Università di Pisa - Dipartimento di Matematica

Definizioni e Teoremi di Analisi Matematica 2

MATTIA SALVADORI

m.salvadori23@studenti.unipi.it

Rielaborazione delle lezioni del professor
M. Novaga

a.a. 2020/2021

Indice

Prefazione

Questo che stai leggendo è il primo elaborato che io abbia mai scritto e sistemato con tanto di pagina iniziale del titolo, di indice e persino di (qui presente) prefazione, perciò ci tengo molto a specificare che sono ancora alle prime armi ma, allo stesso tempo, spero ti piaccia ciò che si trova davanti a te in questo momento. Ritengo di avere ancora molto da imparare e da migliorare: non mi trovo pienamente convinto né dell'organizzazione dei contenuti né dello stile generale di questo documento, ma è comunque un inizio.
Non è granché come elaborato: non ho fatto altro che trascrivere le lezioni del professore con qualche piccola sistemazione in qua e in là, perciò spero tu non abbia aspettative troppo alte.

Sappi che, *chi mi conosce un po' può confermare*, sono un maniaco della precisione, perciò se nelle prossime pagine (o in qualunque altra) trovi una qualsiasi (anche minuscola) imprecisione (orrori di ortografia, punteggiatura mancante e/o errata, simboli sbagliati, errori concettuali e/o matematici, ecc...) ti prego vivamente di comunicarmela cosicché io possa correggerla e soddisfare la mia sete di perfezione.

ANZI

Ti sfido a trovare anche un singolo minuscolo insignificante errore in queste pagine e comunicarmelo: vincerai una caramella o un cioccolatino, scegli tu.
(Spero di averti convinto a partecipare alla **missione di massima precisione**)

Sono ovviamente ben accetti suggerimenti di natura estetico-stilistica e/o di qualsiasi altro tipo per migliorare in ogni modo possibile questo documento e di conseguenza anche quelli a venire.
Detto tutto ciò,

Buona lettura!

Mattia

1 Spazi metrici

(X, d) è uno **Spazio metrico** se X è un insieme e $d : X \times X \to [0, +\infty)$ è una distanza, cioè:

- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$;
- $d(x, y) = d(y, x) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$;
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Esempi:

$\Big(\mathbf{R}^n, |\cdot|\Big)$ dove $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$: "Norma 2" o "Norma euclidea";
$\Big(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_p\Big)$ dove $||x||_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ con $p \geq 1$: "Norma p";
$\Big(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty\Big)$ dove $||x||_\infty = \lim\limits_{p \to +\infty} ||x||_p = \max\limits_i |x_i|$: "Norma infinito".
<u>OSS</u>: Sia (X, d) uno spazio metrico, se $Y \subseteq X \Longrightarrow (Y, d)$ è uno spazio metrico.

2 Aperti, Chiusi e Compatti

Dato lo spazio metrico (X, d), $E \subseteq X$ si dice:

- **Aperto** se $\forall x \in E \; \exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq E$ (dove $B_r(x) = \{y : d(x, y) < r\}$ è una "palla") cioè E è *intorno* di x;
- **Chiuso** se $X \setminus E$ è aperto.

<u>Prop</u>: E chiuso $\Longleftrightarrow$ data $x_n \to x$ con $x_n \in E$ e $x \in X$ si ha $x \in E$.

- **Compatto** (per successioni) se $\forall x_n \in E$ successione $\exists x_{n_k}$ sottosucc. tale che $x_{n_k} \to x \in E$, cioè $\lim\limits_k d(x_{n_k}, x) = 0$.

<u>Prop</u>: in generale E *compatto* $\Longrightarrow$ E *chiuso* e *limitato*.
In $\mathbf{R}^n$ vale anche E *chiuso* e *limitato* $\Longrightarrow$ E *compatto* (segue da Bolzano-Weierstrass) ma in generale può $\exists E \subseteq X$ *chiuso* e *limitato* e NON *compatto*.
<u>Def</u>: $E \subseteq X$ è **Compatto** se $\forall \{V_i\}_{i \in I}$ *ricoprimento* di E, cioè $E \subseteq \bigcup\limits_i V_i$ con V_i aperti, $\exists$ un *sottoricoprimento* finito, cioè $\exists V_1, ..., V_n \in \{V_i\}_{i \in I}$ tale che $E \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$.

3 Completezza

<u>Def</u>: $x_n \in X$ è di Cauchy se $\forall \varepsilon \; \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon \; \forall n, m > n_\varepsilon$.
<u>OSS</u>: se $x_n \to x \Longrightarrow x_n$ è di Cauchy.
<u>Def</u>: X è **Completo** se x_n è di Cauchy $\Rightarrow x_n$ è convergente.
<u>OSS</u>: $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$ sono completi mentre $\mathbf{Q}$ non è completo;
Sia X uno spazio metrico completo, se $E \subseteq X \Longrightarrow E$ è uno spazio metrico completo.

4 Lemma delle contrazioni (Banach-Caccioppoli)

Siano X, Y spazi metrici, $f : X \to Y$ L-lip con $L \in (0, +\infty)$, se $d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq L \cdot d_X(x, y)$ $\forall x, y \in X$, $f : X \to X$ si dice **Contrazione** se f è L-lip con $L < 1$.
<u>Teorema</u>: siano X spazio metrico completo e f contrazione $\Longrightarrow \exists! \, \overline{x} \in X$ tale che $\boxed{f(\overline{x}) = \overline{x}}$ inoltre

$$\forall x_0 \in X \text{ la successione } \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \end{cases} \quad \text{converge a } \overline{x}.$$

Dimostrazione:

Unicità: $\overline{x}$ è unica infatti se $\exists \overline{y}$ tale che $f(\overline{y}) = \overline{y} \Longrightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) = d\big(f(\overline{x}), f(\overline{y})\big) \leq L \cdot d(\overline{x}, \overline{y}) \Longrightarrow \overline{x} = \overline{y}$;

Esistenza: sia x_n la successione per ricorrenza, vediamo che è di Cauchy: in tal caso $\exists \overline{x} = \lim_n x_n$ e passando al limite in $x_{n+1} = f(x_n)$ si ottiene $\overline{x} = f(\overline{x})$. Vediamo che è di Cauchy: siano $m > n > 0$ tali che $d(x_n, x_m) \leq L \cdot d(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq ... \leq L^n d(x_0, x_{m-n})$. Si ha

$$d(x_0, x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1} \leq \sum_{i=0}^{k-1} L^i d(x_0, x_1) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-L}$$

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{L^n d(x_0, x_1)}{1-L} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Longrightarrow x_n \text{ è di Cauchy.} \qquad \square$$

OSS: una funzione lipschitziana, in particolare una contrazione, è sempre continua.

5 Spazi normati e spazi di Banach

Sia X uno spazio vettoriale (su $\mathbf{R}$), $||\cdot|| : X \to [0, +\infty)$ è una **Norma** se:

- $||x|| \geq 0 \; \forall x \in X$ e $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
- $||-x|| = ||x|| \; \forall x \in X$;
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Disuguaglianza triangolare).

$(X, ||\cdot||)$ si dice **Normato** ed è uno spazio metrico ponendo $d(x, y) = ||x - y||$.
OSS: la disuguaglianza triangolare equivale alla convessità della funzione norma $\big(||\cdot||\big)$.
Lo spazio *normato* $(X, ||\cdot||)$ si dice **Spazio di Banach** se è *completo*.

Esempi:

$\Big(C\big([a, b]\big), ||\cdot||_\infty\Big)$ è Banach.
$\Big(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_p\Big)$ è Banach, dove:

$$||x||_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \geq 1 \\ \max\limits_i |x_i| & p = +\infty \end{cases}$$

Vediamo adesso che $||\cdot||_p$ è una norma equivalente a quella euclidea $\big(|\cdot|\big)$:
Def: siano X uno spazio vettoriale e $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ due norme su X, $|\cdot|_1$ è **equivalente** a $|\cdot|_2$ se $\exists c \in \mathbf{R}$ tale che $|x|_1 \leq c \cdot |x|_2$ e $|x|_2 \leq c \cdot |x|_1$.
Dimostrazione:

1 $||\cdot||_p$ è una *Norma*: va verificata la disuguaglianza triangolare. Usiamo il seguente

5.1 Lemma (disuguaglianza di Hölder)

Siano $x, y \in \mathbf{R}^n$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ cioè $p' = \frac{p}{p-1} \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq ||x||_p \cdot ||y||_{p'}$

Dimostrazione (Lemma): se applichiamo la disuguaglianza di Young $\left(ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right)$ otteniamo

$$\frac{|x_i|}{||x||_p} \cdot \frac{|y_i|}{||y||_{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|y_i|^{p'}}{||y||_{p'}^{p'}} \Longrightarrow \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{||x||_p ||y||_{p'}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad \square$$

Dimostrazione (continuo):

1. vedo che

$$||x+y||_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|y_i|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \big(||x||_p+||y||_p\big) = ||x+y||_p^{p-1}\big(||x||_p+||y||_p\big) \Longrightarrow ||x+y||_p \le ||x||_p+||y||_p$$

2. Più in generale vediamo che tutte le norme su $\mathbf{R}^n$ sono equivalenti:
sia $||\cdot||$ una norma su $\mathbf{R}^n$ e sia $|\cdot|$ la norma euclidea, si ha

$$||x|| = \left|\left|\frac{x}{|x|}|x|\right|\right| = \left|\left|\frac{x}{|x|}\right|\right||x| \quad \forall x \neq 0 \text{ e si ha } \frac{x}{|x|} \in S^{n-1} = \{y \in \mathbf{R}^n : |y| = 1\}$$

Per Weierstrass si ha

$$\Big(\min_{S^{n-1}} ||\cdot||\Big)|x| \le ||x|| \le \Big(\max_{S^{n-1}} ||\cdot||\Big)|x|$$

Perciò $\exists c \in \mathbf{R}$ tale che $\frac{1}{c}|x| \le ||x|| \le c|x|\ \forall x$ □

OSS: non è vero su uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ad esempio:

$$X = C\big([0,1]\big) \qquad ||f||_1 = \int_0^1 |f|dx \qquad ||f||_\infty = \max_{[a,b]} |f|$$

Sono norme *non* equivalenti, infatti $||f||_1 \le ||f||_\infty$ ma $\nexists c \in \mathbf{R}$ tale che $||f||_\infty \le c||f||_1\ \forall f$.
Def: due spazi di Banach $(X, |\cdot|_X)$ e $(Y, |\cdot|_Y)$ sono **Isomorfi** se $\exists f : X \to Y$ lineare e bigettiva ed $\exists c \in \mathbf{R}$ tali che

$$|f(x)|_Y \le c|x|_X \text{ e } |f^{-1}(y)|_X \le c|y|_Y \quad \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y$$

6 Funzioni continue

Siano X, Y spazi metrici, $f : X \to Y$ è **continua** in $x_0 \in X$ se

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0) \quad \forall x_n \underset{n}{\to} x_0 \text{ ovvero se } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tali che } f\big(B_\delta(x_0)\big) \subseteq B_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$$

7 Teorema di Weierstrass

Siano X uno spazio metrico compatto e $f : X \to \mathbf{R}$ continua allora $\exists \max_X f$ e $\exists \min_X f$.

8 Teorema di Heine-Cantor

Sia X uno spazio metrico compatto allora $f : X \to \mathbf{R}$ è **uniformemente continua**, cioè

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tali che } d_X(x,y) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

9 Lemma di Baire

Sia X uno spazio metrico completo:

1. sia $C_n \subseteq X$ una successione di chiusi a parte interna vuota $\big(\mathring{C}_n = \emptyset\big) \Longrightarrow \bigcup_n C_n$ ha parte interna vuota, in particolare $\bigcup_n C_n \neq X$;

2. siano $U_n \subseteq X$ aperti densi, cioè $\overline{U}_n = X, \Longrightarrow \bigcap_n U_n$ è densa.

Vale ① $\iff$ ② passando al complementare.
Dimostrazione: vediamo ② e mostriamo intanto che $\bigcap_n U_n \neq \emptyset$:

$$\exists x_1 \in U_1 \Longrightarrow \exists r_1 \text{ tale che } B_{r_1}(x_1) \subseteq U_1$$

$$\exists x_2 \in B_{r_1}(x_1) \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2 \Longrightarrow \exists r_2 \text{ tale che } B_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1}(x_1) \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2$$

$$\vdots$$

$$\exists r_k, x_k \text{ tale che } B_{r_k}(x_k) \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} U_j$$

Posso supporre $r_k \leq \frac{1}{2^k} \Longrightarrow \forall k < n < m \ x_n, x_m \in B_{r_k}(x_k) \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k} \Longrightarrow x_k$ è di Cauchy $\Longrightarrow x_k \longrightarrow \overline{x} \in \bigcap_n U_n \Longrightarrow \bigcap_n U_n \neq \emptyset$.
Supponiamo adesso che $\bigcap_n U_n$ non sia densa, cioè $\overline{\bigcap_n U_n} \subsetneqq X \Longrightarrow \exists B_\rho(x) \subseteq X \setminus \overline{\bigcap_n U_n}$.
Se guardassi lo spazio metrico completo $X' = X \cap \overline{B_\rho(x)}$ e $U'_n = U_n \cap B_\rho(x)$ aperti densi in X', avrei $\bigcap_n U'_n = \big(\bigcap_n U_n\big) \cap B_\rho(x) = \emptyset$ ` per quanto già detto. $\square$
Cor$_1$: $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \in F_\sigma$, cioè $\nexists C_n$ successione di chiusi di $\mathbf{R}$ tale che $\bigcup_n C_n = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
Se esistesse avremmo $\mathring{C}_n = \emptyset \ \forall n$ e $\mathbf{R} = \left(\bigcup_n C_n\right) \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \{q\}\right)$ che contraddice il Lemma di Baire.
Cor$_2$: X spazio vettoriale di dimensione numerabile cioè $\exists \{v_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ base di X e $||\cdot||$ norma su $X \Longrightarrow (X, ||\cdot||)$ non è completo. Infatti $X_n = \langle v_1, ..., v_n \rangle < X$ è un chiuso con $\mathring{X}_n = \emptyset$ e $\bigcup_n X_n = X$.
Se X fosse completo avrei una contraddizione col Lemma di Baire.

Esempio:

$\Big(C\big([a,b]\big), ||\cdot||_\infty\Big)$ è uno spazio di Banach ma $C\big([a,b]\big)$ come spazio vettoriale ha dimensione più che numerabile.
OSS: $f_n, f \in C\big([a,b]\big)$, $f_n \longrightarrow f \iff ||f_n - f||_\infty = \max_{x \in [a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \longrightarrow 0$ si dice che f_n **Converge uniformemente** a f, cioè $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ tale che $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon \ \forall n > n_\varepsilon$ e $\forall x \in [a,b]$
$f_n \longrightarrow f$ uniformemente $\Longrightarrow$ (non vale $\Longleftarrow$) $f_n(x) \longrightarrow f(x) \ \forall x$ (**Convergenza puntuale**).

10 Funzioni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

10.1 Funzioni continue

f è **Continua** in $x_0 \iff \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0) \ \forall x_n \to x_0$.
OSS: se f è continua e $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ è una curva (continua) $\Longrightarrow f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbf{R}$ è continua.
In particolare, è continua la restrizione di f a tutte le rette $g(t) = f(x_0 + vt)$ con $t \in \mathbf{R}$ e $v \neq 0$.
OSS: $\exists f$ non continua in x_0 ma tale che $g(t) = f(x_0 + vt)$ è continua in $t = 0 \ \forall v \neq 0$, ad esempio:

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & y \neq x^2 \\ 0 & y = x = 0 \\ 1 & y = x^2 \neq 0 \end{cases}$$

Prop: f è continua in $x_0 \iff f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbf{R}$ è continua in $t = 0 \ \forall \gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ curva tale che $\gamma(0) = x_0$.

Esempio

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ sia continua la funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0$$
Vediamo la restrizione a $\gamma(t) = (t, 0)$
$$f \circ \gamma(t) = \frac{t \cdot 0}{(t^2+0^2)^\alpha} = 0 \text{ è continua e } \lim_{t\to 0} f\circ\gamma(t) = 0$$
Con $\gamma(t,t)$ si ha
$$f \circ \gamma(t) = \frac{t^2}{2^\alpha t^{2\alpha}} = 2^{-\alpha} t^{2-2\alpha} \implies \lim_{t\to 0} f\circ\gamma(t) = 0 \iff 2-2\alpha > 0 \iff \boxed{\alpha < 1}$$
Quindi f è continua $\iff \alpha < 1$.

11 Calcolo differenziale

11.1 Derivata parziale

Sia $f : A \to \mathbf{R}$, con $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, $i \in \{1, ..., n\}$, se
$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t} = \begin{cases} f_{x_i}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \end{cases}$$
si dice **Derivata parziale** i-esima di f in x_0.

11.2 Gradiente

Se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\ \forall i$, il vettore $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) \in \mathbf{R}^n$ si dice **Gradiente** di f in x_0.

11.3 Derivata direzionale

$v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ se
$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+vt) - f(x_0)}{t} = \begin{cases} D_v f(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \end{cases}$$
si dice **Derivata** di f in **direzione** v.

11.4 Principio di Fermat

$x_0 \in A$ è un punto di massimo/minimo locale per $f \implies \nabla f(x_0) = 0$ $\big($se $\exists \nabla f(x_0)\big)$
<u>Dimostrazione</u>: definisco $g_i(t) = f(x_0 + te_i) \implies g_i(t)$ ha un massimo/minimo locale in $t = 0$
$$\implies g_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$$
□

<u>OSS</u>: con la stessa <u>Dim</u>. si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$ $\big[$definendo $g_v(t) = f(x_0+vt)\big]$.

11.5 Differenziabilità

f è **Differenziabile** in $x_0 \in A$ se $\exists v \in \mathbf{R}^n$ tale che
$$f(x) = f(x_0) + v(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big)$$
in tal caso v si dice **Differenziale** di f in x_0.
<u>OSS</u>: se f è differenziabile in $x_0 \implies \exists \nabla f(x_0) = v$
Infatti, prendendo $x = x_0 + te_i$, si ha $f(x_o + te_i) = f(x_0) + tv_i + o(t) \implies v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$
<u>OSS</u>: f differenziabile in $x_0 \implies f$ continua in x_0:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x_0) + v(x-x_0) + o\big(|x-x_0|\big) = f(x_0)$$

OSS: l'esistenza di $\nabla f(x_0)$ non garantisce la continuità di f e quindi neppure la differenziabilità, ad esempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ si ha } \nabla f(0,0) = (0,0) \text{ ma } f \text{ non è continua.}$$

Morale: non è sempre facile capire se f è differenziabile in x_0 ma, se lo è, allora il differenziale è uguale al gradiente e quindi "facile" da calcolare.
OSS: esistono funzioni con $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = 0 \ \forall v$ ma non continue in 0.

12 Teorema del differenziale totale

Sia $f : A \to \mathbf{R}$, con $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, e supponiamo $\exists \nabla f(x) \in B_r(x_0)$ continuo in x_0, cioè $\forall i \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \implies f$ è differenziabile in x_0.
Dimostrazione: dobbiamo vedere che $f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0) = o\big(|x - x_0|\big)$ cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Facciamo la Dim. in $\mathbf{R}^2$ con $x_0 \to (x_0, y_0)$ e $x \to (x, y)$ e scriviamo

$$f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\partial f(\xi,y)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,\eta)}{\partial y}(y - y_0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y - y_0)\right|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \overset{\star}{\leq}$$

$$\left(\overset{\star}{\leq} \text{ vale perché } \frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \leq 1 \text{ e } \frac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \leq 1\right)$$

$$\overset{\star}{\leq} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right| = 0$$

Per la continuità di ∇f in x_0. □

13 Funzioni differenziabili

Sia $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big)$, f è **Differenziabile** $\implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0)v \quad \forall v}$.
Non è vero se f non è differenziabile.
In particolare, $\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ realizza il massimo di $\frac{\partial f}{\partial v}$ tra i vettori $|v| = 1$, cioè $\nabla f(x_0)$ individua la *Direzione di massima pendenza* di f.
Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, f è **Differenziabile** in x_0 se $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big)$ dove $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ è lineare, cioè matrice $n \times m$, $L = Df(x_0)$, $f = (f_1, ..., f_n)$, $Df(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ e

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix} \text{ Matrice Jacobiana}$$

Si ha quindi $\boxed{f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big)}$.
OSS: f differenziabile $\iff$ le f_i sono differenziabili $\forall i$. Lo stesso vale in spazi di Banach.
Sia $f : A \subseteq B_1 \to B_2$, con B_1, B_2 spazi di Banach:
f è **Frechét-differenziabile** in $x_0 \in A$ se

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o\big(|x - x_0|\big)$$

con $L : B_1 \to B_2$ lineare e continua (tra spazi di Banach esistono funzioni lineari non continue), $L = Df(x_0)$ differenziale di f in x_0.
f è **Gâteaux-differenziabile** se $\exists L$ lineare e continua tale che

$$f(x_0 + vt) = f(x_0) + Lf(vt) + o(t)$$

f **Frechét-differenziabile** $\Longrightarrow f$ **Gâteaux-differenziabile**, ma non vale il viceversa.

