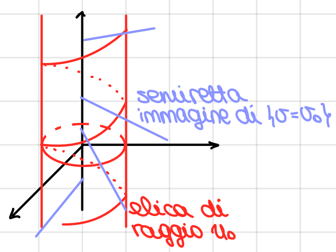
$\underline{x}^{-1} = \pi|_{\underline{x}(U)}: \underline{x}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dove $\pi(x,y,z) = (y,z)$

e la restrizione preserva la continuità

(2) **Elicoide**

$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$





$\underline{x}(u,v) = (u\cos v, u \sin v, bv)$, $b \neq 0$, è C^∞

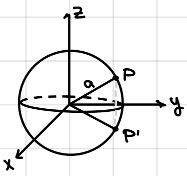
$$\varphi: \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} \longrightarrow U \qquad \text{è } C^\infty$$
$$(x,y,z) \longmapsto ((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, z/b)$$

e $\varphi(\underline{x}(u,v)) = (u,v)$

Quindi $\underline{x}$ è omeomorfismo iniettivo, la cui inversa è $\varphi|_{\underline{x}(U)}$

e $\underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\underline{x}_v = (-u\sin v, u\cos v, b)$ sono indipendenti

(3) La sfera S^2_a di raggio $a>0$



$S^2_a = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=a^2\}$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$S^2_a \setminus \{z=0\} = \underbrace{(S^2_a\cap\{z>0\})}_{A_z^+} \cup \underbrace{(S^2_a \cap \{z<0\})}_{A_z^-}$

cioè $A_z^\pm = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ x^2+y^2<a^2\}$

$A_z^+ = \Gamma_{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $A_z^- = \Gamma_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$U = D^2_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<a\} \xrightarrow{X} \mathbb{R}^3$

$(u,v)\longmapsto (u,v,\sqrt{a^2-u^2-v^2})$

$\Rightarrow$ Tutti i punti di A_z^+ hanno intorni fatti da immagine per par. regolare

Lo stesso vale per A_z^-

Si può fare lo stesso con $A_x^\pm, A_y^\pm$

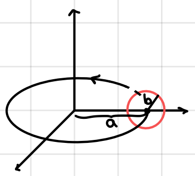
$\Rightarrow S^2_a = A_x^+ \cup A_x^- \cup A_y^+ \cup A_y^- \cup A_z^+ \cup A_y^-$

<u>Oss</u> Una sola par. regolare non basta per tutti i punti di S^2_a

S^2_a è compatta, quindi non può essere omeomorfa ad un aperto di $\mathbb{R}^2$

(4) Il toro $\mathbb{T}^2_{a,b}$ con $a>b>0$ (a raggio maggiore, b raggio minore)

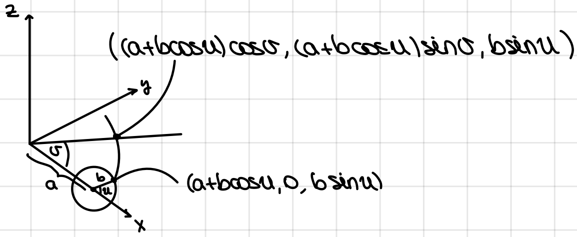
$\mathbb{T}^2_{a,b}$ è ottenuto ruotando la circonferenza attorno all'asse z



Quindi $\mathbb{T}^2_{a,b} = X(\mathbb{R}^2)$

$X:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v)\longmapsto((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$



X non è iniettiva: basta un quadrato di lato 2π

$X|_{(u_0,u_0+2\pi)\times(v_0,v_0+2\pi)}$ è iniettiva $\forall (u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$:

$(x,y,z) = X(u,v)\in\mathbb{T}^2_{a,b}$

$a+b\cos u = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \cos u = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-a}{b}$, $\sin u = \frac{z}{b}$

$\sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Dimostriamo che $X|_{(u_0,u_0+2\pi)\times(v_0,v_0+2\pi)}$ è una parametrizzazione regolare

$X_u = (-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ b\cos u)$

$X_v = (-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$

Se fosse $X_u \parallel X_v$, allora $\cos u = 0 \Rightarrow \sin u=\pm1$

$\Rightarrow X_u = \pm b(\cos v, \sin v, 0)$ $\quad X_v = a(-\sin v, \cos v, 0)$ non nulli

$X_u\cdot X_v = 0$ ↯

Per la continuità di $X|^{-1}_{(u_0,u_0+2\pi)\times(v_0,v_0+2\pi)}$

Una funzione è continua sse lo è in ogni suo punto

a) $u\neq k\pi \Rightarrow u=\arccos((\sqrt{x^2+y^2}-a)/b)$

b) $u\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow u=\arcsin(z/b)$

c) $v\neq k\pi \Rightarrow v = \arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})$

d) $v\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow v=\arcsin(y/\sqrt{x^2+y^2})$

Per ogni $(x,y,z)=X(u,v)\in\mathbb{T}^2_{a,b}$ valgono: a-c o a-d o b-c o b-d

In ciascun caso (u,v) si scrive in termini di (x,y,z) tramite funzioni continue

(5) Superfici di rotazione

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva regolare

$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$

t.c. α è iniettiva, α^{-1} è continua, $f(u) > 0$

$\underline{X} : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\underline{X}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$

$S := \underline{X}(I \times \mathbb{R})$

$(x,y,z) = \underline{X}(u,v) \in S$

$\Rightarrow f(u) = \sqrt{x^2+y^2}$, $g(u) = z$, $\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\underline{X}|_{I \times (v_0, v_0 + 2\pi)}$ è iniettiva

$\underline{X}_u = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u))$ $\qquad \underline{X}_u \cdot \underline{X}_u = f'(u)^2 + g'(u)^2 = \alpha'(u)\cdot\alpha'(u) > 0$

$\underline{X}_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0) = f(u)(-\sin v, \cos v, 0)$ $\qquad \underline{X}_v \cdot \underline{X}_v = f^2(u) > 0$

$\underline{X}_u \cdot \underline{X}_v = 0 \Rightarrow \underline{X}_u \nparallel \underline{X}_v \Rightarrow \underline{X}_u \times \underline{X}_v \neq 0$

Continuità di $\underline{X}^{-1}$:

$u = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)$

- $v \neq k\pi$: $v = \arccos\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)$
- $v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $v = \arcsin\left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)$

DEF. $a \in \mathbb{R}$ si dice **valore regolare** per f se
$f^{-1}(a) = \emptyset$ oppure $\forall p \in f^{-1}(a)$ $\nabla f(p) \neq 0$

(6) Superfici di livello

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞

Sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare per f con $f^{-1}(a) \neq \emptyset$

Allora $S := f^{-1}(a)$ è una superficie

Sia $p \in f^{-1}(a)$. Per ipotesi, $\nabla f(p) \neq \underline{0}$.

wlog supponiamo $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ $\qquad p = (x_0, y_0, z_0)$

$S = f^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = a\}$

$\begin{cases} f(x_0,y_0,z_0) = a \\ f_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \end{cases}$ Per il teorema della funz. implicita, $\exists V \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $(x_0,y_0) \in V$, $\exists U$ intorno di z_0, t.c. $\forall (u,v) \in V$ $\exists! z = z(u,v) \in U$ t.c. $f(u,v,z(u,v)) = a$

Inoltre $V \longrightarrow \mathbb{R} : (u,v) \longmapsto z(u,v)$ è C^∞

$\Rightarrow$ ogni punto di S abbastanza vicino a p è della forma $(u,v,z(u,v))$

$\Rightarrow \underline{X} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{X}(u,v) = (u,v,z(u,v))$ è una par. regolare t.c. $\underline{X}(V) \subseteq S$ ed è un intorno di p

Se $f_x(p) \neq 0$ o $f_y(p) \neq 0$, è analogo

$\Rightarrow S = f^{-1}(a)$ è una superficie

Ridimostriamo che S^2_a è una superficie

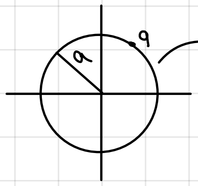
$S^2_a = f^{-1}(a^2)$, $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

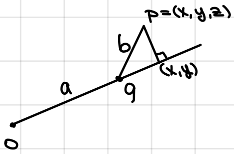
$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2$

$f^{-1}(a^2) \neq \emptyset$ se $a>0$

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla f = 0 \iff (x,y,z)=(0,0,0) \notin S^2_a$

$\mathbb{T}^2_{a,b}$:





$$b^2 = (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2 + z^2$$

$\mathbb{T}^2_{a,b} = f^{-1}(b^2)$, $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2 + z^2$

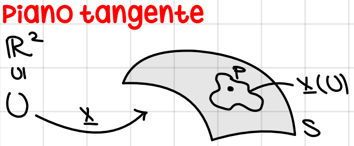
$(x,y,z) = p \in \mathbb{T}^2_{a,b}$

$$\nabla f = \left(2(\sqrt{x^2+y^2}-a)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} , 2(\sqrt{x^2+y^2}-a)\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} , 2z \right)$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow z=0 \underset{(x,y,z)\in f^{-1}(b^2)}{\Longrightarrow} (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2 = b^2 > 0 \Rightarrow x=y=0 \quad \text{ma } \underline{0} \notin \mathbb{T}^2_{a,b}$$

Quindi $\mathbb{T}^2_{a,b}$ è una superficie

Piano tangente



$p = \underline{x}(u_0, v_0)$ $\qquad \underline{x}_u(u_0,v_0) \times \underline{x}_v(u_0,v_0) \neq 0$

$\underline{x}_u(u_0,v_0) = \underline{x}_u(p)$, $\underline{x}_v(u_0,v_0) = \underline{x}_v(p)$

Provo a definire

$\boxed{T_pS = \langle \underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p) \rangle}$

Ma esistono altre parametrizzazioni regolari "intorno" a p

Se $\underline{y}: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un'altra par. regolare, con $\underline{y}(s_0,t_0) = p$,

è vero che $\langle \underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p) \rangle = \langle \underline{y}_s(p), \underline{y}_t(p) \rangle$?

Sarebbe sufficiente dimostrare $(\supseteq)$:

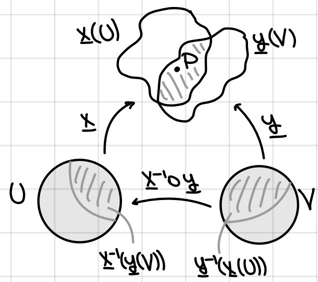
se $\underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$ fosse C^∞, $f(s,t) := \underline{x}^{-1}\circ \underline{y}(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$ (funzione di transizione)

$\Longrightarrow \underline{y}(s,t) = \underline{x}(u(s,t), v(s,t))$

$\Longrightarrow \underline{y}_s = u_s \underline{x}_u + v_s \underline{x}_v$

$\underline{y}_t = u_t \underline{x}_u + v_t \underline{x}_v$

Valutando in (s_0,t_0), si ottiene la tesi



__Fatto__: $\underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$ è C^∞

$\underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$\underline{x}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\underline{x}_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$

$\underline{x}_u(p) \times \underline{x}_v(p) \neq 0$ $\quad \operatorname{rnk}\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}(u_0,v_0) = 2$

$\Longrightarrow$ un minore 2×2 è non singolare

wlog sia $\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}(u_0,v_0) \neq 0$

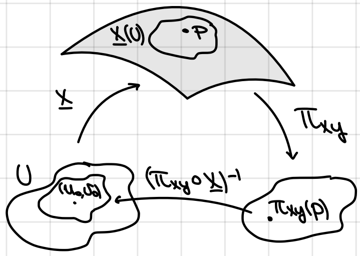
$U \xrightarrow{\underline{x}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$ è C^∞

Per il teorema della funzione inversa, $\pi_{xy} \circ \underline{X}$ è localmente invertibile intorno a (u_0, v_0)

$$(\pi_{xy} \circ \underline{X}) \circ (\pi_{xy} \circ \underline{X})^{-1}(x,y) = (x,y)$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{X}\,(\pi_{xy} \circ \underline{X})^{-1}(x,y) = (x, y, z(x,y))$$

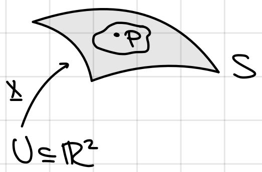


Dato $p \in S$ superficie, intorno a p è il grafico di una funzione C^∞ rispetto a una delle 3 proiezioni $\pi_{xy}, \pi_{yz}, \pi_{xz}$

$$\underline{X}^{-1} \circ \underline{Y} = \underbrace{(\pi_{xy} \circ \underline{X})^{-1}}_{C^\infty} \underbrace{(\pi_{xy} \circ \cancel{\underline{X}})}_{C^\infty} \circ \underbrace{\cancel{\underline{X}^{-1}} \circ \underline{Y}}_{C^\infty}$$

$$T_pS = \langle \underline{X}_u(p), \underline{X}_v(p) \rangle$$
$$\text{o} \quad p + \langle \underline{X}_u(p), \underline{X}_v(p) \rangle$$

<u>Oss</u>

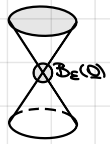


Posso supporre $U = D_\varepsilon(\underline{0})$ con $\underline{X}(\underline{0}) = p$

$$t_{(u_0,v_0)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto (u+u_0, v+v_0)$$

$\Longrightarrow$ $\underline{X} \circ t_{(u_0,v_0)}$ è ancora una par. regolare intorno a p, con $\underline{X} \circ t_{(u_0,v_0)}(\underline{0}) = p$

esempio $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$



$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$S = f^{-1}(0) = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 = 0\}$ è una superficie?

$\nabla f = (2x, 2y, -2z)$

$\nabla f(\underline{0}) = 0$ e $\underline{0} \in S$

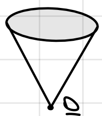
intorno di $\underline{0} \setminus \{\underline{0}\} = (S \cap \{z>0\}) \cup (S \cap \{z<0\})$ aperti nel cono non vuoti

Ma se S fosse una superficie, $\underline{0}$ avrebbe un intorno della forma $\underline{X}(D_\varepsilon(\underline{0}))$ omeomorfo a $D_\varepsilon(\underline{0})$

Ma $\underline{X}(D_\varepsilon(\underline{0})) \setminus \{\underline{0}\} = \underline{X}(D_\varepsilon(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\})$ è connesso

Quindi S non è una superficie

$S_+ := S \cap \{z \geq 0\}$



è una superficie?

Se S_+ fosse una superficie, un intorno di $\underline{0}$ in S_+ sarebbe il grafico di una funzione C^∞ rispetto a una delle proiezioni $\pi_{xy}, \pi_{yz}, \pi_{xz}$. I punti di tale intorno sarebbero della forma, rispettivamente:

$$(u, v, \varphi(u,v)) \qquad (\varphi(u,v), u, v) \qquad (u, \varphi(u,v), v)$$

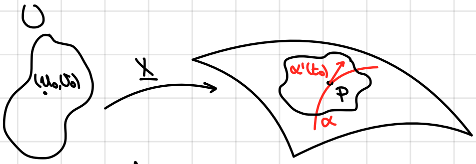
Ma $(x,y,z) \in B_\varepsilon(\underline{0}) \cap S^+ \subseteq S^+ \Longrightarrow (\pm x, \pm y, z) \in B_\varepsilon(\underline{0}) \cap S^+$

Quindi gli ultimi due casi non sono possibili

$u^2 + v^2 - \varphi^2(u,v) = 0 \longrightarrow \varphi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$ che non è C^∞ intorno a $\underline{0}$

curve su superfici

$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva regolare, I intervallo
con $\alpha(I) \subseteq S$ superficie
$t_0 \in I \quad \alpha'(t_0) \in T_{\alpha(t_0)} S$?



$\underline{x}(u_0, v_0) = p = \alpha(t_0)$

intorno a p $\quad \exists \underline{x}^{-1}: \underline{x}(U) \longrightarrow U$

A meno di considerare un piccolo intervallo intorno a $t_0 \in I$,
posso supporre $\alpha(I) \subseteq \underline{x}(U)$
$\underline{x}^{-1} \circ \alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\underline{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$
Considero una proiezione $\pi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.c. $\pi \circ \underline{x}$ è invertibile
con inversa C^∞ intorno a $\pi(p = \underline{x}(u_0,v_0) = \alpha(t_0))$
$\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ (\pi \circ \underline{x}) \circ \underline{x}^{-1} \circ \alpha$
$\Rightarrow \underline{x}^{-1} \circ \alpha$ è C^∞
$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ sempre vero localmente per una curva su una superficie
$\Rightarrow \alpha'(t) = u'(t)\, \underline{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, \underline{x}_v(u(t), v(t))$
Valutando in t_0, troviamo $\alpha'(t_0) = u'(t_0)\, \underline{x}_u(p) + v'(t_0)\, \underline{x}_v(p) \in T_pS$

Proposizione $\quad S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$.
$T_pS = \{ \alpha'(0) \mid \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \text{traccia}(\alpha) \subseteq S, \alpha(0) = p \}$.

DIMOSTRAZIONE
($\supseteq$) appena visto
($\subseteq$) $\underline{x}: D_\varepsilon(\underline{0}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par. regolare intorno a p, $\underline{x}(\underline{0}) = p$
$\xi = a\,\underline{x}_u(p) + b\,\underline{x}_v(p) \in T_pS$
$\alpha(t) = \underline{x}(at, bt) \qquad \alpha(0) = \underline{x}(0,0) = p,\ \alpha'(0) = a\,\underline{x}_u(p) + b\,\underline{x}_v(p) = \xi$ $\square$

<u>esercizio</u> $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie connessa t.c. $\exists q \in \mathbb{R}^3, q \notin S$, tale che
ogni retta affine per $p \in S$, ortogonale a T_pS, passa per q.
Dimostrare che $S \subseteq$ sfera.

<u>SOLUZIONE</u> Sia $p \in S$, sia $R = \|p - q\| > 0$
$S = \underbrace{\{r \in S : \|r - q\| = R\}}_{p \in B \neq \emptyset} \cup \underbrace{\{r \in S : \|r - q\| \neq R\}}_{A \text{ aperto}}$
Basta mostrare che B è aperto
$r \in B$, $\underline{x}: U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ par. regolare intorno a r, $r = \underline{x}(u_0, v_0)$, U connesso
Basta far vedere che $\underline{x}(U) \subseteq B$
$f(u,v) = \|\underline{x}(u,v) - q\|^2 \qquad f(u_0, v_0) = R^2$
$f_u = 2\,\underline{x}_u \cdot (\underline{x} - q) \qquad f_v = 2\,\underline{x}_v \cdot (\underline{x} - q)$
Per ipotesi, $f_u = f_v = 0 \implies f$ è costante su U, $f \equiv R^2$

versore normale

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $\underline{x}: U \longrightarrow S$ par. regolare

In ogni punto $\underline{x}(u,v)$ di $\underline{x}(U)$, $T_{\underline{x}(u,v)}S = \langle \underline{x}_u(u,v), \underline{x}_v(u,v) \rangle$

$\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v) \neq 0$ è normale

Definiamo $\underline{n}_{\underline{x}}(u,v) := \dfrac{\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)}{\|\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)\|}$ versore normale

Fisso $p \in S$, $\underline{x}: U \longrightarrow S$, $\underline{x}(u_0,v_0) = p$, $\underline{n}_{\underline{x}}(p) = \underline{n}_{\underline{x}}(u_0,v_0)$

$\underline{n}_{\underline{x}}$ può cambiare, cambiando parametrizzazione

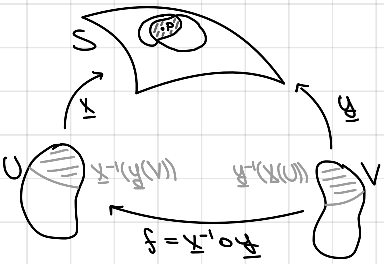
$U = D_\varepsilon(\underline{0}) \xrightarrow{\underline{x}} S$ par. reg., $\underline{x}(\underline{0}) = p \longrightarrow \underline{n}_{\underline{x}}(p)$

$D_\varepsilon(\underline{0}) \xrightarrow{\underline{y}} S$

$(u,v) \longmapsto \underline{x}(u,-v)$

$\Longrightarrow \underline{y}_u(\underline{0}) = \underline{x}_u(\underline{0}),\ \underline{y}_v(\underline{0}) = -\underline{x}_v(\underline{0}) \quad \Longrightarrow \underline{n}_{\underline{y}}(p) = -\underline{n}_{\underline{x}}(p)$

Più in generale, $\underline{x}: U \longrightarrow S$, $\underline{x}(u_0,v_0) = p$, $\underline{y}: V \longrightarrow S$, $\underline{y}(s_0,t_0) = p$



$f(s,t) = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$ funzione di transizione

$f = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} \iff \underline{y}(s,t) = \underline{x}(u(s,t), v(s,t))$

$\Longrightarrow \underline{y}_s = u_s \underline{x}_u + v_s \underline{x}_v, \quad \underline{y}_t = u_t \underline{x}_u + v_t \underline{x}_v$

$\underline{y}_s \times \underline{y}_t = (u_s \underline{x}_u + v_s \underline{x}_v) \times (u_t \underline{x}_u + v_t \underline{x}_v) = (u_s v_t - v_s u_t)\, \underline{x}_u \times \underline{x}_v$

$\det J_f(s,t)$, dove $J_f = \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \underline{n}_{\underline{x}}(p) = \underline{n}_{\underline{y}}(p) \iff \det J_f(s_0,t_0) > 0$ (non dipende dalla scelta della funzione di transizione)

Def. $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie si dice **orientabile** se esiste $\{\underline{x}: U \longrightarrow S\}$ par. regolari t.c. $S = \bigcup_{\underline{x}} \underline{x}(U)$ (con U connessi) e due qualunque par. regolari hanno funzioni di transizione con $\det J_f > 0$. Le par. regolari si dicono **compatibili** tra loro.

<u>esempio</u> Piani affini, grafici ed elicoidi sono orientabili perché immagini di un'unica par. regolare

<u>Oss</u> $S \subseteq \mathbb{R}$, $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua $\iff \forall\, \underline{x}: U \longrightarrow S$ par. regolare $f \circ \underline{x}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua

DIMOSTRAZIONE

$f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua se lo è in ogni punto $p \in S$

Se $\underline{x}: U \longrightarrow S$ par. regolare, $f \circ \underline{x}$ è continua (composizione di continue)

Viceversa, $f = (f \circ \underline{x}) \circ \underline{x}^{-1}$ è continua. $\square$

proposizione Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se $\exists\, \underline{n}: S \to \mathbb{R}^3$ continua t.c. $\|\underline{n}(p)\| = 1$ e $\mathrm{Span}(\underline{n}(p)) = (T_pS)^\perp$ $\forall p \in S$ (mappa versore normale).

DIMOSTRAZIONE

($\Rightarrow$) $\{\underline{x}: U \to S\}$ par regolari compatibili con $S = \bigcup_{\underline{x}} \underline{x}(U)$

$p \in S$, scelgo $\underline{x}$ par. regolare intorno a $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ nella famiglia e pongo $\underline{n}(p) = \underline{n}_{\underline{x}}(p)$: è ben definito

Per la continuità: $\underline{n} \circ \underline{x}(u,v) = \underline{n}_{\underline{x}}(u,v) = \dfrac{\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)}{\|\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)\|}$ è C^∞

($\Leftarrow$) $\underline{n}: S \to \mathbb{R}$ mappa versore normale

$p \in S$, $\underline{x}: D_\varepsilon(\underline{0}) \to S$ par. regolare, $\underline{x}(\underline{0}) = p$

$\underline{n}_{\underline{x}}(p) = \pm \underline{n}(p)$: se c'è il $-$, sostituisco $\underline{x}$ con $\underline{y}(u,v) = \underline{x}(u,-v)$

Facendolo $\forall p \in S$, si ottiene che S è orientabile. $\square$

esempio Le superfici di livello sono orientabili

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $f: U \to \mathbb{R}$ C^∞, $a \in \mathbb{R}$ valore regolare per f

$p \in f^{-1}(a)$, $\underline{x}: U \to f^{-1}(a)$ par. regolare, $\underline{x}(u_0, v_0) = p$ $\quad \underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$f(\underline{x}(u,v)) = a$ $\forall (u,v) \in U$

$\quad \| $

$f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \underline{x}\right) x_u + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \underline{x}\right) y_u + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ \underline{x}\right) z_u = 0$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \underline{x}\right) x_v + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \underline{x}\right) y_v + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ \underline{x}\right) z_v = 0$$

$\Rightarrow \nabla f(\underline{x}(u,v)) \perp T_{\underline{x}(u,v)} f^{-1}(a) \quad \Rightarrow \nabla f(p) \perp T_pS \;\; \forall p \in f^{-1}(a)$

$\Rightarrow \underline{n}_p := \dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ C^∞ mappa versore normale $\Rightarrow f^{-1}(a)$ è orientabile

proposizione $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientabile
$\alpha: [a,b] \to S$ curva chiusa.
Se $N: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è t.c. $N(t)$ versore, $N(t) \perp T_{\alpha(t)} S$, allora $N(a) = N(b)$.

DIMOSTRAZIONE

$\underline{n}: S \to \mathbb{R}$ mappa versore normale

$$\varphi: [a,b] \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$t \longmapsto \underline{n}(\alpha(t)) \cdot N(t)$$

Per connessione, $\varphi(t) \equiv \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

$\Rightarrow N(t) = \varepsilon\, \underline{n}(\alpha(t))$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$

$N(a) = \varepsilon\, \underline{n}(\alpha(a)) = \varepsilon\, \underline{n}(\alpha(b)) = N(b)$ $\square$

esempio nastro di Möbius

$T_{2,1} = \underline{x}(\mathbb{R}^2)$, $\underline{x}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\underline{x}(u,v) = ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)$

$\alpha(v) = (2\cos v, 2\sin v, 0)$ circonferenza dei centri

$\beta(u) = (\cos\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\sin u, \sin\frac{u}{2})$

$\underline{y}: \mathbb{R}\times(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,s) \longmapsto \alpha(u) + s\beta(v)$

$M = \underline{y}(\mathbb{R}\times(-1,1)) = \bigcup_{v\in\mathbb{R}} \underline{y}(\{v\}\times(-1,1))$ è il nastro di Möbius (è una superficie)

$N: [0,2\pi] \longrightarrow M$

$N(v) = \dfrac{\underline{y}_v(v,0)\times \underline{y}_s(v,0)}{\|\underline{y}_v(v,0)\times \underline{y}_s(v,0)\|}$

$\alpha: [0,2\pi] \longrightarrow M$ e $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$

Se M fosse orientabile, allora dovrebbe valere $N(0) = N(2\pi)$

Vogliamo confrontare $N(v)$ con $N(v+2\pi)$

$\underline{y}(v+2\pi, s) = \alpha(v+2\pi) + s\beta(v+2\pi) = \alpha(v) - s\beta(v) = \underline{y}(v,-s)$

$\Longrightarrow \underline{y}_v(v+2\pi, s) = \underline{y}_v(v,-s)$ e $\underline{y}_s(v+2\pi,s) = -\underline{y}_s(v,-s)$

Per $v=0, s=0$: $\underline{y}_v(2\pi,0) = \underline{y}_v(0,0)$ e $\underline{y}_s(2\pi,0) = -\underline{y}_s(0,0)$

$\Longrightarrow N(2\pi) = -N(0) \Longrightarrow M$ non è orientabile

operatore forma

Def. Data $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $f: S \to \mathbb{R}^3$ è C^∞ se $f \circ \underline{x}$ è C^∞ $\forall \underline{x}: U \to S$ par. regolare

$f: S \to \mathbb{R}$ C^∞, $p \in S$, $\xi \in T_pS$ $\quad (\xi = \alpha'(0)$ con $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $\alpha(0) = p)$

$D_\xi f := (f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3$

$\underline{x}: U \to S$ par. regolare, $\underline{x}(u_0, v_0) = p$

$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$, con $u, v \in C^\infty$

$\xi = \alpha'(0) = u'(0)\, \underline{x}_u(p) + v'(0)\, \underline{x}_v$

$D_\xi f = (f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt} f(\underline{x}(u(t), v(t)))\Big|_{t=0} = u'(0)\, (f \circ \underline{x})_u(u_0, v_0) + v'(0)\, (f \circ \underline{x})_v(u_0, v_0)$

(non dipende da α)

Inoltre $\xi \longmapsto D_\xi f$ è lineare in ξ

Inoltre il membro di sinistra non dipende da $\underline{x}$.