14 Funzioni composte

Siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ e $g : B \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$, $f(A) \subseteq B$, $g \circ f : A \to \mathbf{R}^k$.
Se f è differenziabile in x_0 e g è differenziabile in $f(x_0) \Longrightarrow g \circ f$ è **Differenziabile** in x_0 e

$$Dg \circ f(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big) \cdot Df(x_0)$$

Infatti $f(x) - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad \big(\Longrightarrow f(x) - f(x_0) = \mathcal{O}(x - x_0)\big)$

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(x_0)\big) + Dg\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big) + o\big(f(x) - f(x_0)\big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = Dg\big(f(x)\big)Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Esempio

Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$, $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), ..., \gamma_2(t)\big)$ curva continua e differenziabile, e $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabile $\Longrightarrow$ la *restrizione* di f al supporto di γ, $f \circ \gamma(t) = f\big(\gamma(t)\big)$, è derivabile e si ha

$$\frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt} = \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma_i'(t)$$

15 Principio di Fermat

$f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabile in x_0, $x_0 \in A$ è punto di massimo/minimo locale $\Longrightarrow \nabla f(x_0) = 0$.
Dimostrazione: fissato $v \neq 0$, $f_v(t) = f(x_0 + vt)$ ha un massimo/minimo locale in $t = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{df_v(0)}{dt} = \nabla f(x_0) \cdot v \Longrightarrow \nabla f(x_0) = 0 \qquad \square$$

16 Funzioni omogenee

La funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è **α-omogenea** se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ $\forall t > 0$, ad esempio:
$f(x) = ||x||$, $|| \cdot ||$ norma in $\mathbf{R}^n \Longrightarrow f$ è 1-omogenea.
Teorema: una funzione f differenziabile è α-omogenea $\Longleftrightarrow \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
Dimostrazione: consideriamo $F(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha}$, $t > 0$, F è derivabile:

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{f(tx)}{t^\alpha}\right) = \frac{\big(\nabla f(tx)tx\big)t^\alpha - \alpha t^{\alpha-1} f(tx)}{t^{2\alpha}} = \frac{1}{t^{\alpha+1}}\big(\nabla f(tx)tx - \alpha f(tx)\big) = 0 \ \forall t > 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow F(t) = \text{costante, cioè} \Longleftrightarrow f(tx) = t^\alpha f(x) \qquad \square$$

17 Derivate successive

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e $\nabla f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ allora $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f = H_f : \mathbf{R}^n \to \mathcal{M}_{n \times n}$

17.1 Hessiano (o Matrice Hessiana) di f

$H_f(x)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ e, in generale,

$$\nabla^k f_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdot \dots \cdot \partial x_{i_k}}(x_0)$$

OSS: non sempre derivate parziali diverse commutano tra loro.

18 Teorema di Lagrange

Siano $f : U \to \mathbf{R}$ con $U \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $x, y \in U$, $[x, y] \subseteq U$, $[x, y] = \big\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\big\}$, se f è differenziabile in $U \implies \exists z \in [x, y]$ tale che $f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x)$.
Dimostrazione: chiamo $g(t) = f\big(x + t(y-x)\big)$ con $t \in [0,1]$, g è derivabile:

$$g(1) - g(0) = f(y) - f(x) \overset{\text{Lagrange}}{=} g'(t_0) = \nabla f\big(x + t_0(y-x)\big) \cdot (y - x) \qquad \square$$

OSS: sia $f : U \to \mathbf{R}^m$ $f = (f_1, ..., f_m)$, allora $f(y) - f(x) = (...\nabla f_i(z_i)(y-x)...)$. In generale gli z_i sono diversi tra loro e NON si può scrivere $f(y) - f(x) = Df(z)(y - x)$.
OSS: sia $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una curva C^1

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = \left| \int_a^b \gamma'(t)dt \right| \leq \int_a^b \big|\gamma'(t)\big| dt \leq \Big(\max_{[a,b]} \big|\gamma'(t)\big| \Big)(b - a)$$

Def: $E \subseteq \mathbf{R}^n$, $E \neq \emptyset$, è **Connesso** se $\nexists A_1, A_2$ aperti, con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, tali che $E \subseteq A_1 \cup A_2$, $E \cap A_1 \neq \emptyset \wedge E \cap A_2 \neq \emptyset$.
In particolare E è aperto e connesso $\iff$ non è unione di due aperti disgiunti, non vuoti.
Def: E è **Connesso per archi** se $\forall x, y \in E$ $\exists \gamma : [a, b] \to E$ curva continua con $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.
Prop:

- E connesso per archi $\implies E$ connesso, ma non vale il viceversa;
- E aperto e connesso per archi $\iff E$ connesso e gli archi si possono prendere C^∞ o lineari a tratti.

Prop: sia $f : U \to \mathbf{R}$ differenziabile, con $U \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso, tale che $\nabla f(x) = 0$ $\forall x \in U \implies$ f è costante.
Dimostrazione (tipo 1): sia $x_0 \in U$ e siano $A = \{x : f(x) = f(x_0)\}$ $B = \{x : f(x =\neq f(x_0)\}$:
B è aperto perché f è continua, A è aperto infatti per $x \in A$ $\exists r > 0$ tale che $B_r(x) \in U$, $y \in B_r(x)$, $g(t) \overset{t\in[0,1]}{=} f\big(x + t(y-x)\big)$, $g'(t) = 0 \implies g(0) = f(x) = g(1) = f(y) \implies B_r(x) \in A$, U connesso $\implies B = \emptyset \implies f$ è costante.
(tipo 2): U connesso per archi, $\forall x, y \in U$ $\exists \gamma(t)$ curva C^1 tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, sia $g(t) = f\big(\gamma(t)\big) \implies g'(t) = \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma' = 0 \implies g$ è costante $\implies f(x) = g(0) = g(1) = f(y)$. $\square$

19 Teorema di Schwarz

Sia $f : U \to \mathbf{R}$ differenziabile, $x_0 \in U$, se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ esistono in U e sono continue in $x_0 \implies$ sono uguali in x_0.
Dimostrazione: siano $h, k \in \mathbf{R}$ piccoli e $\theta, \theta' \in (0, 1)$, si ha il seguente incremento

$$f(x_0+he_i+ke_j)-f(x_0+he_i)-f(x_0+ke_j)+f(x_0) \overset{\text{Lagrange}}{=} hf_{x_i}(x_0+\theta he_i+ke_j)-hf_{x_i}(x_0+\theta he_i) =$$

$$\overset{\text{Lagrange}}{=} hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + \theta he_i + \theta' ke_j) \overset{\text{Continuità}}{=} hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) + o(h^2 + k^2)$$

E, analogamente,

$$... \overset{\text{Continuità}}{=} hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + o(h^2 + k^2)$$

$$\text{perciò, unendo i risultati, } \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \qquad \square$$

OSS: funziona anche per derivate di ordine più alto: se $\exists f_{x_{i_1}...x_{i_k}}$ e $f_{x_{\sigma(x_1)}...x_{\sigma(x_k)}}$, con σ permutazione, e sono continue in $x_0 \implies$ coincidono in x_0.
OSS: con la stessa Dim. si vede che se f è diff. due volte in $x_0 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ $\forall i, j$.

20 Formula di Taylor

Sia $f : U \to \mathbf{R}$, se $f \in C^{k-1}(U)$ e differenziabile k volte in $x_0 \in U \subseteq \mathbf{R}^n \Longrightarrow$

$$f(x) = T_k(x, x_o, f) + o\big(|x - x_0|^k\big) \text{ (con \textbf{Resto di Peano})}$$

$$\text{dove } T_k(x, x_0, f) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D^{(i)} f(x_0)[x - x_0]^i \text{ } (\longrightarrow \text{tensore } n \times ... \times n \text{ } i \text{ volte})$$

$$D^{(i)} f(x)[v]^i = \sum_{(j_1 ... j_i)} f_{x_{j_1} ... x_{j_i}}(x_0) \cdot v_{j_1} ... v_{j_i}$$

Dimostrazione: sia $g(t) = f\big(x_0 + t(x - x_0)\big)$ e applichiamo Taylor 1 dimensionale a g in $t = 0$. $\square$

Oppure

Sia $f : U \to \mathbf{R}$, se $f \in C^k(U)$ e differenziabile $k + 1$ volte in $\mathcal{U}$ intorno di $x_0 \in U \subseteq \mathbf{R}^n \Longrightarrow$

$$f(x) = T_k(x, x_0, f) + \frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)} f\big(x_0 + t(x - x_0)\big) \cdot [x - x_0]^{k+1} \text{ (con \textbf{Resto di Lagrange})}$$

Dove $t \in (0, 1)$ dipende da x_0 e da x.
OSS: quanto detto vale anche per $f : U \to \mathbf{R}^n$, salvo che nel resto di Lagrange ho $t_i \in (0, 1)$ diverse tra loro.

21 Massimi e minimi locali

Sia $f : U \to \mathbf{R}$, con $U \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, se f è differenziabile 2 volte in $x_0 \in U$, si ha

$$f(x) = T_2(x, x_0, f) + o\big(|x - x_0|^2\big) \text{ dove}$$

$$T_2(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\nabla^2 f(x_0)(x - x_0)^T$$

Prop: f differenziabile 2 volte in x_0 e x_0 è punto critico per f, cioè $\nabla f(x_0) = 0 \Longrightarrow$

1. $\nabla^2 f(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ massimo locale stretto;
2. $\nabla^2 f(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ minimo locale stretto;
3. x_0 massimo locale $\Longrightarrow \nabla^2 f(x_0) \leq 0$;
4. x_0 minimo locale $\Longrightarrow \nabla^2 f(x_0) \geq 0$.

Dimostrazione (Prop1): $\nabla^2 f(x) < 0$, cioè $v\nabla^2 f v^T \leq -\delta|v|^2$, $\delta > 0$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\nabla^2 f(x - x_0)^T + o\big(|x - x_0|^2\big) \leq f(x_0) - \delta|x - x_0|^2 + o\big(|x - x_0|^2\big) \leq$$

$$\leq f(x_0) - \frac{\delta}{2}|x - x_0|^2 \overset{*}{<} f(x_0) \text{ *se } |x - x_0| \text{ è abbastanza piccolo}$$

e se $x \neq x_0 \Longrightarrow x_0$ è un massimo locale stretto;
(Prop2): analogo a (Prop1);
(Prop3): x_0 è un massimo locale $(\nabla^2 f(vt) = \lambda vt)$ per assurdo se $\nabla^2 f > 0 \iff \exists\lambda > 0$ autovalore ed $\exists v$ autovettore, $v \neq 0$, $f(x_0 + vt) = f(x_0) + \lambda t^2|v|^2 + o(t^2) > f(x_0)$ per $t \neq 0$ piccolo $\Longrightarrow x_0$ non è un massimo locale \`;
(Prop4): analogo a (Prop3). $\square$
Un punto critico che non è né massimo né minimo locale si dice **Punto di sella**.
Cor: se $\nabla^2 f(x_0)$ non è definito positivo né negativo $\Longrightarrow x_0$ è di sella.
OSS: $\nabla^2 f(x_0) \geq 0$ se $v\nabla^2 f v^T \geq 0\ \forall v$ e $\nabla^2 f(x_0) > 0$ se $v\nabla^2 f v^T > 0\ \forall v \neq 0$ (analogo per $\leq$ e $<$).
Se $\nabla^2 f(x_0) > 0 \Longrightarrow \exists\delta > 0$ tale che $v\nabla^2 f v^T \geq \delta|v|^2$ (analogamente per $<$) dove

$$\delta = \min_{|v|=1} v\nabla^2 f v^T \text{ che } \exists \text{ per Weierstrass.}$$

Se $\nabla^2 f(x_0)$ è simmetrica (sempre vero se f è differenziabile 2 volte) si ha

$$\nabla^2 f(x_0) \geq 0 \iff \lambda_i \geq 0 \;\forall \lambda_i \text{ autovalore di } \nabla^2 f(x_0) \overset{\text{Criterio di Sylvester}}{\iff}$$

$$\overset{\text{Criterio di Sylvester}}{\iff} \det(M_i) \geq 0,\ \forall M_i \text{ minore principale}$$

(analogamente per $<$).
OSS: nel caso di dimensione $n = 2$

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0) & f_{xy}(x_0) \\ f_{yx}(x_0) & f_{yy}(x_0) \end{pmatrix} \geq 0 \iff \begin{cases} f_{xx}(x_0) & \geq 0 \\ f_{xx}(x_0) f_{yy}(x_0) - \big(f_{xy}(x_0)\big)^2 & \geq 0 \end{cases}$$

Def: $f : U \to \mathbf{R}$, con $U \subseteq \mathbf{R}$ aperto, differenziabile 2 volte si dice **Armonica** in U se

$$\Delta f(x) = \mathrm{tr}\big(\nabla^2 f(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}(x) = 0 \;\forall x \in U$$

dove $\Delta f(x)$ si chiama **Laplaciano** di f.

Prop (**Principio del massimo**): sia U aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, $f : \overline{U} \to \mathbf{R}$, $f \in C^0(\overline{U}) \cap C^2(U)$ e $\Delta f = 0$ in $U \implies f$ assume massimo e minimo su δU, ad esempio

$$U = B_1(0) \text{ e } f(x, y) = ax + by + c \text{ armonica.}$$

Dimostrazione: vediamo che f ammette massimo su δU.
Per assurdo $\exists x_0 \in U$ tale che $\max\limits_{\overline{U}} f = f(x_0) > \max\limits_{\delta U} f \implies \exists \varepsilon > 0$ abbastanza piccolo tale che $f(x_0) > \max\limits_{\delta U} \big[f(x) + \varepsilon |x - x_0|^2\big]$. Sia $g(x) = f(x) + \varepsilon |x - x_0|^2 \implies g(x_0) = f(x_0) > \max\limits_{\delta U} g \implies \exists x_1 \in U$ massimo di $g \implies \nabla g(x_1) = 0$ e $\nabla^2 g(x_1) \leq 0$

$$0 \geq \nabla^2 g(x_0) = \nabla^2 f(x_0) + 2\varepsilon Id \overset{\text{tr}}{\implies} 0 \geq \Delta g(x_0) = \delta f(x_0) + 2\varepsilon n \;\lightning \qquad \square$$

22 Norma di applicazioni lineari

Siano $L : E \to F$ lineare e continua, con E ed F Banach, e $||L|| = \sup\limits_{||x||_E \leq 1} ||L(x)||_F$ *Norma* allora

$$L(E, F) = \big\{L : E \to F \text{ lineare e continua}, ||\cdot||\big\} \text{ è Banach.}$$

Ad esempio: $A \in \mathcal{M}_{n,m}$, $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineare e $||A|| = \max\limits_{|x| \leq 1} |Ax|$.
OSS: $||L(x)||_F \leq ||L|| \cdot ||x||_E \;\forall x \in E$.
OSS: anche $||A|| = \Big(\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ è una norma in $\mathcal{M}_{n,m}$.
OSS: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \in C^1$, $f'(x_0) \neq 0 \implies f$ è localmente invertibile in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mentre se $f'(x_0) = 0$ potrebbe non essere invertibile.

23 Teorema di invertibilità locale

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f \in C^1$, $x_0 \in \Omega$ e $Df(x_0)$ invertibile (cioè $\det\big(Df(x_0)\big) \neq 0) \implies \exists U$ intorno aperto e $x_0 \in U$ tale che $f|_U : U \to V$ è un diffeomorfismo, cioè è bigettiva e $g = f^{-1} : V \to U$ è C^1 inoltre $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ per $y = f(x)$.
Dimostrazione: si usa il *Lemma delle Contrazioni*: sia $A = Df(x_0)^{-1}$.
Fissiamo $B_\rho(x_0)$ e $B_r\big(f(x_0)\big)$ con $\rho, r > 0$ che sceglieremo piccoli e supponiamo $B_\rho(x_0) \in \Omega$ e Df è invertibile in $B_\rho(x_0)$. Fissiamo $y \in B_r\big(f(x_0)\big)$, cerchiamo $x \in B_\rho(x_0)$ tale che $y = f(x)$.
Definiamo $T : \overline{B_\rho(x_0)} \to \mathbf{R}^n$, $\boxed{T(x) = x + A\big(y - f(x)\big)}$, $T \in C^1$ e $T(x) = x \iff y = f(x)$. Dico che T è una contrazione per ρ, r piccoli. Scriviamo $||DT(x)|| = ||Id - ADf(x)|| \leq \frac{1}{2}$ per ρ piccolo.

Dato che Df è continua e per $x = x_0$, $DT(x_0) = 0$ $\big($ricordiamo $A = Df(x_0)^{-1}\big)$.
In particolare $T|_{\overline{B_\rho(x_0)}}$ è $\frac{1}{2}$-lipschitziana. Verifichiamo che $T : \overline{B_\rho(x_0)} \to \overline{B_\rho(x_0)}$:

$$\big|T(x)-x_0\big| \leq \big|T(x)-T(x_0)\big|+\big|T(x_0)-x_0\big| \leq \frac{1}{2}|x-x_0|+\Big|A\big(y-f(x_0)\big)\Big| \leq \frac{\rho}{2}+||A||r \leq \rho \text{ se } r \leq \frac{\rho}{2||A||}$$

$\Longrightarrow T$ è una contrazione su $\overline{B_\rho(x_0)} \Longrightarrow \exists! x \in \overline{B_\rho(x_0)}$ tale che $x = T(x)$, cioè tale che $y = f(x)$ e definisco $g(y) = x$. Sia $V = B_r\big(f(x_0)\big) \setminus f\big(\delta B_\rho(x_0)\big)$ intorno di $f(x_0)$ e sia $U = g(V) \subseteq B_\rho(x_0)$ intorno di x_0. Osserviamo che $g\big(f(x)\big) = x \ \forall x \in B_\rho(x_0)$.
Vediamo che g è continua in $y \in V$, $y_0 = f(x_0)$, sia $y_n \to y$ e siano $x_n = g(y_n)$ e $x = g(y)$, vogliamo vedere che $x_n \to x$:

$$\text{abbiamo che } |x-x_n|\frac{1}{2} \geq \big|T(x)-T(x_n)\big| = \big|x_n + A(y-y_n) - x\big| \geq |x-x_n| - \big|A(y-y_n)\big| \geq$$

$$\geq |x-x_n| - ||A|| \cdot |y-y_n| \Longrightarrow |x-x_n| \leq 2||A|| \cdot |y-y_n| \Longrightarrow g\big|_V \text{ è } 2||A||\text{-lip. (quindi continua)}$$

Verifichiamo che $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ con $x = g(y)$. Sia $y_n \to y$ e $x_n = g(y_n)$ e calcoliamo

$$\frac{g(y_n)-g(y)-Df(x)^{-1}(y_n-y)}{|y_n-y|} = \frac{x_n - x - Df(x)^{-1}\big(f(x_n)-f(x)\big)}{|y_n-y|} =$$

$$= \frac{x_n - x - Df(x)^{-1}\Big(Df(x)\big(x_n-x\big) + o\big(|x_n-x|\big)\Big)}{|x_n-x|} \cdot \frac{|x_n-x|}{|y_n-y|} =$$

$$= Df(x)^{-1}\left(\frac{o\big(|x_n-x|\big)}{|x_n-x|}\right) \cdot \frac{|x_n-x|}{|y_n-y|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow Dg(y) = Df(x)^{-1} \qquad \square$$

<u>OSS</u>: questo è solo un teorema locale, anche se $Df(x)$ è invertibile $\forall x \in \Omega$ non è detto che f sia globalmente invertibile.

Esempio

$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ esponenziale complesso.
$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0,0\}$, $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, f non è iniettiva $\Longrightarrow$ non è globalmente invertibile

$$\text{ma } \det\big(Df(x,y)\big) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^x > 0 \ \forall (x,y)$$

<u>OSS</u>: la stessa dimostrazione funziona per $f : E \to F$ Banach, Frechét-differenziabile, con $Df(x_0)$ invertibile con inversa continua.
<u>OSS</u>: nel <u>Teorema di invertibilità locale</u> se $f \in C^k$, $k \geq 1 \Longrightarrow f^{-1} \in C^k$.

24 Sottovarietà differenziabili

$M \subseteq \mathbf{R}^n$ è una **Sottovarietà** di dim $m < n$ e di classe C^k, $k \geq 1$, se $\forall x \in M \ \exists U$ intorno di x in $\mathbf{R}^n$ ed $\exists$ un diffeomorfismo $\varphi \in C^k$ $\varphi : B_r(0) \to U$, $B_r(0) \subseteq \mathbf{R}^n$, tale che

$$\varphi\Big(\big(\mathbf{R}^m \times \{0\}\big) \cap B_r(0)\Big) = M \cap U$$

Esempi

$f : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ e $f \in C^k$, $\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbf{R}^{n+1}, x \in \Omega\Big\} \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ è una $(n-1)$-sottovarietà di classe C^k con $\varphi(x,y) = \big(x, y + f(x)\big)$ e $Imm(\varphi)\big(\Omega \times \{0\}\big) = \Gamma_f$.
$\big\{x \in \mathbf{R}^n : |x| = r\big\} = \delta B_r(0)$ è una $(n-1)$-sottovarietà di classe C^∞.
<u>Def</u>: le $(n-1)$-sottovarietà si chiamano **Ipersuperfici**.

25 Teorema delle funzioni implicite

Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, $f \in C^k(\Omega; \mathbf{R}^m)$, $f = (f_1, ..., f_n)$, $(x_0, y_0) \in \Omega$, con $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e $y_0 \in \mathbf{R}^m$ e la matrice $m \times m$ $\big(D_y f\big)_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\right)$ $i, j \in \{1, ..., n\}$, se $D_y f(x_0, y_0)$ è invertibile $\Longrightarrow \exists U$ intorno di x_0 e $g \in C^k(U; \mathbf{R}^n)$ tale che

$$f\big(x, g(x)\big) = f(x_0, y_0) \ \forall x \in U \qquad \spadesuit$$

cioè posso rappresentare l'insieme di livello di $\big\{(x, y) : f(x, y) = f(x_0, y_0)\big\}$, in un intorno di (x_0, y_0), come grafico di g: $\boxed{f(x, y) = f(x_0, y_0) \Longleftrightarrow y = g(x)}$.

Inoltre derivando ($\spadesuit$) si ha $\boxed{Dg(x) = -\big(D_y f(x, y)\big)^{-1} D_x f(x, y)}$, infatti

$$D_x f\big(x, g(x)\big) = D_x f(x_0, y_0) \overset{\text{funzione composta}}{=} D_x f + D_y f Dg \overset{D_y f \text{ invertibile}}{\Longrightarrow} Dg = -\big(D_y f\big)^{-1} D_x f$$

<u>Dimostrazione</u>: segue dal *Teorema di inv. locale* applicato a $\tilde{f}(x, y) = \big(x, f(x, y)\big)$ $\tilde{f} : \Omega \to \mathbf{R}^{n+m}$

$$D\tilde{f}(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline D_x f & D_y f \end{array}\right) \Longrightarrow D\tilde{f}(x_0, y_0) \text{ invertibile} \overset{\text{Teo. inv. locale}}{\Longrightarrow} C^k \ni \tilde{f}^{-1}(x, y) = \big(x, \tilde{g}(x, y)\big)$$

$$\tilde{g} : \Omega \to \mathbf{R}^m \quad \tilde{g} \in C^k \quad \Big(x, f\big(x, \tilde{g}(x, y)\big)\Big) = \tilde{f}\big(x, \tilde{g}(x, y)\big) = (x, y) \Longrightarrow f\big(x, \tilde{g}(x, y)\big) = y$$

Poniamo $g(x) = \tilde{g}\big(x, f(x_0, y_0)\big)$ ed abbiamo $\boxed{f\big(x, g(x)\big) = f(x_0, y_0)}$. $\square$

<u>OSS</u>: $f \in C^k$ $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^{n+m}$.
L'insieme di livello $\big\{(x, y) : f(x, y) = c\big\} = L_c$ può essere scritto come grafico di una funzione C^k in un intorno di tutti i punti $(x, y) \in L_c$ tale che $\text{rank}\big(Df(x, y)\big) = m$.
Tali punti si chiamano **Punti regolari** di $\{f = c\}$, ad esempio:
$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $f(x, y) = x^2 - y^2$, $n = m = 1$, $\nabla f(x, y) = (2x, -2y) \neq 0 \Longleftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$ perciò tutti i punti sono regolari tranne $(0, 0)$.