<u>Oss</u> Se $\underline{n}: S \to \mathbb{R}^3$ mappa versore normale, intorno ad ogni punto $p \in S$, $\underline{n}(q) = \underline{n}_{\underline{x}}(q)$, $\forall q \in \underline{x}(U)$, $\underline{x}: U \to S$ par. regolare, $p \in \underline{x}(U)$

$\Rightarrow \underline{n} \circ \underline{x}: U \to \mathbb{R}^3$, $\quad \underline{n}(\underline{x}(u,v)) = \underline{n}_{\underline{x}}(u,v) = \frac{\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)}{\|\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)\|}$ è C^∞ su U

$\Rightarrow \underline{n}$ è C^∞.

$\underline{n}: S \to \mathbb{R}^3$ mappa versore normale, $p \in S$, $\xi \in T_pS$

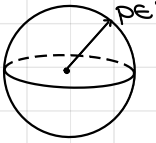
$D_\xi \underline{n} = (\underline{n} \circ \alpha)'(0)$ $\qquad$ con $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $\alpha(0) = p$

$\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1 \implies 2 D_\xi \underline{n} \cdot \underline{n}(\alpha(0) = p) = 0 \iff D_\xi \underline{n} \in T_pS$

$\Rightarrow S_p: T_pS \longrightarrow T_pS$ $\qquad \underline{n}: S \to \mathbb{R}^3$ versore normale

$\xi \longmapsto -D_\xi \underline{n}$ $\qquad$ è l'operatore forma

<u>esempio</u> $S_a^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = a > 0\}$



$p \perp T_pS_a^2$: $\xi = \alpha'(0) \in T_pS_a^2$, con $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_a^2$, $\alpha(0) = p$

$\alpha(t) \cdot \alpha(t) = 1 \implies 2\xi \cdot p = 0$

Perciò $\underline{n}: S_a^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$p \longmapsto \frac{1}{a} p$

$D_\xi \underline{n} = \frac{d}{dt} \underline{n}(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{1}{a} \alpha(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{a} \alpha'(0) = \frac{1}{a} \xi$

Quindi $S_p(\xi) = -D_\xi \underline{n} = -\frac{1}{a} \xi$

ossia $S_p: T_pS_a^2 \longrightarrow T_pS_a^2$, $\quad S_p = -\frac{1}{a} \mathrm{Id}_{T_pS_a^2}$.

Proposizione $S\subseteq\mathbb{R}^3$ superficie, $\underline{n}:S\to\mathbb{R}^3$ versore normale
Allora $\forall\, \xi,\eta\in T_pS$, $p\in S$ qualunque
$$S_p\xi\cdot\eta=\xi\cdot S_p\eta \quad \text{, ovvero}$$
S_p è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard

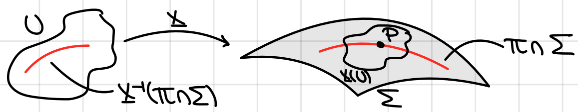
DIMOSTRAZIONE

$\underline{X}:U\longrightarrow S$ par. regolare, $\underline{X}(u_0,v_0)=p$
E' sufficiente verificare che
$$S_p X_u(p)\cdot X_v(p)=X_u(p)\cdot S_p X_v(p) \quad \text{(per linearità)}$$
$$X_u(p)=X_u(u_0,v_0)=\frac{d}{du}\underline{X}(u,v_0)\Big|_{u=u_0}$$
$$X_v(p)=X_v(u_0,v_0)=\frac{d}{dv}\underline{X}(u_0,v)\Big|_{v=v_0}$$

$$-S_p X_u(p)=\frac{d}{du}\Big|_{u=u_0}\underline{n}(\underline{X}(u,v_0))=D_{X_u(p)}\underline{n}$$
$$\underline{n}(\underline{X}(u,v_0))\cdot X_v(u,v_0)\equiv 0 \qquad u\in(u_0-\varepsilon,u_0+\varepsilon)$$
$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow}\ -S_pX_u(p)\cdot X_v(p)+\underline{n}(p)\cdot X_{vu}(p)=0$$
$$-S_pX_v(p)=\frac{d}{dv}\Big|_{v=v_0}\underline{n}(\underline{X}(u_0,v))$$
$$\underline{n}(\underline{X}(u_0,v))\cdot X_u(u_0,v)\equiv 0$$
$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow}\ -S_pX_v(p)\cdot X_u(p)+\underline{n}(p)\cdot X_{uv}(p)=0$$
Facendo la differenza membro a membro
$$S_pX_u(p)\cdot X_v(p)=X_u(p)\cdot S_pX_v(p) \qquad \square$$

$\Sigma\subseteq\mathbb{R}^3$ superficie, $p\in\Sigma$, $\underline{n}:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ versore normale
Arriveremo a interpretare i numeri $S_p w\cdot w$ $\quad\forall w\in T_p\Sigma,\ \|w\|=1$
Vogliamo studiare $\pi\cap\Sigma$ con π piano affine passante per p contenente $p+\langle w\rangle$

$\underline{X}:U\longrightarrow\Sigma$, $\underline{X}(u_0,v_0)=p$
$\pi=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid (a,b,c)\cdot x=d\}$
$\underline{X}^{-1}(\pi\cap\Sigma)=\{(u,v)\in U \mid \underbrace{(a,b,c)\cdot\underline{X}(u,v)}_{f(u,v)}=d\}$



$f(u,v)=d \implies 0\overset{?}{=}f_u(u_0,v_0)=(a,b,c)\cdot X_u(p)$ $\qquad$ <u>Oss</u> $(a,b,c)^\perp=\text{giac}(\pi)$
$\qquad\qquad\qquad\ \ 0\overset{?}{=}f_v(u_0,v_0)=(a,b,c)\cdot X_v(p)$

$\pi\neq T_p\Sigma \iff (a,b,c)\not\perp T_p\Sigma$, cioè $(f_u(u_0,v_0),f_v(u_0,v_0))\neq(0,0)$
una delle due derivate parziali è diversa da 0 in (u_0,v_0)
Se ad esempio $f_v(u_0,v_0)\neq 0$, per il Teorema della funzione implicita,
$\exists\, v=v(u)$ t.c. $v(u_0)=v_0$, $f(u,v(u))=d$ con u vicino a u_0
In particolare, vicino a (u_0,v_0), $\underline{X}^{-1}(\pi\cap\Sigma)$ è parametrizzato da $u\longmapsto(u,v(u))$
$\Rightarrow \pi\cap\Sigma$ è parametrizzato da $\alpha(u)=\underline{X}(u,v(u))$, $\alpha(u_0,v_0)=\underline{X}(u_0,v_0)=p$
$$\alpha'(u_0)=X_u(p)+v'(u_0)X_v(p)\neq 0$$

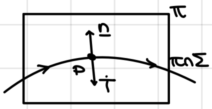
Abbiamo verificato che vicino a p, $\pi \cap \Sigma$ può essere parametrizzata da una curva regolare $\alpha: I \longrightarrow \Sigma$, $\alpha(u_0)=p$, α pla (se $\pi \neq T_p\Sigma$)
Possiamo supporre $\alpha'(u_0) = w = T_\alpha(u_0)$

$$\underline{n}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) = 0$$

$$\overset{\Longrightarrow}{\scriptstyle d/du|_{u=u_0}} \quad -S_p w \cdot w + \underline{n}(p) \cdot \dot{T}_\alpha(u_0) = 0$$

cioè $\quad S_p w \cdot w = \underline{n}(p) \cdot \dot{T}_\alpha(u_0) =: k_n(p,w)$ **curvatura normale** (nella direzione w)
dipende solo da Σ, p, w non da π

Se scegliamo $\pi \perp T_p\Sigma$



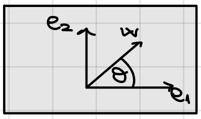
la curva α è planare: tutte le derivate di α stanno nella giacitura di π
$\dot{T}_\alpha(u_0) \,//\, \underline{n}(p)$ (stanno in π e sono $\perp T_\alpha(u_0)$)
quindi $|k_n(p,w)| = |\underline{n}(p) \cdot \dot{T}_\alpha(u_0)| = |\dot{T}_\alpha(u_0)| = k_\alpha(u_0)$ curvatura della sezione normale

Def. Gli autospazi (ortogonali se ho più autovalori) di $S_p: T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ si dicono **direzioni principali**.
Gli autovalori corrispondenti si dicono **curvature principali**.

Se e è S_p-autovettore con $\|e\|=1$ e $S_p e = ke$, allora
$k_n(p,e) = S_p e \cdot e = ke \cdot e = k$

__Formula di Eulero__

$p \in \Sigma$, $\underline{n}: \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $S_p: T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ e supponiamo $S_p \neq \lambda \, Id_{T_p\Sigma}$
allora ci sono $e_1, e_2 \in T_p\Sigma$ autovettori ortonormali : $S_p e_i = k_i e_i$, $\|e_i\|=1$
Sia $w \in T_p\Sigma$, $\|w\|=1 \implies w = \cos\theta \, e_1 + \sin\theta \, e_2$, $\theta \in [0, 2\pi]$



$T_p\Sigma$

Allora $k_n(p,w) = S_p w \cdot w = \cos^2\theta \, k_1 + \sin^2\theta \, k_2$

Proposizione Nelle ipotesi precedenti,
$$k_n(p,w) = \cos^2\theta \, k_1 + \sin^2\theta \, k_2 \quad , \theta \in [0, 2\pi]$$

Supponiamo $k_1 \leq k_2$:
$\cos^2\theta \, k_1 + \sin^2\theta \, k_2 = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\theta \in [k_1, k_2]$

Corollario $\quad \{k_n(p,w) \mid w \in T_p\Sigma, \|w\|=1\} = [k_1, k_2]$

Def. $p \in \Sigma$, $\underline{n}: \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $S_p: T_p\Sigma \to T_p\Sigma$
La **curvatura gaussiana di Σ** in p è $K(p) := \det(S_p)$
La **curvatura media di Σ** in p è $H(p) := \frac{1}{2} tr(S_p)$
Se $K \equiv 0$, Σ si dice **piatta**. Se $H \equiv 0$, Σ si dice **minima**.

Oss Se $\Sigma = S^2_a$, $S_p = -\frac{1}{a} Id_{T_pS^2_a}$
allora $K = \frac{1}{a^2}$, $H = -\frac{1}{a}$

Def. $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, allora chiamiamo I forma fondamentale di Σ la famiglia
$$\left\{ \begin{array}{l} I_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (\xi, \eta) \longmapsto \xi \cdot \eta \end{array} \right\}_{p\in\Sigma}$$
Se abbiamo $\underline{n} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $S_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$, chiamiamo II forma fondamentale di Σ la famiglia
$$\left\{ \begin{array}{l} II_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (\xi, \eta) \longmapsto S_p\xi \cdot \eta \end{array} \right\}_{p\in\Sigma}$$

Oss Cosa succede se passiamo da $\underline{n}$ a $-\underline{n}$?
$S_p \longmapsto -S_p$
le curvature normali cambiano segno, le curvature principali cambiano segno,
K non cambia segno, H cambia segno. La Iff non cambia, la IIff sì

Classificazione dei punti sulle superfici

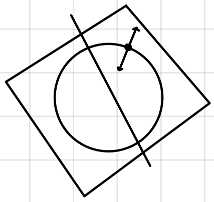
$p \in \Sigma$

1. $K(p) > 0$ — p ellittico
2. $K(p) < 0$ — p iperbolico
3. $K(p) = 0$, $S_p \neq 0$ — p parabolico
4. $K(p) = 0$, $S_p = 0$ — p planare

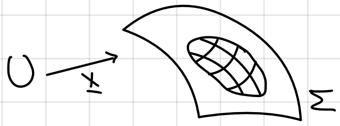
non serve prendere una normale

esempio (1) π piano affine
$\exists \underline{n} : \pi \to \mathbb{R}^3$ costante $\Longrightarrow S_p \equiv 0$, cioè ogni punto è planare: $S_pW \cdot W \equiv 0$, $K_n(p, W) \equiv 0$

(2) $S^2_a(\underline{0})$, allora per $p \in S^2_a$ vale $K(p) = \frac{1}{a^2} > 0$: punti ellittici
$|K_n(p, W)| = \frac{1}{a}$ a seconda della normale scelta



$p \in \Sigma$, $\underline{n} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $\underline{x} : U \to \Sigma$, $\underline{x}(u_0, v_0) = p$
$\underline{x}(u,v) \in \underline{x}(U)$: $(\underline{x}_u(u,v), \underline{x}_v(u,v))$ base di $T_{\underline{x}(u,v)}\Sigma$



Ora in tale base
I_p ha matrice associata $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ dove $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ C^∞ coefficienti di I
II_p ha matrice associata $\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$ dove $l, m, n : U \to \mathbb{R}$ C^∞ coefficienti di II
S_p ha matrice associata $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dove $a, b, c, d : U \to \mathbb{R}$ C^∞ coefficienti di S_p

come forme quadratiche

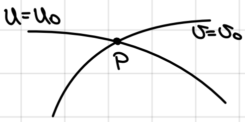
$II_p(\xi, \eta) = \langle S_p\xi, \eta \rangle = I_p(S_p\xi, \eta) = I_p(\xi, S_p\eta)$
Scrivendo tutto in coordinate rispetto a $\underline{x}_u(p)$, $\underline{x}_v(p)$
X vettore colonna delle coordinate di ξ, Y vettore colonna delle coordinate di η
Quindi $\quad {}^tX \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} Y = {}^tX \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} Y \Longrightarrow \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow ln - m^2 = (EG - F^2)K$
$\Longrightarrow K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$

Formule per ℓ, m, n e E, F, G:

$E(u,v) = I_{\underline{x}(u,v)}(\underline{x}_u(u,v), \underline{x}_u(u,v)) = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u$

Analogamente $F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v$ e $G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v$

$p = \underline{x}(u_0, v_0)$, $\underline{n} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ versore normale



$0 \equiv \underline{n}(\underline{x}(u, v_0)) \cdot \underline{x}_u(u, v_0)$

$\xrightarrow[\frac{d}{du}\big|_{u=u_0}]{} \underbrace{-S_p \underline{x}_u(p)\ \underline{x}_u(p)}_{\ell} + \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{uu}(p) = 0 \implies \ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu}$

Derivando in u $0 \equiv \underline{n}(\underline{x}(u, v_0)) \cdot \underline{x}_v(u, v_0)$ troviamo $m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv}$

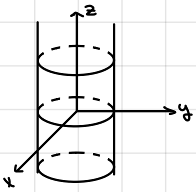
Derivando in v $0 \equiv \underline{n}(\underline{x}(u_0, v)) \cdot \underline{x}_v(u_0, v)$ troviamo $n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv}$

esercizio Cilindro di raggio R

$C = \underline{x}(\mathbb{R}^2)$, $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto (R\cos u, R\sin u, v)$

SOLUZIONE



$\underline{n}(\underline{x}(u,v)) = (\cos u, \sin u, 0)$

Infatti $\underline{x}_u = (-R\sin u, R\cos u, 0)$, $\underline{x}_v = (0,0,1)$

$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = (R\cos u, R\sin u, 0) = R(\cos u, \sin u, 0)$

$I\!f\!f : \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{x}_{uu} = -R(\cos u, \sin u, 0)$ $\quad \underline{x}_{uv} = 0$, $\underline{x}_{vv} = 0$

$\Rightarrow \ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = -R$, $m = 0$, $n = 0$

$I\!I\!f\!f : \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

curvature principali: $-\frac{1}{R}, 0$

$\Rightarrow$ curvature normali $k_n(p,w) : [-\frac{1}{R}, 0]$

$K = k_1 k_2 \equiv 0$, $S_p \neq 0 \implies$ tutti i punti sono parabolici

$\hookrightarrow$ C è piatta

esercizio Classificare i punti dell'elicoide

SOLUZIONE $\underline{x}(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})$ $\quad \underline{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$, $b > 0$

$\underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0)$ $\quad \underline{x}_v = (-u\sin v, u\cos v, b)$

$I\!f\!f : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+b^2 \end{pmatrix}$

$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = (b\sin v, -b\cos v, u)$ $\quad \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|^2 = b^2 + u^2$

$\implies \underline{n}(\underline{x}(u,v)) = \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(b\sin v, -b\cos v, u)$

$\underline{x}_{uu} = 0$, $\underline{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$ $\quad \underline{x}_{vv} = -u(\cos v, \sin v, 0)$

$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = 0$, $m = \underline{x}_{uv} \cdot \underline{n} = \frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}$, $n = \underline{x}_{vv} \cdot \underline{n} = 0$

$$S_p = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{(u^2+b^2)^{1/2}} \\ -\frac{b}{(u^2+b^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$K = -\frac{b^2}{(u^2+b^2)^2} < 0 \implies$ ogni punto è iperbolico

$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S_p = 0 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \implies k_1 = -k_2$, $k_1 k_2 = K$

$k_{1,2} = \pm \frac{b}{u^2+b^2}$ curvature principali

$\implies$ l'elicoide è una superficie minima

esercizio Classificare i punti del toro $T_{a,b}$, $a>b>0$

SOLUZIONE $T_{a,b} = \underline{x}(\mathbb{R}^2)$ $\quad \underline{x}(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$

$\underline{x}_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$

$\underline{x}_v = (-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0) = (a+b\cos u)(-\sin v, \cos v, 0)$

$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = (a+b\cos u)(-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u) = -b(a+b\cos u)(\cos u\sin v, \cos u\sin v, \sin u)$

$\Longrightarrow \underline{n}(\underline{x}(u,v)) = -(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)$

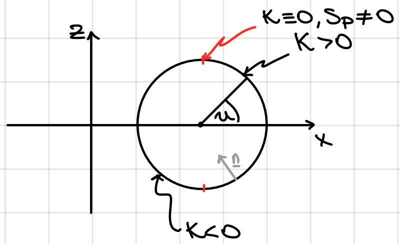
$$I_p = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)^2 \end{pmatrix}$$

$l = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{n} = -b(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u) \cdot \underline{n} = b$

$m = \underline{x}_{vu} \cdot \underline{n} = -b\cos u(\cos v, -\sin v, 0) \cdot \underline{n} = 0$

$n = \underline{x}_{vv} \cdot \underline{n} = -(a+b\cos u)(\cos v, \sin v, 0) \cdot \underline{n} = \cos u(a+b\cos u)$

$$S_p = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a+b\cos u)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos u(a+b\cos u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{a+b\cos u} \end{pmatrix}$$



Curvature principali: $\frac{1}{b}$, $\frac{\cos u}{a+b\cos u}$

Punti ellittici: $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

Punti parabolici: $u = \pm\frac{\pi}{2}$

Punti iperbolici: $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3}{2}\pi$

esercizio $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie connessa

Se $S_p = K(p)\, Id_{T_p\Sigma}$ $\forall p \in \Sigma$, allora

(1) K è costante

(2) $K \neq 0 \Longrightarrow \Sigma \subseteq$ sfera

(3) $K = 0 \Longrightarrow \Sigma \subseteq$ piano

SOLUZIONE È sufficiente mostrare che k è localmente costante

$p \in \Sigma$, $A = \{q \in \Sigma \mid K(q) = K(p)\}$ è aperto non vuoto

$B = \{q \in \Sigma \mid K(q) \neq K(p)\}$ è aperto $\Longrightarrow B = \emptyset$

Sia $p_0 \in \Sigma$ e $\underline{x}: U \longrightarrow \Sigma$ par. regolare, $\underline{x}(U) \ni p_0$, U connesso

Per ipotesi, $\forall p \in \underline{x}(U)$ $\quad \underset{\overset{\|}{-(\underline{n}\circ\underline{x})_u}}{S_p \underline{x}_u} = K(p)\underline{x}_u$, $\underset{\overset{\|}{-(\underline{n}\circ\underline{x})_v}}{S_p \underline{x}_v} = K(p)\underline{x}_v$ (è equivalente all'ipotesi)

$$(*)\begin{cases} (\underline{n}\circ\underline{x})_u + k\underline{x}_u = 0 & \overset{\partial_v}{\Longrightarrow} \quad (\underline{n}\circ\underline{x})_{uv} + k_v\underline{x}_u + k\underline{x}_{uv} = 0 \\ (\underline{n}\circ\underline{x})_v + k\underline{x}_v = 0 & \overset{\partial_u}{\Longrightarrow} \quad (\underline{n}\circ\underline{x})_{vu} + k_u\underline{x}_v + k\underline{x}_{vu} = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow k_v\underline{x}_u - k_u\underline{x}_v = 0 \Longrightarrow k_u \equiv k_v \equiv 0$

$\Longrightarrow k$ localmente costante $\Longrightarrow k \equiv k_0$

Ora

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\underline{n}\circ\underline{x} + k_0\underline{x})_u \equiv 0 \\ (\underline{n}\circ\underline{x} + k_0\underline{x})_v \equiv 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \underline{n}\circ\underline{x} + k_0\underline{x} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è localmente costante, quindi costante

Se $k_0 = 0$, $\underline{n}(\underline{x}(u,v)) \equiv \underline{n}_0$ $\quad \begin{cases} \underline{n}_0 \cdot \underline{x}_u \equiv 0 \\ \underline{n}_0 \cdot \underline{x}_v \equiv 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\underline{n}_0 \cdot \underline{x})_u \equiv 0 \\ (\underline{n}_0 \cdot \underline{x})_v \equiv 0 \end{cases} \Longrightarrow \underline{n}_0$ loc. cost

$\Longrightarrow n_0 \cdot x = d \Longrightarrow x(U) \subseteq$ piano affine

Se $k_0 \neq 0$, $n_0 \cdot x + k_0 x \equiv p_0 \in \mathbb{R}^3$

So $x(U)$: $x(u,v) = p_0 - \frac{1}{k_0} n(x(u,v))$

$\Longrightarrow \|x(u,v) - p_0\| = \frac{1}{|k_0|} \quad \forall (u,v) \in U$

$\Longrightarrow x(U) \subseteq S^2_{p_0}\left(\frac{1}{|k_0|}\right)$

Poiché Σ è connessa, $\Sigma \subseteq S^2_{p_0}\left(\frac{1}{|k_0|}\right)$

esercizio $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta
Allora Σ ha almeno un punto ellittico.

SOLUZIONE $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(p) = p \cdot p = \|p\|^2$

$f|_\Sigma$ ammette un punto di massimo p_0

Idea: mostriamo che tutte le curvature normali hanno lo stesso segno

$\Longrightarrow K(p_0) = k_1(p_0) \cdot k_2(p_0) > 0$

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Sigma$, $\alpha(0) = p_0$ curva pla

$g(t) = f(\alpha(t)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ ha massimo in 0

$\Longrightarrow g'(0) = 0$, $g''(0) \leq 0$

$f(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \alpha(t) \Longrightarrow g'(t) = 2\alpha'(t) \cdot \alpha(t)$

$0 = g'(0) = 2\alpha'(0) \cdot p_0 \quad \forall \alpha \Longrightarrow p_0 \perp T_{p_0}\Sigma$

n versore normale intorno a p_0 t.c. $p_0 = \|p_0\| n(p_0)$

$g''(t) = 2\alpha''(t) \cdot \alpha(t) + 2\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = 2\alpha''(t) \cdot \alpha(t) + 2$

$0 \geq g''(0) = 2\left[\|p_0\| \underbrace{\dot{T}_\alpha \cdot n(p_0)}_{k_n(p_0, \alpha'(t_0))} + 1\right]$

$\Longrightarrow k_n(p_0, \alpha'(0)) \leq -\frac{1}{\|p_0\|} < 0$

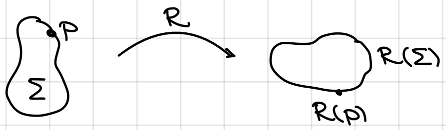
esercizio $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie

(a) $p \in \Sigma$ ellittico $\Longrightarrow \exists$ intorno di p in Σ contenuto dalla stessa parte di $p + T_p\Sigma$

(b) $p \in \Sigma$ iperbolico $\Longrightarrow \nexists$ intorno di p in Σ contenuto dalla stessa parte di $p + T_p\Sigma$

(c) $p \in \Sigma$ parabolico $\Longrightarrow$ entrambe le possibilità sono realizzate o planare

SOLUZIONE



con R rototraslazione

Poiché le rototraslazioni non alterano le curvature delle curve, le curvature normali in p coincidono (a meno del segno) con le curvature normali in $R(p)$ $\Longrightarrow K_\Sigma(p) = K_{R(\Sigma)}(R(p))$

Applicando una rototraslazione R, posso portare Σ in $R(\Sigma)$ in modo che: $p \in \Sigma$ qualunque $\Longrightarrow R(p) = 0$, $T_0 R(\Sigma) =$ piano xy, in modo che l'asse x e l'asse y siano direzioni principali

$\underline{x}: U \longrightarrow \Sigma$, $\underline{x}(U) \ni \underline{O}$, par. regolare

$\underline{x}_u, \underline{x}_v \in T_{\underline{O}}\Sigma \Rightarrow \underline{x}_u, \underline{x}_v$ hanno 3° componente nulla

ma $\operatorname{rk} J_{\underline{x}} = 2 \Rightarrow \Sigma$ è un grafico rispetto alla proiezione sul piano in un intorno di $\underline{O}$

$\Rightarrow \exists$ par. regolare $\underline{y}: V \longrightarrow \Sigma$, $\underline{y}(V) \ni \underline{O}$, con $\underline{y}(u,v) = (u, v, f(u,v))$, $f: V \to \mathbb{R}$ C^∞

Posso anche imporre $\underline{O} \in V$, $\underline{y}(\underline{O}) = \underline{O}$, cioè $f(0,0) = 0$

$\underline{y}_u = (1, 0, f_u)$, $\underline{y}_v = (0, 1, f_v)$

$\Rightarrow \underline{y}_u(\underline{O}), \underline{y}_v(\underline{O})$ hanno 3° coordinata nulla $\Rightarrow f_u(0,0) = f_v(0,0) = 0$

Sviluppo di Taylor in un intorno di $\underline{O}$

$$f(u,v) = \cancel{f(0,0)} + \cancel{f_u(\underline{O})u} + \cancel{f_v(\underline{O})v} + \tfrac{1}{2}(f_{uu}(\underline{O})u^2 + f_{uv}(\underline{O})uv + f_{vv}(\underline{O})v^2)) + \varepsilon(u,v)$$

$\underline{y}_u(\underline{O}) = (1,0,0)$, $\underline{y}_v(\underline{O}) = (0,1,0)$ autovettori di $S_p(\underline{O})$

$\underline{n}(\underline{O}) = (0,0,1)$

$l(\underline{O}) = \underline{n}(\underline{O}) \cdot \underline{y}_{uu}(\underline{O}) = f_{uu}(\underline{O})$

$m(\underline{O}) = \underline{n}(\underline{O})\ \underline{y}_{uv}(\underline{O}) = f_{uv}(\underline{O})$

$n(\underline{O}) = \underline{n}(\underline{O}) \cdot \underline{y}_{vv}(\underline{O}) = f_{vv}(\underline{O})$

$E(\underline{O}) = 1$, $F(\underline{O}) = 0$, $G(\underline{O}) = 1 \Rightarrow I_p = I$

Quindi la matrice di S_p è

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{uu}(\underline{O}) & f_{uv}(\underline{O}) \\ f_{uv}(\underline{O}) & f_{vv}(\underline{O}) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} f_{uv}(\underline{O}) = 0 \\ f_{uu}(\underline{O}) = k_1,\ f_{vv}(\underline{O}) = k_2 \end{array}$$

Quindi intorno a $\underline{O}$:

$$f(u,v) = \tfrac{1}{2}(k_1u^2 + k_2v^2) + \varepsilon(u,v) \qquad \text{con} \qquad \frac{\varepsilon(u,v)}{u^2+v^2} \xrightarrow[(u,v)\to\underline{O}]{} 0$$

Devo studiare il segno di f intorno a $\underline{O}$, a seconda dei casi

(a) $\underline{O}$ ellittico: $k_1 \overset{(1)}{\geq} k_2 > 0$ o $k_2 \overset{(2)}{\leq} k_1 < 0$

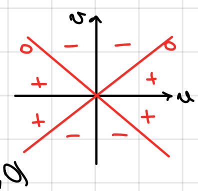
$$\frac{f(u,v)}{u^2+v^2} = \frac{k_1u^2 + k_2v^2}{2(u^2+v^2)} + \frac{\varepsilon(u,v)}{u^2+v^2} \begin{cases} \overset{(1)}{\geq} \frac{k_2}{2} + \frac{\varepsilon(u,v)}{u^2+v^2} > 0 & \text{per } (u,v) \sim (0,0) \\ \overset{(2)}{\leq} \frac{k_1}{2} + \frac{\varepsilon(u,v)}{u^2+v^2} < 0 & \text{per } (u,v) \sim (0,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ un intorno di $\underline{O}$ in Σ sta dalla stessa parte del piano tangente affine in $\underline{O}$

(b) $\underline{O}$ iperbolico: $k_2 < 0 < k_1$

$$(*) \quad \frac{f(u,v)}{u^2+v^2} = \frac{k_1u^2 + k_2v^2}{2(u^2+v^2)} + \frac{\varepsilon(u,v)}{u^2+v^2}$$

$$k_1u^2 + k_2v^2 = (\sqrt{k_1}u - \sqrt{-k_2}v)(\sqrt{k_1}u + \sqrt{-k_2}v)$$



$$(*)\big|_{v=0} = \frac{k_1}{2} + \frac{\varepsilon(u,0)}{u^2} > 0 \quad \text{per } (u,0) \sim (0,0)$$

$$(*)\big|_{u=0} = \frac{k_2}{2} + \frac{\varepsilon(0,v)}{v^2} < 0 \quad \text{per } (0,v) \sim (0,0)$$

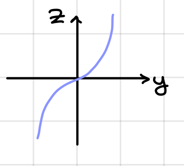
(c) Casi parabolici e planari

- Σ piano: Σ coincide con ogni piano tangente
- Σ cilindro: sta tutto dalla stessa parte dei piani tangenti

Caso parabolico: una e una sola tra k_1 e k_2 è nulla

$\Sigma := \{z = x^2 + y^3\}$

$\Sigma \cap \{x = 0\}$



Caso planare: $k_1 = k_2 = 0$

$\Sigma := \{z = y^3\} \longrightarrow \nexists$ intorno dalla stessa parte del piano tangente

$\Sigma := \{z = y^4\} \longrightarrow \exists$ intorno dalla stessa parte del piano tangente

esercizio $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la traccia della curva $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$, $f > 0$
supponendo α iniettiva, pla, α^{-1} continua
Mostrare che, rispetto alla par. regolare, $\underline{x}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$,
le curve coordinate $u = u_0$ e $v = v_0$ sono linee di curvatura
(ovunque tangenti alle direzioni principali).
Calcolare le curvature principali e la curvatura gaussiana in funzione di f e g.

SOLUZIONE $\underline{x}_u = (f_u \cos v, f_u \sin v, g_u)$, $\underline{x}_v = (-f\sin v, f\cos v, 0)$

$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = f_u^2 + g_u^2 = 1$, $\quad F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$, $\quad G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = f^2$

$\underline{x}_{uu} = (f_{uu}\cos v, f_{uu}\sin v, g_{uu})$, $\underline{x}_{uv} = (-f_u \sin v, f_u \cos v, 0)$, $\underline{x}_{vv} = -f(\cos v, \sin v, 0)$

$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = (-f g_u \cos v, -f g_u \sin v, f f_u)$ $\quad \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = f\sqrt{f_u^2 + g_u^2} = f$

$\Longrightarrow \underline{n} = (-g_u \cos v, -g_u \sin v, f_u)$

$l = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = -g_u f_{uu} + f_u g_{uu}$, $m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv} = 0$, $n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv} = f g_u$

$$\Longrightarrow S_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g'f'' + f'g'' & 0 \\ 0 & fg' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g'f'' + f'g'' & 0 \\ 0 & g'/f \end{pmatrix}$$

curvature principali

$$K = \frac{(f'g'' - f''g')g'}{f} = -\frac{f''\left((f')^2 + (g')^2\right)}{f} = -\frac{f''}{f}$$

$(f')^2 + (g')^2 = 1 \Longrightarrow f'f'' + g'g'' = 0$

Teorema Egregium

Gauß si chiedeva se fosse possibile creare carte geografiche che permettono di calcolare le distanze.

Generalizzando e formalizzando: $\underline{x}: U \to \Sigma$, par. regolare, che proprietà deve avere per conservare la lunghezza delle curve?

$$\begin{tikzcd}[a,b] \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha = \underline{x} \circ \overline{\alpha}"'] & U \arrow[r, "\underline{x}"] & \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3\end{tikzcd}$$

Mi chiedo quando $\ell(\alpha) = \ell(\overline{\alpha})$?

$\overline{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$, $\quad \alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$

$$\int_a^t \|\overline{\alpha}'(u)\| du \overset{?}{=} \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \quad \forall t \in [a,b]$$

$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \|\overline{\alpha}'(t)\|^2 = \|\alpha(t)\|^2 \ \forall t$, cioè $u'(t)^2 + v'(t)^2 = \| u'(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + v'(t)\underline{x}_v(\alpha(t))\|^2$

$\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = (u'(t) \ \ v'(t)) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = E u'(t)^2 + F u'(t) v'(t) + G (v'(t))^2$

in $(u(t), v(t))$

Poiché l'applicazione $(\mathbb{R}^2, \cdot) \longmapsto (T_{\alpha(t)}\Sigma, I_{\alpha(t)})$

$(a,b) \longmapsto a\underline{x}_u(\alpha(t)) + b\underline{x}_v(\alpha(t))$

è un'isometria per ogni $t \Longrightarrow E = G = 1$, $F = 0$

Viceversa, è chiaro che se $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $\ell(\alpha) = \ell(\overline{\alpha})$

Quindi $\underline{x}: U \to \underline{x}(U)$ conserva le lunghezze delle curve $\Longleftrightarrow E \equiv G \equiv 1$, $F \equiv 0$

In questo caso, diciamo che $\underline{x}$ è un'isometria locale del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ e Σ

Problema di Gauß: esistono delle isometrie locali da $\mathbb{R}^2$ a $S_a^2(0)$?

Il teorema egregium dice di no, perché in nessun punto $S_a^2(0)$ ha curvatura gaussiana 0.

Def. Date superfici Σ e Σ^* e punti $p \in \Sigma$, $p^* \in \Sigma^*$, Σ e Σ^* si dicono localmente isometriche intorno a p e p^* se esistono $\underline{x}: U \to \Sigma$, $\underline{x}^*: U \to \Sigma^*$ con $p \in \underline{x}(U)$, $p^* \in \underline{x}^*(U)$ t.c. $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$

In questa situazione

$$\begin{tikzcd}[a,b] \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[rr, bend left, "\alpha = \underline{x} \circ \overline{\alpha}"] \arrow[rrd, bend right, "\alpha^* = \underline{x}^* \circ \overline{\alpha}"'] & U \arrow[r, "\underline{x}"] \arrow[rd, "\underline{x}^*"'] & \underline{x}(U) \subseteq \Sigma \arrow[d, dotted, "f = \underline{x}^* \circ \underline{x}^{-1}"] \\ & & \underline{x}^*(U) \subseteq \Sigma^*\end{tikzcd}$$

allora $f \circ \alpha = \underline{x}^* \circ \overline{\alpha} = \alpha^*$

usando * ricaviamo che f conserva la lunghezza

Osserviamo che ogni superficie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ è localmente isometrica (anzi globalmente) a $\Sigma^* = R(\Sigma)$ con R rototraslazione

$$\begin{tikzcd}U \arrow[r, "\underline{x}"] \arrow[rd, "\underline{x}^* = R \circ \underline{x}"'] & \underline{x}(U) \subseteq \Sigma \arrow[d, "R"] \\ & \underline{x}^*(U) \subseteq \Sigma^*\end{tikzcd}$$

cioè $R = f$

Basta osservare che vale il viceversa di quanto detto prima: se f conserva le lunghezze, $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$ e f è isometria locale.

Teorema Egregium di Gauß $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, $\underline{x}: U \to \Sigma$ par. regolare su Σ.
Allora la curvatura gaussiana nei punti di $\underline{x}(U)$ è esprimibile in termini di E, F, G e delle loro derivate.

<u>Oss</u> Il teorema ostruisce l'esistenza di isometrie locali

DIMOSTRAZIONE

$\underline{x}_{uu}, \underline{x}_{uv}, \underline{x}_{vv}$ sono combinazione lineare dei vettori $\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n} (= \underline{n}_{\underline{x}})$

$$\begin{cases} \underline{x}_{uu} = \Gamma^u_{uu}\underline{x}_u + \Gamma^v_{uu}\underline{x}_v + l\underline{n} \\ \underline{x}_{uv} = \Gamma^u_{uv}\underline{x}_u + \Gamma^v_{uv}\underline{x}_v + m\underline{n} \\ \underline{x}_{vv} = \Gamma^u_{vv}\underline{x}_u + \Gamma^v_{vv}\underline{x}_v + n\underline{n} \end{cases}$$ con $\Gamma^i_{jk}: U \to \mathbb{R}$ simboli di Christoffel

Vediamo la prima equazione: $\begin{matrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} = E\Gamma^u_{uu} + F\Gamma^v_{uu} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} = F\Gamma^u_{uu} + G\Gamma^v_{uu} \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix}$

Se $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu}$ e $\underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu}$ si ricavano da E, F, G, lo stesso vale per Γ^u_{uu} e Γ^v_{uu}

Ora $E_u = (\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u)_u = 2\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu}$ $\quad E_v = 2\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uv}$

$F_u = (\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v)_u = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_v + \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{vu}$

$\Longrightarrow \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$

Analogo per gli altri

Sappiamo che $\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

quindi $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$ e $ld - bm = \frac{1}{EG-F^2}(l(-Fm+En) - m(-Fl+Em)) =$

$$= E\,\frac{ln-m^2}{EG-F^2} = EK$$

Adesso $ld-bm$ si ottiene dai simboli di Christoffel, e quindi concludiamo.

Per vederlo, uguagliamo le seconde coordinate di $\underline{x}_{uuv}$ e $\underline{x}_{uvu}$ rispetto a $\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n}$

$\underline{x}_{uuv} = (\Gamma^u_{uu}\underline{x}_u + \Gamma^v_{uu}\underline{x}_v + l\underline{n})_v$

guardiamo il coefficiente di $\underline{x}_v$:

$(\ldots)\underline{x}_u + (\Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - ld)\underline{x}_v + (\ldots)\underline{n}$

$\underline{n}_v = -S(\underline{x}_v) = -c\underline{x}_u - d\underline{x}_v$ coeff di $\underline{x}_v$ in $\underline{n}_v$

la seconda viene:

$\underline{x}_{uvu} = (\Gamma^u_{uv}\underline{x}_u + \Gamma^v_{uv}\underline{x}_v + m\underline{n})_u$

$= (\ldots)\underline{x}_u + (\Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} - mb)\underline{x}_v + (\ldots)\underline{n}$

$\underline{n}_u = -S(\underline{x}_u) = -a\underline{x}_u - b\underline{x}_v$

A questo punto uguagliando termine a termine troviamo $ld-bm$ come funzione dei simboli di Christoffel. $\square$

<u>esempio</u> (1) $\underline{x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad C_R := \underline{x}(\mathbb{R}^2)$ cilindro di raggio R

$(u,v) \longmapsto (R\cos u, R\sin u, v)$

$\underline{x}_u = R(-\sin u, \cos u, 0)$

$\underline{x}_v = (0,0,1)$ $\quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non posso dedurre nulla

Se prendo $\underline{x}(u,v) = (R\cos\frac{u}{R}, R\sin\frac{u}{R}, v)$ trovo $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = I$

$\Rightarrow C_R$ e il piano euclideo sono localmente isometrici

(2) Poiché un'elicoide ha $K<0$ in ogni punto, essa non è localmente isometrica né ad un piano affine ($K=0$) né ad una sfera ($K>0$)

Trasporto parallelo

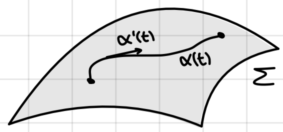
Def. $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale tangente se $X(p) \in T_p\Sigma \quad \forall p \in \Sigma$

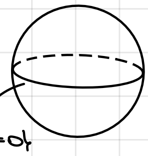
Def. Se $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale tangente, $v \in T_p\Sigma$, allora $\nabla_v X := D_v X - (D_v X \cdot \underline{n}(p))\underline{n}(p) = (D_v X)^T \in T_p\Sigma$ si dice derivata covariante (non dipende dalla normale scelta)

__Oss__ Data $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Sigma$ t.c. $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, allora ricordiamo che $D_v X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(\alpha(t))$

È sufficiente che X sia definito solo lungo traccia(α) (e $X \circ \alpha$ C^∞)

Def. $\alpha : I \longrightarrow \Sigma$ curva regolare, $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale tangente su Σ (o anche $X \circ \alpha \in C^\infty(I, \mathbb{R}^3)$), X è parallelo lungo α se $\nabla_{\alpha'(t)} X = 0 \quad \forall t$



__esempio__ (1) $S^2_a(\underline{0}) =$  $\subseteq \mathbb{R}^3$

$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow S^2_a(\underline{0})$

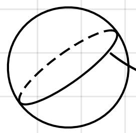
$\alpha(u) = (a\cos u, a\sin u, 0)$

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S^2_a(\underline{0})$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma(t) \cdot \gamma(t) \equiv a^2$, $2\gamma'(0) \cdot p = 0$
cioè $p^\perp = T_p S^2_a(\underline{0})$ per contenimento e dimensione

Definisco $X : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$X(p) = (0,0,1) \in T_p S^2_a(\underline{0}) \quad \forall p \in E$

X è parallelo perché è costante $\Longrightarrow D_v X \equiv 0$

(2)  $S^2_a(0)$

cerchio massimo $C = S^2_a(\underline{0}) \cap \pi$, π piano affine per $\underline{0}$

$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow S^2_a(\underline{0})$ parametrizzazione di C a velocità costante : $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \text{cost}$ $(*)$

$X(\alpha(t)) := \alpha'(t)$ lungo α è parallelo lungo α

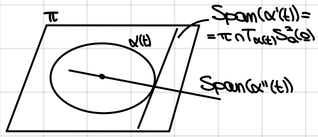
$\frac{d}{dt}(*) = 2\alpha''(t) \cdot \alpha'(t) = 0$

Vogliamo $\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = \frac{d}{dt}(\alpha'(t))^T = (\alpha''(t))^T \equiv 0$

traccia$(\alpha) \subset \pi \Longleftrightarrow \alpha(t) \cdot v_0 \equiv 0 \Longrightarrow \alpha''(t) \cdot v_0 \equiv 0 \Longrightarrow \alpha''(t) \parallel \pi$

$\Longrightarrow \alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)} S^2_a(\underline{0})$

$\Longrightarrow X$ è parallelo lungo C



Proposizione $\alpha : [0,1] \longrightarrow \Sigma$, Σ superficie, α regolare, $X_0 \in T_{\alpha(0)}\Sigma$.
Allora $\exists!$ campo vettoriale tangente X parallelo lungo α t.c. $X(0) = X_0$

DIMOSTRAZIONE

Per compattezza, traccia$(\alpha) \subset$ unione finita di aperti $\underline{x}(U)$ con $\underline{x}$ par regolare

Per l'unicità, è sufficiente mostrarlo nel caso di traccia$(\alpha) \subset \underline{x}(U)$

X campo vettoriale lungo α, $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$

$X(\alpha(t)) = a(t)\,\underline{x}_u(\alpha(t)) + b(t)\,\underline{x}_v(\alpha(t))$, $\quad X_0 = a_0 \underline{x}_u + b_0 \underline{x}_v$

$$0 = \frac{d}{dt}(X(\alpha(t)))^T = [a'\,\underline{x}_u \circ \alpha + a(u'\,\underline{x}_{uu} \circ \alpha + v'\,\underline{x}_{uv} \circ \alpha) + b'\,\underline{x}_v \circ \alpha + (u'\,\underline{x}_{vu} \circ \alpha + v'\,\underline{x}_{vv} \circ \alpha)]^T =$$
$$= a'\,\underline{x}_u \circ \alpha + a[u'(\Gamma^u_{uu}\,\underline{x}_u \circ \alpha + \Gamma^v_{uu}\,\underline{x}_v \circ \alpha) + v'(\Gamma^u_{uv}\,\underline{x}_u \circ \alpha + \Gamma^v_{uv}\,\underline{x}_v \circ \alpha)] +$$
$$+ b[u'(\Gamma^u_{vu}\,\underline{x}_u \circ \alpha + \Gamma^v_{vu}\,\underline{x}_v \circ \alpha) + v'(\Gamma^u_{vv}\,\underline{x}_u \circ \alpha + \Gamma^v_{vv}\,\underline{x}_v \circ \alpha)]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a' + a(u'\Gamma^u_{uu} + v'\Gamma^u_{uv}) + b(u'\Gamma^u_{vu} + v'\Gamma^u_{vv}) = 0 \\ b' + a(u'\Gamma^v_{uu} + v'\Gamma^v_{uv}) + b(u'\Gamma^v_{vu} + v'\Gamma^v_{vv}) = 0 \end{cases}$$ è un sistema di EDO omogenee

e $\quad a(0) = a_0,\ b(0) = b_0$

$\Longrightarrow$ la soluzione esiste ed è unica e globale $\square$

<u>Oss</u> Il sistema è lineare omogeneo

$\Rightarrow$ la mappa trasporto parallelo lungo $\alpha : T_{\alpha(0)}\Sigma \longrightarrow T_{\alpha(1)}\Sigma$ è lineare

Proposizione Il trasporto parallelo rispetta i prodotti scalari.

DIMOSTRAZIONE

X, Y campi vettoriali tangenti paralleli lungo α

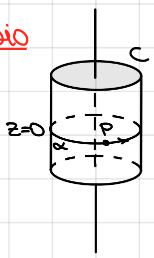
$X(\alpha(0)) = X_0$, $Y(\alpha(0)) = Y_0$ $\qquad$ (con $\alpha : [0,1] \longrightarrow \Sigma$)

E' sufficiente mostrare che $X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t)) \equiv \text{cost}$

$$\frac{d}{dt}(X(\alpha(t))\ Y(\alpha(t))) = D_{\alpha'(t)}X(\alpha(t))\ Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot D_{\alpha'(t)}Y(\alpha(t)) =$$
$$= \underbrace{\nabla_{\alpha'(t)}X(\alpha(t))}_{=0} \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot \underbrace{\nabla_{\alpha'(t)}Y(\alpha(t))}_{=0} = 0$$ $\square$

Dunque i trasporti paralleli sono isomorfismi di spazi euclidei

<u>esempio</u>



Qual è il trasporto parallelo lungo α da p a p?

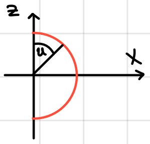
$X := (0,0,1) \in T_{\alpha(t)}C$

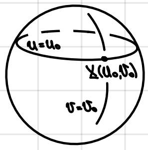
$\nabla_{\alpha'(t)}X = \left(\frac{d}{dt}X(\alpha(t))\right)^T = 0 \implies X$ è parallelo lungo α

Anche un vettore tangente ad α in p va in sé stesso

$\Longrightarrow$ il trasporto parallelo è l'identità

esempio Calcoliamo il trasporto parallelo lungo un parallelo di $S^2_1(\underline{0})$





$$\alpha(u) = (\sin u, 0, \cos u), \quad u \in (0,\pi)$$
$$\Sigma = S^2_1(\underline{0}) \setminus \{poli\} = \underline{X}((0,\pi)\times\mathbb{R})$$
$$\underline{X}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

Un parallelo $u=u_0$ su S^2 è la traccia di $t \overset{\beta}{\longmapsto} \underline{X}(u_0, t+v_0)$, cioè $u(t)\equiv u_0$, $v(t) = t+v_0$

Campo parallelo lungo β

$X(\beta(t)) = a(t)\underline{X}_u(\beta(t)) + b(t)\underline{X}_v(\beta(t))$ e $X(\beta(0)) = \beta'(0) = \underline{X}_v(u_0,v_0)$

$$\begin{cases} a' + a(u'\Gamma^u_{uu} + v'\Gamma^u_{uv}) + b(u'\Gamma^u_{vu} + v'\Gamma^u_{vv}) = 0 \\ b' + a(u'\Gamma^v_{uu} + v'\Gamma^v_{uv}) + b(u'\Gamma^v_{vu} + v'\Gamma^v_{vv}) = 0 \end{cases}$$

$\underline{X}_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$

$\underline{X}_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$ $\qquad F = \underline{X}_u \cdot \underline{X}_v \equiv 0$

$\beta(t) = \underline{X}(u_0, t+v_0) \Rightarrow u'(t) \equiv 0, v'(t) \equiv 1$

$\underline{X}_{uv} = \Gamma^u_{uv}\underline{X}_u + \Gamma^v_{uv}\underline{X}_v + m\underline{n} \quad \Longrightarrow \quad E\Gamma^u_{uv} = \underline{X}_{uv}\cdot\underline{X}_u$

$\underline{X}_{uv} = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0) \Longrightarrow \underline{X}_{uv}\cdot\underline{X}_u = 0 \Longrightarrow \Gamma^u_{uv} = 0$

Analogamente, $G\Gamma^v_{vv} = \underline{X}_{vv}\cdot\underline{X}_v = 0 \Rightarrow \Gamma^v_{vv} = 0$

$\underline{X}_{vv} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 0)$

$G\Gamma^v_{uv} = \underline{X}_{uv}\cdot\underline{X}_v = \sin u_0 \cos u_0 \qquad G = \underline{X}_v\cdot\underline{X}_v = \sin^2 u_0 \neq 0$

$\Longrightarrow \Gamma^v_{uv} = \dfrac{\cos u_0}{\sin u_0}$

$E\Gamma^u_{vv} = \underline{X}_{vv}\cdot\underline{X}_u = -\sin u_0 \cos u_0 \qquad E = \underline{X}_u\cdot\underline{X}_u = 1$

$\Longrightarrow \Gamma^u_{vv} = -\sin u_0 \cos u_0$

$$\begin{cases} a' - b\sin u_0 \cos u_0 = 0 \\ b' + a\dfrac{\cos u_0}{\sin u_0} = 0 \end{cases} \quad \text{con } a(0) = 0,\ b(0) = 1$$

Per $\cos u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} a' = 0 \\ b' = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(\beta(v)) \equiv \underline{X}_v(u_0, v) = \beta'(v)$

Per $\cos u_0 \neq 0$: $\frac{d}{dt}$ della 2° equazione

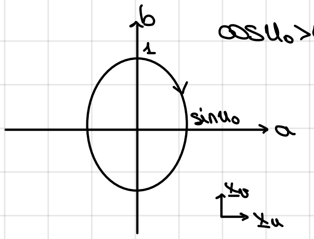
$0 = b'' + a'\dfrac{\cos u_0}{\sin u_0} = b'' + b\cos^2 u_0 \qquad k := \cos u_0$

Soluzione: $b(t) = c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt)$

Condizioni iniziali: $b(0) = c_1 = 1$

$b'(0) = -a(0)\dfrac{\cos u_0}{\sin u_0} = 0 = kc_2 \quad \Longrightarrow b(t) = \cos(\cos u_0 t)$

$a(t) = \sin u_0 \sin(\cos u_0 t)$



Il campo parallelo X ruota in senso orario nell'emisfero superiore, non ruota sull'equatore e ruota in senso anti-orario nell'emisfero inferiore

$p \in \{u = u_0\} \subseteq S^2 \Rightarrow$ trasporto parallelo $T_pS^2 \longrightarrow T_pS^2$?
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathbb{E}^2 \qquad\quad \mathbb{E}^2$ ($\cong$)

$\Rightarrow$ è un'isometria
- rotazione $SO(2)$
- non rotazione $O(2)$

v_1, v_2 base di $T_p\Sigma$, Σ superficie, $n: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ normale
$(v_1 \times v_2) \cdot n > 0 \iff v_1, v_2$ è una base positiva

v_1', v_2' altra base di $T_p\Sigma$ è positiva $\iff \det A > 0$, con A matrice di cambiamento di base da v_1', v_2' a una base positiva

Se $n: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ normale, i trasporti paralleli su Σ conservano il segno di ogni base
$(v_1 \times v_2) \cdot n > 0$ $\quad X(\alpha(t)) \times Y(\alpha(t)) \cdot n(\alpha(t))$ non cambia segno

Per quanto detto sopra, il trasporto $T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ è una rotazione degli stessi angoli.