26 Spazio tangente

Sia $M \subseteq \mathbf{R}^n$ una k-varietà differenziabile $\Big[$cioè dato $x_0 \in M$ $\exists U$ intorno e $\varphi : B_r(0) \longrightarrow U$ diffeomorfismo tale che $\varphi(0) = x_0$ e $\varphi\Big(\big(\mathbf{R}^k \times \{0\}\big) \cap B_r(0)\Big) = M \cap U\Big]$, lo spazio vettoriale $D\varphi(x_0)\big(\mathbf{R}^k \times \{0\}\big) = T_{x_0}M < \mathbf{R}^n$, $\dim(T_{x_0}M) = k$, si dice **Spazio tangente** a M in x_0.

27 Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange

Siano $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $f_0 \in C^1(A)$, $f = (f_1, ..., f_m) \in C^1(A, \mathbf{R}^n)$, $M = \{x \in A : f(x) = 0\}$ e $x_0 \in M$ punto di massimo o minimo locale per $f_0 \Longrightarrow$ i vettori $\{\nabla f_i(x_0)\}_{i \in \{0, ..., m\}}$ sono *linearmente dipendenti*, cioè $\boxed{\sum \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0}$.

<u>OSS</u>: Il sistema $\begin{cases} f_1(x_0) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_0) = 0 \\ \nabla f_0(x_0) = \sum \lambda_i \nabla f_i(x_0) \end{cases}$ si dice **Sistema dei Moltiplicatori di Lagrange**.

<u>Dimostrazione</u>: supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale per f_0, cioè $\exists B_r(x_0)$ tale che $f_0(x_0) \leq f_0(x)$ $\forall x \in \overline{B} \cap M$.
Dato $k \in \mathbf{N}$ sia $g_k(x) = f_0(x) + |x - x_0|^2 + k \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)^2$, $g_k \geq f_0$ $\forall k$ e $g_k(x_0) = f_0(x_0)$.
Sia x_k un minimo di g_k in $\overline{B}$ (esiste per Weierstrass).
Osserviamo che $g_k(x_k)$ è limitata $\Longrightarrow$, a meno di sottosuccessioni $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x^\star \in \overline{B}$ e

$g_k(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} c \in \mathbf{R}$, voglio mostrare che $x^\star = x_0$. Infatti

$$k\sum_{i=1}^m f_i(x_k)^2 = g_k(x_k) - |x - x_0|^2 - f_0(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} c - |x^\star - x_0|^2 - f_0(x^\star)$$

e, dividendo per k, si ha $\sum\limits_{i=1}^m f_i(x_k)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, quindi $x^\star \in M$.
Dalla definizione di g_k, si ha

$$f_0(x^\star) + |x^\star - x_0|^2 \xleftarrow[k\to\infty]{} f_0(x_k) + |x_k - x_0|^2 \leq g_k(x_k) \leq g_k(x_k) \leq g_k(x_0) = f_0(x_0) \leq f_0(x^\star)$$

quindi $|x^\star - x_0|^2 = 0$ cioè $\boxed{x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0}$. In particolare, con il Principio di Fermat, si ha

$$0 = \nabla g_k(x_k) = \nabla f_0(x_k) + 2(x_k - x_0) + 2k\sum f_i(x_k)\nabla f_i(x_k)$$

Ponendo $\mu_{i,k} = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 2kf_i(x_k) & i > 0 \end{cases}$, posso scrivere $\sum\limits_{i=0}^m \mu_{i,k}\nabla f_i(x_k) = -2(x_k - x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
Normalizzo $\tilde{\mu}_{i,k} = \frac{\mu_{i,k}}{\sqrt{\sum \mu_{i,k}^2}}$ ed ho, per compattezza, $\tilde{\mu}_{i,k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu_i^\star$ con $\sum\limits_i {\mu_i^\star}^2 = 1 = \lim \sum \tilde{\mu}_{i,k}^2$.
Passando al limite:

$$0 \xleftarrow[k\to\infty]{} \frac{-2(x_k - x_i)}{\sqrt{\sum \mu_{i,k}^2}} = \sum_{i=0}^m \tilde{\mu}_{i,k}\nabla f_i(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{i=0}^m \mu_i^\star \nabla f_i(x_0) = 0 \qquad \square$$

28 Teoria della misura

Def: Siano X un insieme, $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X e $f : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$:

- f è **σ-subadditiva** se, dati $E_1, ..., E_n \in \mathcal{E}$ tali che $\bigcup\limits_i E_i \in \mathcal{E} \Longrightarrow f\big(\bigcup\limits_i E_i\big) \leq \sum\limits_i f(E_i)$;
- f è **σ-additiva** se, dati $E_1, ..., E_n \in \mathcal{E}$ disgiunti tali che $\bigcup\limits_i E_i \in \mathcal{E} \Longrightarrow f\big(\bigcup\limits_i E_i\big) = \sum\limits_i f(E_i)$.

Def: $f : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ σ-subadditiva si dice **Misura esterna** su X.
Def: $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(X)$ è detta **σ-algebra** se:

- $\emptyset \in \mathcal{E}$;
- $A \in \mathcal{E} \Longrightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{E}$;
- $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}} \in \mathcal{E} \Longrightarrow \bigcup\limits_i A_i \in \mathcal{E}$ e $\bigcap\limits_i A_i \in \mathcal{E}$.

Def: Sia $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una σ-algebra, $m : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$ σ-additiva si dice **Misura** su X con σ-algebra $\mathcal{E}$. La terna $(X, \mathcal{E}, m)$ è detto **Spazio di misura**.
Prop: Sia m una misura:

- m è subadditiva su $\mathcal{E}$;
- m è monotona, cioè $E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow m(E_1) \leq m(E_2)$.

Data $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(X)$ si denota con $\sigma A(\mathcal{E})$ la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{E}$, si dice anche che $\sigma A(\mathcal{E})$ è la σ-algebra generata da $\mathcal{E}$.
$\sigma A(\mathcal{E})$ è ben definita perché l'intersezione di σ-algebre è una σ-algebra.
Def: Sia X uno spazio metrico (basterebbe che fosse topologico), $\mathscr{B}(X)$, la σ-algebra generata dagli aperti di X (o dalle palle), si chiama **σ-algebra dei boreliani**.
Data una misura m, lo spazio $(X, \mathcal{E}, m)$ si dice **di Borel** se $\mathcal{E} \supseteq \mathscr{B}(X)$.
Def: Dato $(X, \mathcal{E}, m)$, $N \in \mathcal{E}$ si dice **di misura nulla** (o **trascurabile**) se $m(N) = 0$.
Def: $(X, \mathcal{E}, m)$ è **Completo** se, dato $N \in \mathcal{E}$ di misura nulla e $N' \subseteq N \Longrightarrow N' \in \mathcal{E}$ (e $m(N') = 0$).

29 Passare da misura esterna a misura e viceversa: metodo di Carathéodory

Def: siano m misura esterna e $E \subseteq X$, diciamo che E è **misurabile per** m se $m(A) = m(A \cap E) + m(A \cap E^c)\ \forall A \subseteq X$.
Teorema: data m misura esterna, $M_m = \{E \text{ misurabili per } m\}$ è una σ-algebra e $m|_{M_m}$ è una misura su X. Inoltre (X, M_m, m) è completo.
Def: dato $(X, \mathcal{E}, m)$ spazio di misura, $m^*(E) = \inf\{m(F) : F \supseteq E, F \in \mathcal{E}\}\ \forall E \in X$ è la **misura esterna generata da** m e si ha $m^*|_E = m$.
OSS: se ho $(X, \mathcal{E}, m)$ spazio di misura $\Longrightarrow (X, M_{m^*}, m^*)$ è uno spazio di misura completo che estende $(X, \mathcal{E}, m)$, cioè $\mathcal{E} \subseteq M_{m^*}$ e $m^*|_E = m$. m^* si dice **completamento** di m.

30 Misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$

Misura esterna: siano $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ **Rettangolo chiuso**, $m^*(R) = \prod_i (b_i - a_i)$, e $P = \bigcup_{j=1}^{N} R_j$, $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$ se $i \neq j$, **Plurirettangolo**, $m^*(P) = \sum_{j=1}^{N} m^*(R_j)$.
Definiamo $m^*(E) = \inf\{m^*(P) : P \supseteq E \text{ plurirettangolo}\}$.
Questa è una misura esterna e $\mathscr{L} = m^*|_{M_{m^*}}$ si dice **Misura di Lebesgue**.
$M(\mathbf{R}^n) = M_{m^*}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.
OSS: $P \in M(\mathbf{R}^n)\ \forall P$ plurirettangolo $\Longrightarrow M(\mathbf{R}^n) \supseteq \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ e $\mathscr{L}$ è una misura di Borel.

Insieme di Vitali

$\exists E \notin M(\mathbf{R})$, in particolare $E \notin \mathscr{B}(\mathbf{R})$ e $M(\mathbf{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbf{R})$ detto **Insieme di Vitali**, tale che:
$\sim$ è la relazione di equivalenza su $\mathbf{R}$ tale che $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}$.
Sia $E \subseteq [0, 1)$ tale che $E \cap [x] = \{y_x\}\ \forall x \in \mathbf{R}$ (un tale insieme esiste per l'*Assioma della scelta*).
Osserviamo che:

- $F = \bigcup_{q \in \mathbf{Q} \cap [-1,1]} (E + q) \subseteq [-1, 2]$;
- $F \supseteq [0, 1)$;
- $(E + q_1) \cap (E + q_2) = \emptyset$, cioè l'unione è disgiunta.

$\Longrightarrow$ se E fosse misurabile $\Longrightarrow F$ sarebbe misurabile, con $1 \leq \mathscr{L}(F) \leq 3$ ma

$$\mathscr{L}(F) = \sum_{q \in \mathbf{Q} \cap [-1,1]} (E) \Longrightarrow \lightning$$

Prop: E misurabile secondo Lebesgue $\Longrightarrow$

1. $m(E) = \inf\{m(A) : A \supseteq E \text{ aperto}\}$;
2. $m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E \text{ compatto}\}$.

In particolare, E misurabile $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists K_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon$ tale che $m(A_\varepsilon) - m(K_\varepsilon) < \varepsilon$.
Dimostrazione (Prop 1): $m(E) = \inf\left\{m(P) : P = \bigcup_j R_j \supseteq E\right\}$, in particolare, $\forall \varepsilon\ \exists P_\varepsilon$ con $m(P_\varepsilon) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$, definisco $A_\varepsilon = \bigcup_j R_{j,\varepsilon}$ dove $R_j = \prod_{k=1}^{n} [a_{j,k}, b_{j,k}] \Longrightarrow R_{j,\varepsilon} = \prod_k (a_{i,k} - \delta_j, b_{j,k} + \delta_j)$ dove δ_j è tale che $m(R_{j,\varepsilon}) = m(R_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \Longrightarrow m(A_\varepsilon) \leq \sum_j m(R_{j,\varepsilon}) = m(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} < m(E) + \varepsilon$.
(Prop 2): prendiamo E limitato, fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $A_\varepsilon \supseteq \overline{E} \setminus E$ aperto tale che $m(A_\varepsilon) < m(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$ (possiamo farlo per 1). Sia

$$K_\varepsilon = \overline{E} \setminus A_\varepsilon = E \setminus A_\varepsilon \subseteq E \Longrightarrow m(K_\varepsilon) = m(E \setminus A_\varepsilon) = m(E) - m(E \cap A_\varepsilon) =$$
$$= m(E) - m(A_\varepsilon) + m(A_\varepsilon \setminus E) \geq m(E) - m(A_\varepsilon) + m(\overline{E} \setminus E) > m(E) - \varepsilon$$

Se E è illimitato considero $E \cap B_{R_\varepsilon}$ dove R_ε è tale che $m(E \cap B_{R_\varepsilon}) \geq m(E) - E$. $\square$

31 Definizione "costruttiva" della Misura di Lebesgue

① $R = \prod_k [a_k, b_k]$, $m(R) = \prod_k (b_k - a_k)$;

② $P = \bigcup_{j=1}^{N}$, $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$ se $i \neq j \Longrightarrow m(P) = \sum_{j=1}^{N} m(R_j)$;

③ A aperto $\Longrightarrow m(A) = \sup\{m(P) : P \subseteq A\}$,
K compatto $\Longrightarrow m(K) = \inf\{m(P) : P \supseteq A\}$;

④ $m^*(E) = \inf\{m(A) : A \supseteq E\}$ *misura esterna di Lebesgue*,
$m_*(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E\}$ *misura interna di Lebesgue*.

Def: E misurabile $\Longleftrightarrow m_*(E) = m^*(E) = m(E)$.
Prop: le due misure danno la stessa misura.
OSS: posto $P = \bigcup_{j=1}^{N} R_j$, potrei definire

$$m_J{}^*(E) = \inf\{m(P) : P \supseteq E\} \text{ e } m_{J*}(E) = \sup\{m(P) : P \subseteq E\}$$

$\forall E$ si ha $m_{J*}(E) \leq m_*(E) \leq m^*(E) \leq m_J{}^*(E)$.
E è **misurabile secondo Jordan** se $m_{J*}(E) = m_J{}^*(E)$ e, in particolare, E è misurabile secondo Lebesgue (ma $\exists E$ L-misurabile non J-misurabile).
OSS: per costruzione, la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni, riflessioni e rotazioni. Se μ è una misura in $\mathbf{R}^n$ finita su un compatto e invariante per traslazioni $\Longrightarrow \mu = c \cdot \mathscr{L}$, $c \in [0, +\infty)$.

32 Integrazione

Def: siano $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ spazi di misura,
$f : X \longrightarrow Y$ si dice **Misurabile** se $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ $\forall B \in \mathscr{B}$.
Quando $Y = \mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ o $\mathbf{R}^n$, se non specificato, si prende $\mathscr{B} = \sigma$-algebra dei boreliani, quindi $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ è misurabile se $f^{-1}(A)$ è misurabile $\forall \mathscr{A} \subseteq \mathbf{R}$ di Borel.
OSS: basta verificare che $f^{-1}(A)$ è misurabile $\forall \mathscr{A}$ aperto o che $f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ è misurabile $\forall a \in \mathbf{R}$.
Def: $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ è **L-misurabile** se $f^{-1}(A)$ è L-misurabile $\forall \mathscr{A} \subseteq \mathbf{R}$ aperto.
Def: $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ si dice **Boreliana** se $f^{-1}(A)$ è di Borel $\forall \mathscr{A}$ aperto.
In particolare f **Boreliana** $\Longrightarrow f$ è L-misurabile.
OSS: $\exists f$ misurabile non boreliana, N di misura nulla non di Borel ($N \subseteq C$, C insieme di Cantor),
$f(x) = X_N(x) = \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & x \notin N \end{cases}$ $\quad f^{-1}\big((\tfrac{1}{2}, +\infty)\big) = N$.
OSS: $\exists f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continua e $E \subseteq \mathbf{R}$ misurabile non Borel tale che $f^{-1}(E)$ non è misurabile.
Teorema: sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ spazio di misura, le funzioni misurabili $\mathcal{M} = \{f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ misurabile$\}$ verificano le seguenti proprietà:

- $\odot$ $f, g \in \mathcal{M} \Longrightarrow f \pm g \in \mathcal{M}$ e $\lambda f \in \mathcal{M}$ $\forall \lambda \in \mathbf{R}$;
- $\odot$ $f, g \in \mathcal{M} \Longrightarrow f \cdot g \in \mathcal{M}$, inoltre $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}$ se $g \neq 0$;
- $\odot$ $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $f_n \in \mathcal{M}; \forall n \Longrightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{M}$, $\inf_n f_n \in \mathcal{M}$, $\limsup_n f_n \in \mathcal{M}$ e $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}$.
  In particolare, se $\lim_n f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbf{R} \Longrightarrow f \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione: $(\odot)$ se $f, g \in \mathcal{M} \Longrightarrow f + g \in \mathcal{M}$, basta osservare che $(f+g)^{-1}\big((c, +\infty)\big) = \{x | f(x) + g(x) > c\} \in \mathscr{A}$ $\forall c \in \mathbf{R}$. Perciò $\{f + g > c\} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \{f > g\} \cap \{g > c - q\} \in \mathscr{A}$;
$(\odot)$ se $f^2 \in \mathcal{M} \Longrightarrow \{f^2 > c\} = \begin{cases} f^{-1}(\mathbf{R}) & c < 0 \\ \{f > \sqrt{c}\} \cup \{f < -\sqrt{c}\} & c \geq 0 \end{cases} \in \mathscr{A}$;
$f \circ g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \in \mathcal{M}$;
$g \in \mathcal{M}$, $g \neq 0 \Longrightarrow \{\frac{1}{g} > c\} = \{g < \frac{1}{c}\} \in \mathscr{A}$ $\forall c \neq 0$;
$(\odot)$ $f_n \in \mathcal{M} \Longrightarrow \{\inf_n f_n < c\} = \bigcup_n \{f_n < c\} \in \mathscr{A}$ $\forall c$

$\Big(\big(\inf_n f_n \big)(x) < c \iff \exists f_n$ tale che $f_n(x) < c \Big)$.
OSS: il risultato si estende a $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

32.1 Integrale

$S : X \longrightarrow [0, +\infty)$ è semplice se $S = \sum_{i=1}^{N} c_i X_{A_i}$, dove $c_i \in \mathbf{R} \geq 0$, $A_i \in A$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$,

$$\int_X S d\mu \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i) \in [0, +\infty]$$

Quindi possiamo definire l'**integrale**, $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ misurabile,

$$\int_X f d\mu \overset{\text{Def.}}{=} \sup_{S \leq f} \int_X S d\mu \in [0, +\infty],\ S \text{ semplice.}$$

OSS: $f = 0$ quasi ovunque, cioè $\mu\big(\{f > 0\}\big) = 0 \iff \int_x f = 0$.
Dato $E \subset X$, $E \in \mathscr{A}$ $\int_E f \overset{\text{Def.}}{=} \int_X f \cdot X_E$, dove $X_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$
Teorema: $f, g \in \mathcal{M}$, $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty)$:

- Additività: $\int_X f + g = \int_X f + \int_X g$;
- Prodotto per scalare: $\int_X cf = c \int_X f \ \forall c \geq 0$;
- Additività risp. al dominio: $E, F \in \mathscr{A}$, $E \cap F = \emptyset \Longrightarrow \int\limits_{E \cup F} f = \int_X f(X_E + X_F) = \int_E f + \int_F f$;
- Monotonia: $f \leq g \Longrightarrow \int_X f \leq \int_X g$.

33 Teorema di convergenza monotona (o di Beppo Levi)

Sia $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty)$, $f_n \leq f_{n+1}$, $f = \sup_n f_n : X \longrightarrow [0, +\infty] \Longrightarrow \int_X f = \lim_n \int_X f_n = \sup_n \int_X f_n$.
OSS: se $\int_X f \overset{\text{Def.}}{=} +\infty \Longrightarrow \mu\big(\{f = +\infty\}\big) > 0$.
Dimostrazione: $f \geq f_n \ \forall n \overset{\text{Monotonia}}{\Longrightarrow} \int_X f \geq \sup_n \int_X f_n$, dobbiamo vedere che $\sup_n \int_X f_n \geq \int_X f = \sup_{s \leq f} \int_X s$, per questo è sufficiente mostrare che $\sup_n \int_X f_n \geq \int_X s \ \forall s \leq f$ semplice. Prendiamo quindi $s = \sum_{i=1}^{N} c_i X_{A_i}$, con A_i misurabili disgiunti. Poniamo $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, $\{A_0, A_1, ..., A_N\}$ partizione di X. Abbiamo che $\int_X f_n = \sum_{i=0}^{N} \int_{A_i} f_n \geq \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} f$ e $\int_X s = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} s = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i)$. Basta mostrare $\sup_n \int_{A_i} f_n \geq c_i \mu(A_i) \ \forall i \in \{1, ..., N\}$, per questo è anche sufficiente mostrare che $\sup_n \int_{A_i} f_n \geq (c_i - \varepsilon)\mu(A_i) \forall i \in \{1, ..., N\} \ \forall \varepsilon > 0$. Se ora fissiamo i ed ε, osserviamo che $A_i = \bigcup_i \{x \in A_i | f_n > c_i - \varepsilon\}$, $F_n = \{x \in A_i | f_n > c_i - \varepsilon\}$, $\sup_n f_n(x) = f(x) \geq S(x) > (c_i - \varepsilon) \ \forall x \in A_i$, $\sup_n \int_{A_i} f_n \geq \sup_n \int_{F_n} f_n \geq \sup_n \big\{(c_i - \varepsilon)\mu(F_n)\big\} = (c_i - \varepsilon)\mu(A_i)$ $\square$

34 Integrale a funzioni non positive

$f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$, osserviamo che $f \in \mathcal{M} \Longrightarrow f^+, f^- : X \longrightarrow [0, +\infty]$ sono misurabili se

$$\int_X f^+ < +\infty \bigvee \int_X f^- < +\infty$$

Def: data $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $f \in \mathcal{M}$, f si dice **Integrabile** se $\int_X |f| = \int_X f^+ + \int_X f^- < +\infty$ e si ha

$$\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^- \in \mathbf{R}$$

Teorema: f, g integrabili $\Longrightarrow$

- $f \pm g$ integrabile;
- cf integrabile $\forall c \in \mathbf{R}$;
- $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$ se $A, B \in \mathscr{A}$, $A \cap B = \emptyset$.