Geodetiche

Def. Una curva $\alpha: I \to \Sigma$, Σ superficie, α curva regolare, α è una geodetica se $\nabla_{\alpha} \alpha' \equiv 0$ lungo α, cioè $(\alpha'')^T = 0$

<u>Oss</u> α geodetica su $\Sigma \Rightarrow$ la velocità di α è costante

$$\frac{d}{dt}(\alpha' \cdot \alpha') = 2\underset{(T_{\alpha(t)}\Sigma)^\perp}{\underset{\cap}{\alpha''}} \cdot \underset{T_{\alpha(t)}\Sigma}{\underset{\cap}{\alpha'}} \equiv 0$$

<u>esempio</u> Quali sono le geodetiche su $S^2_a(0)$?
Abbiamo già verificato $\alpha: I \to S^2_a(0)$ parametrizza una porzione di cerchio massimo, $\alpha' \cdot \alpha' = \text{cost}$, α' è parallelo lungo $\alpha \Rightarrow \alpha$ è una geodetica
Viceversa, sia $\alpha: I \to S^2_a(0)$ una geodetica: $\alpha'' \perp T_{\alpha(t)} S^2_a(0) = (\alpha(t))^\perp$
$\iff \alpha'' \times \alpha \equiv 0 \iff (\alpha' \times \alpha)' = \alpha'' \times \alpha + \cancel{\alpha' \times \alpha'} \equiv 0$
$\iff \alpha' \times \alpha \equiv v_0 \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot v_0 \equiv 0$
$\Rightarrow \alpha(t) \in v_0^\perp \cap S^2_a(0)$ cerchio massimo
Quindi le geodetiche su $S^2_a(0)$ sono tutti e soli i cerchi massimi, parametrizzati a velocità costante

Esistenza delle geodetiche

$p \in \Sigma$, $X: U \to \Sigma$ par. regolare intorno a p

$\alpha: I \to X(U)$, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$

$X(\alpha(t)) = a(t) X_u(\alpha(t)) + b(t) X_v(\alpha(t))$ campo tangente lungo α

Abbiamo visto che X è parallelo lungo $\alpha \iff a, b$ soddisfano

$$(*) \begin{cases} a' + a(u, v, \Gamma_{ij}^{k}) + b(\dots) = 0 \\ b' + a(\dots) + b(\dots) = 0 \end{cases}$$

$\alpha'(t) = u'(t) X_u(\alpha(t)) + v'(t) X_v(\alpha(t))$

$\implies D_{\alpha'} \alpha' \equiv 0 \iff$ vale $(*)$ con $a = u'$, $b = v'$

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^{u} + 2u'v' \Gamma_{uv}^{u} + (v')^2 \Gamma_{vv}^{u} = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^{v} + 2u'v' \Gamma_{uv}^{v} + (v')^2 \Gamma_{vv}^{v} = 0 \end{cases}$$

sistema non lineare di EDO del 2° ordine

> **Proposizione** Σ superficie, $q \in \Sigma$, $v \in T_q\Sigma$, allora $\exists!$ geodetica $\gamma_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$, $\gamma_v(0) = q$, $\gamma_v'(0) = v$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Oss Sia $\gamma_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ la geodetica della proposizione

Fisso una costante $t \in [0,1]$

Posso considerare $\gamma_v(ts)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_v(ts) = s\gamma_v'(ts)\Big|_{t=0} = s\gamma_v'(0) = sv$

$\frac{d^2}{dt^2} \gamma_v(ts) = s^2 \gamma_v''(ts) \perp T_{\gamma_v(ts)}\Sigma$

$\beta(t) := \gamma_v(ts)$, $\beta(0) = q$, $\beta'(0) = sv$ è una geodetica

$\implies \gamma_v(ts) = \beta(t) = \gamma_{sv}(t)$

$\implies \gamma_{sv}: [0,1] \to \Sigma$ geodetica

Se fisso q, considero solo $\{v \in T_q\Sigma \mid \|v\| = 1\}$

quindi esiste ε t.c. $\gamma_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$, $\gamma_v(0) = q$, $\gamma_v'(0) = v$

è definita $\forall v \in T_q\Sigma$, $\|v\| = 1$

Per ogni $v \in T_q\Sigma$ t.c. $\|v\| < \varepsilon$, esiste la geodetica

$\gamma_v: [0,1] \to \Sigma$, $\gamma_v(0) = q$, $\gamma_v'(0) = v$, $\|v\| < \varepsilon$

Def. Fisso $q \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ come sopra

La mappa esponenziale

$\exp_q: U_q = \{v \in T_q\Sigma \mid \|v\| < \varepsilon\} \to \Sigma$

$\exp_q(v) := \gamma_v(1) \in \Sigma$

Oss $\exp_q(0) = q = \gamma_0(0)$ $\quad (\gamma_0 \equiv q)$

$e_1, e_2 \in T_q\Sigma$ base fissata : $T_q\Sigma \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

$\quad U_q \subset T_q\Sigma \longleftrightarrow U_q' \subset \mathbb{R}^2$

$X : U_q' \longrightarrow \Sigma$

$\quad (u,v) \longmapsto \exp_q(ue_1 + ve_2)$

$X_u(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_q(te_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_{te_1}(1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_{e_1}(t) = \gamma'_{e_1}(0) = e_1$

$X_v(0) = e_2$

$\operatorname{rk}(\underset{X_u(q)}{e_1} | \underset{X_v(q)}{e_2}) = 2 \implies$ Sia $\pi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione corrispondente ad un minore 2x2 non singolare che esprime intorno a q Σ come grafico

$$\begin{tikzcd}
U_q' \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\pi\circ X"'] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$D_0(\pi \circ X)$ è la sottomatrice scelta

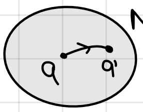
$\implies \exists$ inversa C^∞ di $\pi \circ X$

l'inversa di X è $(\pi\circ X)^{-1} \circ \pi$ C^∞

$\implies X$ è una parametrizzazione regolare

$\implies \exp_q(U_q) = X(U_q')$ intorno di q

$\quad \| N_q$ intorno normale di q



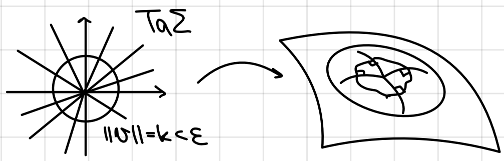
N_q

$q' = \exp_q(uv) = \gamma_{uv}(1)$

$\|v\| < \varepsilon,\ 0 \le u \le 1$

Lemma di Gauß

$q \in \Sigma$. Nell'intorno normale N_q le geodetiche $\gamma_v(u) = \exp_q(uv), -1<u<1, \|v\|<\varepsilon$, è ortogonale alle curve $\{\exp_q(v) \mid \|v\| = \text{cost} < \varepsilon\}$



DIMOSTRAZIONE

Sia $0<k<\varepsilon$

Considero $v : \mathbb{R} \longrightarrow T_q\Sigma$, $\|v(t)\| = k$

$\alpha(u,t) := \exp_q(u \cdot v(t)) \in \Sigma$, $-1<u<1$

<u>Tesi</u> $\alpha_u \cdot \alpha_t \equiv 0 \quad \forall (u,t)$

Basta dimostrare che $(\alpha_u \cdot \alpha_t)_u = 0$, $\alpha_u \cdot \alpha_t(0,t) = 0$

$(\alpha_u \cdot \alpha_t)_u = \underset{T_{\alpha(u,t)}\Sigma^\perp}{\alpha_{uu}} \cdot \underset{T_{\alpha(u,t)}\Sigma}{\alpha_t} + \alpha_u \cdot \alpha_{tu}$

$0 = (\underset{\text{cost}}{\alpha_u \cdot \alpha_u})_t = 2\alpha_u \cdot \alpha_{ut}$

$\alpha(0,t) = \exp_q(0) = q \implies \alpha_t(0,t) = 0$

$\square$

Le geodetiche minimizzano localmente le lunghezze

corollario $q \in \Sigma$, $N_q = \exp_q(U_q)$ intorno normale.
Se $q' = \exp_q(v)$, $v \in U_q$, allora la geodetica
$\gamma_v : [0,1] \longrightarrow \Sigma$, $\gamma_v(u) = \exp_q(uv)$ minimizza le lunghezze:
se $c : [0,1] \longrightarrow N_q$ curva regolare, $c(0)=q$, $c(1)=q'$, allora $\ell(c) \geq \ell(\gamma_v)$

DIMOSTRAZIONE

Posso supporre $c(t) = q \iff t=0$

$c(t) = \exp_q(u(t)v(t))$ per $0 < t \leq 1$, $\|v(t)\| = \|v\|$, $u(t) > 0$

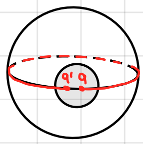
$c(t) = \alpha(u(t), t)$

$c'(t) = u' \cdot \alpha_u + \alpha_t$

$$c'(t)\cdot c'(t) = (u')^2 \underbrace{\alpha_u \cdot \alpha_u}_{\|v\|^2} + \underbrace{\alpha_t \cdot \alpha_t}_{\geq 0} \geq (u')^2 \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \ell(c) = \int_0^1 \|c'(t)\| dt \geq \|v\| \int_0^1 |u'(t)| dt \geq \|v\| \int_0^1 u'(t) dt = \|v\| (\overset{1}{u(1)} - \overset{0}{u(0)}) = \|v\|$$

e $\ell(\gamma_v) = \int_0^1 \|\gamma_v'(u)\| du = \|v\|$ $\square$

esempio 

La proprietà minimizzante non è globale

esercizio Determinare le geodetiche del piano $\{z=0\}$

SOLUZIONE $x(u,v) = (u,v,0)$ par. regolare di Σ

$x_u = (1,0,0)$, $x_v = (0,1,0)$

$E \equiv 1$, $F \equiv 0$, $G \equiv 1$

$\Rightarrow x_{uu} = x_{uv} = x_{vv} = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{jk} \equiv 0$

$$\begin{cases} u'' + (u' \ v') \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \\ v'' + (u' \ v') \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff \gamma(t) = x(u(t), v(t)) \text{ è una geodetica}$$

$\gamma : I \longrightarrow \Sigma = \{z=0\}$, $\gamma(t) = (u(t), v(t), 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = u(t_0) + u'(t_0)t \\ v(t) = v(t_0) + v'(t_0)t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ parametrizza una porzione della retta $(u(t_0), v(t_0)) + \mathrm{Span}(u'(t_0), v'(t_0))$ (e viceversa)

$\Rightarrow$ Tutte e sole le geodetiche del piano sono rette

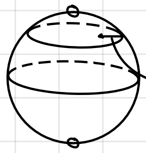
esercizio (1) Le geodetiche su una superficie di rotazione soddisfano la relazione di Clairaut

$$r\cos\phi = \text{costante} \qquad (*)$$

dove r è la distanza dall'asse z e ϕ è l'angolo tra la velocità e il parallelo

(2) Viceversa, se una curva sulla stessa superficie di velocità costante, soddisfa $(*)$ e $u' \neq 0$ (non è un parallelo), allora è una geodetica

esempio



$S^2 \setminus \{S, N\}$ come superficie di rotazione

$\alpha'' \notin TS^2$ se α non parametrizza l'equatore

$\Rightarrow \alpha$ non è una geodetica

SOLUZIONE (1) $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ curva pla, iniettiva, $f>0$, α^{-1} continua

$$X(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \qquad \Sigma = X(I\times\mathbb{R})$$

$$X_u = (f'\cos v, f'\sin v, g'), \quad X_v = (-f\sin v, f\cos v, 0)$$

$$E = (f')^2 + (g')^2 = \alpha'\cdot\alpha' \equiv 1, \quad F \equiv 0, \quad G = f^2(u)$$

$$X_{uu} = \Gamma^u_{uu} X_u + \Gamma^v_{uu} X_v + \ell n$$

$$X_{uu} = (f''\cos v, f''\sin v, g''), \quad X_{uv} = (-f'\sin v, f'\cos v, 0), \quad X_{vv} = -f(\cos v, \sin v, 0)$$

$$E\cdot\Gamma^u_{uu} = X_{uu}\cdot X_u = f'f'' + g'g'' = 0$$

$$E\cdot\Gamma^u_{uv} = X_{uv}\cdot X_u = 0$$

$$E\cdot\Gamma^u_{vv} = X_{vv}\cdot X_v = -ff'$$

$$G\,\Gamma^v_{uu} = X_{uu}\cdot X_v = 0$$

$$G\,\Gamma^v_{uv} = X_{uv}\cdot X_v = ff' \implies \Gamma^v_{uv} = \frac{f'}{f}$$

$$G\,\Gamma^v_{vv} = X_{vv}\cdot X_v = 0$$

$$\begin{cases} u'' + (u' \; v')\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -ff' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \\ v'' + (u' \; v')\begin{pmatrix} 0 & f'/f \\ f'/f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u'' - ff'(v')^2 = 0 & (1) \\ v'' + 2\frac{f'}{f}u'v' = 0 & (2) \end{cases}$$

Equazioni delle geodetiche su Σ

Eq.(2): Se $v'(t_0) \neq 0 \implies v' \neq 0$ in un intorno di t_0

$$(2) \iff \underbrace{\frac{v''}{v'}}_{\log(v')'} = \underbrace{-2\frac{f'}{f}u'}_{-2\log(f(u))'}$$

$$\iff \log(v') = -\log(f^2(u)) + C \iff v' = \frac{C}{f^2(u)}$$

$\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, $\gamma'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$

Parallelo: $\{u = u_0\}$

$$\underbrace{X_v\cdot\gamma'}_{v'\cdot f^2 = C} = \overset{=r}{f}\cdot\text{cost}\cdot\cos\phi$$

Se $v' \equiv 0 \implies u'' = 0, v'' = 0$

$\gamma(t) = X(\underbrace{u(t)}_{t_0 + u'(t_0)t}, v_0)$ meridiano

$\implies$ i meridiani a velocità costante sono geodetiche

(2) $\gamma(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$, con $u' \neq 0$

Se $\text{cost} = 0 = r\cos\phi \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \gamma$ parametrizza un meridiano a velocità costante

$\Rightarrow \gamma$ è una geodetica

Se $r \cdot \cos\phi = \text{cost} \neq 0$

$\gamma' = u'\underline{x}_u + v'\underline{x}_v$

$0 \neq \|\gamma'\| f \cos\phi = \gamma' \cdot \underline{x}_v = v'G \Rightarrow v' \neq 0$

Equazioni delle geodetiche:

$$\begin{cases} u'' - ff'(v')^2 = 0 & (1) \\ v'' + 2\frac{f'}{f}u'v' = 0 & (2) \end{cases}$$

Abbiamo visto che, se $v' \neq 0$, $(2) \Leftrightarrow (*)$

γ ha velocità costante

$\text{cost} = \gamma' \cdot \gamma' = (u')^2 + (v')^2 \cdot f^2$

$\xRightarrow{d/dt} 0 = 2u'u'' + 2v'v''f^2 + 2(v')^2 ff'u'$

$\xLeftrightarrow{(2)} 0 = u'u'' + v'f^{\cancel{2}}(-2\frac{f'}{\cancel{f}}u'v') + (v')^2 ff'u'$

$\Leftrightarrow 0 = u'(u'' - 2ff'(v')^2 + (v')^2 ff') = u'(u'' - ff'(v')^2)$

$u' \neq 0 \Rightarrow$ vale (1) $\Rightarrow \gamma$ è una geodetica

<u>Oss</u> Quali paralleli sono geodetiche?

Parallelo: $\{u = u_0\} \subseteq \Sigma$.

Se $f'(u_0) = 0$: $\gamma(t) = \underline{x}(u_0, v_0 + tv_0')$ soddisfa (1) e (2)

$\Rightarrow \gamma$ è una geodetica

Se $f'(u_0) \neq 0$: $\gamma(t) = \underline{x}(u_0, v(t)) \Rightarrow \gamma' = v' \cdot \underline{x}_v$

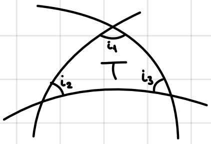
$0 \neq \text{cost} = \gamma' \cdot \gamma' = (v')^2 G = (v')^2 f(u_0)^2 \Rightarrow v' = \text{cost} \neq 0$

$\Rightarrow \gamma'' = (v')^2 \underline{x}_{vv}$

Avevamo calcolato: $\underline{x}_{vv} \cdot \underline{x}_u = -ff'$

$\Rightarrow \gamma'' \cdot \underline{x}_u = -(v')^2 ff' \neq 0 \Rightarrow \gamma$ non è una geodetica

Teorema di Gauß-Bonnet locale

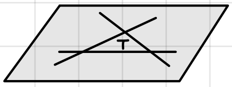


Triangolo geodetico $T \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ superficie

I formulazione del teorema

$$\int_T K\, dA = i_1 + i_2 + i_3 - \pi$$

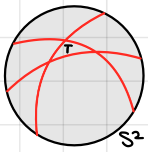
esempio (1) Piano



$K \equiv 0$

$$0 = \int_T K dA = i_1 + i_2 + i_3 - \pi \iff i_1 + i_2 + i_3 = \pi$$

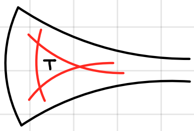
(2) Sfera



$K > 0$

$0 < \int_T K dA \implies i_1 + i_2 + i_3 > \pi$

(3)



$K \equiv -1$

$0 > \int_T K dA \implies i_1 + i_2 + i_3 < \pi$

DEF. $\alpha : [a,b] \longrightarrow \Sigma$ superficie, curva chiusa è semplice e regolare a tratti se

$\alpha(t) = \alpha(t') \iff \{t, t'\} = \{a, b\}$

e $\exists\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ t.c. $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è regolare $\forall i = 1, \ldots, n$

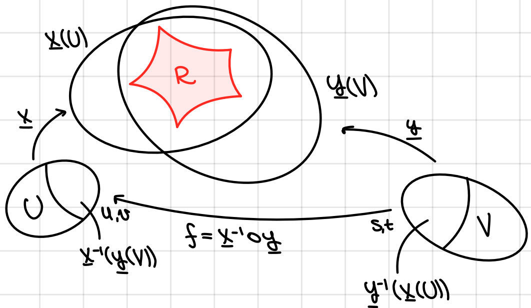
DEF. Una regione $R \subseteq \Sigma$ superficie è la chiusura di un aperto t.c. $\partial R = R \setminus \mathring{R}$ è la traccia di una curva semplice, chiusa, regolare a tratti.

DEF. $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$

Definiamo l'area di R come

$$\text{Area}(R) := \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|\, du dv$$

Questa è una buona definizione:



$f(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$

$$\begin{cases} \underline{y}_s = u_s\, \underline{x}_u \circ f + v_s\, \underline{x}_v \circ f \\ \underline{y}_t = u_t\, \underline{x}_u \circ f + v_t\, \underline{x}_v \circ f \end{cases}$$

$\underline{y}_s \times \underline{y}_t = \det(Df) \cdot \underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f$

$$\int_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{y}_s \times \underline{y}_t\|\, ds dt = \int_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \circ f\ |\det(Df)|\, ds dt =$$

$$= \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|\, du dv$$

$R \subseteq \underline{x}(U)$ regione, φ funzione in R definita su un aperto che contiene R
(ad esempio $\underline{x}(U)$)

DEF. $\boxed{\int_R \varphi \, dA} := \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \varphi \circ \underline{x} \, \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \, du\,dv$

L'integrale è ben definito:

$$\int_{\underline{y}^{-1}(R)} \underbrace{\varphi \circ \underline{y}}_{\varphi \circ \underline{x} \circ f} \, \|\underline{y}_s \times \underline{y}_t\| \, ds\,dt = \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \varphi \circ \underline{x} \, \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \, du\,dv$$

$\underline{y}^{-1}(R) = f^{-1}(\underline{x}^{-1}(R))$

esercizio $\underline{x} : U \longrightarrow \Sigma$ par. regolare

$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$

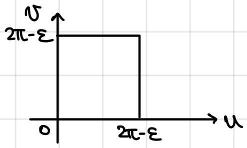
SOLUZIONE $X \times Y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ — & X & — \\ — & Y & — \end{pmatrix}$

$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \underline{n} \cdot (\underline{x}_u \times \underline{x}_v) = \det \begin{pmatrix} — & \underline{n} & — \\ — & \underline{x}_u & — \\ — & \underline{x}_v & — \end{pmatrix}$

$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|^2 = \det \left(\begin{pmatrix} — & \underline{n} & — \\ — & \underline{x}_u & — \\ — & \underline{x}_v & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{n} & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ | & | & | \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$

esercizio In Geometria euclidea elementare si dimostra che area$(\mathbb{T}_{a,b}) = 4\pi^2 ab$

$\mathbb{T}_{a,b} = \underline{x}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ con $\underline{x}(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$



$= [0, 2\pi - \varepsilon] \times [0, 2\pi - \varepsilon]$

$R_\varepsilon := \underline{x}([0, 2\pi - \varepsilon]^2)$

Verifichiamo se $\lim_{\varepsilon \to 0} \text{Area}(R_\varepsilon) = (2\pi)^2 ab$

SOLUZIONE $\underline{x}_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u \sin v, b\cos u)$

$\underline{x}_v = (a + b\cos u)(-\sin v, \cos v, 0)$

$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = b^2$

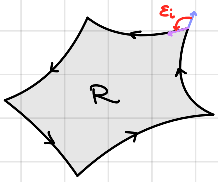
$F = \underline{x}_u \, \underline{x}_v = 0$

$G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = (a + b\cos u)^2$

$\text{Area}(R_\varepsilon) = b \int_0^{2\pi - \varepsilon} \int_0^{2\pi - \varepsilon} a + b\cos u \, du\,dv = (2\pi - \varepsilon) b \int_0^{2\pi - \varepsilon} a + b\cos u \, du =$

$= (2\pi - \varepsilon) b \left[a(2\pi - \varepsilon) + b\sin u \Big|_0^{2\pi - \varepsilon} \right] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (2\pi)^2 ab$

$R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ superficie orientata



∂R è orientato in modo che R sia alla sua "sinistra"

$\varepsilon_i :=$ angolo con segno di rotazione (>0 se anti-oraria) nell'i-esimo vertice di ∂R

Teorema di Gauß-Bonnet locale

$R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ superficie orientata, R semplicemente connessa, ∂R parametrizzato da una curva chiusa, semplice, regolare a tratti con angoli esterni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$. Allora

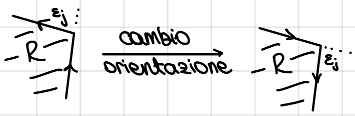
$$\int_R K\, dA + \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j + \int_{\partial R} k_g = 2\pi$$

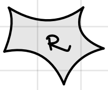
$\alpha : [a,b] \longrightarrow \underline{x}(U)$ parametrizzazione pla di un segmento regolare di ∂R

$k_g := \dot{T} \cdot (\underline{n} \times T)$ curvatura geodetica lungo la curva

<u>Oss</u> Se α è una geodetica, $\dot{T}_\alpha \in (T_{\alpha(s)}\Sigma)^\perp$, quindi $k_g \equiv 0$

<u>Oss</u> Cambiando l'orientazione di Σ, ciascun addendo rimane invariato

- $K \longmapsto K \implies \int_R K\, dA$ non cambia
- 

  ε_j non cambia
- 

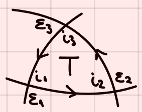
  $\alpha : [0,\ell] \longrightarrow \Sigma$ pla a tratti parametrizzazione del bordo

  allora $k_g = \dot{T}_\alpha \cdot (\underset{\mathclap{T_{\alpha(s)}\Sigma^\perp}}{\underline{n}} \times \underset{\mathclap{T_{\alpha(s)}\Sigma}}{T_\alpha}) \implies \underline{n} \times T_\alpha \in T_{\alpha(s)}\Sigma$

  $\underline{n} \xmapsto[\text{orientazione}]{\text{cambio}} -\underline{n}, \quad T_\alpha \longmapsto -T_\alpha$ ma $\dot{T}_\alpha$ non cambia segno

  (è come prendere $\beta(s) = \alpha(\ell - s)$, per cui $T_\beta = -T_\alpha$, $\dot{T}_\beta = \dot{T}_\alpha$)

corollario

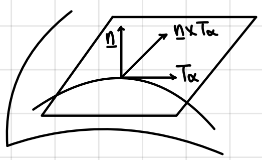


T triangolo geodetico, $T \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ superficie orientata allora $\int_T K\, dA = i_1 + i_2 + i_3 - \pi$

DIMOSTRAZIONE

$i_j + \varepsilon_j = \pi$, inoltre ∂T geodetico $\implies \int_{\partial T} k_g = 0$

Quindi: $\int_T K\, dA = 2\pi - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2\pi - 3\pi + i_1 + i_2 + i_3 = i_1 + i_2 + i_3 - \pi$ $\square$



$\alpha : [0,\ell] \longrightarrow \Sigma$ p.l.a. ($\underline{n}, T_\alpha, \underline{n} \times T_\alpha$ base ortonormale)

Σ superficie orientata

Ora sappiamo che $\dot{T}_\alpha \perp T_\alpha$, ossia

$\dot{T}_\alpha = (\dot{T}_\alpha \cdot (\underline{n} \times T_\alpha))\, \underline{n} \times T_\alpha + (\dot{T}_\alpha \cdot \underline{n})\underline{n} = k_g\, \underline{n} \times T_\alpha + k_n \underline{n}$

dove $k_n = k_n(\alpha(s), \dot{T}_\alpha(s))$ curvatura normale

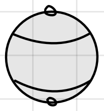
$\implies k_\alpha^2 = k_g^2 + k_n^2$

Inoltre da $T_\alpha = \alpha'$, possiamo interpretare $\dot{T}_\alpha = D_{\alpha'}\alpha'$

$\implies \dot{T}_\alpha \cdot (\underline{n} \times T_\alpha) = (\dot{T}_\alpha)^T \cdot (\underline{n} \times T_\alpha)$

$(D_{\alpha'}\alpha')^T = \nabla_{\alpha'}\alpha' = 0 \iff \alpha$ geodetica esercizio Calcolare la curvatura geodetica di un parallelo sulla sfera di raggio 1

SOLUZIONE



$S^2 \setminus \{poli\}$

$\underline{x}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$

$\alpha(t) = \underline{x}(u_0,t) = (\sin u_0 \cos t, \sin u_0 \sin t, \cos u_0)$

Ora $\alpha'(t) = \sin u_0(-\sin t, \cos t, 0) \Longrightarrow \beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{\sin u_0}\right)$

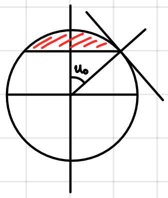
allora $\|\beta'(s)\| = 1$, cioè β è pla

$T_\beta(s) = \left(-\sin\frac{s}{\sin u_0}, \cos\frac{s}{\sin u_0}, 0\right)$, $\underline{n}(\beta(s)) = \beta(s)$

$\dot{T}_\beta(s) = -\frac{1}{\sin u_0}\left(\cos\frac{s}{\sin u_0}, -\sin\frac{s}{\sin u_0}, 0\right)$

per cui $k_g(s) = \dot{T}_\beta\,(\underline{n} \times T_\beta) = -\frac{1}{\sin u_0}\det\begin{pmatrix} \cos\frac{s}{\sin u_0} & \sin\frac{s}{\sin u_0} & 0 \\ \sin u_0 \cos\frac{s}{\sin u_0} & \sin u_0 \sin\frac{s}{\sin u_0} & \cos u_0 \\ -\sin\frac{s}{\sin u_0} & \cos\frac{s}{\sin u_0} & 0 \end{pmatrix} = \cot u_0$

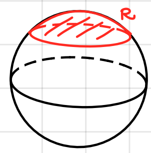
Inoltre



$k_n = 1$, $k_g = \frac{\cos u_0}{\sin u_0}$

ed effettivamente $k_\alpha^2 = k_n^2 + k_g^2 = \frac{1}{\sin^2 u_0}$

esercizio Verificare il Teorema di Gauss-Bonnet per una calotta sferica $\{u \geq u_0\}$ (nel caso $u_0 > \frac{\pi}{2}$)



SOLUZIONE

$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ ($R \cong U$ è semplicemente connesso)

$\underline{x} : U \longrightarrow S^2$ è C^∞

$(u,v) \longmapsto (u, v, (1-u^2-v^2)^{1/2})$

Allora $\underbrace{\int_R K\,dA}_{\text{area}(R)} + \sum \varepsilon_j + \int_{\partial R} k_g = 2\pi$

$\int_{\partial R} \cot(u_0) = \cot(u_0)\,\ell(\partial R) = 2\pi\cos(u_0)$

Ora $\underline{x}_u = (1, 0, -u(1-u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}})$, $\underline{x}_v = (0, 1, -v(1-u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}})$

Quindi $E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1 + u^2(1-u^2-v^2)^{-1}$

$F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = uv(1-u^2-v^2)^{-1}$

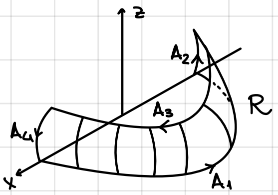
$G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = 1 + v^2(1-u^2-v^2)^{-1}$

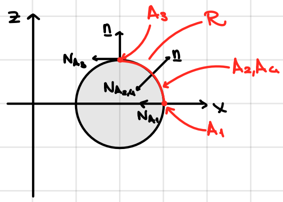
$\Longrightarrow EG - F^2 = 1 + (u^2+v^2)(1-u^2-v^2)^{-1} = (1-u^2-v^2)^{-1}$

$\Longrightarrow \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \sqrt{(1-u^2-v^2)^{-1}}\,du\,dv = \int_0^{\sin u_0}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-r^2)^{-1}}\,r\,dr\,d\theta = -2\pi\left|\sqrt{1-r^2}\right|_0^{\sin u_0} = 2\pi(1-\cos u_0)$

esercizio Verificare Gauss-Bonnet locale per la regione
$\mathbf{x}([0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]) \subseteq \mathbb{T}_{2,5}$ dove $\mathbf{x}(u,v) = ((5+2\cos u)\cos v, (5+2\cos u)\sin v, 2\sin u)$

SOLUZIONE





$A_1 = \{\mathbf{x}(0,t) \mid 0 \le t \le \pi\}$ traccia di geodetica
(è un parallelo corrispondente a un punto critico della distanza dall'asse di rotazione)
$A_2 = \{\mathbf{x}(t,\pi) \mid 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$ traccia di geodetica (meridiano)
$A_4 = \{\mathbf{x}(\frac{\pi}{2}-t, 0) \mid 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$ traccia di geodetica (meridiano)
$A_3 = \{\mathbf{x}(\frac{\pi}{2}, \pi - t) \mid 0 \le t \le \pi\}$
Devo verificare $\int_{\partial R} k_g + \int_R k\, dA + \sum_{k=1}^{4} \varepsilon_k = 2\pi$

$\varepsilon_k = \frac{\pi}{2}\ \forall k \implies \sum_{k=1}^{4} \varepsilon_k = 2\pi$

A_3: $\alpha(t) = (5\cos(\pi-t), 5\sin(\pi-t), 2)$ con $0 \le t \le \pi$

$\alpha'(t) = (5\sin(\pi-t), -5\cos(\pi-t), 0)$

$\beta(s) = (5\cos(\pi-\frac{s}{5}), -5\sin(\pi-\frac{s}{5}), 0)$ p.l.a.