In particolare, l'insieme $\mathscr{L}^1(X,\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbf{R} \text{ integrabile}\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.
OSS: se $f = 0$ quasi ovunque, cioè $\mu(f \neq 0) = 0, \Longrightarrow \int_X cf = 0\ \forall c \in \mathbf{R}$ e anche $\int_X f + g = \int_X g\ \forall g$ integrabile.
In particolare, possiamo definire una relazione di equivalenza su $\mathscr{L}^1(X,\mu) : f \sim g \Longleftrightarrow f - g = 0$ quasi ovunque e $L^1(X,\mu) = {}^{\mathscr{L}^1(X,\mu)}/_{\sim}$ è uno spazio vettoriale su cui è ben definito l'integrale $\int_X f : L^1(X,\mu) \longrightarrow \mathbf{R}$.
Lemma di Fatou: $f_n \geq 0$ misurabili $\Longrightarrow \liminf\limits_n \int_X f_n \geq \int_X \liminf\limits_n f_n$.
Dimostrazione: $\liminf\limits_n f_n = \sup\limits_n g_n$ dove $g_n = \inf\limits_{k\geq n} f_k \quad g_{n+1} \geq g_n\ \forall n$. $f_k \geq g_n\ \forall k \geq n \Longrightarrow \int_X f_k \geq \int_X g_n\ \forall k \geq n \Longrightarrow \inf\limits_{k\geq n} \int_X f_k \geq \int_X g_n$, prendiamo il $\sup\limits_n$ e otteniamo
$\liminf\limits_n \int_X f_n \geq \sup\limits_n \int_X g_n \overset{\text{Convergenza monotona}}{=} \int_X \sup\limits_n g_n = \int_X \liminf\limits_n f_n$ □

35 Teorema di convergenza dominata (o di Lebesgue)

$f_n : X \longrightarrow \mathbf{R}$ misurabile, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ per quasi ogni $x \in X$ (cioè $\exists Y \subseteq X$, $\mu(X \setminus Y) = 0$ tale che $f_n(x) \longrightarrow f(x)\ \forall x \in Y$), $|f_n| \leq g$, dove $g : X \longrightarrow [0,+\infty)$ è integrabile, $\Longrightarrow \lim\limits_n \int |f_n - f| = 0$ (cioè $f_n \longrightarrow f$ in L^1). In particolare, $\lim\limits_n \int_X f_n = \int_X f$.
Dimostrazione: $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$:
$2g - |f_n - f| \geq 0 \Longrightarrow \int_X 2g = \int_X \liminf\limits_n \left(2g - |f_n - f|\right) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf\limits_n \left(\int_X 2g - |f_n - f|\right) =$
$= \int_X 2g - \limsup\limits_n \int_X |f_n - f| \Longrightarrow \limsup\limits_n \int_X |f_n - f| \leq 0 \Longrightarrow \lim\limits_n \int_X |f_n - f| = 0$.
Si ha anche $\left|\int_X f_n - \int_X f\right| = \left|\int_X f_n - f\right| \leq \int_X |f_n - f| \Longrightarrow \lim\limits_n \int_X f_n = \int_X f$ □
Prop: $||f||_{L^1} = \int_X |f|$ è una norma su $L^1(X,\mu)$ (segue subito da $|c \cdot f(x)| = |c| \cdot |f(x)|$ e dalla disuguaglianza triangolare $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$).
Prop: $\left(L^1(X,\mu), ||\cdot||_{L^1}\right)$ è uno spazio di Banach.
Dimostrazione: una volta verificato che $L^1(X,\mu)$ è uno spazio vettoriale normato, dobbiamo verificare che è completo, cioè che $\forall f_n \in L^1$ succ. di Cauchy in L^1 $\exists f \in L^1$ tale che $f_n \longrightarrow f$ in L^1.
$\forall k \in \mathbf{N}$ sia $n_k \in \mathbf{N}$ tale che $||f_i - f_j|| \leq \frac{1}{4^k}\ \forall i, j \geq n_k$.
Sia $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geq 0$ misurabile.
g è integrabile: $\int_X f = ||g|| = \int_X \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| = 2^k \sum\limits_{k=1}^{\infty} ||f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$,
in particolare, $\tilde{\forall} x \in X\ g(x) < +\infty$.
Preso $x \in X$ tale che $g(x) < +\infty$ si ha $|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k} g(x) < +\infty$
$\forall j > l \geq k :\ |f_{n_l}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum\limits_{i=l}^{j-1} |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| \leq g(x) \sum\limits_{i=l}^{j-1} \frac{1}{2^i} \leq g(x) \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}} g(x) \Longrightarrow$
$f_{n_k}(x)$ è di Cauchy in $\mathbf{R} \Longrightarrow f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$, integrando, $||f_{n_k} - f|| \leq \frac{1}{2^{k-1}} ||g||$. Cioè $f_{n_k} \longrightarrow f$ in L^1, ma allora anche $f_n \longrightarrow f$ in L^1.
Infatti $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon$ tale che $||f_i - f_j|| \leq \varepsilon\ \forall i, j \geq n_\varepsilon$ ed $\exists k_\varepsilon$ tale che $||f_{n_l} - f|| \leq \varepsilon\ \forall l \geq k_\varepsilon$.
In particolare, se $j = n_l$ ottengo $||f_i - f|| \leq ||f_i - f_{n_l}|| + ||f_{n_l} - f|| \leq 2\varepsilon\ \forall i \geq \max(n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon})$. □
Ragionando come sopra e osservando che $f_n \longrightarrow f$ in $L^1 \Longrightarrow f_n$ è di Cauchy, ottengo il seguente
Cor: $f_n \longrightarrow f$ in $L^1 \Longrightarrow \exists n_k$ tale che $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)\ \tilde{\forall} x$ ed $\exists g \in L^1$, $g \geq 0$ tale che $|f_{n_k}| \leq g$.
OSS: è una *specie di viceversa* del **Teorema di convergenza dominata**.
Non è vero che $f_n \longrightarrow f$ in $L^1 \Longrightarrow f_n \longrightarrow f$ ovunque.

36 Operatori di composizione

Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $\boxed{T(u) = f\big(x, u(x)\big)}$, dove $f : X \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ è tale che:

- $f(\cdot, t)$ misurabile $\forall t \in \mathbf{R}$;
- $f(x, \cdot)$ continua $\tilde{\forall} x \in X$;
- $\exists h : X \longrightarrow [0, +\infty)$, $\int_X h < +\infty$, $\exists C > 0$ tale che $|f(x,t)| \leq h(x) + C|t|$.

Prop: $T : L^1(x) \longrightarrow L^1(x)$ con continuità.
Dimostrazione: 1 vediamo che $f(x, u)$ è misurabile:

- $E \in \mathscr{A}$, $u = c \cdot X_E$ $f(x,u) = X_{X \setminus E} f(x, 0) + X_E f(x, c)$ misurabile;
- $u = s$ semplice $s = \sum c_i X_{A_i}$ posso supporre A_i partizione (finita) di X, $f = \sum\limits_i f(x, c_i) X_{A_i}$ misurabile;
- u misurabile, $u \geq 0$ $u = \sup\limits_n S_n$, S_n semplici, $\Longrightarrow f(x,u) = \lim\limits_n f(x, S_n)$ misurabile;

2 $u \in L^1 \Longrightarrow f(x,u) \in L^1(x)$, $|f(x,u)| \leq h(x) + C|u|$, $\int_X |f(x,u)| \leq \int_X h + c \int_X |u| < +\infty$;
3 $u \underset{T}{\rightarrow} f(x,u)$ è continua in $L^1(x)$.
Sia $u_n \longrightarrow u$ in $L^1 \Longrightarrow \exists n_k$ tale che $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ $\tilde{\forall} x \in X$ e
$|u_{n_k}(x)| \leq g(x) \in L^1 \Longrightarrow f\big(x, u_{n_k}(x)\big) \longrightarrow f\big(x, u(x)\big)$ $\tilde{\forall} x$ e
$|f\big(x, u_{n_k}(x)\big)| \leq h(x) + C|u_{n_k}| \leq h(x) + Cg(x) \in L^1 \overset{\text{Teo. conv. dom.}}{\Longrightarrow} f\big(x, u_{n_k}(x)\big) \underset{L^1}{\longrightarrow} f(x,u)$.
Potendo applicare l'argomento a ogni sottosuccessione di u_n ottengo $f(x, u_n) \underset{n}{\rightarrow} f(x,u)$ in $L^1(x)$, cioè T è continuo.

37 Spazi prodotto e misure prodotto

Ricordiamo che, dato $(X, \mathscr{A}, \mu)$

(1) μ è finita se $\mu(x) < +\infty$;

(2) μ è σ-finita se $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathscr{A}$, $\mu(A_i) < +\infty$ (ad es: la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$);

(3) $E \subseteq X$ è σ-finito se $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) < +\infty$.

Siano $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ due spazi di misura, $X \times Y$ prodotto cartesiano, $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma$-algebra generata dai *rettangoli* $E \times F$, $E \in \mathscr{A}$, $F \in \mathscr{B}$, $\mu \times \nu$, **misura prodotto**, è una misura su $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ tale che $\mu \times \nu(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$.
OSS: in generale può non essere unica.
Costruzione: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \times F_i$, $(E_i \times F_i) \cap (E_j \times F_j) = \emptyset$ se $i \neq j$.
Def: - $\mu \times \nu(G) = \sum\limits_i \mu \times \nu(E_i \times F_i) = \sum\limits_i \mu(E_i)\nu(F_i)$;
- $(\mu \times \nu)^*(A) = \inf\{\mu \times \nu(G) : A \subseteq G = \bigcup\limits_i E_i \times F_i\}$.
Questa è una misura esterna tale che la σ-algebra $\mathcal{M}$ dei misurabili contiene $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ (in generale $\mathcal{M} \supsetneq \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$). $(\mu \times \nu)^*|_{\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}}$ è una **Misura prodotto**.
OSS: in generale $\mu \times \nu$ non è completa mentre $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{M}}$ lo è ed è il completamento di $\mu \times \nu$.
Prop: se $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(Y \mathscr{B}, \nu)$ sono σ-finiti $\Longrightarrow \mu \times \nu$ è unica.

38 Sezioni

- $E \subseteq X \times Y$,
  $x \in X,\ E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\} \subseteq Y$,
  $y \in Y,\ E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\} \subseteq X$;
- $f : X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$ misurabile,
  $f_x : Y \longrightarrow \mathbf{R},\ f_x(y) = f(x,y)$,
  $f^y : X \longrightarrow \mathbf{R},\ f^y(x) = f(x,y)$.

<u>Prop</u>: $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \Longrightarrow E_x \in \mathscr{B}\ \forall x$ e $E^y \in \mathscr{A}\ \forall y$; f mis. $\Longrightarrow f_x$ misurabile $\forall x$ e f^y misurabile $\forall y$.
<u>Dimostrazione</u>: (mostriamo solo la prima affermazione)
Basta osservare che la proprietà è vera per $E = A \times B,\ E_x \in \{\emptyset, B\}\,\forall x,\ E^y \in \{\emptyset, A\}\,\forall y$ e che gli insiemi E che verificano la proprietà sono una σ-algebra, ma allora sono $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. $\square$
<u>OSS</u>: consideriamo il *completamento* $\overline{\mu \times \nu} = (\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{M}} \Longrightarrow$ la <u>Prop</u> è vera $\tilde{\forall} x \in X$ e $\tilde{\forall} y \in Y$.
<u>Prop</u>: μ, ν sono σ-finite, $E \subseteq \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \Longrightarrow x \longrightarrow \nu(E_x)$ e $y \longrightarrow \mu(E^y)$ sono misurabili e si ha $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E^y) d\nu$, cioè $\int_E d(\mu \times \nu) = \int_X (\int_{E_x} d\nu) d\mu = \int_Y (\int_{E^y} d\mu) d\nu$.
<u>Dimostrazione</u>: supponiamo μ, ν finite, $\mathscr{P} = \{E \subseteq \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} : E$ verifica la tesi$\}$ è una σ-algebra che contiene i rettangoli, infatti:

- $\mathscr{P}$ contiene i rettangoli;
- $\mathscr{P}$ contiene le $\cap$ e le $\cup$ finite di rettangoli;
- $\mathscr{P}$ contiene le $\cup$ numerabili crescenti (serve μ, ν finite e si usa il **Teo. conv. mono.**);
- $\mathscr{P}$ contiene tutte le $\cup$ e le $\cap$ numerabili $\Longrightarrow \mathscr{P}$ σ-algebra.

$\mathscr{P} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, μ e ν sono σ-finite,
$X = \bigcup X_i,\ \mu(X_i) < +\infty,\ X_i \subseteq X_{i+1}$,
$Y = \bigcup Y_i,\ \nu(Y_i) < +\infty,\ Y_i \subseteq Y_{i+1}$,
$X \times Y = \bigcup X_i \times Y_i,\ E \subseteq X \times Y,\ E \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$,
$(\mu \times \nu)(E) = \lim_i (\mu \times \nu)\big(E \cap (X_i \times Y_i)\big) = \lim_i \int_{X_i} \nu(E_x \cap Y_i) \overset{\text{Teo. conv. mono.}}{=} \int_X \nu(E_x)$.
(Lo stesso per l'altro integrale). $\square$

39 Teorema di Fubini-Tonelli

$f \in L^1(X \times Y) \Longrightarrow f_x \in L^1(Y)\ \tilde{\forall} x$ e $f^y \in L^1(X)\ \tilde{\forall} y$,
$x \longrightarrow \int_Y f_x d\nu \in L^1(X)$, $y \longrightarrow \int_X f^y d\mu \in L^1(Y)$ e $\int f d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_Y \int_X f^y d\mu d\nu$.
<u>Dimostrazione</u>: se $f = X_E$ è la <u>Prop</u> precedente; se $f = s = \sum_{i=1}^{N} c_i X_{E_i}$ per linearità dell'$\int$;
se $f \geq 0,\ f = \sup S_n,\ S_n \leq S_{n+1}$ semplici $\overset{\text{Teo. conv. mono.}}{\Longrightarrow}$ (non serve $\int f < +\infty$) $\square$
In generale, se $f = f^+ - f^-$ si applica a f^+ e f^-.
<u>OSS</u>: il teorema vale per $f \geq 0$ misurabile anche con $\int f = +\infty \Longrightarrow$ si può usare, applicato a $|f|$, per verificare che $f \in L^1$.
<u>OSS</u>: se consideriamo $\overline{\mu \times \nu}$ e $E \subseteq \mathcal{M}_{\overline{\mu \times \nu}} \supseteq \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \Longrightarrow$ il Teorema continua a essere valido, con l'attenzione che $\int_Y f_x$ e $\int_X f^y$ sono definite solo quasi ovunque.

40 Conseguenza di Fubini-Tonelli

<u>OSS</u>: $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ è misurabile (per Lebesgue) $\Longleftrightarrow$ il sottografico $S_f = \{(x,t) : t < f(x)\} \in \mathbf{R}^{n+1}$ è misurabile, inoltre, se $f \geq 0$, si ha $\int_{\mathbf{R}^n} f = \mathscr{L}_{\mathbf{R}^{n+1}}\big(S_f \cap (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^t)\big)$.
<u>Dimostrazione</u>: f misurabile $\Longleftrightarrow \{f > t\}$ misurabile $\forall t$, ma $\{f > t\}$ è la sezione di S_f.
$(\Longleftarrow)$ S_f misurabile $\overset{\text{F.-T.}}{\Longrightarrow} \{f > t\}$ misurabile $\tilde{\forall} t$. Dato $t \in \mathbf{R}$ scelgo $t_k \searrow t$ tale che $\{f > t_k\}$ è misurabile $\Longrightarrow \{f > t\} = \bigcup_k \{f > t_k\}$ è misurabile.
$(\Longrightarrow)$ f misurabile $\Longrightarrow f = \sup_n S_n$, S_n semplice, $S_f = \bigcup_n S_{S_n} \Longrightarrow$ possiamo supporre f semplice,
$f = \sum_{i=1}^{N} c_i X_{E_i},\ c_i \in \mathbf{R},\ E_i$ misurabile $\Longrightarrow S_f = \bigcup_i E_i \times (-\infty, c_i)$ è misurabile.
<u>OSS</u>: $\int_{\mathbf{R}^n} f dx = \int_{\mathbf{R}} dx_1 \int_{\mathbf{R}} dx_2 \cdots \int_{\mathbf{R}} f dx_n$.

41 Cambio di variabile

$A, B \subseteq \mathbf{R}^n$ aperti, $\Phi : A \longrightarrow B$ diffeomorfismo C^1, cioè Φ bigettiva, $\Phi \in C^1$ e $\Phi^{-1} \in C^1$ ($\Longleftrightarrow J_\Phi = \det(D\Phi) \neq 0$), tale Φ è detta **cambio di variabili**.

41.1 Teorema del cambio di variabile

1 $E \subseteq A$ misurabile $\Longrightarrow \Phi(E)$ è misurabile e $|\Phi(E)| = \int_E |J_\Phi(x)|dx$;
2 f misurabile, $f : B \longrightarrow \mathbf{R} \Longrightarrow f \circ \Phi$ misurabile, f integrabile $\Longrightarrow f \circ \Phi$ integrabile e si ha $\boxed{\displaystyle\int_B f(y)dy = \int_A f\big(\Phi(x)\big)|J_\Phi(x)|dx}$, con $x \in A$ e $y = \Phi(x) \in B$.
OSS: da 2 si ottiene 1 prendendo $f = X_E$.
(Schema della) Dimostrazione: (per i dettagli vedere il libro Fusco-Marcellini-Sbordone).
Prop: $E \subseteq A$ misurabile $\Longrightarrow \Phi(E)$ misurabile e $|\Phi(E)| \leq \int_E |J_\Phi|$.
Dimostrazione: (1) Φ lineare ed $E = [0,1]^n$ $\Phi(x) = L \cdot x$. $\Phi(E) = L \cdot E$ parallelepipedo generato dalle colonne di L. Se L è bidiagonale $\Longrightarrow |L \cdot E| = |\det L|$ ma questo vale $\forall L$ per "ortogonalizzazione".
(2) In generale vale sempre $|L \cdot E| = |\det L| \cdot |E|$ e si fa per approssimazione:

ok sui rettangoli;

ok su $\bigcup$ di rettangoli $\Longrightarrow$ ok sugli aperti;

ok su $\bigcap$ di aperti $\Longrightarrow$ ok sui misurabili.

(3) vale anche per $\Phi(x) = v + L \cdot x$ affine (per invarianza per traslazioni).
(4) $\forall K \subseteq A$ compatto e $\forall \sigma > 0$ $\exists r_0 > 0$ tale che $\boxed{\Phi\big(Q_r(x_0)\big) \subseteq F_{x_0}\big(Q_{(1+\sigma)r}(x_0)\big)}$, $\forall r \in (0, r_0)$ e $\forall x_0 \in K$ dove $Q_r(x_0) = \prod\limits_i [x_0 - re_i, x_0 + re_i]$ e $F_{x_0}(x) = \Phi(x_0) + D\Phi(x_0)(x - x_0)$ è il polinomio di Taylor di Φ in x_0.
Infatti dato $x \in Q_r(x_0)$, si ha, $1 \leq i \leq n$, $\big|\Phi_i(x) - F_i(x)\big| \overset{\text{Lagr.}}{=} \Big|\big[D\Phi_i(\xi_i) - D\Phi_i(x_0)\big](x - x_0)\Big| \leq \sigma r$, $\xi_i = \lambda x + (1-\lambda)x_0$ $\lambda \in (0,1)$.
(5) Ricoprendo E con cubi si ha $\Phi(E) \leq \int_E |J_\Phi|$, infatti cominciamo da $E = R$ rettangolo, $R = \bigcup\limits_i Q_r(x_i) \Longrightarrow \Phi(R) \subseteq \bigcup\limits_i F_i\big(Q_{(1+\sigma)r}(x_i)\big)$ con $F_i(x) = \Phi(x_i) + D\Phi(x_i)(x - x_i) \Longrightarrow$

$$|R| \leq \sum_i \Big|F_i\big(Q_{(1+\sigma)r}(x_i)\big)\Big| = \sum_i \big|Q_{(1+\sigma)r}(x_i)\big|\big|J_\Phi(x_i)\big| =$$

$$(1+\sigma)^n \sum_i \Big(\int_{Q_r(x_i)} \big|J_\Phi(x)\big| + \int_{Q_r(x_i) \leq \sigma} \big|J_\Phi(x_i)\big| - \big|J_\Phi(x)\big|\Big) \leq (1+\sigma)^n \int_R |J_\Phi| + o(1+\sigma)^n |R|$$

Mandando $\sigma \longrightarrow 0$ si ottiene il risultato per $E = R$, poi, per approssimazione, si passa prima agli aperti quindi a tutti gli E misurabili (va anche verificato che $\Phi(E)$ è misurabile) $\Longrightarrow$ $\square$
Dimostrazione (Teorema): basta dimostrare 2: mostriamo che $\int_B f \leq \int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi|$.
Se $f = X_E$ segue dalla Prop. Per linearità, va bene anche f semplice. Per approssimazione, con $f = \sup\limits_n S_n = \lim\limits_n S_n$, si fa per tutte le $f \geq 0$ (convergenza monotona).
Per linearità, vale $\forall f$ integrabile. Infine $\int_B f \leq \int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi| \leq \int_B (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})|J_\varphi J_{\varphi^{-1}}| = \int_B f \Longrightarrow$ sono tutte uguaglianze. $\square$
Esempio: **Coordinate polari**:
$(x, y) = \phi(\rho, \theta)$, $\phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\phi|_{[0,+\infty)\times[0,2\pi)}$ diffeomorfismo C^∞

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases} \Longrightarrow D\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow J_\phi = \rho > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) = \int_{[0,+\infty)\times[0,2\pi)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \, d\rho d\theta$$

Coordinate cilindriche:

$$(x, y, z) = \phi(\rho, \theta, z) \Longrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Longrightarrow J_\phi = \rho > 0.$$

42 Solidi di rotazione

Siano $x = g(z) \geq 0$ e $D = \{(x,z) : 0 \leq x \leq g(z)\}$, $E = \{(x,y,z) : 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq g(z)\}$ è la **rotazione** di D attorno all'asse z. $|E| = \int X_E dxdydz = \int_{\{(\rho,\theta,z):0\leq\rho\leq g(z)\}} \rho d\rho d\theta dz \overset{\text{F.-T.}}{=} 2\pi \int_{\mathbf{R}} dz \int_0^{g(z)} \rho d\rho = \pi \int_{\mathbf{R}} g^2(z)dz = \pi \int_{\mathbf{R}} |E_z|$.
Dato $E \subseteq \mathbf{R}$ definiamo il **baricentro** o **centro di massa** di E come $B = ⨍_E xdx = \frac{1}{|E|}\int_E x \in \mathbf{R}^n$.
In particolare, per l'insieme D, si ha $B = (B_1, B_2)$ con
$B_1 = \frac{1}{|D|}\int_D xdx \overset{\text{F.-T.}}{=} \frac{1}{|D|}\int_{\mathbf{R}}\int_0^{g(z)} x = \frac{1}{|D|}\int_{\mathbf{R}} \frac{g(z)^2}{2} \Longrightarrow |E| = 2\pi B_1 |D|$.