$T_\beta(s) = (\sin(\pi-\frac{s}{5}), -\cos(\pi-\frac{s}{5}), 0)$ $\quad \dot{T}_\beta(s) = -\frac{1}{5}(\cos(\pi-\frac{s}{5}), \sin(\pi-\frac{s}{5}), 0)$

$$\underline{n} = (0,0,1) \implies k_g = \dot{T}\cdot(\underline{n}\times T) = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} \cos(\pi-\frac{s}{5}) & \sin(\pi-\frac{s}{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\pi-\frac{s}{5}) & -\cos(\pi-\frac{s}{5}) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$$

Notiamo che $k_n = \dot{T}_\beta \cdot \underline{n} = 0$ perché T_β è tangente al toro.
Quindi $k_\beta^2 = k_g^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ è coerente col fatto A_3 = porzione di cerchio di raggio 5.
La lunghezza di A_3 è 5π, quindi $\int_{\partial R} k_g = \int_{A_3} k_g = -\frac{1}{5}\cdot 5\pi = -\pi$
Abbiamo già calcolato E, F, G e k per il toro, e otteniamo

$E = 4,\ F = 0,\ G = (5+2\cos u)^2,\ k = \frac{\cos u}{2(5+2\cos u)}$

$$\implies \int_R k\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{2(5+2\cos u)}\sqrt{4(5+2\cos u)^2}\, du\, dv = \pi\, |\sin u|_0^{\pi/2} = \pi$$

Quindi

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k\, dA + \sum_k \varepsilon_k = -\pi + \pi + 2\pi = 2\pi \quad \checkmark$$

Teorema di Gauß-Bonnet globale

$\hat{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientata, $\partial\hat{\Sigma} \neq \emptyset$
$R \subseteq \hat{\Sigma}$ regione, ∂R traccia di curva semplice chiusa, regolare a tratti

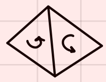
Def. $\Sigma = \overline{\hat{\Sigma} \setminus R}$ superficie orientata con bordo

Teorema di Radò Σ ammette una triangolazione $\mathcal{T} = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^{m}$, con $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^{m} \Delta_\lambda$, e

(i) Δ_λ è immagine di un triangolo euclideo tramite parametrizzazione regolare compatibile con orientazione

(ii) $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ vertice} \\ 1 \text{ lato} \end{cases}$ se $\lambda \neq \mu$

(iii) se $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu = 1$ lato, le orientazioni indotte su di esso sono opposte

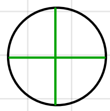


(iv) $\Delta_\lambda \cap \partial\Sigma = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ vertice} \\ 1 \text{ lato} \end{cases}$ $\forall \lambda$

L'enunciato è valido (togliendo (iv)) se $R = \emptyset$

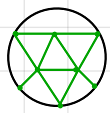
Def. $\mathcal{T}$ triangolazione di Σ superficie orientata con bordo
$V = \#$vertici, $L = \#$lati, $T = \#$triangoli
$\chi(\Sigma, \mathcal{T}) := V - L + T$ è la caratteristica di Eulero di Σ

esempio (1) $\Sigma = D^2$



$\mathcal{T}_1$

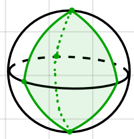
$V=5, L=8, T=4 \Rightarrow \chi(\Sigma, \mathcal{T}_1) = 5-8+4 = 1$



$\mathcal{T}_2$

$V=8, L=16, T=9 \Rightarrow \chi(\Sigma, \mathcal{T}_2) = 8-16+9 = 1$

(2) $\Sigma = S^2$

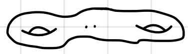


$\mathcal{T}$

$V=5, L=9, T=6 \Rightarrow \chi(\Sigma, \mathcal{T}) = 5-9+6 = 2$

FATTO $\chi(\Sigma, \mathcal{T})$ non dipende da $\mathcal{T}$.
Infatti, superfici omotopicamente equivalenti hanno la stessa caratteristica di Eulero
Quindi la possiamo indicare con $\chi(\Sigma)$

FATTO Classificazione delle superfici orientabili, compatte, senza bordo, chiuse e connesse $\longrightarrow$ superfici di genere g



Σ_g

$\chi(\Sigma_{2g}) = 2-2g$

Teorema di Gauß-Bonnet globale Σ superficie compatta, con bordo regolare a tratti, angoli esterni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$ e triangolazione $\mathcal{T} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$. Allora
$$\int_{\partial\Sigma} k_g + \int_\Sigma K\, dA + \sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k = 2\pi\chi(\Sigma)$$

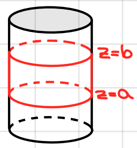
corollario $\partial\Sigma = \emptyset \Rightarrow \int_\Sigma K\, dA = 2\pi\chi(\Sigma)$

<u>Idea della dimostrazione</u>

Per ogni Δ_λ vale Gauß-Bonnet locale: $\int_{\partial\Delta_\lambda} k_g\, ds + \int_{\Delta_\lambda} K\, dA + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i^\lambda = 2\pi$

Sommando su λ, osservo che ogni lato interno viene cancellato
$$\int_{\partial\Sigma} k_g\, ds + \int_\Sigma K\, dA + \sum_j \varepsilon_j + 2\pi(L-V) = 2\pi T$$
□

<u>esercizio</u> Verificare Gauß-Bonnet nel caso di una regione di Σ cilindro intorno all'asse z



<u>SOLUZIONE</u> $R = \{a \le z \le b\} \subseteq \Sigma$

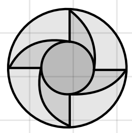
Per GB, $\int_{\partial R} k_g + \int_R K = 2\pi\chi(R)$

Il cilindro è una superficie piatta $\Rightarrow \int_R K\, dA = 0$

$\partial R = \{z=a\} \cup \{z=b\}$ sono paralleli in punti critici della distanza dall'asse z $\Rightarrow$ sono geodetiche

e quindi $\int_{\partial R} k_g = 0$

$\Rightarrow R \cong$ anello planare



$V=8, L=16, T=8$

<u>esercizio</u> Se $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie chiusa, compatta e senza bordo, e orientabile, $\Sigma \not\cong S^2$. Allora su Σ esistono punti in cui $K>0$, $K<0$, $K=0$.

<u>SOLUZIONE</u> wlog Σ connessa

Sappiamo che punti con $K>0$ esistono sempre

Per GB, $\int_\Sigma K\, dA = 2\pi(2-2g) \le 0 \quad (g \ge 1)$

Si conclude per continuità: se fosse $K \ge 0$ ovunque avremmo $\int_\Sigma K\, dA > 0$. Quindi ci sono punti con $K<0$ e per continuità $K=0$.

<u>esercizio</u> Dire quando può esistere una geodetica liscia e chiusa su una superficie Σ nei casi

1. $K>0 \Rightarrow$ sfera con cerchio massimo
2. $K=0 \Rightarrow$ cilindro con un parallelo, ma non è possibile che la regione sia semplicemente connessa $\left(0 = \int_{\partial R} k_g + \int_R K \ne 2\pi\right)$
3. $K<0 \Rightarrow$

e dire (quando possibile) un esempio di regione semplicemente connessa che borda la geodetica esercizio $\Sigma = \underline{x}(U) \subseteq \mathbb{R}^3$

$\underline{x} : U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u>0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto (u\cos v, u\sin v, \log u)$

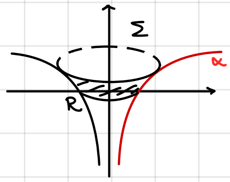
(1) Calcolare la curvatura gaussiana in ogni punto di Σ

(2) Verificare GB per $R = \{0 \le z \le 1\} \subseteq \Sigma$

(3) Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ la geodetica t.c. $\gamma(0) = (1,0,0)$, $\dot\gamma(0) = (1,\sqrt{2},1)$

Mostrare che $\gamma(\mathbb{R}) \subseteq \{z \ge -\frac{1}{2}\log 2\} \subseteq \Sigma$

SOLUZIONE (1) Vediamo dall'equazione che Σ è ottenuta ruotando



$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(u) = (u, 0, \log u)$

Calcoliamo $K = \dfrac{\ell n - m^2}{EG - F^2}$

$\underline{x}_u = (\cos v, \sin v, \frac{1}{u})$, $\underline{x}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1 + \frac{1}{u^2}$ $\quad F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$, $G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = u^2$

$$\underline{n} = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} = \frac{u}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1/u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \left(-\frac{1}{u}\cos v, -\frac{1}{u}\sin v, 1\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\cos v, \sin v, -u)$$

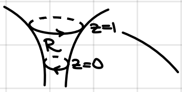
$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = \underline{n} \cdot (0,0,-\frac{1}{u^2}) = -\dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$

$m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv} = \underline{n} \cdot (-\sin v, \cos v, 0) = 0$

$n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv} = \underline{n} \cdot (-u\cos v, -u\sin v, 0) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

$\Longrightarrow K = -\dfrac{1}{(1+u^2)^2} < 0$

(2)



Il versore normale è entrante

parametrizzata per v crescente

$1 = \log u_0 = z$

La curva $z = \log u_0$ $(u_0 > 0)$ è $\{\underline{x}(u_0, v) \mid v \in \mathbb{R}\}$

$\alpha_{u_0}(v) = \underline{x}(u_0, v) = (u_0\cos v, u_0 \sin v, \log u_0)$

$\beta_{u_0}(s) = (u_0 \cos(\frac{s}{u_0}), u_0 \sin(\frac{s}{u_0}), \log u_0)$ p.l.a.

$T_\beta(s) = u_0 \cdot \frac{1}{u_0}(-\sin(\frac{s}{u_0}), \cos(\frac{s}{u_0}), 0)$

$\dot T_\beta(s) = -\frac{1}{u_0}(\cos(\frac{s}{u_0}), \sin(\frac{s}{u_0}), 0)$

$$k_g = \dot T \cdot (\underline{n} \times T) = \frac{1}{u_0\sqrt{1+u_0^2}} \det \begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{u_0}) & \sin(\frac{s}{u_0}) & 0 \\ \cos(\frac{s}{u_0}) & \sin(\frac{s}{u_0}) & -u_0 \\ -\sin(\frac{s}{u_0}) & \cos(\frac{s}{u_0}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+u_0^2}}$$

$\underline{n}(u_0, \frac{s}{u_0})$

$\Longrightarrow \int_{\partial R} k_g \, ds = \int_{\beta_e} k_g ds - \int_{\beta_1} k_g ds = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \cdot 2\pi e - \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \cdot 2\pi = 2\pi\left(\frac{e}{\sqrt{1+e^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\chi(R) = 0$

$$\int_R K dA = \int_1^e \int_0^{2\pi} -\frac{1}{(1+u^2)^2}\sqrt{1+u^2}\, du dv = -2\pi \int_1^e \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} du \underset{\substack{u = \sinh t \\ du = \cosh t\, dt}}{=}$$

$$= -2\pi \int_a^b \frac{1}{(1+\sinh^2 t)^{3/2}} \cosh t \, dt = -2\pi \int_a^b \frac{1}{\cosh^2 t} dt = -2\pi \left|\tanh t\right|_a^b = -2\pi \left|\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right|_1^e = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}\right)$$

$\left(\dfrac{\sinh t}{\cosh t}\right)' = \dfrac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh^2 t} = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$

(3) Sappiamo che $r \cdot \cos\phi = \text{cost}$ (costante di Clairaut)

Calcoliamo la costante: $r = u > 0$

$(1,0,0) = \underline{x}(u,v) \quad \Longrightarrow (u,v) = (1,0)$

$\dot\gamma(0) \cdot \underline{x}_v(1,0) = (1,\sqrt{2},1) \cdot (0,1,0) = \sqrt{2} = \|\dot\gamma(0)\| \cdot \|\underline{x}_v(1,0)\| \cos\phi_0 = 2\cos\phi_0 \Longrightarrow \cos\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow r_0 \cos\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ costante di Clairaut

Sappiamo che $\forall\, \underline{x}(u,v) \in \gamma(\mathbb{R})$, vale $r\cos\phi = u\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow u \ge u\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow z = \log u \ge -\frac{1}{2}\log 2$

esercizio Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+4z^2=1\}$

(1) Mostra che S è una superficie

(2) Trova un triangolo geodetico $T_\theta \subseteq S$, $\forall \theta \in (0, \pi/2]$
con vertici $P_1=(1,0,0)$, $P_2=(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $P_3=(0,0,1/2)$
e verifica GB per T_θ (assumendo che valga anche per regioni $R \subseteq \overline{\underline{X}(U)}$)

SOLUZIONE

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

Def. $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ insiemi non vuoti
$f: X \to Y$ è C^∞ se
$\forall p \in X$ $\exists W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $p \in W$ e $\exists$ mappa C^∞ $F: W \to \mathbb{R}^m$ t.c. $F|_{W \cap X} = f|_{W \cap X}$

Se $f: X \to Y$ C^∞ ha inversa $f^{-1}: Y \to X$ C^∞,
f si dice diffeomorfismo tra X e Y : $X \cong Y$ (o $f: X \xrightarrow{\sim} Y$)

__Oss__ (1) Se X è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, una mappa $f: X \to Y$
è C^∞ nel nuovo senso $\iff$ lo è nel vecchio
(2) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, f, g C^∞
allora $g \circ f: X \to Z$ è C^∞
(3) Se $f: X \to Y$ è C^∞, allora se $X' \subseteq X$,
$f|_{X'}: X' \to Y$ è C^∞
Anche $f: X \to f(X) \subseteq Y$ è C^∞

Def. Sia $m > 0$ un intero.
Una varietà di dimensione m è un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ t.c.
$\forall p \in M$ $\exists$ aperto $W \subseteq \mathbb{R}^k$, $p \in W$ e diffeomorfismo $f: W \cap M \to U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto

Per $m = 0$, la richiesta è $W \cap M = \{p\}$

esempio (1) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto
$p \in U = W$, $f = id_U: U \xrightarrow{\sim} U$ $\implies$ U è una varietà
(2) $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie
Sia $p \in \Sigma$: intorno a p, Σ è un grafico rispetto a
una proiezione $\pi: \Sigma \to \mathbb{R}^2$
Quindi $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ C^∞ t.c.
$\chi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ è una par. regolare intorno a p
$W = \pi^{-1}(A)$ aperto, $W \cap \Sigma = \chi(A)$

$$\begin{array}{c} W \cap \Sigma \\ \pi|_{W\cap\Sigma} \big\downarrow ? \\ A \end{array}$$

$\pi|_{W \cap A}$ è C^∞,
l'inversa è $(u,v) \longmapsto (u, v, f(u,v))$, che è $(\pi|_{W \cap \Sigma})^{-1}$
$\implies$ Σ è una varietà di dimensione 2

Def. $U \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto, $x \in U$.
Lo spazio tangente T_xU è $\mathbb{R}^k$.

Richiamiamo il differenziale secondo il calcolo differenziale:
$U \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto, $V \subseteq \mathbb{R}^l$ aperto, $f: U \to V$ C^∞, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^k$
$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \quad df_x: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \text{ è lineare}$$
e ha matrice $Jac(f)_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_x$

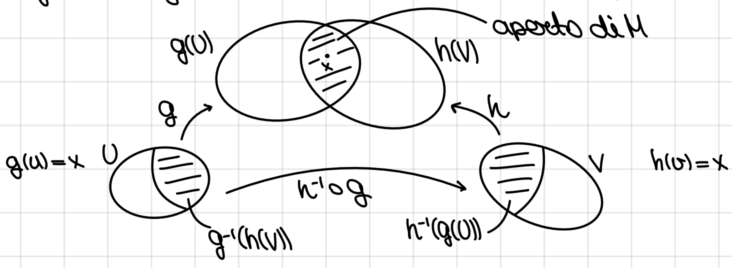
Proprietà:
(1) $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$
(2) $id_U: U \to U$, $U \subseteq \mathbb{R}^k \Rightarrow d(id_U)_x = id_{\mathbb{R}^k}$ $\forall x \in U$
(3) $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^k$ aperti, $i: U' \hookrightarrow U$ mappa di inclusione
$\Rightarrow di_x = id_{\mathbb{R}^k}$ $\forall x \in U'$
(4) $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ lineare $\Rightarrow dL_x = L$ $\forall x \in \mathbb{R}^k$

Proposizione Siano $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^l$ aperti, $U \xrightarrow[f]{\cong} V$.
Allora $k = l$, df_x isometria $\forall x \in U$

DIMOSTRAZIONE
$g: V \to U$ inversa di $f \Rightarrow id_{\mathbb{R}^k} = d(i_U)_x = d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$
$id_{\mathbb{R}^l} = d(i_V)_{f(x)} = d(f \circ g)_{f(x)} = df_x \circ dg_{f(x)}$
$\Rightarrow df_x: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ iniettiva e surgettiva $\Rightarrow f$ iso e $k = l$ □

Def. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ varietà C^∞, $x \in M$, $\dim M = m$
$g: U \to W \cap M$ par. locale intorno a x, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $g(u) = x \in W \cap M$
$T_xM := dg_u(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^k$ è lo spazio tangente di M in x.

Bisogna verificare che T_xM è ben definito:
siano $g: U \xrightarrow{\cong} g(U) \subseteq M$, $h: V \xrightarrow{\cong} h(V) \subseteq M$ due parametrizzazioni locali intorno a $x \in M$.



$h^{-1} \circ g$ è un diffeo perché composizione di diffeomorfismi
$\Rightarrow dg_u = d(h \circ (h^{-1} \circ g))_u = dh_v \circ \underbrace{d(h^{-1} \circ g)_u}_{\text{isomorfismo}}$
$\Rightarrow Im(dg_u) = Im(dh_v)$

Proposizione Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ varietà, $\dim M = m$
$\Rightarrow \forall x \in M \quad \dim T_xM = m$.

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned} g: U &\longrightarrow W \cap M, \quad U \subseteq \mathbb{R}^m \text{ aperto, param. locale} \\ u &\longmapsto x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g^{-1}\ C^\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim T_xM = \dim dg_u(\mathbb{R}^m) \leq m$

$\Rightarrow \exists\, x \in W' \subseteq W$ aperto, $F: W' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞ t.c. $F|_{W' \cap M} = g^{-1}|_{W' \cap M}$

$$\begin{tikzcd} & W' \arrow[dr, "F"] & \\ U \cap g^{-1}(W') \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "i"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad di_u = id_{\mathbb{R}^m} = dF_x \circ dg_u$$

$u \in U \cap g^{-1}(W')$

$\Rightarrow dg_u$ iniettiva $\Rightarrow \dim dg_u(\mathbb{R}^m) = m$ ☐

Ora vogliamo definire il differenziale di mappe C^∞ tra varietà:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & & \mathbb{R}^\ell \\ \cup & & \cup \\ M & \xrightarrow{f} & N \\ \in & & \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \qquad f\ C^\infty$$

$\Rightarrow \exists W \subseteq \mathbb{R}^k$ intorno aperto di x e $F: W \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ con $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$

Definiamo il differenziale di f in x come la mappa

$$df_x := dF_x|_{T_xM} : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

Lemma df_x è ben definito e $df_x(T_xM) \subseteq T_{f(x)}N$.

DIMOSTRAZIONE

Vogliamo mostrare che df_x non dipende dall'estensione F, ma solo f. Sia $m = \dim M$.

Fissiamo par. regolari intorno x e y:

$g: U \longrightarrow M$, $g(u) = x$; $h: V \longrightarrow N$, $h(v) = y$

A meno di cambiare U, possiamo supporre $g(U) \subseteq M \cap W$.

Abbiamo quindi il diagramma commutativo di mappe C^∞:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^\ell \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1} \circ f \circ g"'] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Quindi

$$dF_x(\underbrace{dg_u(\mathbb{R}^m)}_{T_xM}) = dh_v(d(h^{-1} \circ f \circ g)_u(\mathbb{R}^m)) \subseteq \operatorname{Im}(dh_v) = T_yN$$

$\Rightarrow dF_x|_{T_xM} = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}$
non dipende né da F né da W ☐

Si verificano le seguenti proprietà del differenziale di mappe tra varietà:

(1) $d(g\circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

(2) $id_M : M \to M \implies d(id_M)_x = id_{T_xM} \quad \forall x \in M$

(3) $M' \overset{i}{\subseteq} M$ è la restrizione di id_M a M', che è la restrizione di $id_{\mathbb{R}^k}$.
Quindi $di_x : T_xM' \longrightarrow T_xM$ è iniettiva $\implies T_xM' \subseteq T_xM$ come sottospazio

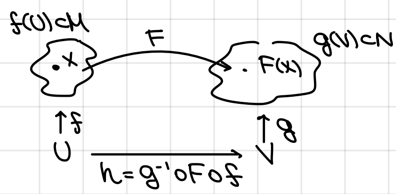
Oss $f: M \xrightarrow{\cong} N$ diffeomorfismo di varietà
$\implies df_x : T_xM \xrightarrow{\cong} T_{f(x)}N$ isomorfismo $\forall x \in M$.

Def. Sia $f: M \longrightarrow N$ mappa C^∞ tra varietà, $\dim M = m$, $\dim N = n$.
$x \in M$ è un punto critico di f se $\mathrm{rk}(df_x) < n$, altrimenti è un punto regolare.
$y \in N$ è un valore critico di f se è immagine di un punto critico,
altrimenti si dice valore regolare.
In particolare, se $f^{-1}(y) = \emptyset$, y è un valore regolare

$F: M \longrightarrow N$ mappa C^∞ tra varietà
$y \in N$ è valore regolare per F se $y \notin F(C)$,
dove C è l'insieme dei punti critici
$c \in C \iff dF_c : T_cM \longrightarrow T_{F(c)}N$, $\mathrm{rk}(dF_c) < \dim N$
cioè y regolare $\iff F^{-1}(y) = \emptyset$ o $\forall x \in F^{-1}(y)$ $\quad dF_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ è surgettiva
$M \setminus C$ = punti regolari

Proposizione M, N varietà con $n = \dim M = \dim N$, $F: M \longrightarrow N$ C^∞
(1) $x \in M$ punto regolare per $F \implies$
$\exists U$ intorno di x t.c. $F|_U : U \xrightarrow{\sim} F(U)$
(2) M compatta. se $y \in N$ valore regolare,
allora $|F^{-1}(y)| < +\infty$

DIMOSTRAZIONE

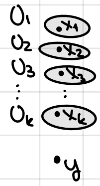


(1) $f: U \longrightarrow M$ par. reg. intorno x, $f(u) = x$
$g: V \longrightarrow N$ par. reg. intorno a $F(x)$, $g(v) = F(x)$
A meno di restrizione, possiamo supporre $F(f(U)) \subset g(V)$
$$dh_u = \underbrace{dg^{-1}_{F(x)}}_{\text{isomorf.}} \circ dF_x \circ \underbrace{df_u}_{\text{isomorf.}}$$
Per ipotesi, dF_x surgettiva $\iff dF_x$ isomorfismo
Per il teo della funz. inversa, h ha inversa $C^\infty \implies U' \subset U$, $h|_{U'} : U' \xrightarrow{\sim} h(U')$
Quindi $F|_{f(U')} = g|_{h(U')} \circ h|_{U'} \circ f^{-1}|_{f(U')}$ è un diffeo.