43 Osservazione sul completamento

$(X, \mathscr{A}, \mu)$ spazio di misura,
① $\mu \longrightarrow \mu^l$ misura esterna, μ e μ^l misurabili, $\mu^* = \mu^l|_\mu$ misura completa che estende μ.
② $\mathscr{B} = \{A \cup N', A \setminus N' : N' \subseteq N, N \subseteq A$ di misura nulla$\}$ è una σ-algebra.
$\overline{\mu}$ tale che $\overline{\mu}(A \cup N') = \overline{\mu}(A \setminus N') = \overline{\mu}(A)$ è una misura completa che estende μ.
Se $(X, \mathscr{A}, \mu)$ è σ-finito $\Longrightarrow \mu^+ = \overline{\mu}$ e $\mathscr{B} = \mathcal{M}$, altrimenti può succedere che $\mathscr{B} \subsetneq \mathcal{M}$ e μ^* è un'estensione di $\overline{\mu}$ a $\mathcal{M}$.
Def: $(X, \mathscr{A}, \mu)$ spazio di misura. μ è **saturata** se tutti gli insiemi localmente misurabili sono misurabili, dove $E \subseteq X$ è localmente misurabile se $E \cap A \in \mathscr{A}$ $\forall A \in \mathscr{A}$, con $\mu(A) < +\infty$.
In generale, μ^* è saturata, mentre $\overline{\mu}$ potrebbe non esserlo.
Esercizi/Osservazioni: ① $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, f derivabile in (a,b), f lipschitziana in $[a,b] \Longrightarrow f'$ è integrabile e $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.
$f'(x) = \lim_{h\to 0} f_h(x)$ dove $f_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. f_h misurabili $\Longrightarrow f$ misurabile.
Se f' è anche limitata $\Longrightarrow f'$ integrabile (secondo Lebesgue).
② Assoluta continuità dell'integrale:
$A \subseteq \mathbf{R}^n$ misurabile, $f \in L^1(A)$, cioè $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ misurabile tale che $\int_A |f| < +\infty \Longrightarrow \forall\varepsilon\ \exists\delta$ tale che $E \subseteq A$ con $|E| < \delta$ si ha $\int_E |f| < \varepsilon$.
Dimostrazione: per assurdo $\exists\varepsilon > 0$ ed $\exists E_n$ con $|E_n| < \frac{1}{2^n}$ tale che $\int_{E_n} |f| \geq \varepsilon$. Sia $F_n = \bigcup_{k\geq n+1} E_k$.
Si ha $|F_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \leq \frac{1}{2^n}$. $F_{n+1} \subseteq F_n$ e $\int_{F_n} |f| = \int_A |f| X_{F_n} \geq \varepsilon$. $\bigcap F_n = F$ misurabile con $|F| = 0$, in particolare $\int_A |f| X_F = 0$. Sia $g_n = |f| X_{F_n}$ abbiamo $g_n \longrightarrow |f| X_F$, con $g_n \geq g_{n+1}$.
$g_n = |g_n| \leq |f|$ integrabile $\overset{\text{Conv. dom.}}{\Longrightarrow} \lim_n \int_{F_n} |f| = \lim_n \int g_n = \int_F |f| = 0 \Longrightarrow ↯ \Longrightarrow$ □
Def: $F : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ è **assolutamente continua** se $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tale che $\forall a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \leq b$ tali che $\left|\bigcup_i [a_i, b_i]\right| = \sum_i b_i - a_i < \delta \Longrightarrow \sum_i \left|F(b_i) - F(a_i)\right| < \varepsilon$.
OSS: F è assolutamente continua $\Longrightarrow F$ continua in $[a,b]$.
OSS: $f \in L^1\big([a,b]\big)$ e definita $F(x) = \int_a^x f \Longrightarrow F$ è assolutamente continua in $[a,b]$.
③ Continuità di integrali dipendenti da parametro e derivata sotto l'integrale:
$f(t,x) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$ tale che $f(t,\cdot) : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ integrabile in $\mathbf{R}^n$ $\forall t$, cioè $\exists F(t) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t,x)dx : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, allora:

a) $f(\cdot, x)$ è continua in t $\tilde{\forall} x$ e $\left|f(t,x)\right| \leq g(x)$ è integrabile $\Longrightarrow F$ è continua;

b) $f(\cdot, x)$ derivabile in t $\tilde{\forall} x$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ è integrabile $\Longrightarrow F$ è integrabile $\forall t$ e $F'(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$.

Dimostrazione:

a) fissiamo t e sia $t_n \longrightarrow t$, $\lim_n F(t_n) = \lim_n \int_{\mathbf{R}^n} f(t_n, x)dx \overset{\text{Conv. dom.}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} \lim_n f(t_n,x)dx = F(t)$;

b) fissiamo t e $t_n \longrightarrow t$ con $t_n \neq t$, $\lim_n \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n - t} = \lim_n \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t}dx$, $\tilde{\forall} x$ $\left|\frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t}\right| \overset{\text{Lagr.}}{=} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\xi_n, x)\right| \overset{\text{Ipotesi}}{\leq} g(x) \overset{\text{Conv. dom.}}{\Longrightarrow} \lim_n \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx = F'(t)$. □

44 Curve

Def: una **curva** è una funzione continua $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$.
$\gamma\big([a,b]\big) \subseteq \mathbf{R}^n$ è il **supporto** della curva γ.
Def: γ è **regolare** se $\gamma \in C^1$ e $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t$.
γ è **regolare a tratti** se $\exists t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$ tale che $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è regolare $\forall i = 0, ..., n$.
Non è detto che una curva sia iniettiva.
OSS: per il Teorema delle funzioni implicite, se γ è regolare $\Longrightarrow$ localmente si può scrivere come grafico di una funzione C^1, cioè
$\gamma'(t_0) \neq 0 \Longrightarrow \gamma(t) = \big(t, u(t)\big)$ oppure $\gamma(t) = \big(u(t), t\big)$, con $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e $u \in C^1$.
Esempi: *Circonferenza*: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Elica: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \lambda t)$, $\lambda > 0$, $t \in \mathbf{R}$.

45 Vettore tangente

Sia γ regolare, $T(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \in S^{n-1}$ è il **vettore tangente** a γ in $\gamma(t_0)$ e
$r(t) = \gamma(t_0) + T(t_0)(t - t_0)$, $t \in \mathbf{R}$, è la *retta tangente* in $\gamma(t_0)$.
Se $n = 2$ (piano), $N(t)$ = rotazione di $T(t)$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario,
$N(t) = \big(T_2(t), -T_1(t)\big)$ è il **vettore normale** a γ in $\gamma(t)$.
In dimensione $n > 2$, $T(t)^{\perp}$ è uno spazio di dimensione $n-1$: non c'è un vettore normale canonico.
Se però $\gamma \in C^2$ possiamo considerare $\vec{k}(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\big(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma(t)|}\big)' = \prod_{T(t)^{\perp}} \frac{\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^2}$ (= proiezione ortogonale su $T(t)^{\perp}$) si dice **vettore curvatura** di γ in $\gamma(t)$.
Def: $\gamma \in C^2$ è **biregolare** se $\gamma'(t) \neq 0$ e $\vec{k}(t) \neq 0\ \forall t$. In tal caso si può scrivere $\vec{k}(t) = k(t)N(t)$ con $k(t) > 0$ *curvatura scalare* e $N(T) \in T(t)^{\perp}$ **vettore normale**.
OSS: non è coerente con la Def. di $N(t)$ in dimensione $n = 2$. In dimensione $n = 2$, dalla formula $\vec{k} = kN$ segue che k può anche essere negativa.
OSS: $k(t) \neq 0 \Longrightarrow R(t) = \frac{1}{|k(t)|}$ è il raggio del **cerchio osculatore**.
OSS: la **curvatura** di un cerchio di raggio R è $k = \frac{1}{R}$.

46 Riparametrizzazioni

Siano $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ e $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ strettamente monotona, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ è una **riparametrizzazione** di γ ed ha lo stesso *supporto*.
OSS: se φ è crescente, $\tilde{\gamma}$ ha lo stesso verso di percorrenza di γ;
se φ è decrescente, $\tilde{\gamma}$ ha verso opposto.

46.1 Rappresentazioni speciali

Grafico: $\gamma(t) = \big(t, u(t)\big)$, $u : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1}$.
Grafico in coordinate polari: $\rho : [0, 2\pi) \longrightarrow [0, +\infty)$, $\gamma(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta} = \big(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta\big)$.

47 Lunghezza di una curva

Siano $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ curva e $P = \{t_0 = a, t_1, ..., t_n = b\}$, con $t_i < t_{i+1}$, partizione di $[a,b]$, detta $L(\gamma, P) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \big|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\big| \Longrightarrow$ la **lunghezza** di γ è $L(\gamma) = \sup\limits_{P} L(\gamma, P) \in [0, +\infty]$.
Def: γ si dice **rettificabile** se $L(\gamma) < +\infty$.
Teorema (rettificabile nel caso C^1): $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ è di classe $C^1 \Longrightarrow \gamma$ è rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Vale la seguente estensione:
Teorema (rettificabilità): γ rettificabile $\Longleftrightarrow \exists \varphi$ riparametrizzazione tale che $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ è lipschitziana e si ha $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |\tilde{\gamma}'(t)| dt$.
OSS: una funzione lip. è derivabile quasi ovunque (con derivata L^{∞}) (Teorema di Rademacher).
Dimostrazione (caso C^1): 1 $L(\gamma, P) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt\ \forall P \Longrightarrow L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Sia
$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $L(\gamma, P) = \sum\limits_{i} \big|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\big| = \sum\limits_{i} \big|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)\big| \leq \sum\limits_{i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(s)| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

② $\gamma'(t)$ è uniformemente continua, cioè fissato $\varepsilon > 0$ $\exists\delta$ tale che $|t-s| < \delta \longrightarrow |\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$.
Sia P una partizione tale che $t_{i+1} - t_i < \delta$ $\forall i$. Per ogni fissato $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$
$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)dt = \gamma'(s_i)(t_{i+1} - t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(\gamma'(t) - \gamma'(s_i)\big)$. Quindi, passando al modulo, $\big|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\big| = \big|\gamma'(s_i)(t_{i+1} - t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(s))dt\big| \geq \big|\gamma'(s_i)\big|(t_{i+1} - t_i) - \varepsilon(t_{i+1} - t_i)$ (per dis. triang.). In particolare $\big|\gamma'(s_i)\big| \leq \frac{|\gamma(t_{i+1})\gamma(t_i)|}{t_{i+1} - t_i} + \varepsilon$ $\forall s_i \in [t_i, t_{i+1}] \Longrightarrow$
$\int_a^b |\gamma'(t)| = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(s)|ds \leq \sum_i \big|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\big| + \varepsilon(b-a) = L(\gamma, P) + \varepsilon(b-a) \leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a)$.
Per l'arbitrarietà di ε ottengo $\int_a^b \big|\gamma'(t)\big|dt \leq L(\gamma)$. □

48 Parametrizzazione in lunghezza d'arco

Siano $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ C^1 e $s(t) = \int_a^t \big|\gamma'(s)\big|ds$ lunghezza di $\gamma|_{[a,t]}$, $s : [a, b] \longrightarrow [0, L(\gamma)]$ crescente, riparametrizzata $\tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma\big(s^{-1}(\sigma)\big)$ $\sigma \in [0, L(\gamma)]$ si dice **parametrizzazione** di γ **in lunghezza d'arco** e si ha $\tilde{\gamma}'(\sigma) = \tilde{T}(\sigma) = T\big(s^{-1}(\sigma)\big)$ (velocità di percorrenza = 1).
<u>OSS</u>: dalla formula per il cambio di variabile è facile vedere che l'integrale $\int |\gamma'(t)|$ non dipende dalla parametrizzazione di γ $\big($e quindi neppure $L(\gamma)\big)$.

49 Integrazione di funzioni lungo curve

Data $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ curva regolare (a tratti) e una funzione continua $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$, con $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $Imm(\gamma) \subseteq A$, definiamo $\int_\gamma f \overset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)|\gamma'(t)|dt$.
<u>OSS</u>: ⊙ se $f = 1 \Longrightarrow \int_\gamma f = L(\gamma)$;
⊙ $\int_\gamma f$ non dipende dalla parametrizzazione di γ: $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ riparametrizzazione C^1 (a tratti), $\Longrightarrow \int_{\tilde{\gamma}} f = \int_\gamma f$.
<u>Def</u>: data $v : A \longrightarrow \mathbf{R}^n$ funzione continua, $v = (v_1, ..., v_n)$ si dice **campo di vettori** su A.
Definiamo l'integrale di v su γ come $\int_\gamma v = \int_\gamma vT \overset{\text{Def.}}{=} \int_a^b v\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$, dove $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$, questo è detto anche **lavoro di** v **lungo** γ.
<u>OSS</u>: è invariante per riparametrizzazioni crescenti, cioè $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, con φ crescente, $\int_{\tilde{\gamma}} v = \int_\gamma v$ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, con φ decrescente, $\int_{\tilde{\gamma}} v = -\int_\gamma v$.
<u>OSS</u>: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n \Longrightarrow \int_\gamma f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f$ e $\int_\gamma v = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} v$.

50 Forme differenziali

$L \in (\mathbf{R}^n)^*$ è un **covettore** se $L : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ lineare e continua $\Longrightarrow \exists v \in \mathbf{R}^n$ tale che $L(x) = vx = \sum_i v_i x_i$, cioè $\mathbf{R}^n \cong (\mathbf{R}^n)^*$ (non è vero in ambienti più generali, tipo spazi di Banach).
e_i base canonica di $\mathbf{R}^n$, $e^i = dx_i$ base canonica di $(\mathbf{R}^n)^*$ dove $e^i : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ è tale che $e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, $L \in (\mathbf{R}^n)^*$, $L = \sum_i v_i dx_i$.
Una funzione $\omega : A \longrightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ $\omega(x) = \sum_i v_i(x)dx_i$ si dice **1-forma differenziale** a cui corrisponde il campo di vettori $v(x) = \big(v_i(x), ..., v_n(x)\big) \in \mathbf{R}^n$.
Se ω è continua e γ è regolare si definisce $\int_\gamma \omega = \int_\gamma v = \int_a^b v\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$.
<u>Esempio</u>: $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ C^1, $df(x) = \sum_i \frac{df}{dx}(x)dx_i$, **differenziale** di f, è una 1-forma continua su A.
<u>Def</u>: le 1-forme ω tali che $\omega = df$ si dicono **esatte** e f si dice **primitiva** di ω.
Se v è il campo di vettori corrispondente a ω, v si dice **conservativo** e f **potenziale** di v, $v = \nabla f$.
<u>OSS</u>: $\omega = df$, $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ C^1, $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ curva regolare $\Longrightarrow \int_\gamma \omega = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)$.
In particolare, se γ è chiusa, cioè $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\int_\gamma \omega = 0$.
<u>Teorema</u> (caratterizzazione delle forme esatte): $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto connesso, ω 1-forma continua in $A \Longrightarrow$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

① ω è esatta;

② $\forall\gamma$ curva regolare chiusa in A si ha $\int_\gamma \omega = 0$;

③ $\forall\gamma_1,\gamma_2$ con gli stessi estremi e stesso verso $\Longrightarrow \int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$.

Dimostrazione: (①$\Longrightarrow$②) visto nell'OSS. precedente;
(②$\Longrightarrow$③) γ_1,γ_2 con stessi estremi e verso. Sia $\tilde\gamma_2 = \gamma_2$ percorsa col verso opposto $\Longrightarrow \gamma_3 = \gamma_1 \cup \tilde\gamma_2$ curva chiusa, regolare a tratti $\Longrightarrow 0 = \int_{\gamma_3}\omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\tilde\gamma_2}\omega = \int_{\gamma_1}\omega - \int_{\gamma_2}\omega$;
(③$\Longrightarrow$①) Fissiamo $x_0 \in A$, $\forall x \in A$ definiamo $f(x) = \int_\gamma \omega$ dove γ è una curva di estremi x_0 e x (usando la connessione), osserviamo che f non dipende dalla scelta di γ. Dobbiamo verificare che $df = \omega$, cioè se $\omega(x) = \sum\limits_i v_i(x)dx_i$, si ha $\frac{df}{dx_i}(x) = v_i(x)\ \forall i$. Fissiamo i e calcoliamo

$$\frac{df}{dx_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\sigma_h}\omega = \lim_{h\to 0}\fint_0^h v_i(x+te_i)dt = v_i(x)$$

Dove $\sigma_h(t) = x + te_i$, $t\in[0,h]$, $T_{\sigma_h}(x) = e_i$. □
OSS: la primitiva è definita a meno di costante (che dipende dalla scelta di x_0). Inoltre la primitiva è C^1 $\big(f \in C^1(A)\big)$.
OSS: il teorema si applica anche ad aperti non connessi, basta scegliere x_0 nella stessa componente connessa di x. In questo caso, se $A = \bigcup\limits_i A_i$, A_i aperti connessi, $\forall A_i$ trovo una primitiva $f_i \in C^1(A_i)$.
OSS: ω 1-forma C^1 esatta $\Longrightarrow \exists f \in C^2$ tale che $df = \omega$, cioè $\frac{df}{dx_i} = v_i(x)\ \forall i$, dove $\omega(x) = \sum\limits_i v_i(x)dx_i$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\ \forall i,j}\ \bigstar$.
Def: ω 1-forma C^1 è **chiusa** se verifica $\bigstar$.
OSS: ω esatta $C^1 \Longrightarrow \omega$ chiusa.
OSS:

1-forme	campi di vettori
esatte ($\omega = df$)	conservativi ($v = \nabla f$)
chiuse	irrotazionali

È vero il viceversa (chiusa $\Longrightarrow$ esatta)? In generale no, dipende dal dominio A della forma ω.
Prop: $\omega : R \longrightarrow (\mathbf{R})^*$ chiusa, $R = \prod\limits_{i=1}^n [a_i,b_i]$ rettangolo anche illimitato $\Longrightarrow \omega$ è esatta.
Dimostrazione: $(n=2)$ $\omega(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy$, fissiamo $(x_0,y_0) \in R$ e poniamo $f(x,y) = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega$, dove $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$,
$\gamma_1(t) = (t, y_0)$ $t \in [x_0, x]$ e $\gamma_2(t) = (x,t)$ $t\in[y_0,y]$.
Verifichiamo che $df = \omega$, cioè $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = b$:
$f(x,y) = \int_{\gamma_1} a(x,y_0)dx + \int_{\gamma_2} b(x,y)dy = \int_{x_0}^x a(t,y_0)dt + \int_{y_0}^y b(x,t)dt$.
$\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y)$.
$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial b}{\partial x}(x,t)dt = a(x,y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial a}{\partial y}(x,t)dt = a(x,y_0) + a(x,y) - a(x,y_0) = a(x,y)$. □
OSS: una variante della Dimostrazione funziona nei domini stellati:
γ lineare con estremi x_0 fissato e x, $f(x) = \int_\gamma \omega \Longrightarrow df = \omega$.
È possibile caratterizzare i domini A tali che ω chiusa $\Longleftrightarrow \omega$ esatta?
Teorema$_{(1)}$: $\omega : A \longrightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ chiusa, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto semplicemente connesso $\Longrightarrow \omega$ è esatta.
OSS: se A non è semplicemente connesso $\exists$ forme chiuse ma non esatte.
Ricordo: A è semplicemente connesso se è connesso e $\forall\gamma$ curva chiusa in A γ è omotopa a un punto, cioè $\Pi_1(A) = 0$.
OSS: A aperto è semplicemente connesso $\Longleftrightarrow$ ogni curva C^∞ chiusa è omotopa.
Teorema$_{(2)}$: ω chiusa, γ_1,γ_2 omotope ad estremi fissati, con l'omotopia C^∞, $\Longrightarrow \int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$.
Dimostrazione (Teorema$_{(1)}$): A semplicemente connesso, γ chiusa C^∞, γ omotopa a $\tilde\gamma$ curva costante $\overset{\text{Teorema}_{(2)}}{\Longrightarrow} \int_\gamma \omega = \int_{\tilde\gamma}\omega = 0$, per approssimazione $\int_\omega = 0\ \forall\gamma$ chiusa $\Longrightarrow \omega$ è chiusa.
(Teorema$_{(2)}$): $h(s,t)$, $s \in [0,1]$, omotopia tra γ_1 e γ_2: $h(0,t) = \gamma_1(t)$ e $h(1,t) = \gamma_2(t)$.
Vogliamo mostrare che $\partial_s \int_{h(s,t)}\omega = 0 \Longrightarrow \int_{h(s,t)}\omega = \text{costante} \Longrightarrow \int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$
Fissiamo per semplicità $n = 2$,

$$\omega(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy, \quad h(s,t) = \big(h^1(s,t), h^2(s,t)\big)\ s\in[0,1]\ t \in I$$

$$\text{Derivate parziali: } h_s(s,t)=0 \ s\in[0,1] \ t\in\partial I \text{ e } h_t(s,t)$$

$$\partial_s \int_{h(s,t)} \omega = \partial_s \int_I [a(h),b(h)]\partial_t h(s,t)dt = \int_I [a_x h_s^1 + a_y h_s^2, b_x h_s^1 + b_y h_s^2][h_t^1,h_t^2] + \int_I (a,b) h_{ts} dt =$$

$$\int_I [a_x h_s^1 h_t^1 + a_y h_s^2 h_t^1 + b_x h_s^1 h_t^2 + b_y h_s^2 h_t^2] - (a,b)_t h_s dt =$$

$$\int_I \left(\cancel{a_x h_s^1 h_t^1} + a_y h_s^2 h_t^1 + b_x h_s^1 h_t^2 + \cancel{b_y h_s^2 h_t^2} - \cancel{a_x h_t^1 h_s^1} - a_y h_s^1 h_t^2 - b_x h_t^1 h_s^2 - \cancel{b_y h_s^2 h_t^2}\right) dt =$$

$$\int_I (b_x - a_y)(h_s^1 h_t^2 - h_t^1 h_s^2) \overset{\omega \text{ chiusa } (a_y = b_x)}{=} 0 \qquad \square$$

In generale: ω chiusa, vogliamo vedere se $\int_\gamma \omega = 0$.