(2) Se $F^{-1}(y) = \emptyset$, la tesi è vera.
Se $F^{-1}(y) \neq \emptyset$, poiché per (1) $\forall x \in F^{-1}(y)$, la restrizione ad un opportuno intorno di x è diffeo,
allora $F^{-1}(y) \subset M$ è discreto: sia U_x l'intorno di $x \in F^{-1}(y)$.
$F|_{U_x} : U_x \xrightarrow{\sim} F(U_x)$, se $x' \in U_x \setminus \{x\}$, $F(x') \neq y$, cioè $F^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$.
Ma $F^{-1}(y) \subset M$ è anche chiuso $\implies F^{-1}(y)$ chiuso e discreto del compatto M
$\implies |F^{-1}(y)| < +\infty$. $\square$

Lemma della pila di dischi $F: M \to N$ C^∞ tra varietà, $\dim M = \dim N$, M compatta. Se $y \in N$ valore regolare, $F^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora $\exists V$ intorno di y t.c. $|F^{-1}(y')| = |F^{-1}(y)|$ $\forall y' \in V$

DIMOSTRAZIONE



$F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$, O_i intorno di x_i con $F|_{O_i}$ diffeo

Posso supporre O_i disgiunti

$V = F(O_1) \cap \dots \cap F(O_k) \setminus F(\underbrace{M \setminus \bigcup_i O_i}_{\text{chiuso in } M})$ $\Rightarrow$ compatto $\Rightarrow F(M \setminus \bigcup_i O_i)$ compatto in T_2 $\Rightarrow$ chiuso

$\Rightarrow V$ intorno di y $\square$

Def. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme di misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ famiglia numerabile di rettangoli $\{B_i\}$ t.c. $A \subseteq \bigcup_i B_i$ e $\sum_i vol(B_i) < \varepsilon$

È chiaro che se $A' \subseteq A$ e A ha misura zero, A' ha misura zero.
Se $\{A_k\}$ famiglia numerabile, $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$, con A_k di misura nulla, allora $A := \bigcup_k A_k$ ha misura nulla.

Lemma Se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ è un rettangolo con $\overline{B} \subset \bigcup B_i$, $\{B_i\}$ famiglia numerabile di rettangoli, allora $\sum vol(B_i) \geq vol(B)$. In particolare, $vol(B) > 0 \Rightarrow B$ non ha misura zero.

Teorema di Sard $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞, U aperto. Allora l'insieme $F(C)$ dei valori critici di F ha misura zero.

Ora portiamo questi concetti sulle varietà.

Def. $M \subseteq \mathbb{R}^k$ m-varietà. $A \subseteq M$ ha misura zero se $\forall$ carta locale $(f, W \cap M)$ l'insieme $f(W \cap A) \subseteq \mathbb{R}^m$ ha misura zero

Teorema $F: M \longrightarrow N$ C^∞ tra varietà, $m = \dim M$, $n = \dim N$.
Allora, se $C \subset M$ è l'insieme dei punti critici per F, allora $F(C) \subset N$ ha misura zero.

DIMOSTRAZIONE

Sia $(g, Z \cap N)$ una carta locale su N.
Vogliamo dimostrare che la misura di $g(Z \cap F(C))$ è zero.
Gli spazi euclidei sono a base numerabile
$\Longrightarrow \exists$ collezione numerabile $\{(f_i, W_i \cap M)\}$ di carte locali su M
Ora $\bigcup_i g(Z \cap F(C \cap W_i)) = g(Z \cap F(C))$
Mi basta che la misura di $g(Z \cap F(C \cap W_i)) = 0$ $\forall i$

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(Z) \cap W_i \cap M & \xrightarrow{F} & F(W_i \cap M) \cap Z \\ \downarrow f_i & & \downarrow g \\ \mathbb{R}^m \supseteq f_i(W_i \cap M \cap F^{-1}(Z)) & \xrightarrow{h_i} & g(F(W_i \cap M) \cap Z) \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \qquad h_i = g \circ F \circ f_i^{-1}$$

x è critico per $h_i \Longleftrightarrow f_i^{-1}(x) \in C$ (punti critici di F) (f_i, g diffeo)

Per il Teorema di Sard, $\text{misura}(\underbrace{h_i(\text{crit}(h_i))}_{g(F(W_i \cap C) \cap Z)}) = 0$ $\square$

Corollario (Brown) $F: M \longrightarrow N$ C^∞ tra varietà.
Allora l'insieme dei valori regolari di F è denso in N.

DIMOSTRAZIONE

Voglio mostrare che se $y \in N$ e $(g, Z \cap N)$ è una carta locale intorno y, allora se $C := \text{crit}(F) \subseteq M$, $(N \setminus F(C)) \cap Z \neq \emptyset$
Per quanto appena visto, $F(C)$ ha misura zero.
$\Longrightarrow g(F(C) \cap Z)$ ha misura zero
$g(Z \cap N)$ aperto $\Longrightarrow$ contiene $\bar{R}$, rettangolo
Quindi l'inclusione non può essere uguaglianza
$\Longrightarrow \exists$ punti in $g(Z \cap N)$, non in $g(F(C))$
che equivale a dire $(Z \cap N) \setminus F(C) \neq \emptyset$ $\square$

esercizio M, N varietà di dimensioni $m = \dim M$, $n = \dim N$.
Allora $M \times N$ è una varietà di dimensione $m+n$ e
$\forall (x,y) \in M \times N \quad T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \oplus T_y N$

SOLUZIONE $M \subseteq \mathbb{R}^k, N \subseteq \mathbb{R}^l, \quad M \times N \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$
Siano $f: M \cap W \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g: N \cap V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par. locali
Allora $(M \cap W) \times (N \cap V) \subseteq M \times N$ è aperto e
$f \times g : (M \times N) \cap (W \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è par. locale
Inoltre $d(f \times g)_{(x,y)} = (df_x, dg_y) \Rightarrow T_{(x,y)} M \times N \cong (T_x M) \oplus (T_y N)$

Lemma $f: M \longrightarrow N$ C^∞ tra varietà con $m = \dim M > n = \dim N$
$y \in N$ valore regolare per f. Allora
$f^{-1}(y) \subseteq M$ è una varietà di dimensione $m-n$.

DIMOSTRAZIONE
$x \in f^{-1}(y) \subseteq M$. So che $df_x : T_x M \longrightarrow T_y N$ è surgettiva
$K := \operatorname{Ker} df_x \subseteq T_x M \subseteq \mathbb{R}^k$ con $\dim K = m-n$ (dove $M \subseteq \mathbb{R}^k$)
$\Longrightarrow \exists L : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ lineare con $L|_K : K \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{m-n}$
Definisco $F: M \longrightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ con $F(x) = (f(x), L(x))$
Ora $dF_x = (df_x, dL_x = L_x) : T_x M \longrightarrow T_{(y, L(x))}(N \times \mathbb{R}^{m-n})$
con la stessa dimensione
Se $dF_x(v) = \underline{0} = (df_x(v), L_x(v))$
$\Longrightarrow df_x(v) = \underline{0} \Longrightarrow v \in K$ ma $L|_K$ è iso $\Longrightarrow v = 0$
$\Longrightarrow dF_x$ è iso $\Longrightarrow x$ è punto regolare per F
$\Rightarrow \exists U \subseteq M$ intorno di x t.c. $F|_U : U \xrightarrow{\cong} V$ intorno di $F(x) = (f(x), L(x))$
La restrizione di F manda $f^{-1}(y) \cap U$ in $y \times \mathbb{R}^{m-n}$
Infatti, $V \cap (y \times \mathbb{R}^{m-n})$ è diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$
e F dà un diffeomorfismo tra $F^{-1}(V \cap y \times \mathbb{R}^{m-n})$ e $V \cap (y \times \mathbb{R}^{m-n})$
(intorno di x in $f^{-1}(y)$)
Quindi $f^{-1}(y)$ è una varietà di dimensione $m-n$. $\square$

esempio $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ sfera n-dimensionale

$S^n = f^{-1}(1)$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$

1 è valore regolare per f:

$df_x = (Jf)_x = (2x_1 \; 2x_2 \; \dots \; 2x_{n+1})$

$crit(f) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid rk(Jf)_x = 0\} = \{\underline{0}\}$

$f(\underline{0}) = 0 \implies f(C) = \{0\} \implies$ 1 è valore regolare

Lemma $f : M \longrightarrow N$ C^∞ tra varietà con $m = \dim M > n = \dim N$
$y \in N$ valore regolare per f, $x \in f^{-1}(y)$, $T_x f^{-1}(y) = \operatorname{Ker} df_x$
e $df_x\big|_{T_x f^{-1}(y)^\perp} : T_x f^{-1}(y)^\perp \xrightarrow{\sim} T_y N$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{tikzcd} x \in f^{-1}(y) \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "f|_{f^{-1}(y)}"'] & M \arrow[d, "f"] \\ \{y\} \arrow[r, hook, "i_2"] & N \end{tikzcd}$$

diagramma commutativo

$v \in T_x f^{-1}(y)$

$df_x(v) = df_x((di_1)_x v) = d(f \circ i_1)_x(v) = d(i_2 \circ f|)_x(v) =$
$= (di_2)_y \circ (df|)_x(v) = 0$ perché $T_y\{y\} = \{0\}$

e $\dim T_x f^{-1}(y) = m - n = \dim \operatorname{Ker} df_x \implies T_x f^{-1}(y) = \operatorname{Ker} df_x$

Poi $\dim T_x f^{-1}(y)^\perp = m - (m-n) = n = \dim N$
$\implies df_x|_{T_x f^{-1}(y)^\perp}$ è isomorfismo. $\square$

esempio $x \in S^n$

$\operatorname{Ker} df_x = \operatorname{Ker}(2x_1, \dots, 2x_{n+1})$

$(x_1, \dots, x_{n+1})\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n+1} \end{pmatrix} = x_1\xi_1 + \dots + x_{n+1}\xi_{n+1} = \langle x, \xi \rangle$

$\implies \forall x \in S^n \quad T_x S^n = x^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Applicazione

$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$ gruppo ortogonale

$F: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$

$A \longmapsto AA^t$

$O(n) = F^{-1}(I) \subseteq M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ e $S(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\Rightarrow F \in C^\infty$

$A \in O(n) = F^{-1}(I)$: voglio $dF_A : T_A M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow T_I S(n)$ sorgettivo

$T_A M_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

$$dF_A(B) = \lim_{t \to 0} \frac{F(A+tB) - F(A)}{t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(A+\varepsilon B)(A^t + \varepsilon B^t) - AA^t}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(AA^t + \varepsilon AB^t + \varepsilon BA^t + \varepsilon^2 BB^t - AA^t) = AB^t + BA^t \in S(n) = T_I S(n)$$

$S(n) \ni C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t$ Per mostrare che dF_A è sorgettivo, basta trovare B t.c. $\frac{1}{2}C = AB^t$

Posso prendere $B = \frac{1}{2}CA$: $AB^t = A\frac{1}{2}A^tC^t = \frac{1}{2}C$

$\Rightarrow O(n) = F^{-1}(I)$ è una varietà di dimensione $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (gruppo di Lie)

$\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ semispazio superiore

Def. Una **m-varietà con bordo** è un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ t.c.
$\forall x \in M$ $\exists U$ intorno aperto, $x \in U \subseteq M$, con $U \cong$ aperto di $\mathbb{H}^m$

Se $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è una varietà con bordo,
$\partial M = \{x \in M \mid \exists$ par. reg. $g: U \cap \mathbb{H}^m \longrightarrow M$, con $x = g(u)$, $u \in U \cap \partial\mathbb{H}^m\}$

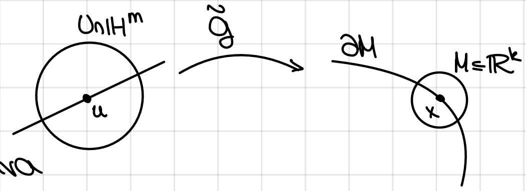
$M \setminus \partial M$ è una varietà

Definiamo T_xM per $x \in \partial M$

Se $g: U \cap \mathbb{H}^m \longrightarrow M$, par. reg., $g(u) = x$, $u \in U \cap \partial \mathbb{H}^m$

$\exists$ estensione di g a $\tilde{g}: U' \longrightarrow M$ C^∞, $u \in U' \subset \mathbb{R}^m$

$d\tilde{g}_u$ è iniettiva.



$\exists F: g(U \cap \mathbb{H}^m) \longrightarrow U \cap \mathbb{H}^m$ C^∞ che inverte g

F C^∞ intorno a x $\Rightarrow \exists W \subseteq \mathbb{R}^k$, $\tilde{F}: W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ t.c. $\tilde{F}|_{W \cap M} = g^{-1}$

$$\begin{tikzcd} U \cap \mathbb{H}^m \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[dr, "i"'] & W \arrow[d, "\tilde{F}"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$d\tilde{F}_x \circ d\tilde{g}_u = di_u = id_{\mathbb{R}^m}$ $\Rightarrow d\tilde{g}_u$ iniettiva

Definisco $T_xM = d\tilde{g}_u(\mathbb{R}^m)$

$\tilde{g}|_{U \cap \mathbb{H}^m} = g$

Se $\tilde{\tilde{g}}$ è un'altra estensione di g: $\tilde{g} = \tilde{\tilde{g}} = g$ in $U \cap \mathbb{H}^m$

Prendo $\{u_i\} \subseteq \mathbb{H}^m \setminus \partial\mathbb{H}^m$ con $u_i \xrightarrow[i \to +\infty]{} u$

$$\begin{tikzcd} d\tilde{g}_{u_i} \arrow[d, "i \to +\infty"] = d\tilde{\tilde{g}}_{u_i} \arrow[d] = dg_{u_i} \\ d\tilde{g}_u = d\tilde{\tilde{g}}_u \end{tikzcd}$$

Proposizione Se $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è una m-varietà con bordo, allora ∂M è una varietà, $\dim \partial M = \dim M - 1$.

DIMOSTRAZIONE

$g|_{U\cap\partial\mathbb{H}^m} : U\cap\partial\mathbb{H}^m \longrightarrow g(U\cap\partial\mathbb{H}^m) \subseteq \partial M$

$g(U\cap\partial\mathbb{H}^m) \subseteq g(U\cap\mathbb{H}^m)\cap\partial M$ se vale $=$, si conclude.

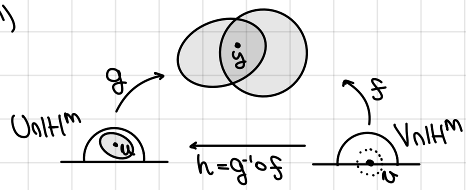
Per assurdo valga $\subsetneq$: $\exists y \in (g(U\cap\mathbb{H}^m)\cap\partial M) \setminus g(U\cap\partial\mathbb{H}^m)$

$\Longrightarrow y = g(u)$ con $u \in \mathbb{H}^m \setminus \partial\mathbb{H}^m$

$y = f(v)$ con $f: V\cap\mathbb{H}^m \longrightarrow M$ par. regolare

$h = g^{-1}\circ f$ si estende a $\tilde{h}$ su intorno di v:

$\tilde{h} = g^{-1}\circ\tilde{f}$



$d\tilde{h}_v$ è iniettiva $\Longrightarrow \tilde{h}$ diffeo tra intorno di v e intorno di u

$\Longrightarrow$ esisterebbe $\overline{u} \in \mathbb{H}^m \cap U$ che proviene da $\overline{v}$ con $\overline{v}_m < 0$,

ma $\tilde{f}(\overline{v}) = g(\overline{u})$ e $g(\overline{u})$ può provenire solo da $V\cap\mathbb{H}^m$. ↯ □

Lemma $M \subseteq \mathbb{R}^k$ m-varietà, $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ t.c. $0 \in \mathbb{R}$ valore regolare per g.
Allora $\{x \in M \mid g(x) \geq 0\} \subseteq M$ è una m-varietà con bordo $g^{-1}(0)$

DIMOSTRAZIONE

$\{g \geq 0\} \supset \{g > 0\}$ è un aperto di $M \Rightarrow$ è una varietà

$\{g \geq 0\} \supset \{g = 0\}$

$x \in g^{-1}(0)$: $dg_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ è surgettivo

$K = \operatorname{Ker} dg_x$ ha dim $m-1$

$L: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ t.c. $L|_K : K \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{m-1}$

$M \xrightarrow{G} \mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R}$ $\quad G(x) = (L(x), g(x))$

$dG_x = (L, dg_x)$

$0 = dG_x(v) = (L(v), dg_x(0)) \Longrightarrow v = 0$

$G|_U : U \xrightarrow{\sim} G(U) \subseteq \mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R}$

$\underset{\cup}{U}\cap\{g\geq 0\} \longleftrightarrow G(U)\cap\mathbb{H}^m$

$\underset{\cup}{U}\cap\{g=0\} \longleftrightarrow \underset{\cup}{G(U)}\cap\partial\mathbb{H}^m$

$\Rightarrow \exists$ carta locale intorno a $x \in \{g=0\} \subseteq \{g \geq 0\}$

$\Longrightarrow \{g \geq 0\}$ varietà con bordo □

esempio $D^n = \{g \geq 0\}$ per $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x_1,\dots,x_n) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$

$Jg_{\underline{x}} = 2(x_1,\dots,x_n) \neq 0 \iff \underline{x} \neq \underline{0}$

e $\underline{0}$ è regolare $\Rightarrow$ D^n è una n-varietà con bordo $\{g=0\} = S^{n-1}$

> **Lemma** M varietà con bordo, N varietà, $m = \dim M > n = \dim N$.
> $f: M \to N$ C^∞, $y \in N$ valore regolare per f e $f|_{\partial M}$.
> Allora $f^{-1}(y)$ è una varietà con bordo di dimensione $m-n$
> e $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$.

DIMOSTRAZIONE

È sufficiente il caso $M = \mathbb{H}^m$, $N = \mathbb{R}^n$

(per il caso generale: $f^{-1}(y)$ è varietà con bordo perché
se $x \in f^{-1}(y) \setminus \partial M$, attorno a x esiste una carta locale
se $x \in f^{-1}(y) \cap \partial M$, ho un intorno diffeo a $U \cap \mathbb{H}^m$

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq g(U \cap \mathbb{H}^m) & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow g & & \uparrow g' \\ U \cap \mathbb{H}^m & \xrightarrow[(g')^{-1} \circ f \circ g]{} & V \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$
)

Sia $f: \mathbb{H}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y) \subseteq \mathbb{H}^m$
$\quad\quad x \notin \partial \mathbb{H}^m$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \uparrow & \nearrow & \\ \{x_n > 0\} & & \end{array}$$

allora $\exists$ carta locale intorno a x in $f^{-1}(y)$,
perché $f^{-1}(y) \cap (\mathbb{H}^m \setminus \partial \mathbb{H}^m) = f^{-1}|_{(\mathbb{H}^m \setminus \partial \mathbb{H}^m)}(y)$

Se $x \in f^{-1}(y) \cap \partial \mathbb{H}^m$, $\exists$ estensione C^∞ $\tilde{f}$ di f su intorno di x. $\tilde{f}|_{U \cap H^m} = f|_{U \cap H^m}$

Poiché y è regolare per $f|_{\partial H^m}$, $df_x|_{T_x \partial H^m} = d\tilde{f}_x|_{T_x \partial H^m}$ è surgettiva, quindi
a meno di restringere U possiamo supporre $\tilde{f}$ non abbia punti critici in U.
Allora $\tilde{f}^{-1}(y) \subset U$ è una varietà di dimensione $m-n$ per quanto già visto.
Sia $\pi: \tilde{f}^{-1}(y) \longrightarrow \mathbb{R}$ la restrizione di $\pi: H^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $\pi(\underline{x}) = x_m$.
Allora $f^{-1}(y) \cap U = \{x \in \tilde{f}^{-1}(y) \mid \pi(x) \geq 0\}$
Per concludere basta verificare che $0 \in \mathbb{R}$ è
valore regolare per $\pi|_{\tilde{f}^{-1}(y)}$. Abbiamo
$(\pi|_{\tilde{f}^{-1}(y)})^{-1}(0) = f^{-1}(y) \cap \partial H^m$ se $x \in f^{-1}(y) \cap \partial H^m$,
$T_x \tilde{f}^{-1}(y) = \operatorname{Ker} d\tilde{f}_x = \operatorname{Ker} df_x$ ha dimensione $m-n$,
perché $\dim \tilde{f}^{-1}(y) = m-n$

$$\begin{array}{ccc} H^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow & \nearrow_{f|_{\partial H^m}} & \\ \partial H^m & & \end{array}$$

$\Rightarrow K := \operatorname{Ker}(d(f|_{\partial H^m})_x) = \operatorname{Ker}(df_x|_{T_x \partial H^m})$
y valore regolare per $f|_{\partial H^m}$
$\Rightarrow \dim K = m-n-1$

Ma $T_x \partial H^m = \operatorname{Ker} d\pi_x \Rightarrow K = \operatorname{Ker} df_x \cap \operatorname{Ker} d\pi_x$

Quindi $m-n-1 = \dim K < \dim \operatorname{Ker} df_x = m-n$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} df_x = \operatorname{Ker} d\tilde{f}_x \not\subseteq \operatorname{Ker} d\pi_x \iff d\pi_x|_{T_x \tilde{f}^{-1}(y)} \neq 0$

$\Rightarrow$ 0 valore regolare per π $\square$

FATTO Ogni varietà compatta di dim 1 è diffeomorfa ad un'unione finita di copie di S^1 e di intervalli chiusi di $\mathbb{R}$

> **Lemma** M varietà compatta con bordo, $\dim M > 1$.
> Allora non esiste $f: M \to \partial M$ C^∞ t.c. $f|_{\partial M} = id_M$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $y \in \partial M$ valore regolare per f: $f^{-1}(y) \subseteq M$ è una 1-varietà

$f^{-1}(y)$ compatta $\implies f^{-1}(y) \cong$ finiti S^1 e intervalli

$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$

$|\partial f^{-1}(y)| \equiv 0 \pmod 2$ e $f^{-1}(y) \cap \partial M = \{x \in \partial M \mid f(x) = y\} = \{y\}$ ↯ $\square$

> **Teorema di Brouwer C^∞** Una mappa $f: D^n \to D^n$ C^∞ ha un punto fisso.

DIMOSTRAZIONE

Se così non fosse, $\frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} = u \in \partial D^n = S^{n-1}$

Vogliamo costruire $g: D^n \to S^{n-1}$ della forma $g(x) = x + tu$

quindi $(x+tu) \cdot (x+tu) = 1 \longleftrightarrow x \cdot x + 2t x \cdot u + t^2 = 1$

$\longleftrightarrow t = -x \cdot u \pm \sqrt{(x \cdot u)^2 - x \cdot x + 1}$ scegliamo il $+$

g è di classe $C^\infty \iff t$ lo è

vogliamo $\underset{\geq 0}{(x \cdot u)^2} \underset{\geq 0}{\underline{- x \cdot x + 1}} > 0 \ \forall x$

$= 0 \longleftrightarrow \underset{x \in \partial D^n}{x \cdot x = 1}, \ \underset{1 = x \cdot x = x \cdot f(x)}{x \cdot u = 0}$

$\longrightarrow f(x) = x$ contro l'ipotesi

$\implies g$ è C^∞ e fissa ∂D^n ↯ $\square$

> **Teorema di Brouwer** Una mappa $f: D^n \to D^n$ C^0 ha un punto fisso.

DIMOSTRAZIONE

Per Stone-Weierstraß, $\exists P_1 : D^n \to \mathbb{R}$ funz. polinomiale

t.c. $\|P_1(x) - f(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in D^n$

Vorrei applicare Brouwer C^∞, ma non so se manda il disco in sé.

$\|P_1(x)\| < \|P_1(x) - f(x)\| + \|f(x)\| < 1 + \varepsilon$

$P(x) = \frac{1}{1+\varepsilon} P_1(x)$, $P: D^n \to D^n$ C^∞ e manda il disco in sé.

Sicuramente P ha un punto fisso.

Se f non avesse punti fissi, $\|f(x) - x\| \geq \mu > 0$, dove μ è il minimo di $\|f(x) - x\|$

$\forall x$ $\|P(x) - f(x)\| = \|\frac{1}{1+\varepsilon} P_1(x) - f(x)\| = \frac{1}{1+\varepsilon} \|P_1(x) - (1+\varepsilon) f(x)\| \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \|P_1(x) - f(x)\| + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|f(x)\|$

$< \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} < \mu$

Se x è punto fisso per P, $\|f(x) - x\| < \mu$ ↯ $\square$

Teoria del grado mod 2

Sia $f: M \longrightarrow N$ C^∞ tra varietà della stessa dimensione, M compatta.
$y \in N$ valore regolare, allora $|f^{-1}(y)| < +\infty$.

Scopo: y' regolare $\Longrightarrow |f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)|$

esercizio M varietà, allora $M \times [0,1]$ è varietà con bordo $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$

SOLUZIONE Considero $\varphi: M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x,t) = t - t^2$
φ è C^∞ e 0 è un valore regolare per φ ($d\varphi_{(x,0)} = 1$ $\forall x \in M$)
$\Longrightarrow M \times \mathbb{R} \cap \{(x,t) \mid \varphi(x,t) \geq 0\} = M \times [0,1]$ è una varietà con bordo
$M \times \mathbb{R} \cap \{(x,t) \mid \varphi(x,t) = 0\} = M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$

Def. $f, g: M \longrightarrow N$ sono **C^∞-omotope** se
$\exists H: M \times [0,1] \longrightarrow N$ C^∞ t.c.
$H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$

> **Lemma** M, N varietà, $\dim M = \dim N$, M compatta.
> $f, g: M \longrightarrow N$ C^∞, $y \in N$ valore regolare per f e g,
> f e g C^∞-omotope.
> Allora $|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \mod 2$

DIMOSTRAZIONE
$H: M \times [0,1] \longrightarrow N$, $H|_{M \times \{0\}} = f$, $H|_{M \times \{1\}} = g$
Per il lemma della pila dei dischi, $\exists V_1 \subseteq N$ intorno di y,
$\exists V_2 \subseteq N$ intorno di y t.c. $\forall y' \in V_1$ $|f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y')|$, $\forall y'' \in V_2$ $|g^{-1}(y)| = |g^{-1}(y'')|$
$\Longrightarrow V_1 \cap V_2$ è intorno di y e $\forall y' \in V_1 \cap V_2$ $|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)|$, $|g^{-1}(y')| = |g^{-1}(y)|$
Sia $\tilde{y} \in V_1 \cap V_2$ valore regolare per H
$H^{-1}(\tilde{y})$ è una 1-varietà compatta con $\partial H^{-1}(\tilde{y}) = H^{-1}(\tilde{y}) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) =$
$= f^{-1}(\tilde{y}) \times \{0\} \cup f^{-1}(\tilde{y}) \times \{1\}$

$$0 \overset{\text{mod } 2}{\equiv} |\partial H^{-1}(\tilde{y})| = |f^{-1}(\tilde{y})| + |g^{-1}(\tilde{y})| = |f^{-1}(y)| + |g^{-1}(y)|$$

$\square$

Def. Un'omotopia C^∞ $H: M \times [0,1] \longrightarrow N$ si dice **isotopia** se
$\forall t \in [0,1]$ $H_t: M \longrightarrow N$, $H_t(x) = H(x,t)$ è un diffeomorfismo.

> **Lemma di omogeneità** N varietà connessa, $y, z \in N$.
> Allora esiste un'isotopia $H: N \times [0,1] \longrightarrow N$
> t.c. $h: N \longrightarrow N$, $h(x) = H(x,0)$, $h(y) = z$, $H(x,1) = x$ $\forall x$.
> Inoltre $\exists K \subset N$ compatto t.c. $\forall x \in N \setminus K$, $H(x,t) = x$ $\forall t \in [0,1]$.

DIMOSTRAZIONE

Mostriamo che, fissato y, è sufficiente dimostrare la tesi per i punti z in un intorno di y.