$[\gamma] \in \Pi_1(A)$ classe di equivalenza di γ $\forall \gamma$ chiusa. $[\gamma] = \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i$ $a_i \in \mathbf{Z}$, γ_i generatori di $\Pi_1(A)$: è sufficiente verificare che $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ generatore di $\Pi_1(A)$.

51 Misura e integrazione su k-superfici

Cos'è una k-superficie regolare (C^1 o C^1 a tratti)?
$\Sigma \subseteq \mathbf{R}^n$ chiuso tale che $\forall x \in \Sigma$ $\exists \rho > 0$ e $\exists \varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ di classe C^1, con $U \subseteq \mathbf{R}^k$ aperto, $\text{rank}(D\varphi) = k$ e $\varphi(U) = \Sigma \cap B_\rho(x_0)$.
Come si calcola la misura k-dim di Σ?
1 supponiamo $\Sigma = \varphi(U)$, $\phi(x) = Lx$ lineare L matrice $k \times n$:

- 1a L ortogonale, cioè $< Lx, Ly >=< x, y >$ in particolare quindi L è un'isometria tra $\mathbf{R}^k$ e $L(\mathbf{R}^k) < \mathbf{R}^n$ e si ha $L^T L = Id_k$ quindi poniamo $H^k(\Sigma) = |U|$;

- 1b In generale posso scrivere $L = L'S$ con $L' : \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ortogonale e $S : \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^k$. S si può anche scegliere simmetrica.
  (Teorema di decomposizione polare) Poniamo $H^k(\Sigma) = |\det(S)| \cdot |U|$.
  OSS: non dipende da S, infatti $\det(L^T L) = \det(S^T L'^T L' S) = (\det S)^2$, quindi posso porre $\boxed{H^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det(L^T L)} dx}$.
  OSS: $L^T L \neq L L^T$ (la prima $\mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^k$ e la seconda $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$), $\det(L L^T) = 0$ se $k < n$.

2 $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $\varphi \in C^1$, $\varphi_n \underset{n}{\rightarrow} \varphi$ in $C^1(U)$, φ_n lineare a tratti, posso definire
$\underline{H^k(\Sigma) = \lim_n H^k(\Sigma_n)} \lim_n \int_U \widehat{J}_{\varphi_n}(x) = \int_U \widehat{J}_\varphi(x)$, dove $\widehat{J}_\varphi = \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}$.
3 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(U_i)$ dove $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset$ se $i = j$, poniamo $H^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} \widehat{J}_{\varphi_i} dx$.
OSS: non ho chiesto φ iniettiva, quindi, in questo modo, ottengo la k-misura di Σ con *molteplicità*.
Prop (Cauchy-Binet): data $L : \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^n$ lineare, si ha che $\det(L^T L)$ è la somma dei quadrati di tutti i minori di rango k di L, dove un minore è una sottomatrice $k \times k$ di L ottenuta da L cancellando $(n-k)$ righe.
OSS: $k = n-1$, $\varphi(x) = \big(x, \varphi(x)\big)$ con $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$, $U \subseteq \mathbf{R}^{k-1}$, $f \in C^1(U)$

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} Id_{n-1} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix} \quad \widehat{J}_\varphi = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \quad \Sigma = \Gamma_f \quad H^{n-1}(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx$$

OSS: $H^k(\Sigma)$ non dipende dalla parametrizzazione φ:
$\varphi : U \longrightarrow \Sigma$, $\phi : U \longrightarrow V$ diffeomorfismo C^1 in $\mathbf{R}^k$,
$\psi : V \longrightarrow \Sigma$, $\psi = \varphi\phi^{-1} \Longrightarrow \varphi = \psi\phi$, $D\varphi = D\psi D\phi$.

$$H^k(\Sigma) = \int_U \widehat{J}_\varphi = \int_U \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)} = \int_U \sqrt{\det(D\phi^T D\psi^T D\psi D\phi)} =$$

$$= \int_U J_\phi \sqrt{\det(D\psi^T D\psi)} = \int_{V = \phi(U)} \sqrt{\det(D\psi^T D\psi)}$$

In analogia con quanto fatto per le curve, data $\Sigma = \varphi(U)$ k-superficie in $\mathbf{R}^n$, con φ iniettiva, e $f : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}$ continua, possiamo definire $\int_\Sigma = \int_U \widehat{J}_\varphi(\varphi)$. Come per $H^k(\sigma)$ non dipende dalla parametrizzazione φ.
<u>OSS</u>: è sufficiente che $f \circ \varphi$ sia integrabile in $\mathbf{R}^k$.
<u>OSS</u>: se $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(U_i)$ possiamo prendere funzioni $\eta_i(x) : \Sigma \longrightarrow [0,1]$, con $i \in \{1, ..., n\}$, tale che $\eta_i(x) = 0$, se $x \notin \varphi_i(U_i)$, $\boxed{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i(x) = 1 \; \forall x \in \Sigma}$. Tali η_i si chiamano **partizione dell'unità**.

$$H^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} \widehat{J}_{\varphi-i} \eta_i(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Sigma \eta_i$$

$$\text{Più in generale: } \int_\Sigma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi(U_i)} f\eta_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} \widehat{J}_{\varphi_i} f(\varphi_i)\eta_i(\varphi_i)$$

Si verifica che queste quantità non dipendono dalle scelte di φ_i e η_i.
<u>OSS</u>: se Σ è compatta $\exists$ sempre un insieme finito di carte $\varphi_i : B \longrightarrow \Sigma$, con $B \subseteq \mathbf{R}^k$ e $i \in \{1, ..., n\}$, tale che $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(B)$.
<u>OSS</u>: $\exists$ una nozione più intrinseca di area attraverso la definizione di una "misura k-dimensionale" in $\mathbf{R}^n$ detta **misura di Hausdorff** (di dimensione k). Le due nozioni coincidono per k-superfici di classe C^1.

52 Flusso di campi di vettori

$\Sigma \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n-1)$-superficie regolare, compatta e orientata, cioè è definita $N(x) = \Sigma \longrightarrow S^{n-1}$ continua con $N(x) \in T_\Sigma(x)^\perp$ vettore normale e dato $v : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^n$ campo di vettori continuo, la quantità $\int_\Sigma vN$ si dice **flusso** di v attraverso Σ.
<u>OSS</u>: $\Sigma = \partial U$, $U \subseteq \mathbf{R}^n$, aperto e limitato, una scelta canonica di N è la normale esterna a U. $U = \{f < 0\}$, $\Sigma = \{f = 0\}$, $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ con $\nabla f|_\Sigma \neq 0 \Longrightarrow N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$.
<u>OSS</u>: non tutte le Σ sono orientabili, ad esempio il *nastro di Möbius*.

53 Teorema della divergenza

$\Sigma = \partial U$ $(n-1)$-superficie regolare, $U \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto limitato, $v : \overline{U} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ campo di vettori di classe $C^1 \Longrightarrow \int_\Sigma vN = \int_U \operatorname{div}\big(v(x)\big)dx$, dove $\operatorname{div}(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}$.
<u>OSS</u>: assomiglia al teorema di integrazione per parti.
<u>OSS</u>: $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $\overline{U} \subseteq A$, $f \in C^2(A)$, $\int_U \Delta f = \int_U \operatorname{div}(\nabla f) = \int_\Sigma \nabla f N = \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial \nu}$, dove $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = tr(\nabla^2 f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ è detto **laplaciano di** f e $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ è la **derivata normale di** f.
<u>Dimostrazione</u>: 1 $(x_0', y_0) \in \Sigma$, $x_0' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $y_0 \in \mathbf{R}$, $C = B_r(x_0') \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, supponiamo $\Sigma \cap C = \Gamma_f$ dove $f : B_r(x_0') \longrightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ e $v(x) = u(x)e_n$ con $\operatorname{supp}(u) \subseteq C$, $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $\int_U \operatorname{div}(u) = \int_{C \cap U} \frac{\partial u}{\partial x_n} \overset{\text{F.-T.}}{=} \int_{B_r(x_0)} dx' \int_{y_0-\varepsilon}^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial y} dy \overset{\text{Teo. fond. calc.}}{=} \int_{B_r(x_0)} u\big(x', f(x')\big)dx'$.
2 $x_0 \in \Sigma$, supponiamo che esista $R > 0$ tale che $B_r(x_0) \cap \Sigma \subseteq C_i$ cilindri con asse lungo e_i $\forall i$, dove $\Sigma \cap C_i$ è grafico di f_i nella direzione e_i. Dato v con $\operatorname{supp}(v) \subseteq B_R(x_0)$, si ha

$$\int_U \operatorname{div}(v) = \sum_i \int_U \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_{C_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \overset{1}{=} \sum_i \int_\Sigma (v_i e_i)N = \int_\Sigma vN$$

<u>OSS</u>: posso scegliere $B_R(x_0)$ come sopra $\Longleftrightarrow$ $N(x_0)$ non è $\parallel$ ad e_i per nessun i.
3 Dato $x_0 \in \Sigma$ posso trovare $O : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ortogonale tale che $O\big(N(x)\big)$ non sia $\parallel$ ad e_i $\forall i$

$$\int_U \operatorname{div}(v) = \int_{O(U)} \operatorname{div}(Ov) = \int_{O(\Sigma)} OvON = \int_\Sigma vN$$

4 In generale, prendo un ricoprimento $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} B_R(x_i)$, $x_i \in \partial\Sigma$, $B_R(x_i)$ come sopra e una partizione dell'unità $\eta_i(x) : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, con $i = 0, ..., n$, con $\mathrm{supp}(\eta_0) \subseteq U$.

$$\mathrm{div}(v\eta_i) = \mathrm{div}(v)\eta_i + v\nabla\eta_i, \ \sum_i \mathrm{div}(v)\eta_i = \mathrm{div}(v)\sum_i \eta_i + v\nabla\Big(\sum_i \eta_i\Big) = \mathrm{div}(v),$$

$$\int_U \mathrm{div}(v) = \sum_{i=0}^{n}\int_U \mathrm{div}(v\eta_i) = \int_U \mathrm{div}(v\eta_0) + \sum_{i=1}^{n}\int_{B_R(x_i)} \mathrm{div}(v\eta_i) \overset{3}{=} \sum_{i=1}^{n}\int_\Sigma (vN)\eta_i = \int_\Sigma vN.$$

$$w(x) = \begin{cases} v\eta_0 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases} \quad \int_U \mathrm{div}(v\eta_0) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{div}(w) = \sum_i \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dx' \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx_i = 0$$

54 Integrali su superfici nello spazio

$\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $D \subseteq \mathbf{R}^2$ regolare (iniettiva), $\Sigma = \varphi(D)$ $\widehat{J}_\varphi = |\varphi_u \wedge \varphi_v| = |\varphi_u| \cdot |\varphi_v| \sin\theta$ dove

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \varphi_u^1 & \varphi_u^2 & \varphi_u^3 \\ \varphi_v^1 & \varphi_v^2 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} = (\varphi_u^2\varphi_v^3 - \varphi_v^2\varphi_u^3, \varphi_v^1\varphi_u^3 - \varphi_u^1\varphi_v^3, \varphi_u^1\varphi_v^2 - \varphi_v^1\varphi_u^2) \in < \varphi_u, \varphi_v >^\perp$$

$f : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}$, $f \circ \varphi$ integrabile su D,

$$\int_\Sigma f = \int_D f(\varphi)\widehat{J}_\varphi = \int_D f(\varphi)|\varphi_u - \varphi_v| du dv$$

<u>OSS</u>: $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è ortogonale a $T \sum_{\varphi(u,v)}$ (piano tangente) $\Longrightarrow n(u,v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$ è un campo unitario e normale a Σ, definisce un'orientazione di $\Sigma = \varphi(D)$.
$F : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^3$ campo di vettori, il flusso di F attraverso $\Sigma = \varphi(D)$ è

$$\int_\Sigma Fn = \int_D F(\varphi)\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\cancel{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}}\cancel{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} du dv$$

55 Bordo di $\Sigma = \varphi(D)$

<u>Def</u>: il **bordo** di $\Sigma = \varphi(D)$ è la curva $\partial\Sigma = \varphi(\partial D)$ (non è il bordo topologico).
Osserviamo che φ definisce un'orientazione canonica della curva $\partial\Sigma$.
L'orientazione di $\partial\Sigma$ indotta da φ si indica con $\partial^+\Sigma$.
Più in generale, data (Σ, n) superficie orientabile in $\mathbf{R}^3$, definisco l'**orientazione positiva** $\tau : \partial\Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^3$, τ tangente unitario a $\partial\Sigma$, in modo che $\tau \wedge n \in T\Sigma$ "punti" sempre "fuori" da Σ.

56 Teorema di Stokes

$\Sigma \subseteq \mathbf{R}^3$ superficie orientabile con bordo $\partial^+\Sigma$ e C^1, $F : \Sigma \subseteq U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ campo di vettori C^1

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}(F)n = \int_{\partial^+\Sigma} F$$

Dove, dato $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$, U aperto di $\mathbf{R}^3$, definiamo il **rotore** di F, $\mathrm{rot}(F) : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$, come

$$\mathrm{rot}(F) = \nabla \wedge F = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{Def.}}{=} \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y}\right)$$

<u>Dimostrazione</u>: supponiamo $\Sigma = \varphi(D)$ con $\varphi \in C^2$.
$\odot$ il caso $\varphi \in C^1$ si fa per approssimazione dato che nella tesi del teorema compaiono solo le derivate prime di φ.

$\odot$ data Σ orientabile e compatta posso sempre trovare $\varphi_i : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tale che $\varphi_i(D) \wedge \varphi_j(D) = \emptyset$ $i \neq j$ e $\Sigma = \bigcup\limits_i \varphi_i(\overline{D})$. Voglio che $n = \frac{(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v}{|(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v|}$. In tal caso

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}(F)n = \sum_i \int_D \big(\mathrm{rot}(F)\big)\big[(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v\big] dudv$$

$$\int_{\partial^+\Sigma} F = \sum_i \int_{\partial^+\varphi_i(D)} F = \sum_i \int_{\partial^+ D} F\tilde{\varphi}_i'(t)dt, \text{ dove } \tilde{\varphi} = \varphi|_{\partial^+ D}.$$

Continuiamo la dimostrazione nel caso $\Sigma = \varphi(D)$.
Scriviamo $F(x,y,z) = \big(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\big)$, $\Sigma \ni \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ e definiamo $\omega(x,y,z) = Xdx + Ydy + Zdz$.
La 1-forma in $\mathbf{R}^3$ associata ad F in modo che $\int_{\partial^+\Sigma} F = \int_{\partial^+\Sigma} \omega$. Vogliamo mostrare che

$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_D \mathrm{rot}(F)(\varphi_u \wedge \varphi_v) =$$

$$= \int_D \left[(Z_y - Y_z)\det\begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix} + (X_z - Z_x)\det\begin{pmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{pmatrix} + (Y_x - X_y)\det\begin{pmatrix} z_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{Dove } \mathrm{rot}(F) = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y) \text{ e } \varphi_u \wedge \varphi_v = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

Ho anche, per $\omega = Xdx + Ydy + Zdz$ e $\tilde{\varphi}(t) : \partial^+ D \longrightarrow \mathbf{R}^3$,

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi\big(\gamma(t)\big) = \Big(x\big(u(t), v(t)\big), y\big(u(t), v(t)\big), z\big(u(t), v(t)\big)\Big)$$

con $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ parametrizzazione positiva di ∂D e

$$\tilde{\varphi}'(t) = (x_u u' + x_v v', y_u u' + y_v v', z_u u' + z_v v') \text{ con } t \in [0,1] \Longrightarrow$$

$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_0^1 \Big(X\big(\tilde{\varphi}(t)\big), Y\big(\tilde{\varphi}(t)\big), Z\big(\tilde{\varphi}(t)\big)\Big) \cdot \tilde{\varphi}'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 (Xx_u + Yy_u + Zz_u)u'(t) + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)v'(t)dt =$$

$$= \int_{\partial^+ D} (Xx_u + Yy_u + Zz_u)du + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)dv \overset{\text{Gauss-Green}}{=}$$

$$= \int_D \big[(Xx_v + Yy_v + Zz_v)_u - (Xx_u + Yy_u + Zz_u)_v\big] dudv =$$

$$= \int_D \partial_u(Xx_v) - \partial_v(Xx_u) + \partial_u(Yy_v) - \partial_v(Yy_u) + \partial_u(Zz_v) - \partial_v(Zz_u) \overset{C^2}{=}$$

$$= \int_D (\cancel{X_x x_u x_v} + X_y y_u x_v + X_z z_u x_v - \cancel{X_x x_u x_v} - X_y x_u y_v - X_z x_u z_v) + (Y...) + (Z...)dudv =$$

$$\overset{\text{Verifica diretta}}{=} \int_D \mathrm{rot}(X,Y,Z)(\varphi_u \wedge \varphi_v)dudv \qquad \square$$

57 Equazioni differenziali ordinarie

$F\big(x, y(x), y'(x), ..., y^{(k)}(x)\big) = 0$, $x \in I \subseteq \mathbf{R}$, è la **formula implicita** di un'**equazione differenziale** di ordine k, l'incognita è la funzione $y : I \longrightarrow \mathbf{R}^n$ di classe C^k, $F : I \times (\mathbf{R}^n)^k \longrightarrow \mathbf{R}^n$ $F = (F_1, ..., F_n)$.

Se $n > 1$ si chiama anche **sistema di equazioni differenziali**: $\begin{cases} F_1(...) = 0 \\ \vdots \\ F_n(...) = 0 \end{cases}$

L'equazione scritta come $y^{(k)}(x) = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ si dice in **forma esplicita**.

OSS: introducendo $Y(x) = \big(y(x), y'(x), ..., y^{(k-1)}(x)\big) \in \mathbf{R}^{nk}$ un'equazione di ordine k in $y(x)$ si può riscrivere come equazione di ordine 1 in $y(x)$, ad esempio $y^{(k)}(x) = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ diventa $Y'(x) = \tilde{f}\big(x, Y(x)\big)$
OSS: queste equazioni si chiamano ordinarie poiché $x \in \mathbf{R}$, altrimenti sarebbero equazioni alle derivate parziali.
D'ora in poi guardiamo equazioni (o sistemi) del primo ordine.
Def: il **problema di Cauchy** è un'equazione abbinata a opportune "condizioni iniziali":

$$\boxed{\begin{cases} y' = f\big(x, y(x)\big) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x \in (x_0 - a, x_0 + a) \quad y : (x_0 - a, x_0 + a) \longrightarrow \mathbf{R}^n}$$

con $f : (x_0 - a, x_0 + a) \times B_r(y_0) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ limitata, continua in (x, y) e lipschitziana in y, cioè $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \longrightarrow \exists \delta > 0$ con $\delta \leq \min\{a, \frac{r}{M}\}$ e $\delta < \frac{1}{L}$, $M = ||f(x, y)||_{L^\infty} = \sup_{(x,y)} |f(x, y)|$, ed $\exists$ un'unica soluzione $y(x) \in C^1(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del problema di Cauchy.
Dimostrazione: passiamo alla *formulazione integrale* del problema di Cauchy:

$$\int_{x_0}^{x} y'(t) = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt \Longrightarrow \boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt} \; (*)$$

y risolve il problema di Cauchy $\Longleftrightarrow$ è soluzione di $(*)$.
Cerchiamo una soluzione di $(*)$:
Sia $F = \big(y(x)\big) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$, $F : C(I_\delta) \longrightarrow C(I_\delta)$, con $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $0 < \delta \leq a$ da fissare dopo. Noi cerchiamo δ e y tali che $y = F(y)$ cioè un punto fisso di F.
Sia ora $X_{r,\delta} = \{y \in C(I_\delta)$ tale che $||y - y_0||_\infty < r\}$. Osserviamo che $X_{r,\delta}$ è uno spazio metrico completo con la norma indotta da $C(I_\delta)$. Cerchiamo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $F|_{X_{r,\delta}} X_{r,\delta} \longrightarrow X_{r,\delta}$ e sia una *contrazione*, cioè dobbiamo verificare che:

1. $F(y) \in X_{r,\delta}$ $\forall y \in X_{r,\delta}$;
2. $||F(y_1) - F(y_2)||_\infty \leq C||y_1 - y_2||_\infty$ $C < 1$ $\forall y_1, y_2 \in X_{r,\delta}$.

1 $F(y) \in X_{r,\delta} \Longleftrightarrow |F\big(y(x)\big) - y_0| \leq n$ $\forall x \in I_\delta$. $|F\big(y(x)\big) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt| \leq M\delta$ se $\delta \leq \frac{r}{M}$.
OSS: il tempo di esistenza δ dipende "solo" da a, M ed L.
2 Siano $y_1, y_2 \in X_{r,\delta}$ e calcoliamo

$$|F\big(y_1(x)\big) - F\big(y_2(x)\big)| = \left| \int_{x_0}^{x} \Big[f\big(t, y_1(t)\big) - f\big(t, y_2(t)\big)\Big]dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} \big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big|dt \overset{\text{lip.}}{\leq}$$

$$\overset{\text{lip.}}{\leq} L \int_{x_0}^{x} |y_1 - y_2| \leq L\delta||y_1 - y_2||$$

Dobbiamo richiedere $\delta < \frac{1}{L}$.
Conclusione: se $\delta \leq a$, $\delta \leq \frac{r}{M}$ e $\delta < \frac{1}{L}$:

- $\Longrightarrow F|_{X_{r,\delta}}$ è una contrazione;
- $\Longrightarrow \exists!$ punto fisso $y = f(y)$ $y \in X_{r,\delta}$;
- $\Longrightarrow \exists!$ soluzione del problema di Cauchy in $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Data ora una soluzione del problema di Cauchy, $y \in C^1(I_\delta)$ abbiamo che y è M-lipschitziana $\Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 + \delta} y(x) = l$:

1. $\delta = a$;
2. $\delta < a$ ma $l \in \{y_0 + r, y_0 - r\}$;
3. $\delta < a$ ma $l \in (y_0 - r, y_0 + r)$, in questo caso possiamo estendere la soluzione "ripartendo" da $(x_0 + \delta, l)$.

Cor: se $y : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ è la **soluzione massimale** del problema di Cauchy $\Longrightarrow$

$$\delta_2 = a \text{ o } \lim_{x \to x_0 + \delta_2} y(x) = y_0 \pm r \text{ e } \delta_1 = a \text{ o } \lim_{x \to x_0 - \delta_1} y(x) = y_0 \pm r$$

Cor: se δ_1 e δ_2 sono i tempi massimali di esistenza $\Longrightarrow \delta_1$ e $\delta_2 \geq \min\{a, \frac{r}{M}\}$, cioè non c'è più la dipendenza da L.
Cor: $r = +\infty$, cioè $f : (x_0 - a, x_0 + a) \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \Longrightarrow$ se $\delta_2 < a \Longrightarrow \lim_{x \to x_0 + \delta_2} |y(x)| = +\infty$ e lo stesso vale per δ_1 (Teorema dell'asintoto).
Stiamo considerando il problema, con f continua e lipschitziana in y,

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \longrightarrow \mathbf{R}^n \quad f : (x_0 - a, x_0 + a) \times B_r(y_0) \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

Abbiamo visto che $\exists!$ soluzione y con $\delta \sim \min\{a, \frac{r}{M}\}$.
In queste ipotesi su f, la soluzione $y(x, y_0)$ dipende con continuità da y_0.
Teorema: sia $y_1 \in B_r(y_0)$ e sia $y(x, y_1)$ soluzione del problema, con $y(x_0) = y_1$ definito in $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, dove $\delta_1 = \max\{a, \frac{r - |y_0 - y_1|}{M}\}$, allora $\exists \overline{\delta}$ e C dipendenti da f (cioè da M ed L) tali che $|y(x, y_0) - y(x, y_1)| \leq C|y_0 - y_1| \quad \forall x \in (x_0 - \overline{\delta}, x_0 + \overline{\delta})$.
Dimostrazione: scriviamo il problema in forma integrale

$$y(x, y_i) = y_i + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s, y_i)\big) ds \quad i = 0, 1$$

Facciamo la differenza

$$|y(x, y_0) - y(x, y_1)| \leq |y_0 - y_1| + \int_{x_0}^{x} \big| f\big(s, y(s, y_0)\big) - f\big(s, y(s, y_1)\big) \big| ds \leq$$

$$\leq |y_0 - y_1| + L \int_{x_0}^{x} |y(s, y_0) - y(s, y_1)| ds \leq |y_0 - y_1| + L\overline{\delta} ||y(s, y_0) - y(s, y_1)||_{L^\infty(I_{\overline{\delta}})}$$

con $I_{\overline{\delta}} = (x_0 - \overline{\delta}, x_0 + \overline{\delta})$.
Passando al sup in $x \in I_{\overline{\delta}}$ e prendendo $\overline{\delta} < \frac{1}{L}$:

$$||y(x, y_0) - y(x, y_1)||_{L^\infty} \leq |y_0 - y_1| + L\overline{\delta} ||y(x, y_0) - y(x, y_1)||_{L^\infty} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ||y(x, y_0) - y(x, y_1)||_{L^\infty} \leq \frac{1}{1 - L\overline{\delta}} |y_0 - y_1| \quad \left(C = \frac{1}{1 - L\overline{\delta}} \right) \qquad \square$$

OSS: usando l'equazione $y' = f(x, y)$

$$||y'(x, y_0) - y'(x, y_1)||_{L^\infty} = \big|\big| f\big(x, y(x, y_o)\big) - f\big(x, y(x, y_1)\big) \big|\big|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq L ||y(x, y_0) - y(x, y_1)|| \leq CL |y_0 - y_1|$$

La convergenza è anche in $C^1(I_{\overline{\delta}})$.
Lemma di Gronwall: Sia $v \in C^0\big(I_\delta(x_0)\big)$ tale che $0 \leq v \leq \alpha + \beta |\int_{x_0}^{x} v| \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$, con $\alpha, \beta \geq 0$,

$$\Longrightarrow v(x) \leq \alpha e^{\beta |x - x_0|}$$

Dimostrazione: guardiamo il caso $x > x_0$ e poniamo $u(x) = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} v$, quindi $0 \leq v(x) \leq u(x)$, $u(x)$ verifica $u'(x) = \beta v(x) \leq \beta u(x)$, cioè $u' - \beta u \leq 0$, $u(x_0) = \alpha$

$$e^{-\beta(x - x_0)}(u' - \beta u) = \big(e^{-\beta(x - x_0)} u\big)' = 0$$

$$\Longrightarrow e^{-\beta(x - x_0)} u(x) \leq u(x_0) = \alpha \quad \forall x > x_0$$

$$\Longrightarrow v(x) \leq u(x) \leq \alpha e^{\beta(x - x_0)} \quad \forall x > x_0 \qquad \square$$

Usando questo Lemma ottengo
Teorema: $|y(x, y_0) - y(x, y_1)| \leq e^{L|x - x_0|} |y_0 - y_1| \quad \forall x \in I_{\overline{\delta}}$.
Dimostrazione: ragiono come prima e arrivo alla stima

$$|y(x, y_0) - y(x, y_1)| \leq |y_0 - y_1| + L \int_{x_0}^{x} |y(s, y_0) - y(s, y_1)| ds$$

e concludo col Lemma di Gronwall, ponendo $\alpha = |y_0 - y_1|$, $\beta = L$ e $v(x) = |y(x, y_0) - y(x, y_1)|$. $\square$
OSS: con un po' di attenzione si vede che c'è dipendenza continua (lipschitziana) anche da (x_0, y_0).
Cosa possiamo dire se f è solo continua?
Esempio (Baffo di Peano): $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ non è lipschitziana.

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_0 \\ (x - x_0)^2 & x > x_0 \end{cases}$$

Quindi in generale non c'è unicità, c'è però esistenza (!) e si fa approssimando f con funzioni f_n lipschitziane in y.
Ricordiamo un teorema di compattezza per funzioni continue su un compatto:

58 Teorema di Ascoli-Arzelà

Sia K uno spazio metrico compatto (ad esempio, $K \subseteq \mathbf{R}^n$ compatto) $C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbf{R}$ continue$\}$ spazio di Banach con $||f|| = \max_{x \in K} |f(x)|$. Sia $f_n \in C(K)$ tale che:

1. $\sup_n |f_n(x)| < +\infty \quad \forall x \in K$;

2. f_n sono **equicontinue**, cioè $\forall \varepsilon\ \exists \delta$ tali che $d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

$\Longrightarrow \exists f \in C(K)$ ed $\exists n_k$ sottosuccessione tale che $f_{n_k}(x) \xrightarrow[C(K)]{} f(x)$ per $k \to +\infty$.
Dimostrazione: K, essendo compatto, è separabile, cioè ammette un insieme denso numerabile. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, X_n finiti, $\overline{X} = K$.
X_n: dato n, sia $\{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x \in K}$ un ricoprimento di $K \Longrightarrow \exists$ sottoricoprimento finito $\{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x \in X_n}$.
Osserviamo che $\forall x \in K\ \exists x' \in X_n$ tale che $d(x, x') < \frac{1}{n}$ da cui segue $\overline{X} = K$.
$X = \{x_1, ..., x_k, ...\}$, guardiamo $f_n(x_k)$ con $x_k \in K$ fissato. Per 1 la successione $n \to f_n(x_1)$ ammette una sottosuccessione convergente $f_n^{(1)}(x_1)$, faccio la stessa cosa con $f_n^{(1)}(x_2)$ e così via:

$$\begin{array}{cccccc} f_1^{(1)}(x_1) & f_2^{(1)}(x_1) & \dots & f_n^{(1)}(x_1) & \Longrightarrow y_1 \in \mathbf{R} \\ f_1^{(2)}(x_2) & f_2^{(2)}(x_2) & \dots & f_n^{(2)}(x_2) & \Longrightarrow y_2 \in \mathbf{R} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1^{(k)}(x_k) & f_2^{(k)}(x_k) & \dots & f_n^{(k)}(x_k) & \Longrightarrow y_k \in \mathbf{R} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

Considero la sottosuccessione di f_n data da $g_k = f_k^{(k)}$ e osservo che, per costruzione, $g_k(x_i) \xrightarrow[k \to +\infty]{} y_i \in \mathbf{R}\ \forall x_i \in X$. Dico che g_k è di Cauchy in $C(K)$ e quindi $\exists f \in C(K)$ tale che $g(k) \xrightarrow[C(K)]{} f$ per $k \to +\infty$. Devo mostrare che $\forall n\ \exists k_\varepsilon$ tale che $|g_k(x) - g_l(x)| \le 3\varepsilon\ \forall k, l > k_\varepsilon$ e $\forall x \in K$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia δ tale che vale 2 e sia $\overline{n}$ tale che $\frac{1}{\overline{n}} < \delta$. So che $g_k(x_i)$ è di Cauchy $\forall x_i \in X_{\overline{n}}$, sia quindi k_ε tale che $|g_k(x_i) - g_l(x_i)| \le \varepsilon\ \forall x_i \in X_{\overline{n}}$ (lo posso fare perché $X_{\overline{n}}$ è finito) $\forall k, l \ge k_\varepsilon$. Fissato $x \in K\ \exists x_j \in X_{\overline{n}}$ tale che $d(x, x_j) < \frac{1}{\overline{n}} < \delta$ e quindi, ricordando 2, abbiamo

$$|g_k(x) - g_l(x)| \le |g_k(x) - g_k(x_j)| + |g_k(x_j) - g_l(x_j)| + |g_l(x_j) - g_l(x)| \overset{2}{\le} 3\varepsilon \quad \forall k, l \ge k_\varepsilon \qquad \square$$

OSS: se $f_n : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che $f_n|_{\overline{B_R}}$ sono equilimitate ed equicontinue $\forall R > 0 \Longrightarrow \exists f_{n_k}$ sottosuccessione e $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ funzione continua tali che $f_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} f$ uniformemente in ogni compatto $K \subseteq \mathbf{R}^n$.
Teorema di Peano: sia $f : (x_0 - a, x_0 + a) \times B_r(y_0) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ continua e limitata $\Longrightarrow \exists$ soluzione del problema $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ definita in $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta = \min\{a, \frac{r}{M}\}$, con $M = ||f||_\infty$.
Dimostrazione: si approssima f con f_k funzione localmente lipschitziana in y, ad esempio, $k \in \mathbf{N}$ $f_k(x, y) = \inf_{z \in B_r(y_0)} \{\underbrace{f(x, z) + k|y - z|}_{k\text{-lip in } y}\} \le f(x, y)$. f_k è k-lipschitziana in y e $\lim_k f_k = \sup_k f_k = f$.

In alternativa, si può usare il Teorema di Stone-Weierstrass per cui i polinomi sono densi nelle funzioni continue.

Per il Teorema precedente $\exists!$ soluzione $y_k : I_{\delta_k} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ di $\begin{cases} y' = f_k(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ con $\delta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \delta$.

y_k sono equilibrate, $y_k' = f_k(x, y_k)$ sono equilibrate $\Longrightarrow y_k$ sono equicontinue

$\overset{\text{Ascoli-Arzelà}}{\Longrightarrow} \exists y : I_\delta \longrightarrow \mathbf{R}^n$ tale che $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ uniformemente, a meno di sottosuccessioni.

Le y_k verificano $y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_k\big(s, y_k(s)\big)ds$ e passando al limite ho $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f\big(s, y(s)\big)ds$, cioè y è soluzione del problema. □

OSS: come già visto, in generale y non è l'unica soluzione.

OSS: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ e supponiamo che $\boxed{|f(x,y)| \leq a(x)|y| + b(x)}$ (sublinearità di f in y) con a, b positive e continue $\Longrightarrow$ se considero il problema in $E = I_\delta \times \mathbf{R}^n$ ho che $|y(x)| \leq (y_0 + aB) + A\int |y|$, con $A = \sup\limits_{I_\delta} a,\ B = \sup\limits_{I_\delta} b \overset{\text{Gronwall}}{\Longrightarrow} \boxed{|y(x)| \leq (y_0 + aB)e^{A|x-x_0|}} < +\infty$ per $x \in I_\delta \Longrightarrow$ ho esistenza globale per il problema.

59 Caso speciale: sistemi lineari in y

$y' = A(x)y + b(x)$ con $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,n}$ continua e $b : I \longrightarrow \mathbf{R}^n$ continua, con le ipotesi di $\exists!$ e di $\exists$ globale, $\mathcal{M}_{n,n} \simeq \mathbf{R}^{n^2}$ lo considero con la norma $||M|| = \max\limits_{|x|\leq 1} |Mx|_{\mathbf{R}^n}$ (massimo autovalore) è una norma su $\mathcal{M}_{n,n}$:

- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$;
- $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$;
- $||A|| \leq ||A||_{\mathbf{R}^{n^2}} = \Big(\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Se:

- $A(x) = A\ \forall x$ il sistema è a coefficienti costanti;
- $b = 0$ il sistema è omogeneo $\Longrightarrow$ le soluzioni di $y' = A(x)y$ sono uno spazio vettoriale di dimensione n con base le soluzioni y_i di $\begin{cases} y' = A(x)y \\ y_0 = e_i \end{cases}$ infatti $\forall y_0 = \big((y_0)_1, ..., (y_0)_n\big)$ $y(x) = \sum\limits_i (y_0)_i y_i(x)$ è soluzione di $\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ ma è anche l'unica per l'unicità.

Nel caso generale $y' = A(x)y + b(x)$ si osserva che y_1, y_2 sono soluzioni $\Longrightarrow (y_1 - y_2)' = A(x)(y_1 - y_2)$ $\Longrightarrow y_1 - y_2$ è soluzione del sistema omogeneo $\Longrightarrow$ le soluzioni sono uno spazio affine di dimensione n: $\boxed{y(x) = y_p(x) + y_0(x)}$ (=soluzione particolare + generica soluzione del sistema omogeneo).

OSS: le equazioni lineari di ordine $k > 1$ rientrano in questo caso:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x) y^{(i)}(x) + b(x) \quad y : I \longrightarrow \mathbf{R} \quad a_i, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$Y(x) : I \longrightarrow \mathbf{R}^k \quad \boxed{Y_i(x) = y^{(i-1)}(x)}$$

$$\begin{cases} Y_i'(x) = Y_{i+1} \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ Y_k' = \sum_{i=0}^{k-1} a_i Y_{i+1} + b(x) \end{cases} \Longrightarrow Y' = A(x)Y + B$$

con $B(x) = \big(0, ..., b(x)\big) \in \mathbf{R}^k$, $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix}$ e $Y_1 = y, ..., Y_i = y^{(i-1)}$.

60 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

$y' = Ay$ con $A \in \mathcal{M}_{n,n}$. (Risolubili esplicitamente)
Introduciamo l'**esponenziale di una matrice**:

$$e^A : \mathcal{M}_{n,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,n} \text{ definita dalla serie } e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

OSS: ponendo $f_k(A) = \frac{A^k}{k!} : \mathcal{M}_{n,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,n}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{N} ||f_k(A)|| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{||A||^k}{k!} \leq e^{||A||} \leq e^R \text{ se } ||A|| \leq R$$

Quindi, per il criterio della convergenza totale nello spazio $\mathcal{M}_{n,n}$, dato che $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\left| \frac{A^k}{k!} \right|\right| \leq e^{||A||}$, le somme parziali $f_N(A) \longrightarrow e^A$ sono uniformi sui compatti di $\mathcal{M}_{n,n}$, con $||e^A|| \leq e^{||A||}$.
Proprietà di e^A:

- se $AB = BA \Longrightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$:

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{A^i B^{k-i}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$$

  OSS: non è vero se A, B non commutano;

- Ragionando come oer e^x si può mostrare che

$$e^A = \lim_{n \to +\infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n \text{ con } I = \text{matrice identità.}$$

- Usando il fatto che $\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + o(\varepsilon)$, che segue dal fatto che $\det(I + \varepsilon A) = \prod\limits_i (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum\limits_i \lambda_i + o(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + o(\varepsilon)$, con $\lambda_i \in \mathbf{C}$ autovalori, si ottiene che

$$\boxed{\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)} > 0}$$

- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \Longrightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Prop: la funzione $x \longrightarrow e^{Ax}$ è differenziabile e si ha $\frac{d}{dx} e^{Ax} = Ae^{Ax}$.
Di conseguenza, la soluzione di $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è data da $\boxed{y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0}$.
Dimostrazione:

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = e^{Ax} \lim_{h \to 0} \frac{e^{Ah} - I}{h}$$

$$e^{Ah} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} = I + h \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{k!}}_{=A+O(h)}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx} e^{Ax} = e^{Ax} \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{k!} = e^{Ax} A = Ae^{Ax}$$

OSS: resta il problema di "calcolare" e^{Ax}.

Analogamente nelle equazioni del primo ordine, la soluzione di $\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è data da

$$\boxed{y(x) = \underbrace{e^{A(x-x_0)}y_0}_{=y_0(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} e^{-A(s)}b(s)ds}_{=y_p(x)}}$$, infatti

$$y'(x) = Ae^{A(x-x_0)}y_0 + Ae^{Ax}\int_{x_0}^{x} e^{-A(s)}b(s) + \cancel{e^{Ax}}\cancel{e^{-Ax}}b(x) = Ay(x) + b(x) \text{ e } y(x_0) = y_0.$$

61 Sistemi autonomi

$x' = f(x)$, $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$.
Lo studio della stabilità dei punti stazionari $x : f(x) = 0$ si fa guardando gli autovalori della matrice $Df(x)$:

- $Re(\lambda) > 0 \quad \forall\lambda$ autovalore $\Longrightarrow$ instabilità, **sorgente**;
- $Re(\lambda) < 0 \quad \forall\lambda$ autovalore $\Longrightarrow$ stabilità, **pozzo**.

In dimensione 2 abbiamo classificato i punti stazionari in selle, fuochi (stabili o instabili), nodi (stabili o instabili) e centri.

62 Teorema di linearizzazione (Hartman-Grobman)

$f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ di classe C^1, p tale che $f(p) = 0$ punto stazionario iperbolico, cioè $Re(\lambda) \neq 0 \quad \forall\lambda$ autovalore di $Df(p), \Longrightarrow \exists U \ni p$ intorno di p e un omeomorfismo $\phi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ che mappa le traiettorie di $x' = f(x)$ in quelle del linearizzato $X' = Df(p) \cdot X$. Più precisamente $\phi(p) = 0$ e $X(t, X_0) = \phi\Big(x\big(t, \underbrace{\phi^{-1}(X_0)}_{=x_0}\big)\Big)$, dove $X(t, X_0)$ è soluzione di $\begin{cases} X' = Df(p) \cdot X \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ e $x(t, x_0)$ è soluzione di $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \in U \end{cases}$
La dimostrazione non è semplice ma deriva dal Teorema delle contrazioni.
OSS: in generale, anche se $f \in C^\infty$, ϕ non è C^1 ma solo hölderiano.
OSS: l'ipotesi p iperbolico è essenziale.
OSS: fuori dai punti stazionari il sistema $x' = f(x)$ è regolare (Teorema di rettificazione).
Cosa si può dire oltre allo studio dei punti stazionari?

a) Qual è il comportamento di $x(t, x_0)$ per $t \to \pm\infty$?

b) Esistono orbite periodiche (non costanti)? Cioè soluzioni $x(t, x_0)$ tali che $x(t + T, x_0) = x(t, x_0) \quad \forall t$ per qualche $T > 0$ (periodo).

63 Insiemi limite

Data una soluzione $x(t)$ con $x(t_0) = x_0$:

1) se è definita su $[t_0, +\infty)$, si dice **ω-limite** l'insieme dei punti di "accumulazione" di $x(t)$ per $t \longrightarrow +\infty$, cioè $\overline{x} \in \omega$-limite $\Longrightarrow \exists t_n \longrightarrow +\infty$ con $x(t_n) \longrightarrow \overline{x}$;

2) se è definita su $(-\infty, t_0]$ si definisce analogamente l'**α-limite** come insieme di "accumulazione" di $x(t)$ per $t \longrightarrow -\infty$.

Prop: $L = \omega$-limite di $x(t)$ (lo stesso vale per l'α-limite), allora:

1 L chiuso;

2 L è invariante, cioè $\tilde{x}(t) \in L \quad \forall t > 0$ e $\forall \tilde{x}_0 \in L$, dove $\tilde{x}$ risolve $\begin{cases} \tilde{x}' = f(\tilde{x}) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$;

3 se L è compatto è anche connesso.