Definiamo la relazione di equivalenza su N:

$y \sim z \iff \exists h: N \xrightarrow{\cong} N$ isotopo a id_N con $H \equiv id$ fuori da un compatto,

- $y \sim y$: basta $h = id_N$
- $y \sim z \Rightarrow z \sim y$: $H: N \times [0,1] \longrightarrow N$ isotopia da h a id_N

$$N \times [0,1] \longrightarrow N \times [0,1] \xrightarrow{H} N \quad \text{isotopia da } h^{-1} \text{ a } id_N$$
$$(x,t) \longmapsto (h^{-1}(x), 1-t)$$

- $y \sim z, z \sim w \Rightarrow y \sim w$: $N \times [0,1] \xrightarrow{H} N$ isotopia da h a id_N, $h(y) = z$

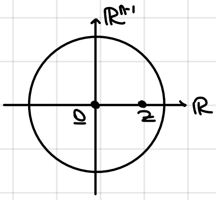
$N \times [0,1] \xrightarrow{G} N$ isotopia da g a id_N, $g(z) = w$

$$N \times [0,1] \xrightarrow{H \times id} N \times [0,1] \xrightarrow{G} N \quad \text{isotopia da } g \circ h \text{ a } id_N$$

Per concludere, basta far vedere che ogni classe di equivalenza è un aperto di N ($\dim N = n$)

E' sufficiente: dato $r > 0$ $\exists\, 0 < r_0 < r$ t.c. se $z \in B_{r_0}(\underline{0}) \subseteq \mathbb{R}^n$ $\exists$ isotopia $H: \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\operatorname{supp} H \subseteq B_r(\underline{0})$

Infatti, possiamo supporre $z = (a, 0, \dots, 0)$, $a > 0$, poiché



se $z \in B_{r_0}(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\}$, pongo $a = \|z\| > 0$,

$\exists A \in O(n)$ t.c. $A(a, 0, \dots, 0) = z$

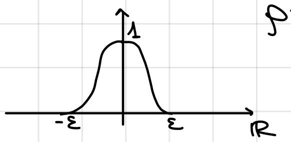
Se $h(\underline{0}) = (a, 0, \dots, 0)$ ed è isotopa a id con un'isotopia a supp compatto.

$A h A^{-1}(\underline{0}) = Ah(\underline{0}) = A(a, 0, \dots, 0) = z$

$A h_t A^{-1}$ è l'isotopia

Prendiamo per buona l'esistenza di:

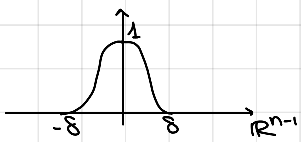
$\forall \varepsilon > 0$



$\rho: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞

$0 \leq \rho(x) \leq 1$, $\rho(0) = 1$, $\rho(x) = 0$ $\forall x \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\forall \delta > 0$



$\sigma: \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞

$0 \leq \sigma(\underline{x}) \leq 1$, $\sigma(\underline{0}) = 1$, $\sigma(\underline{x}) = 0$ $\forall \|\underline{x}\| \notin (-\delta, \delta)$

$\mathbb{R}^n = \underset{(x,y)}{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}}$ $\quad h_t(x,y) = (x + t\rho(x)\sigma(y)a, y)$ isotopia da $id_{\mathbb{R}^n}$ a h_1 t.c. $h_1(\underline{0}) = (a, 0, \dots, 0)$

$h_t: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad h_t(\mathbb{R} \times \{\underline{c}\}) \subseteq \mathbb{R} \times \{\underline{c}\}$

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\underline{c} \in \mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{R} \times \{\underline{c}\}$

$\varphi(x) = x + t\rho(x)\sigma(\underline{c})a$ $\quad \varphi'(x) = 1 + t\rho'(x)\sigma(\underline{c})a$

Se a è suff. piccolo, $|t\rho'(x)\sigma(\underline{c})a| \leq |\rho'(x)a| < 1$ $\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

$\Rightarrow \varphi'(x) > 0 \Rightarrow h_t$ è una bigezione $\forall \underline{c}$

$h_t: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diffeo locale

$$Jh_t(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} 1 + t\rho'\sigma a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \end{array}\right) \qquad \det Jh_t(x,y) = 1 + t\rho'\sigma a > 0$$

$\Rightarrow h_t$ diffeo $\forall t$ e ha le proprietà volute

$\square$

Teorema M varietà compatta, N connessa, $\dim M = \dim N$.
$f: M \to N$ C^∞, $y, z \in N$ valori regolari per f. Allora
(1) $|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(z)| \mod 2$
Il numero $|f^{-1}(y)| \mod 2$ è il grado mod2 di f, $\deg_2(f)$
(2) se $f, g: M \to N$ C^∞ sono omotope, allora
$\deg_2(f) = \deg_2(g)$.

DIMOSTRAZIONE

(1) Sia $h: N \to N$ mappa C^∞ isotopa a id_N, $h(y) = z$.
Considero $z \in N$: è valore regolare per f per ipotesi,
e per $h \circ f$ poiché $dh_y : T_yN \xrightarrow{\cong} T_zN$ iso.
$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y) \ni x$

$$\begin{tikzcd} T_yN \arrow[r, "\cong"] & T_zN \\ T_xM \arrow[u, "df_x"] \arrow[ur, "d(h\circ f)_x"'] & \end{tikzcd}$$

$d(h \circ f)_x$ è surg

$M \underset{f}{\overset{h\circ f}{\longrightarrow}} N \qquad M \times [0,1] \xrightarrow{f \times id} M \times [0,1] \xrightarrow{H} N$ omotopia C^∞
con $H_1 = h \circ f$, $H_0 = id_N \circ f = f$
$|f^{-1}(z)| \overset{\text{mod}2}{\equiv} |(h \circ f)^{-1}(z)| = |f^{-1}(y)|$
(2) $C \subset M$ punti critici di f : C chiuso, quindi compatto
$\Longrightarrow$ $f(C)$ compatto quindi chiuso $\Longrightarrow$ $N \setminus f(C)$ aperto
$\Longrightarrow \exists\, y \in N \setminus f(C)$ valore regolare per g
$\deg_2(f) = |f^{-1}(y)| \mod 2 = |g^{-1}(y)| \mod 2 = \deg_2(g)$. $\square$

<u>esempio</u> $f: S^n \xrightarrow{\cong} S^n$ diffeo, $\deg_2(f) = |f^{-1}(y)| \mod 2 = 1 \mod 2$
$\Longrightarrow$ f non è C^∞ omotopa a $c_{x_0}: S^n \longrightarrow S^n$, $c_{x_0}(x) = x_0$
$\deg_2(c_{x_0}) = |c_{x_0}^{-1}(y)| \mod 2 = 0 \mod 2$
$y \in S^n \setminus \{x_0\}$ è regolare

Teoria del grado (su $\mathbb{Z}$)

Il grado mod 2 ci permette di dimostrare che un diffeomorfismo non è omotopo a una mappa costante.

L'intuizione suggerisce: se $\exists$ campo vettoriale tangente a S^2
$\Longrightarrow$ $id : S^2 \longrightarrow S^2$ è C^∞-omotopa a $A : S^2 \longrightarrow S^2$, $x \longmapsto -x$
$\deg_2(id) = \deg_2(A)$

$\deg_2$ non è sufficiente a escludere l'esistenza di omotopie C^∞ da id_{S^2} a A.
Vedremo che ne esiste un raffinamento $\deg$ a valori in $\mathbb{Z}$
t.c. $\deg(id_{S^2}) \neq \deg(A)$

Sia V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$
$b = (b_1, \ldots, b_n)$, $b' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ basi di V sono equivalenti
se $b'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$, vale $\det(a_{ij}) > 0$
Un'orientazione su V è una classe di equivalenza $[b]$.
L'insieme delle orientazioni su V ha due elementi

$\mathbb{R}^n$ ha un'orientazione canonica associata alla base canonica.
La indicheremo con $\mathcal{O}_0$

<u>Oss</u> Se $L : V \xrightarrow{\cong} W$ è iso di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, allora L induce una mappa

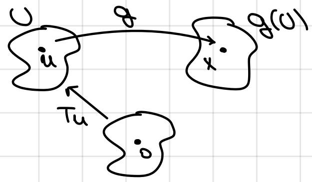
$$\mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_W$$
$$[b] \longmapsto [Lb]$$

è ben definita: se $[b'] = [b]$, $b'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$, $\det(a_{ij}) > 0$
$\Longrightarrow$ $Lb'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} L b_i$ $\Longrightarrow$ $[Lb'] = [Lb]$

Def. Sia M m-varietà (anche con $\partial M \neq \emptyset$), $\dim M > 1$.
Un' **orientazione** su M è $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x\}_{x \in M}$, dove $\mathcal{O}_x$ orientazione di $T_x M$
t.c. $\forall x_0 \in M$ e par. locale $g : U \xrightarrow{\cong} g(U) \subseteq M$ intorno a $x_0 = g(u_0)$
$dg_u(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_{g(u)}$ $\forall u \in U$
La coppia $(M, \mathcal{O})$ si dice **varietà orientata**.
Una par. locale g che soddisfa la condizione, si dice **compatibile con $\mathcal{O}$**.
Se $\dim M = 1$, M compatta e connessa con $\partial M \neq \emptyset$
$\varphi : [0,1] \xrightarrow{\cong} M$ $[d\varphi_t(1)] = \mathcal{O}_{\varphi(t)}$ orientazione su $T_{\varphi(t)} M$
$\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_{\varphi(t)}\}$ è un'orientazione su M.

Oss Se $\mathcal{O}=\{\mathcal{O}_x\}_{x\in M}$ è un'orientazione su M m-varietà, allora $-\mathcal{O}=\{-\mathcal{O}_x\}_{x\in M}$ è un'orientazione su M.
Data una par. locale $g: U \longrightarrow g(U)\subset M$ compatibile con $\mathcal{O}$, dato $x\in g(U)$, $\exists$ par. locale $\mathcal{O}$-compatibile intorno a x con dominio $B_\varepsilon(0)$, $\varepsilon>0$

$(dT)_0(\mathcal{O}_0)=\mathcal{O}_0$ perché $dT_u=1$

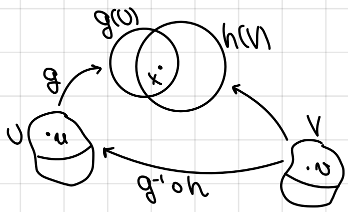


$\Longrightarrow$ $\exists$ ricoprimento di carte locali di M $\mathcal{O}$-compatibili ciascuna della forma $g(B(0))$

$$B(0) \longrightarrow B(0) \xrightarrow[\cong]{g} M$$
$$(x_1,\dots,x_m) \overset{\varphi_m}{\longmapsto} (x_1,\dots,-x_m) \qquad dg(\mathcal{O}_0)=\mathcal{O}_{g(u)}$$
$$J\varphi_m = \begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow d(g\circ\varphi_m)_u(\mathcal{O}_0) = dg_{\varphi_m(u)}\circ(d\varphi_m)_u(\mathcal{O}_0) = dg_{\varphi_m(u)}(-\mathcal{O}_0) = -\mathcal{O}_{g\varphi_m(u)}$$
$\Longrightarrow$ $g\circ\varphi_m$ è una carta locale $-\mathcal{O}_0$-compatibile

Proposizione M m-varietà (anche con $\partial M\neq\emptyset$) connessa e orientabile. Allora ammette al più due orientazioni.

DIMOSTRAZIONE
Sia $\mathcal{O}=\{\mathcal{O}_x\}_{x\in M}$ un'orientazione su M.
È sufficiente mostrare che, se $\mathcal{O}'=\{\mathcal{O}'_x\}_{x\in M}$ è un'altra orientazione su M, $\mathcal{O}'=\mathcal{O}$ oppure $\mathcal{O}'=-\mathcal{O}$
$A=\{x\in M \mid \mathcal{O}_x=\mathcal{O}'_x\}$, $B=\{x\in M\mid \mathcal{O}_x=-\mathcal{O}'_x\}$, $A\cup B=M$
Vogliamo $A=\emptyset$ oppure $B=\emptyset$. Siccome M è connessa, è sufficiente mostrare A e B aperti.
Dimostriamo che A è aperto (per B è analogo)
$x\in M$, $\mathcal{O}_x=\mathcal{O}'_x$
$g:U\longrightarrow M$ par. locale $\mathcal{O}$-compatibile
$h:V\longrightarrow M$ par. locale $\mathcal{O}'$-compatibile



$d(g^{-1}\circ h)_v(\mathcal{O}_0) = dg^{-1}_x\circ dh_v(\mathcal{O}_0) =$
$= (dg)^{-1}_x(\mathcal{O}'_x) = (dg)^{-1}_x(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_0$
$\Longleftrightarrow$ $\det J(g^{-1}\circ h)_v>0$
$\Longleftrightarrow$ $\det J(g^{-1}\circ h)>0$ su un intorno di v
$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}'=\mathcal{O}$ su un intorno di x
Caso $\dim M=1$, M compatto, $\partial M\neq\emptyset$, connessa
Sia $\{[d\varphi_t(1)]\}_{t\in[0,1]}$, $\varphi:[0,1]\xrightarrow{\cong} M$ diffeo, un'orientazione.
Sia $\{[d\psi_t(1)]\}_{t\in[0,1]}$, $\psi:[0,1]\xrightarrow{\cong} M$ diffeo
Poiché $\varphi^{-1}\circ\psi$ ha derivata positiva o negativa (in ogni punto), sia $\varepsilon=\mathrm{sgn}((\varphi^{-1}\circ\psi)'(t))\in\{\pm1\}$
Allora $d(\varphi^{-1}\circ\psi)_t(1)=\varepsilon$ $\Longrightarrow$ $[d\psi_t(1)]=\varepsilon[d\varphi_t(1)]$ $\forall t$

$\square$

Def. M compatta, N varietà connessa con $\dim M = \dim N$
$(M, \mathcal{O}^M)$, $(N, \mathcal{O}^N)$ orientate
$f: M \longrightarrow N$ C^∞ con $y \in N$ valore regolare
$x \in f^{-1}(y)$, $df_x : T_xM \xrightarrow{\cong} T_yN$

$$\text{sgn}(df_x) = \begin{cases} +1 & \text{se } df_x(\mathcal{O}^M_x) = \mathcal{O}^N_y \\ -1 & \text{se } df_x(\mathcal{O}^M_x) = -\mathcal{O}^N_y \end{cases}$$

Definiamo il grado di f in y

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x) \in \mathbb{Z}$$

Def. M m-varietà con bordo, $x \in \partial M$, $g: U \cap H^m \longrightarrow M$ par. locale intorno a $x = g(u)$, $u \in \partial H^m$
$H^m \setminus \partial H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_m > 0\}$

$$dg_u(H^m \setminus \partial H^m) \subset dg_u(\mathbb{R}^m) = T_xM$$

vettori tangenti interni di M in x

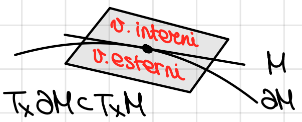
Verifichiamo che se $h: V \cap H^m \longrightarrow M$ è un'altra par. locale intorno a $x = h(v)$, $v \in \partial H^m$, allora $dh_v(H^m \setminus \partial H^m) = dg_u(H^m \setminus \partial H^m)$
$\iff d(g^{-1} \circ h)_v(H^m \setminus \partial H^m) = H^m \setminus \partial H^m$

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$, $(\underline{x}, y)$

$$g^{-1} \circ h : h^{-1}(g(U \cap H^m)) \longrightarrow g^{-1}(h(V \cap H^m))$$
$$v \longmapsto u$$

$g^{-1} \circ h(\underline{x}, y) = (\Phi_1(\underline{x}, y), \Phi_2(\underline{x}, y))$
$\Phi_2(\underline{x}, 0) \equiv 0$
$y > 0 \implies \Phi_2(\underline{x}, y) > 0$

$$J(g^{-1} \circ h)_v = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 \cdots 0 & \lambda \end{array}\right) \quad \text{con } \lambda = \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right|_v = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\overbrace{\Phi_2(\underline{x}, \varepsilon)}^{>0} - \overbrace{\Phi_2(\underline{x}, 0)}^{=0}}{\varepsilon} > 0$$



M varietà orientata con bordo, $x \in \partial M$.
Sia $(v_1, -, v_m)$, $m = \dim M$, una base positiva di $T_x M$ con v_1 esterno e $(v_2, -, v_m)$ base di $T_x \partial M$

> **Lemma** L'orientazione $[v_2, -, v_m]$ di $T_x \partial M$ non dipende dalla scelta di $(v_1, v_2, -, v_m)$ né da quella di v_1.

DIMOSTRAZIONE

Fissiamo par. locale $g : U \cap H^m \longrightarrow g(U \cap H^m) \ni x$ compatibile con l'orientazione.
Allora, se $x = g(u)$, $u \in U \cap \partial H^m$, $dg_u^{-1}(v_1) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ ha ultima coordinata <0 e $dg_u^{-1}(v_i)$ ce l'ha nulla per $i = 2, -, m$.
Se $(v_1', -, v_m')$ è un'altra base con le stesse proprietà, la matrice di cambiamento di base è:

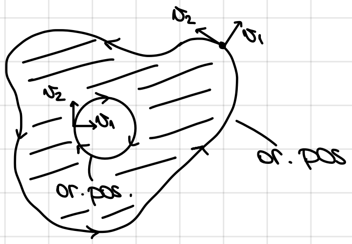
$$\begin{array}{c} \\ dg_u^{-1}(v_1') \\ dg_u^{-1}(v_2') \\ \vdots \\ dg_u^{-1}(v_m') \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} dg_u^{-1}(v_1) & dg_u^{-1}(v_2) & \cdots & dg_u^{-1}(v_m) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & A & \\ * & & & \end{array}\right) \end{array} = M$$

$\lambda > 0$ perché le ultime coordinate di $dg_u^{-1}(v_1)$ e $dg_u^{-1}(v_1')$ hanno lo stesso segno. Inoltre, $\det M > 0$ perché $(v_1, -, v_m)$ e $(v_1', -, v_m')$ sono entrambe positive e M coincide con la matrice del cambio di base $(v_1', -, v_m') \longrightarrow (v_1, -, v_m)$. Quindi $\det A > 0$.
Poiché A è la matrice del cambio di base $(v_2', -, v_m') \longrightarrow (v_2, -, v_m)$, si conclude. □

Def. Data una varietà orientata con bordo M, la famiglia $\{\mathcal{O}_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}$ di orientazioni di $T_x \partial M$ indotte dall'orientazione di M è un'orientazione su ∂M detta orientazione indotta sul bordo o orientazione di bordo.

$\dim M = 1$, M compatta, $\partial M \neq \emptyset$

esempio

$M =$  $\subseteq (\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{can})$

esempio $S^n = \partial D^{n+1}$, $D^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Ogni spazio tangente di D^{n+1} è identificato con $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Longrightarrow D^{n+1}$ eredita un'orientazione da $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Longrightarrow D^{n+1}$ orientata con bordo $\Longrightarrow S^n$ orientata come bordo

$f : M \longrightarrow N$ $\quad$ $\dim M = \dim N$

M varietà chiusa (compatta $\partial M = \emptyset$) orientata

N varietà connessa, $\partial N \neq \emptyset$, orientata

O^M, O^N orientazioni su M, N

$x \in M$ punto regolare per f

$\Longrightarrow df_x : T_xM \xrightarrow{\sim} T_{f(x)}N$ isomorfismo

$$\operatorname{sgn}(df_x) = \begin{cases} +1 & \text{se } df_x(O^M_x) = O^N_y \\ -1 & \text{se } df_x(O^M_x) = -O^N_y \end{cases}$$

$y \in N$ valore regolare per f

$$\Longrightarrow \deg(f; y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(df_x) \in \mathbb{Z}$$

<u>Claim</u> $\deg(f;y)$ è costante in un intorno di y.

$$\begin{tikzcd} M \supset g(U) \ni x \arrow[r, "f"] & h(V) \subset N \ni y \\ U \ni u \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f \circ g"'] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

g, h par. reg. compatibili con O^M, O^N

$\operatorname{sgn}(df_x) > 0 \iff \det(J(h^{-1} \circ f \circ g)_u) > 0$

Questo ragionamento si applica $\forall x \in f^{-1}(y)$

$\Longrightarrow$ per il Teo. della pila dei dischi,

$\deg(f; y') = \deg(f; y)$ $\forall y' \in$ intorno di y $\square$

Lemma 1 X varietà compatta con bordo, N varietà connessa orientata con $\dim N = \dim X - 1$. $F : X \longrightarrow N$ C^∞.
Se $f := F|_{\partial X}$ e $y \in N$ valore regolare per f, allora $\deg(f; y) = 0$.

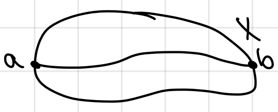
DIMOSTRAZIONE

Per la densità dei valori regolari di F e il fatto che un intorno di y è fatto di valori regolari di f, possiamo supporre y valore regolare per F.

Quindi $F^{-1}(y)$ è una varietà di dim 1 con bordo $F^{-1}(y) \cap \partial X = f^{-1}(y)$

$F^{-1}(y)$ è unione finita di cerchi e archi.

Sia $A \subset F^{-1}(y)$ uno degli archi: $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$



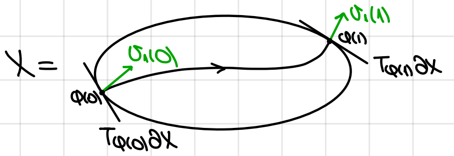
<u>Claim</u> $\operatorname{sgn}(df_a) + \operatorname{sgn}(df_b) = 0$

Fissiamo un diffeo $\varphi : [0,1] \xrightarrow{\sim} A$ e poniamo $v_1(t) := d\varphi_t(1) \in T_{\varphi(t)}A$ $\forall t \in [0,1]$, dove $1 \in \mathbb{R} = T_t\mathbb{R}$, $[1] = O_0$

Abbiamo $T_{\varphi(t)}X = \overset{\ker(dF_{\varphi(t)})}{\overset{\|}{T_{\varphi(t)}A}} \oplus (T_{\varphi(t)}A)^\perp$, $dF_{\varphi(t)}|_{(T_{\varphi(t)}A)^\perp} : (T_{\varphi(t)}A)^\perp \xrightarrow{\sim} T_yN$ isom.
Fissiamo base positiva $(w_2,\dots,w_m)$ di T_yN e
poniamo $v_i(t) = dF^{-1}_{\varphi(t)}(w_i)$, $i=2,\dots,m$, $\forall t\in[0,1]$

<u>Claim</u> $(v_1(t),\dots,v_m(t))$ è una base di $T_{\varphi(t)}X$ che è positiva $\forall t\in[0,1]$ o negativa $\forall t\in[0,1]$.
Infatti, se $g: U \longrightarrow g(U)$, $u \longmapsto \varphi(t)$ è una par. locale compatibile, se la base $dg_u^{-1}(v_i(t))$ è positiva, allora per continuità $dg_u^{-1}(v_i(t'))$ è positiva $\forall t' \in$ intorno(t), e lo stesso vale se è negativa.
Dalla connessione di $[0,1]$ segue il claim.
A meno di usare $\varphi(1-t)$ al posto di φ, possiamo supporre:
$(v_1(t),\dots,v_m(t))$ base positiva di $T_{\varphi(t)}X$ $\forall t\in[0,1]$

<u>eserc</u> $v_1(0)$ è interno, $v_1(1)$ è esterno



(usare carte locali intorno $\varphi(0)$ e $\varphi(1)$)

Fissiamo base $(v_2',\dots,v_m')$ di $T_{\varphi(0)}\partial X$ t.c. $(dF_{\varphi(0)}(v_i'))_{i=2}^m$ è base positiva di T_yN.
La matrice del cambio di base $(v_1(0),\dots,v_m(0)) \longrightarrow (v_1(0),v_2',\dots,v_m')$ è data da

$$\begin{array}{c|c} & v_1(0) \quad v_2(0) \quad \cdots \quad v_m(0) \\ \begin{array}{c} v_1(0) \\ v_2' \\ \vdots \\ v_m' \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \end{array}$$

$\det B>0$, perché B è matrice del cambio di base $(dF_{\varphi(0)}(v_i(0)))_{i=2}^m \longrightarrow (dF_{\varphi(0)}(v_i'))_{i=2}^m$ entrambe basi positive di T_yN.

$\Longrightarrow (v_1(0),v_2',\dots,v_m')$ base positiva di $T_{\varphi(0)}X$
Ma $dF_{\varphi(0)}|_{T_{\varphi(0)}\partial X} = df_{\varphi(0)}$, $f = F|_{\partial X}$
Poiché $v_1(0)$ è interno, $(v_2',\dots,v_m')$ base negativa di $T_{\varphi(0)}\partial X \Rightarrow \operatorname{sgn}(df_{\varphi(0)}) = -1$.
In $\varphi(1)$ si fa lo stesso ragionamento, solo che $v_1(1)$ è esterno, quindi $\operatorname{sgn}(df_{\varphi(1)}) = +1$. Sommando su tutti gli indici otteniamo
$$\deg(f,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(df_x) = 0$$
□

Lemma 2 M, N varietà orientate, $\dim M = \dim N$, M chiuso
$F: [0,1]\times M \longrightarrow N$ omotopia C^∞
$f(x) := F(x,0)$, $g(x) := F(x,1)$ $\forall x\in M$
$y\in N$ valore regolare comune a f e g,
allora $\deg(f;y) = \deg(g;y)$.

DIMOSTRAZIONE
La varietà $[0,1]\times M$ è un prodotto, e quindi acquisisce un'orientazione da quelle di $[0,1]$ e M.

Costruzione generale. V, V' spazi vettoriali con orientazioni $\mathcal{O}=[b], \mathcal{O}'=[b']$.
L'orientazione prodotto su $V \oplus V'$ è $\mathcal{O} \times \mathcal{O}' := [(b,b')]$, dove (b,b') è la giustapposizione delle due basi.
Questa è una buona definizione (ex.)
Se M, M' sono varietà con orientazioni $\mathcal{O}^M, \mathcal{O}^{M'}$, è facile verificare che, poiché $T_{(x,x')} M \times M' = T_x M \oplus T_{x'} M'$ $\forall (x,x') \in M \times M'$, su $M \times M'$ è definita un'orientazione prodotto $\mathcal{O}^M \times \mathcal{O}^{M'}$, tale che $(\mathcal{O}^M \times \mathcal{O}^{M'})_{(x,x')} = \mathcal{O}^M_x \times \mathcal{O}^{M'}_{x'}$ $\forall (x,x') \in M \times M'$.