Dimostrazione: ① $\overline{x}$ punto di accumulazione di $L \Longrightarrow \exists x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{x}$ con $x_n \in L$,
$|x_n - \overline{x}| < \frac{1}{n}, \Longrightarrow \exists x(t_n)$ tale che $|x_n - x(t_n)| < \frac{1}{n} \Longrightarrow x(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{x} \Longrightarrow \overline{x} \in L$.
② sia $\tilde{x}(t)$ soluzione di $\begin{cases} \tilde{x}' = f(\tilde{x}) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \in L \end{cases}$, dato che $\tilde{x}_0 \in L$, $\exists x(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tilde{x}_0 \Longrightarrow$
$x(t_n + t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tilde{x}(t)\ \forall t > 0$, per la dipendenza continua dai dati iniziali, $\Longrightarrow \tilde{x}(t) \in L\ \forall t > 0$.
③ L compatto, se per assurdo non fosse connesso, $\Longrightarrow \exists U_1, U_2$ aperti disgiunti tale che $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = L \cap U_1$ e $L_2 = L \cap U_2$. L_1, L_2 compatti disgiunti $\Longrightarrow dist(L_1, L_2) = \delta > 0$. Sia $\Sigma = \{x : dist(L_1, L_2) = \frac{\delta}{2}\}$, $\exists t_n \longrightarrow +\infty$ tale che $x(t_n) \in \Sigma$.
Per compattezza $\exists x(t_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \overline{x} \in \Sigma \Longrightarrow \overline{x} \in L$ ma $L \cap \Sigma = \emptyset$ ` □

64 Teorema di Poincaré-Bendixson

$n = 2$, L insieme limite compatto di $x(t)$, $f(x) \neq 0\ \forall x \in L$ (non contiene punti stazionari) $\Longrightarrow L$ è un'orbita periodica (non costante). L si dice **ciclo limite** di $x(t)$.
Cor: $K \subseteq \mathbf{R}^2$ compatto invariante per $x' = f(x)$ senza punti stazionari $\Longrightarrow K$ contiene un'orbita periodica. Basta prendere l'ω-limite di $x(t, x_0)$ per un qualunque $x_0 \in K$.
Dimostrazione (Teorema):
Def: $S = \gamma\big([0,1]\big)$, $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ regolare e iniettiva è una **sezione locale del flusso** se $f(x)$ non è mai tangente ad $S\ \forall x \in S$.
Lemma: S sezione locale, $x(t)$ soluzione, $x_i = x(t_i) \in S$, con $t_i < t_{i+1}$ e $i \in \{1, ..., n\}, \Longrightarrow x_i$ è una successione monotona in S, cioè $\gamma^{-1}(x_i)$ è monotona in $[0,1]$.
Dimostrazione: $\mathbf{R}^2 \setminus A$ è invariante $\Longrightarrow x_3$ non può stare tra x_1 e x_2. □
(Concludiamo la Dimostrazione del Teorema) L ω-limite di $x(t)$, L compatto senza punti stazionari. $y_0 \in L$, $y(t)$ soluzione di $y' = f(y)$ con $y(0) = y_0 \Longrightarrow y(t) \in L$ (L è invariante). Sia $\overline{L} \subseteq L$ l'ω-limite di $y(t)$ compatto, $z_0 \in L'$ e S sezione locale in z_0. $z_0 \in L' \Longrightarrow \exists t_n \longrightarrow +\infty$ tale che $y(t_n) \longrightarrow z_0 \in S \Longrightarrow \exists t'_n \longrightarrow +\infty$ tale che $y_n = y(t'_n) \longrightarrow z_0$, $y_n \in S$, in particolare, y_n è monotona su S per il Lemma. Dico che $y_n = z_0\ \forall n \Longrightarrow y(t)$ è una soluzione periodica ($L' = Im\big(y(t)\big)$).
Supponiamo per assurdo che se $y_n \neq y_m$ e $y_n, y_m \in L \Longrightarrow$ sono punti di accumulazione di $x(t)$. $\exists \tau_k, \sigma_k$ tali che $x(\tau_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y_n$, $x(\sigma_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y_m$ e posso supporre $x(\tau_k) \in S$, $x(\sigma_k) \in S$ $\forall k \Longrightarrow x(t)$ non interseca S in maniera monotona ` $\Longrightarrow y_n = z_0\ \forall n$ e $y(t)$ è periodica. □
$x(t)$ non interseca $y(t) \longrightarrow L \setminus L'$ sta tutto fuori da L' o dentro L'.
Supponiamo per assurdo $L \setminus L' \neq \emptyset$, sia $z_0 \in L \setminus L'$ e $z(t)$ la soluzione con $z(0) = z_0 \Longrightarrow z(t)$ è un'altra orbita periodica.
L deve essere fuori da $Im\big(z(t)\big)$ e contenere $Im\big(y(t)\big)$ ` $\Longrightarrow L = L' = Im\big(y(t)\big)$.
OSS: K è invariante per $x' = f(x)$ se $\boxed{f(x)n(x) < 0 \quad \forall x \in \partial K}$, dove $n(x)$ è la normale esterna a ∂K in x.

65 Dinamica di popolazioni

65.1 1 popolazione

$x(t) =$ numero di individui al tempo t.

$$\begin{cases} x'(t) = kx - cx^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{k}{c} \\ x(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{soluzioni stazionarie}$$

$k > 0$ è il **tasso di crescita** e $c > 0$ e lo **smorzamento** (o **competizione**).

65.2 2 popolazioni in competizione

$x(t)$ e $y(t)$,

$$\begin{cases} x' = (k_1 - a_{11}x - a_{12}y)x \\ y' = (k_2 - a_{21}x - a_{22}y)y \end{cases}$$

$k_1, k_2 > 0$ **crescita** e $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} > 0$ **competizione**.
Sistema autonomo 2×2, studio qualitativo:
cerchiamo i punti stazionari

$$x' = 0 \Longleftrightarrow k_1 - a_{11}x - a_{12}y = 0 \Longrightarrow y = \frac{-a_{11}}{a_{12}}x + \frac{k_1}{a_{12}} \text{ retta } R_1$$

$$y' = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{-a_{21}}{a_{22}}x + \frac{k_2}{a_{22}} \text{ retta } R_2$$

Ci interessa il 1° quadrante: chiamo O il punto (0,0);
P_1 il punto di intersezione tra R_1 e l'asse x, $\big(\frac{k_1}{a_{11}}, 0\big)$;
P_2 il punto di intersezione tra R_2 e l'asse y, $\big(0, \frac{k_2}{a_{22}}\big)$,
P_3 il punto di intersezione tra R_1 e R_2.

Caso 1: R_1 e R_2 non si intersecano nel quadrante

O, P_1, P_2 punti stazionari:
Stabilità di O, P_1, P_2:
O nodo instabile, P_1 nodo stabile e P_2 sella, infatti:

$$O: \text{ il sistema lineare è } \begin{cases} x' = k_1 x \\ y' = k_2 y \end{cases} \quad \text{la matrice Jacobiana è } \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ nodo instabile.}$$

La matrice Jacobiana in un generico (x, y) è:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} k_1 - 2a_{11}x - a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}y & k_2 - a_{21}x - 2a_{22}y \end{pmatrix}$$

Conclusione: tutte le soluzioni $\longrightarrow P_1$: sopravvive solo la prima popolazione.

Caso 2: R_1 e R_2 si intersecano nel quadrante

Se $\frac{a_{21}}{a_{22}} > \frac{a_{11}}{a_{12}} \Longrightarrow P_1, P_2$ nodi stabili, O nodo instabile e P_3 sella (verifica con la matrice $J(x,y)$).
Conclusione: sopravvive solo una popolazione in base al dato iniziale (x_0, y_0).
Se $\frac{a_{21}}{a_{22}} < \frac{a_{11}}{a_{12}} \Longrightarrow O$ nodo instabile, P_1, P_2 selle e P_3 nodo stabile (idem).
Conclusione: le due popolazioni "convivono" e si stabilizzano in P_3, $x_0 > 0$ e $y_0 > 0 \Longrightarrow \big(x(t), y(t)\big) \xrightarrow[t \to +\infty]{} P_3$.

65.3 Modelli preda-predatore (Lotka-Volterra)

$x(t)$ prede e $y(t)$ predatori.

$$\begin{cases} x' = (a - by)x & \Longrightarrow x' = ax \longrightarrow x(t) = x_0 e^{at} \\ y' = (-c + dx)y & \Longrightarrow y' = -ct \longrightarrow y(t) = y_0 e^{-ct} \end{cases}$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} x' = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee y = \frac{a}{b} > 0 \\ y' = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \vee x = \frac{c}{d} > 0 \end{cases} \Longrightarrow O = (0,0) \text{ e } P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Stabilità di O e P:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} \Longrightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow 0 \text{ sella}$$

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \; tr(J) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + ac = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{ac} \wedge \det(J) = ac > 0 \Longrightarrow P \text{ centro.}$$

<u>OSS</u>: in P non vale il <u>Teorema di linearizzazione</u>, il P potremmo avere un centro o un fuoco.
Se P fosse centro, ci aspetteremmo che il quadrante sia fibrato in orbite periodiche del sistema.
Cerchiamo un integrale primo, cioè

$$V : (0, +\infty)^2 \longrightarrow \mathbf{R} \text{ tale che } \frac{d}{dt}V\big(x(t), y(t)\big) = 0$$

$$0 = \frac{d}{dt}V\big(x(t), y(t)\big) = \nabla V\big(x(t), y(t)\big)\big(x'(t), y'(t)\big) = V_x(x,y)(a-by)x + V_y(x,y)(-c+dx)y$$

Dividiamo tutto per xy e otteniamo

$$V_x(x,y)\bigg(\frac{a}{y} - b\bigg) + V_y(x,y)\bigg(-\frac{c}{x} + d\bigg) = 0$$

Ad esempio, possiamo porre

$$\begin{matrix} V_x(x,y) = -\frac{c}{x} + d \Longrightarrow V = -c\log x + dx + f(y) \\ V_y(x,y) = -\frac{a}{y} + b \Longrightarrow V = -a\log y + by + g(x) \end{matrix} \Longrightarrow \boxed{V(x,y) = dx + by - c\log x - a\log y}$$

è integrale primo. V è coerciva nel quadrante, con minimo in P.
$\{V = c\}$ sono le orbite del sistema, P è un centro.

Variante leggermente più realistica:

$$\begin{cases} x' = (a - by - \varepsilon x)x \\ y' = (-c + dx - \delta y)y \end{cases}$$

$\varepsilon, \delta > 0$, piccoli, **competizione**.

$$\begin{cases} x' = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee a - by - \varepsilon x = 0 \text{ retta } R_1 \\ y' = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \vee -c + dx - \delta y = 0 \text{ retta } R_2 \end{cases}$$

Siano: O il punto (0,0);
Q il punto di intersezione tra R_1 e l'asse x, $\big(\frac{a}{\varepsilon}, 0\big)$;
P punto di intersezione tra R_1 e R_2.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a - 2\varepsilon x - by & -bx \\ dy & -c + dx - 2\delta y \end{pmatrix}$$

O e Q sono selle.
Si può verificare che $J(P)$ ha autovalori complessi coniugati con parte reale $< 0 \Longrightarrow P$ è un fuoco stabile: le due popolazioni si stabilizzano in P.
OSS: la funzione V precedente $V(x,y) = dx + by - c\log x - a\log y$ diventa una *funzione di Lyapunov* per il sistema, cioè $\frac{d}{dt}V\big(x(t), y(t)\big) = \nabla V(x,y)(\dot{x}, \dot{y}) < 0$, $\{V = c\}$ sono tutti compatti invarianti.

66 Misure di Hausdorff

Sono misure di Borel in $\mathbf{R}^n$ pensate per misurare insiemi "k-dimensionali".
Def: $k \in [0, n]$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ insieme.

$$\underbrace{\mathcal{H}^k(A)}_{\text{misura di H. } k\text{-dim}} = \sup_{\delta > 0} \underbrace{\mathcal{H}^k_\delta(A)}_{\text{premisure di H. } k\text{-dim}} = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^k_\delta(A)$$

$$\text{Dove } \mathcal{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i)^k : \operatorname{diam}(E_i) < \delta\ \forall i,\ \overbrace{\bigcup_i E_i}^{\text{ricopr. di } A} \supseteq A \right\}$$

Dove $\frac{\omega_k}{2^k}$ è la misura della palla unitaria in $\mathbf{R}^k$ e $\operatorname{diam}(E) = \sup_{x,y \in E} |x - y|$.
OSS: $\delta_1 < \delta_2 \Longrightarrow \mathcal{H}^k_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^k_{\delta_2}(A)$.
OSS: si può dare la definizione supponendo che gli E_i siano palle in $\mathbf{R}^n$ e si ottiene

$$\underbrace{S^k(A)}_{\text{misura di H. sferica}} \geq \mathcal{H}^k(A)$$

Teorema:

(1) $\mathcal{H}^k$ è una misura di Borel, cioè $\mathcal{H}^k$ è una misura esterna e $\mathcal{M} \supseteq \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$;

(2) $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti, $\mathcal{H}^0 = \#A$ e $\mathcal{H}^n = \mathscr{L}$;

(3) $k > k'$ e $\mathcal{H}^k(A) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^{k'}(A) = +\infty$;

(4) $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ è c-lipschitziana $\Longrightarrow \mathcal{H}^k\big(f(A)\big) \leq c^k \mathcal{H}^k(A)$.

Dimostrazione (idea): (1) $\odot$ verifica che $\mathcal{H}^k_\delta$, e quindi $\mathcal{H}^k$, è una misura esterna, cioè è monotona per $\subseteq$ e σ-subadditiva;
$\odot$ $\mathcal{H}^k$ è additiva sui distanti, cioè $\mathrm{dist}(a,b) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^k_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^k_\delta(A) + \mathcal{H}^k_\delta(B)$,
dove $\delta = \frac{\mathrm{dist}(A,B)}{2}$.
$\odot$ $\Longrightarrow \mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(A \cap B) + \mathcal{H}^k(A \setminus B)\ \forall B$ Borel (basta B chiuso) $\overset{\text{Carathéodory}}{\Longrightarrow} \mathcal{M} \supseteq \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$.
2 $\mathcal{H}^0(A) = \#A$ $\odot$ $A = \{x_1, ..., x_n\}$ $\delta < \min \frac{|x_i - x_j|}{2}$ $\omega_0 = 1$,
$\mathcal{H}_\delta(A) = \inf\big\{ \sum\limits_i 1 : \mathrm{diam}(E_i) < \delta, A \subseteq \bigcup\limits_i E_i \big\} = n = \#A$.
$\odot$ $\#A = +\infty \Longrightarrow \mathcal{H}^0(A) = \sup\limits_{A' \subseteq A} \mathcal{H}^0(A') = +\infty$ (monotonia).
$\odot$ $\mathcal{H}^n = \mathscr{L}$ è un po' più complicato (non lo facciamo).
3

$$\underbrace{\mathcal{H}^k_\delta(A)}_{>0} = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_i \mathrm{diam}(E_i)^k : \mathrm{diam}(E_i) < \delta, \bigcup_i E_i \supseteq A \right\}$$

$$\mathrm{diam}(E_i)^k < \delta^{k-k'} \mathrm{diam}(E_i)^{k'} \Longrightarrow \sum \mathrm{diam}(E_i)^k < \delta^{k-k'} \sum \mathrm{diam}(E_i)^{k'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}^k_\delta(A) < \underbrace{\left(\frac{\omega_k}{2^k} \frac{2^{k'}}{\omega_{k'}} \right)}_{= c_k} \underbrace{\delta^{k-k'}}_{\xrightarrow[\delta \to 0]{} 0} \mathcal{H}^{k'}_\delta(A) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}^{k'}_\delta(A) > \frac{1}{c_k} \delta^{k'-k} \mathcal{H}^k_\delta(A) \underset{\delta \to 0}{\Longrightarrow} \mathcal{H}^{k'}(A) = +\infty$$

OSS: viceversa $\mathcal{H}^k(A) < +\infty \Longrightarrow \mathcal{H}^{k'}(A) = 0\ \forall k' > k$, cioè $\mathcal{H}^k(A)$ può essere $\neq 0$ per un solo k.
4 E_i ricoprimento di $A \Longrightarrow f(E_i)$ ricoprimento di $f(A)$ e si ha

$$\mathrm{diam}\big(f(E_i)\big) \leq C \mathrm{diam}(E_i) \Longrightarrow \sum_i \mathrm{diam}\big(f(E_i)\big)^k \leq C^k \sum_i \mathrm{diam}(E_i)^k \Longrightarrow \mathcal{H}^k\big(f(A)\big) \leq C^k \mathcal{H}^k(A)$$

Esercizio: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ curva regolare iniettiva $\Longrightarrow \mathcal{H}^1\Big(\gamma\big([a,b]\big)\Big) = L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.
OSS: $\mathcal{H}^k$, $k < n$, non è finita sui compatti (=non è di Radon) e non è σ-finita (=non si può scrivere $\mathbf{R}^n$ come unione numerabile di insiemi di misura finita). Inoltre $\mathcal{H}^k(A) = +\infty\ \forall A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto.
Se E è un Borel, σ-finito per $\mathcal{H}^k \Longrightarrow \mathcal{H}^k|_E$ è una misura di Borel σ-finita, possiamo definire:

$$\int_E f d\mathcal{H}^k \overset{\text{Def.}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} f d\mathcal{H}^k|_E$$

Ad esempio: $\int_\gamma f = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)|\gamma'(t)| = \int_{\gamma\left([a,b]\right)} f d\mathcal{H}^1$.

67 Dimensione di Hausdorff

Def: $E \subseteq \mathbf{R}^n$ $\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{k \geq 0 \text{ tale che } \mathcal{H}^k(E) = 0\}$. Poniamo $\mathcal{H}^k(E) = 0\ \forall k > n$.
OSS: E ha dimensione $k \Longrightarrow \mathcal{H}^j(E) = 0\ \forall j > k$ e $\mathcal{H}^j(E) = +\infty\ \forall j < k$ $\big(\mathcal{H}^k(E) \in [0, +\infty]\big)$.
OSS: $L < \mathbf{R}^n$ spazio affine k-dimensionale $\Longrightarrow \dim_{\mathcal{H}}(L) = k$.
Domanda: esistono insiemi con $\dim_{\mathcal{H}}(E) \notin \mathbf{N}$? Sì, gli insiemi frattali.
Siano $S_1, ..., S_n$ similitudini di $\mathbf{R}^n$, $E \subseteq \mathbf{R}^n$ è invariante se $E = \bigcup\limits_i S_i(E)$, ad esempio $K \subseteq [0,1]$

Cantor verifica $K = \underbrace{\frac{1}{3}K}_{S_1(K)} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}K\right]}_{S_2(K)}$.

Sia $\alpha = \dim_{\mathcal{H}}(E)$ e supponiamo che $\mathcal{H}^\alpha(E) \neq \{0, +\infty\} \Longrightarrow \mathcal{H}^\alpha(E) = \sum_i \mathcal{H}^\alpha\big(S_i(E)\big) = \sum_i \lambda_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$ dove $S_i(E) = T_i\big(\lambda_i(E)\big)$ T_i isometria di $\mathbf{R}^n \Longrightarrow \mathcal{H}^\alpha(E) = \big(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha\big)\mathcal{H}^\alpha(E) \Longrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha = 1}$ determina la dimensione α di E.
Esempio: $K = \frac{1}{3}K \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}K\big)$ Cantor, $n = 2$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$:

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha = 1 \Longrightarrow 3^\alpha = 2 \Longrightarrow \alpha = \frac{\log 2}{\log 3} \in (0,1)$$

OSS: esempi analoghi in $\mathbf{R}^n$, ad esempio la *curva di Koch* in $\mathbf{R}^2$, ecc...

68 Insiemi frattali

Similitudini (traslazioni, rotazioni, omotetie) $S_1, ..., S_n : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $S_i(x) = \lambda_i T_i(x)$, $\lambda_i \in (0,1)$, T_i isometria, $E \subseteq \mathbf{R}^n$ frattale associato a $S_1, ..., S_n$ se $E = \bigcup_{i=1}^n S_i(E)$.
Teorema: $S_1, ..., S_n$ similitudini $\Longrightarrow \exists!$ compatto $C \subseteq \mathbf{R}^n$ tale che $C = \bigcup_i S_i(C)$.
Esempio: $C \subseteq [0,1]$ Cantor, $S_1(x) = \frac{1}{3}x$, $S_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$.
Sia $K(\mathbf{R}^n) = \{K \subseteq \mathbf{R}^n \text{ compatto}\} \subseteq \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, su $K(\mathbf{R}^n)$ è possibile mettere una distanza d_H tale che $\big(K(\mathbf{R}^n), d_{\mathcal{H}}\big)$ è metrico completo.

$$d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) = \max\big(\max_{x \in C_1} d(x, C_2), \max_{y \in C_2} d(y, C_1)\big) = ||d(\cdot, C_1) - d(\cdot, C_2)||_{C^0(\mathbf{R}^n)} =$$

$$= \max_{x \in \mathbf{R}^n} |d(x, C_1) - d(x, C_2)| \text{ Distanza di Hausdorff.}$$

La stessa cosa si può fare con uno spazio metrico $(\mathcal{M}, d)$, $K(\mathcal{M}) = \{C \subseteq \mathcal{M} \text{ compatti}\}$, $\big(K(\mathcal{M}), d_{\mathcal{H}}\big)$ è metrico completo.
Prop: $\mathcal{M}$ è compatto $\Longrightarrow K(\mathcal{M})$ è compatto.
Dimostrazione: $T : K(\mathcal{M}) \hookrightarrow \underbrace{C^0(\mathcal{M})}_{\text{Banach}}$ $T(C) = d(x, C) \in c^0(\mathcal{M})$ è un'immersione isometrica, cioè

$$d_{C^0(\mathcal{M})}\big(T(C_1), T(C_2)\big) = \max_{x \in \mathcal{M}} |d(x, C_1) - d(x, C_2)| = d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$$

Data una successione $C_k \subseteq K(\mathcal{M})$, $C_k \neq \emptyset$, le funzioni $f_k = T(C_k)$ sono equilimitate ed equicontinue (1-lipschitziane) $\overset{\text{Asc.-Arz.}}{\Longrightarrow} \exists f_{n_k} \longrightarrow f = \text{dist}(x, C) \Longrightarrow C_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} C$ per $d_{\mathcal{H}}$. □
OSS: $D \subseteq \mathbf{R}^n$ compatto $K(D) = \{C \subseteq D \text{ compatti}\} \Longrightarrow \big(K(D), d_{\mathcal{H}}\big)$ è metrico compatto. Di conseguenza $\big(K(\mathbf{R}^n, d_{\mathcal{H}}\big)$ è metrico compatto.
Dimostrazione (Teorema): dato $C \subseteq \mathbf{R}^n$ compatto sia $\psi(C) = \bigcup_{i=1}^n S_i(C)$, è facile vedere che $d_{\mathcal{H}}\big(\psi(C_1), \psi(C_2)\big) \leq \lambda d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$ $\lambda = \max_i \lambda_i < 1 \Longrightarrow \psi$ è una contrazione su $\big(K(\mathbf{R}^n), d_{\mathcal{H}}\big) \Longrightarrow \exists!$ punto fisso per ψ in $K(\mathbf{R}^n)$. □
Per tale C è definita $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \alpha$ tale che $\sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha = 1$.
OSS: vale sempre $\mathcal{H}^\alpha(C) < +\infty$ e, sotto opportune ipotesi su S_i, vale anche $\mathcal{H}^\alpha(C) > 0$.
Esempi:

- *Curva di Koch*;
- *Triangolo di Sierpinski*;
- *Tappeto di Sierpinski*;
- *Curva di Peano*

OSS: un buon testo per approfondire è "Fractal geometry" di Falconer.

OSS: col termine **frattale** si identificano anche oggetti più complicati, tipicamente insiemi limite di sistemi di ODE continui o discreti (successioni per ricorrenza).
Esempio significativo: **Insieme di Mandelbrot e Julia**.
$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ analitica, tipicamente $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $z_{n+1} = f(z_n)$ successione per ricorrenza, $C(f) = \{z_0 : z_n \text{ è limitata}\} \Longrightarrow J(f) = \partial C(f)$ è l'**insieme di Julia**.
Esempi:

- $f(z) = z^2$, $z_n = z_0^{2n}$, $C(f) = B_1 \Longrightarrow J(f) = \partial C(f)$ (=circonferenza di raggio 1);
- $f(z) = z^2 + c$ $c \in C$. L'insieme $J_c = J(f)$ può essere un insieme "frattale" complicato.

Def: $M = \{c : J_c \text{ è connesso}\} = \{c : 0 \in J_c\}$ è l'**insieme di Mandelbrot**.
OSS: $J(f)$ è sempre invariante, cioè $f\big(J(f)\big) = J(f)$.