Consideriamo quindi $[0,1] \times M$ con l'orientazione prodotto di quella canonica su $[0,1]$ con quella su M esistente per ipotesi.
Quindi se b è base positiva di $T_x M$, allora $(1,b)$ è base positiva di $T_{(t,x)} [0,1] \times M$ $\forall t \in [0,1]$. Inoltre $[0,1] \times M$ è varietà con bordo $\partial([0,1] \times M) = 0 \times M \cup 1 \times M$.
Determiniamo l'orientazione indotta sul bordo:
poiché $(1,0) \in T_{(0,x)}([0,1] \times M) = T_0 [0,1] \oplus T_x M$ è interno, mentre $(1,0) \in T_{(1,x)}([0,1] \times M) = T_1 [0,1] \oplus T_x M$ è esterno, il bordo orientato è $1 \times M \cup 0 \times (-M)$.
Per quanto visto, $\forall y' \in$ intorno(y), abbiamo $\deg(f;y') = \deg(f;y)$ e $\deg(g;y') = \deg(g;y)$.
Usando la densità dei valori regolari, posso supporre che y sia regolare anche per F.
Per il Lemma 1, si ha $\deg(F|_{\partial([0,1] \times M)}; y) = 0$
Poiché $F|_{0 \times M} = f$, $F|_{1 \times M} = g$, tenendo conto delle orientazioni, questo implica $\deg(F|_{\partial([0,1] \times M)}; y) = \deg(g;y) - \deg(f;y)$, quindi $\deg(f;y) = \deg(g;y)$. $\square$

Teorema M, N orientabili, $\dim M = \dim N$, M chiusa, N connessa. $f: M \longrightarrow N$ C^∞, $y, z \in N$ valori regolari per f.
Allora $\deg(f;y) = \deg(f;z)$

DIMOSTRAZIONE
Per il lemma di omogeneità, esiste un diffeo $h: N \longrightarrow N$, h isotopo a id_N, tale che $h(y) = z$.
Consideriamo la mappa $\varphi: [0,1] \longrightarrow \{\pm 1\}$, $t \longmapsto \varepsilon_t$, con $(dh_t)_y (\mathcal{O}^N_y) = \varepsilon_t \mathcal{O}^N_{h_t(y)}$, dove $\{h_t\}$ è l'isotopia.
Notiamo che: (1) $\varphi(1) = +1$,
(2) φ è localmente costante (si verifica usando par. locali e il solito argomento di continuità con il determinante jacobiano)
(1), (2) e $[0,1]$ connesso implicano

$$(dh_t)_y (\mathcal{O}^N_y) = \mathcal{O}^N_{h_t(y)} \quad \forall t \in [0,1]$$

In particolare: $dh_y(O^n_y) = O^n_z$. Quindi $\deg(f;y) = \deg(h\circ f; z)$
(Chiaramente y è valore regolare per $h\circ f$).
D'altra parte, z è regolare per f e $f, h\circ f$ sono C^∞-omotope
tramite l'omotopia $\{h_t \circ f\}$.
Quindi per il lemma 2 $\quad \deg(h\circ f; z) = \deg(f;z)$. $\square$

Def. Se $f: M \longrightarrow N$ C^∞, M compatta, N connessa, $\dim M = \dim N$
$y \in N$ valore regolare.
$\deg(f) := \deg(f;y) \in \mathbb{Z}$

<u>Oss</u> Se f è C^∞-omotopa a g, allora $\deg(f) = \deg(g)$
Infatti $C = \mathrm{Crit}(f) \subseteq M$ compatta è compatto, quindi $f(C)$ è compatto
e quindi chiuso $\Longrightarrow$ $\{$val. reg. di $f\} = N \setminus f(C)$ aperto
$\Longrightarrow \exists y \in N \setminus f(C)$ val. reg. per g, poi segue dal risultato precedente.

<u>esempio</u> (1) $C_{y_0}: M \longrightarrow N \quad C_{y_0}(x) = y_0$, $N \neq \{y_0\}$
$C_{y_0}^{-1}(y) = \emptyset$ se $y \neq y_0 \longrightarrow \deg(C_{y_0}) = 0$
(2) $M = S^n \Longrightarrow \deg(id_{S^n}) = +1$
Se $f: S^n \longrightarrow S^n$ è un diffeo di grado -1,
allora f non è C^∞-omotopa a una mappa costante né all'identità

<u>esempio</u> $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}$ è la 1-sfera
$f_k: S^1 \longrightarrow S^1 \quad k \in \mathbb{Z}$: f_k è la restrizione di $F_k: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^k$ C^∞
$z \longmapsto z^k$
Se $k = 0$, $f_0 = C_1 \Longrightarrow \deg(f_0) = 0$
Sia ora $k \neq 0$
Dimostriamo che 1 è valore regolare per f_k
$(df_k)_1: T_1S^1 \longrightarrow T_1S^1$
$T_1S^1 = (1,0)^\perp = \mathrm{Span}(i)$
$(df_k)_1(i) = (dF_k)_1(i) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} F_k(e^{i\theta}) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} e^{ik\theta} = ik$
$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ $\quad \gamma'(0) = i$

$\Longrightarrow (df_k)_1 = k\cdot \;: T_1S^1 \longrightarrow T_1S^1$
$f_k^{-1}(1) = \{\zeta \in S^1 \mid \zeta^k = 1\}$
$\zeta \in f_k^{-1}(1): \zeta = e^{i\theta}$
<u>Oss</u> $\zeta\cdot : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \longmapsto \zeta\cdot z$ $\quad C^\infty$, rotazione di angolo θ
diffeomorfismo, isotopo a id_{S^1}

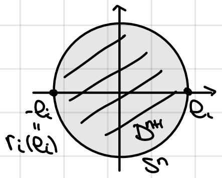
$$S^1 \xrightarrow{\zeta\cdot} S^1 \xrightarrow{f_k} S^1$$
$$z \longmapsto \zeta\cdot z \longmapsto (\zeta\cdot z)^k = \zeta^k\cdot z^k = z^k = f_k(z) \quad \Longrightarrow f_k \circ \zeta = f_k$$
$(df_k)_{\zeta=\zeta\cdot 1} \circ d\zeta_1 = d(f_k\circ\zeta)_1 = (df_k)_1 = k\cdot$
$\Longrightarrow \mathrm{sgn}(df_k)_\zeta = \mathrm{sgn}(k\cdot) \quad \forall \zeta \in f_k^{-1}(1)$
Infatti 1 è valore reg. per f_k
$\Longrightarrow \deg(f_k) = \deg(f_k; 1) = \sum_{\zeta \in f_k^{-1}(1)} \mathrm{sgn}(df_k)_\zeta = \mathrm{sgn}(k)\cdot|k| = k$

esempio $A : S^n \longrightarrow S^n$ mappa antipodale
$x \longmapsto -x$
$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (-x_1, \dots, -x_{n+1})$

$r_i : S^n \longrightarrow S^n$ $\quad$ i-esima riflessione, $r_i^2 = id_{S^n}$ diffeo
$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$

$A = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1} \implies \deg(A) = \deg(r_1) \cdot \dots \cdot \deg(r_{n+1})$

Dobbiamo calcolare $\operatorname{sgn}(dr_i)$ in un punto di S^n



$S^n = \partial D^{n+1}$

$T_{e_i} S^n = e_i^\perp = \operatorname{Span}\underbrace{(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})}_{\text{base}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$T_{-e_i} S^n = T_{e_i} S^n$

$r_i = \tilde{r}_i|_{S^n}$, $\tilde{r}_i : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$

$\mathcal{O}^{D^{n+1}}_{e_i} = \mathcal{O}_0$, $d\tilde{r}_i = \tilde{r}_i$, matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$ ha $\det = -1$

$\implies d\tilde{r}_i(\mathcal{O}_0) = -\mathcal{O}_0$

$dr_i = d\tilde{r}_i|_{T_{e_i}S^n = e_i^\perp}$

base di $T_{e_i} D^{n+1}$: $\underset{\text{vett. est}}{(e_i}, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}) \overset{dr_i}{\longmapsto} (\overset{\text{vett. est.}}{-e_i}, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$ base di $T_{-e_i} D^{n+1}$

Oss siccome $\deg(d\tilde{r}_i)_{e_i} = -1$, solo una di queste due basi è positiva rispetto a $\mathcal{O}^{D^{n+1}}$

$\implies$ solo una delle due basi di bordo è positiva rispetto a $\mathcal{O}^{S^n}$

$\implies \deg(r_i) = \operatorname{sgn}((dr_i)_{e_i}) = -1$

$\implies \deg(A) = (-1)^{n+1}$

$M \subseteq \mathbb{R}^k$ varietà

Un campo vettoriale tangente a M è una mappa C^∞:
$v : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ t.c. $v(x) \in T_x M \ \forall x \in M$

$M = S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $\quad v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ C^∞, $v(x) \cdot x = 0 \ \forall x \in S^n$

Esiste un campo vettoriale tangente su S^n con $v(x) \neq 0 \ \forall x \in S^1$?

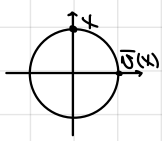
Se n è dispari, sì:
$v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1 = 2k}$
$(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \longmapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1}) \neq 0$

Se n è pari, $\deg(A) = -1$
$\implies A$ non è C^∞-omotopa a id_{S^n}

Per assurdo, sia $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ campo vettoriale mai nullo.

Posso definire $\bar{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} : S^n \longrightarrow S^n$ C^∞, $\bar{v}(x) \cdot x = 0$

Sia $x \in S^n$: $\quad S^n \cap \operatorname{Span}(x, \bar{v}(x))$



$F(x, \theta) := \cos(\pi\theta)x + \sin(\pi\theta)\bar{v}(x)$, $\theta \in [0,1]$
è omotopia C^∞ tra id_{S^n} e A

Indici di campi vettoriali

Def. Un campo vettoriale è una funzione $v : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞

esempio $U = \mathbb{R}^2$, $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (xy, x^2 - y^2)$

$z_0 \in U$ zero isolato di v
$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $z_0 \in B_\varepsilon(z_0)$ è l'unico zero di v in $B_\varepsilon(z_0)$.
$\bar{v}_\varepsilon : \partial B_\varepsilon(z_0) \longrightarrow S^{m-1}$ è C^∞
$x \longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$

Def. L'indice di v in z_0 è $i(v, z_0) = \deg(\bar{v}_\varepsilon ; z_0)$

Verifichiamo che se $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, con $\varepsilon' > \varepsilon$, t.c. $B_\varepsilon(z_0), B_{\varepsilon'}(z_0)$ hanno la proprietà richiesta, allora $\deg(\bar{v}_\varepsilon) = \deg(\bar{v}_{\varepsilon'})$

$\varepsilon_t = t\varepsilon + (1-t)\varepsilon'$

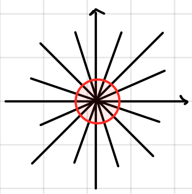
$S^{m-1} \xrightarrow[\cong]{\varphi_\varepsilon} \partial B_\varepsilon(z) \xrightarrow{\bar{v}_\varepsilon} S^{m-1}$
$x \longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$
$x \longmapsto z_0 + \varepsilon x$

φ_ε diffeo $\Longrightarrow$ conserva l'orientazione
$i(v, z_0) = \deg(\bar{v}_\varepsilon) = \deg(\bar{v}_\varepsilon \circ \varphi_\varepsilon)$
$\{\bar{v}_{\varepsilon_t} \circ \varphi_{\varepsilon_t}\}_{t \in [0,1]}$ è un'omotopia C^∞ da $\bar{v}_{\varepsilon'} \circ \varphi_{\varepsilon'}$ a $\bar{v}_\varepsilon \circ \varphi_\varepsilon$
$\Longrightarrow \deg(\bar{v}_\varepsilon) = \deg(\bar{v}_\varepsilon \circ \varphi_\varepsilon) = \deg(\bar{v}_{\varepsilon'} \circ \varphi_{\varepsilon'}) = \deg(\bar{v}_{\varepsilon'})$

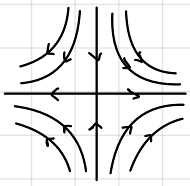
esempio $F_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ C^∞, $k \neq 0$.
$z \longmapsto z^k$

è un campo vettoriale con $0 \in \mathbb{C}$ come zero isolato

$k=1$



$k=-1$



$$i(F_k, 0) = \deg\Big(\underbrace{\frac{F_k(z)}{\|F_k(z)\|}\Big|_{\partial B_\varepsilon(0)}}_{= f_k}\Big) = \deg\big(F_k|_{\partial B_\varepsilon(0)} \circ \varphi_\varepsilon : S^1 \longrightarrow S^1\big) =$$
$$z \longmapsto 0 + \varepsilon z \longmapsto \frac{\varepsilon^k z^k}{\varepsilon^k |z|^k}$$
$$= \deg(f_k : S^1 \longrightarrow S^1) = k$$
$$z \longmapsto z^k$$

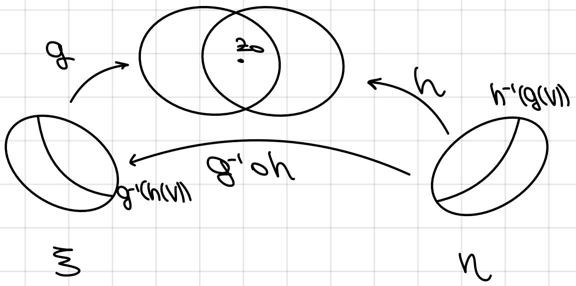
Campo tangente su $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $v(x) \in T_x M$
Sia $z_0 \in M$ uno zero isolato di v
$h : U \longrightarrow h(U) \subseteq M$ carta locale intorno a z_0
$u \in U$, $dh_u : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} T_{h(u)} M \ni v(h(u))$

$\xi(u) = dh_u^{-1}(v(h(u)))$ cioè $\xi := dh^{-1} \circ v \circ h$

Def. L'indice di v in z_0 è $i(v,z_0) := i(\xi, u_0)$, dove $h: U \longrightarrow h(U)$ carta locale intorno a z_0 con $h(u_0) = z_0$.

<u>FATTO</u> $i(v, z_0)$ non dipende da h

$w: M \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $M \subseteq \mathbb{R}^k$, $z_0 \in M$ zero isolato di w
$g: U \longrightarrow g(U) \subseteq M$, $g(u_0) = z_0$ par. locale
$i(w, z_0) = i(\xi, u_0)$ dove $dg(\xi(u)) = w(g(u))$



$dh_v(\eta(v)) = w(h(v))$

ξ, η si corrispondono tramite $g^{-1}\circ h$
(dalle proprietà del differenziale)

La buona definizione di $i(w, z_0)$ segue da $i(\xi, u_0) = i(\eta, v_0)$, assumendo che $\underset{\varphi(v_0)=u_0}{\varphi: V \xrightarrow{\sim} U}$, $d\varphi_v(\eta(v)) = \xi(\varphi(v))$

1° passo: tramite traslazioni, si può supporre che $u_0 = v_0 = \underline{0}$
2° passo: φ è omotopo a $d\varphi_{\underline{0}}$
3° passo: si conclude che $i(\xi, u_0) = i(\eta, v_0)$

Per il 2° passo: $F(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(xt)}{t} & t>0 \\ d\varphi_0(x) & t=0 \end{cases}$ omotopia

si scrive, intorno a $\underline{0}$, φ così:

$\varphi(x) = x_1 g_1(x) + x_2 g_2(x) + \dots + x_m g_m(x)$ con g_i C^∞, $g_i(\underline{0}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\underline{0})$

$\Longrightarrow \frac{\varphi(tx)}{t} = x_1 g_1(tx) + \dots + x_m g_m(tx) \xrightarrow[t\to 0]{} x_1 g_1(\underline{0}) + \dots + x_m g_m(\underline{0}) = d\varphi_{\underline{0}}(x)$

La formula segue da:

$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_m) - \varphi(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) + \varphi(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) - \varphi(x_1, \dots, x_{m-2}, 0, 0) + \varphi(x_1, \dots, x_{m-2}, 0, 0) \dots$

cioè $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_1, \dots, tx_i, 0, \dots, 0)\Big|_{t=0}^{t=1} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, tx_i, 0, \dots, 0)\,dt}_{g_i(x)} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot g_i(x)$

con $g_i(\underline{0}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\underline{0})$

Def. Un **m-simplesso** $\Delta^{(m)}$ in $\mathbb{R}^k$ $(k \geq m)$ è l'inviluppo convesso di $m+1$ punti $P_0, \ldots, P_m$ affinemente indipendenti:

$$\Delta^{(m)} = \left\{ \sum_{i=0}^{m} t_i P_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

Una **faccia** di un m-simplesso $\Delta^{(m)}$ è il simplesso ottenuto come inviluppo convesso dei punti di qualche sottoinsieme di $\{P_0, \ldots, P_m\}$.

Un **complesso simpliciale** $C \subseteq \mathbb{R}^k$ è unione di simplessi che, a due a due, si intersecano nell'insieme vuoto o in una faccia.

C complesso finito

$S_i(C) = \#$ i-simplessi di C

$\chi(C) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i S_i(C)$

FATTO se $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è una varietà compatta (anche con bordo), allora $M \simeq C$ complesso simpliciale

omotopicamente equivalente

Def. Se $M \simeq C$ complesso simpliciale finito. La **caratteristica di Eulero** di M è $\chi(M) := \chi(C)$

Teorema di Poincaré-Hopf	
	$M \subseteq \mathbb{R}^k$ varietà compatta con bordo (anche $\partial M = \emptyset$). $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ campo vettoriale t.c. $v(x)$ esterno $\forall x \in \partial M$ e v ha un numero finito di zeri. Allora $\chi(M) = \sum_{z \in v^{-1}(0)} i(v, z)$

Def. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ campo vettoriale

z_0 zero di v si dice **non degenere** se dv_{z_0} è non singolare

Oss z_0 è necessariamente isolato.

FATTO $v : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ campo vettoriale, $z_0 \in U$ zero isolato
Allora $i(v, z_0) = \begin{cases} +1 & \text{se } \det(dv_{z_0}) > 0 \\ -1 & \text{se } \det(dv_{z_0}) < 0 \end{cases}$

Lemma $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ campo vettoriale, $M \subseteq \mathbb{R}^k$ m-varietà, $v(z_0) = \underline{0}$, $z_0 \in M$
Allora $dv_{z_0}(T_{z_0}M) \subseteq T_{z_0}M$.
Inoltre $i(v, z_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } \det(dv_{z_0}) > 0 \\ -1 & \text{se } \det(dv_{z_0}) < 0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE
Sia $h : U \longrightarrow h(U)$ param. locale intorno a $z_0 = h(u_0) \in M$
$T_{u_0}U = \mathbb{R}^m$ $\{e_j\}$ base canonica, $t_j = dh_{u_0}(e_j)$
$T_{z_0}M = \mathrm{Span}(t_1, \_, t_m)$
$dv_{z_0}(t_j) \overset{?}{\in} T_{z_0}M$
$\xi = dh^{-1} \circ v \circ h$: $dh_u \xi(u) = v(h(u))$ $\forall u \in U$, $\xi(u_0) = \underline{0}$
$\xi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\xi(u) = \sum_{j=1}^m a_j(u) e_j$
$dv_{z_0}(\underbrace{dh_{u_0}(e_i)}_{t_i}) = (dv_{z_0} \circ dh_{u_0})(e_i) = d(v \circ h)_{u_0}(e_i) = d(dh \circ \xi)_{u_0}(e_i) =$
$= d\left(\sum_{j=1}^m a_j(u)\, dh_u(e_j)\right)_{u_0}(e_i) = \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{u=u_0}\left(\sum_{j=1}^m a_j(u)\, dh_u(e_j)\right) \underset{a_j(u_0)=0}{=} \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_j}{\partial u_i}(u_0) \underbrace{dh_{u_0}(e_j)}_{t_j} \in T_{z_0}M$

$\Longrightarrow \left(\frac{\partial a_j}{\partial u_i}(u_0)\right)$ è la matrice di $dv_{z_0} : T_{z_0}M \longrightarrow T_{z_0}M$
$\Longrightarrow \det(dv_{z_0}) = \det\left(\frac{\partial a_j}{\partial u_i}(u_0)\right) = \det(d\xi_{u_0})$
da cui si conclude per il fatto sopra $\square$

esempio Calcolo di $\chi(S^m)$ tramite Poincaré-Hopf

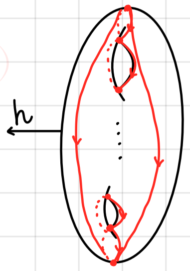
$S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, $p \in S^m$ fissato.
Poniamo $v : S^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, $x \longmapsto p - (p \cdot x)x$ campo vettoriale

- v è un campo tangente: $\forall x \in S^m$ $v(x) \cdot x = p \cdot x - (p \cdot x) \underset{}{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{x \cdot x}}} = 0$
- $v(x) = 0 \iff p = (p \cdot x)x \Longrightarrow 1 = p \cdot p = (p\, x)^2 \Longrightarrow p\, x = \pm 1 \Longrightarrow x = \pm p$

$\{\text{zeri di } v\} = \{p, -p\}$
$$dv_{\pm p}(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{v(\pm p + t\xi) - \overset{=0}{v(\pm p)}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{p - (p \cdot (\pm p + \cancel{t\xi}))(\pm p + t\xi)}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{p \mp (\pm p + t\xi)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\mp t\xi}{t} = \mp \xi$$

$\Longrightarrow dv_p = -\mathrm{id}_{T_pS^m}$, $dv_{-p} = \mathrm{id}_{T_{-p}S^m}$
$i(v, p) = \det(-\mathrm{id}_{T_pS^m}) = (-1)^m$
$i(v, -p) = \det(\mathrm{id}_{T_{-p}S^m}) = 1$
$\chi(S^m) = i(v, p) + i(v, -p) = 1 + (-1)^m = \begin{cases} 2 & \text{se } m \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$

Oss (1) Sapevamo che su S^m, m dispari, esistono campi vettoriali mai nulli
Quindi il Teo. di Poincaré-Hopf diceva già che $\chi(S^m) = 0$
(2) Il Teo. di Poincaré-Hopf e $\chi(S^{2k}) = 2$ implica che non esistono campi tangenti mai nulli.

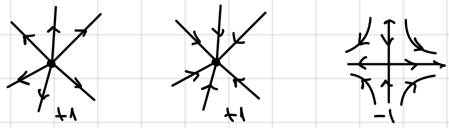


$= \Sigma_g \qquad \chi(\Sigma_g) = 2-2g$

$$\chi(\Sigma_g) = \sum_{p \in v^{-1}(0)} i(v,p)$$

$h : \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{R}$

∇h_x = "duale" di dh_x : $\langle \nabla h_x, \xi \rangle := dh_x(\xi)$, $\xi \in T_x \Sigma_g$



Lemma di Hopf $U \subseteq \mathbb{R}^m$ varietà con bordo compatta, $w : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ campo vettoriale con $w|_{\partial U} \neq 0$ e con zeri isolati.
Allora $\displaystyle\sum_{z \in w^{-1}(0)} i(w, z_0) = \deg\left(\frac{w}{\|w\|} : \partial U \longrightarrow S^{m-1}\right)$

DIMOSTRAZIONE

$W := U \setminus \overline{\bigcup \text{palle disgiunte intorno agli zeri di } w}$ varietà con bordo

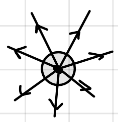
$\overline{w} : W \longrightarrow S^{m-1}$

$\quad x \longmapsto \frac{w(x)}{\|w(x)\|}$

Sappiamo che $\deg(\overline{w}|_{\partial W}) = 0$

ma $\deg(\overline{w}|_{\partial W}) = \deg(\overline{w}|_{\partial U}) + \sum_{z_i \in w^{-1}(0)} \underbrace{\deg(\overline{w}|_{\partial B_{\varepsilon_i}(z_i)})}_{-i(w, z_i)}$ $\square$

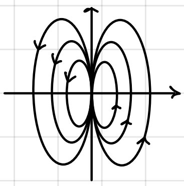
esempio



$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto z$

$i(w, \underline{0}) = +1 \overset{PH}{=} \chi(D^2)$
$\quad \|$
$\deg\left(\frac{w}{\|w\|}\Big|_{\partial D^2}\right)$

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto z^2$



Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, allora
$$\deg(p) = \sum_{z \in p^{-1}(0)} \operatorname{molt}(p, z_0)$$

DIMOSTRAZIONE

$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto p(z)$ campo vettoriale con radici di p = zeri del campo

L'enunciato seguirà dai fatti seguenti:

(1) $\forall z_0 \in p^{-1}(0) \quad \operatorname{molt}(p, z_0) = i(p, z_0)$

(2) $\deg\left(\frac{p(z)}{\|p(z)\|}\Big|_{\partial B_r(0)} : \partial B_r(0) \longrightarrow S^1 \right) = \deg(p)$

(1) $z_0 \in p^{-1}(0)$: $p(z) = (z - z_0)^\ell q(z)$ con $q(z_0) \neq 0$, $\ell = \operatorname{molt}(p, z_0)$

$i(p, z_0) = \deg\left(\frac{p(z)}{\|p(z)\|}\Big|_{\partial B_\varepsilon(z_0)} : \partial B_\varepsilon(0) \longrightarrow S^1 \right)$

$g : S^1 \longrightarrow \partial B_\varepsilon(z_0) \xrightarrow[p(z)/|p(z)|]{} S^1 \quad \Longrightarrow \deg(\bar{p}) = \deg(\bar{p} \circ g)$

$z \longmapsto z_0 + \varepsilon z$ $\qquad$ g diffeo che conserva l'orientazione

$h(z) = \bar{p}(g(z)) = \bar{p}(z_0 + \varepsilon z) = \frac{(\varepsilon z)^\ell q(z_0 + \varepsilon z)}{\varepsilon^\ell |z|^\ell |q(z_0 + \varepsilon z)|}$

$h_t(z) = \frac{z^\ell q(z_0 + t\varepsilon z)}{|q(z_0 + t\varepsilon z)|}$ omotopia da h_0 a $h_1 = h$, con $h_0(z) = e^{i\theta_0} z^\ell$, $e^{i\theta_0} := \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|}$

$\deg(h) = \deg(h_0)$

$S^1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$

$z \longmapsto z^\ell$

$z \longmapsto z e^{i\theta}$ $\qquad$ diffeo iso a id_{S^1}

$\Longrightarrow \deg(\bar{p}) = \deg(z \longmapsto z^\ell)$

(2) $\deg\left(\frac{p}{\|p\|}\Big|_{\partial B_r(0)} \right) \underset{\text{lemma di Hopf}}{=} \sum_{z \in p^{-1}(0)} i(p, z) = \sum_{z \in p^{-1}(0)} \operatorname{molt}(p, z)$

$\frac{p}{\|p\|}\Big|_{\partial B_r(0)} \neq 0$

$p(z) = a_n z^n + \underbrace{\ldots + a_1 z + a_0}_{g(z) := p(z) - a_n z^n}$, $a_n \neq 0$, cioè $n = \deg p$

$p_t(z) := a_n z^n + (1-t) g(z) \qquad t \in [0,1]$

$\frac{p_t(z)}{z^n} = a_n + (1-t)\frac{g(z)}{z^n} \qquad \left| \frac{g(z)}{z^n} \right| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} 0$

$\left| \frac{p_t(z)}{z^n}\Big|_{\partial B_r(0)} \right| \geq \underset{\vee \atop 0}{|a_n|} - \left| \frac{(1-t) g(z)}{z^n} \right| > 0$ per $r >> 0$

$\frac{p_t(z)}{|p_t(z)|}\Big|_{\partial B_r(0)}$ $\qquad$ omotopia da $\frac{p(z)}{|p(z)|}$ a $\frac{p_0(z)}{|p_0(z)|}$

Basta: $n = \deg\left(z \longmapsto \frac{p_0(z)}{|p_0(z)|} \right)$

$\frac{p_0(z)}{|p_0(z)|} = \underset{\| \atop e^{i\theta}}{\frac{a_n}{|a_n|}} \frac{z^n}{|z^n|} \Longrightarrow \deg\left(\frac{p_0}{|p_0|}\Big|_{\partial B_r(0)} \right) = \deg\left(\frac{z^n}{|z^n|}\Big|_{\partial B_r(0)} \right) = i(z^n, 0) = n$