



UNIVERSITÀ DI PISA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
Laurea Triennale in Matematica

**Un approccio combinatorio alla poset topology:  
EL-shellability e Algebra booleana**

Relatore:  
**Prof. Michele D'Adderio**

Candidato:  
**Alessio Sgubin**

---

ANNO ACCADEMICO 2022/2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Complessi simpliciali e poset</b>	<b>1</b>
1.1 Complessi simpliciali . . . . .	1
1.2 Poset . . . . .	3
1.3 Order complex e face poset . . . . .	4
<b>2 Omologia e coomologia di poset</b>	<b>7</b>
2.1 Definizioni . . . . .	7
2.2 Omologia e order complex . . . . .	9
2.3 Top cohomology group . . . . .	12
<b>3 Rappresentazioni di <math>\mathfrak{S}_n</math></b>	<b>15</b>
3.1 Rappresentazioni di gruppo . . . . .	15
3.2 Moduli di Specht . . . . .	16
3.3 Azione di $\mathfrak{S}_n$ sulla (co)omologia . . . . .	26
<b>4 (EL-)Shellability</b>	<b>29</b>
4.1 Shellability . . . . .	29
4.2 EL-Shellability . . . . .	32
<b>5 Algebra booleana</b>	<b>41</b>
5.1 Definizione . . . . .	41
5.2 EL-labeling . . . . .	43
5.3 Omologia di $\overline{B}_n^k$ e la sua $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazione . . . . .	45



# Introduzione

Molti risultati in matematica derivano dalla scoperta di legami tra strutture apparentemente distanti tra loro. La teoria della poset topology è un esempio di questo approccio: tramite le costruzioni di order complex e face poset vengono messe in relazione le strutture di insieme parzialmente ordinato e di complesso simpliciale.

Introdotta nel 1968 da Gian-Carlo Rota in [8] per studiare la funzione di Möbius di particolari poset, la poset topology ha poi trovato applicazioni in molti campi tra i quali teoria dei gruppi, teoria delle rappresentazioni, topologia e combinatoria. Infatti questa corrispondenza permette di riformulare alcune proprietà topologiche dei complessi simpliciali nel linguaggio dei poset e viceversa, fornendo così un nuovo strumento per lo studio delle due strutture.

Nel Capitolo 1 si definiscono gli oggetti matematici protagonisti in questa corrispondenza e la relativa notazione, adottata nell'intero elaborato. Inoltre, vengono descritti i concetti di face poset e order complex da cui nasce l'associazione esplicita tra complesso simpliciale e insieme parzialmente ordinato.

Viene osservato nel primo capitolo che la composizione delle costruzioni di face poset e order complex non è un'involuzione, ma la suddivisione baricentrica del complesso simpliciale di partenza. Questo motiva la scelta di un invariante omotopico come strumento matematico per lo studio della corrispondenza: l'omologia singolare di complessi simpliciali.

Nel Capitolo 2, la corrispondenza tra complessi e poset guida la definizione dell'omologia per poset, che si dimostra essere isomorfa all'omologia singolare dei relativi order complex.

Poset topology e omologia incontrano la teoria delle rappresentazioni di gruppo nel Capitolo 3: definendo i concetti di  $G$ -poset e  $G$ -complesso simpliciale, si delineano le proprietà con cui azioni di un gruppo  $G$  su poset e complesso corrispondenti sono compatibili.

Queste proprietà inducono  $G$ -rappresentazioni in omologia e coomologia, permettendo da un lato di agevolare il calcolo dell'omologia di certi complessi simpliciali (o poset) e dall'altro di ottenere interessanti rappresentazioni di gruppo.

Maggior attenzione viene prestata alle rappresentazioni dei gruppi simmetrici  $\mathfrak{S}_n$ . Sempre nel terzo capitolo vengono costruite le rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{S}_n$  tramite oggetti combinatori: i moduli di Specht. In seguito queste rappresentazioni avranno un ruolo fondamentale nello studio omologico di particolari poset.

Nel Capitolo 4 viene introdotto il concetto di shellability per complessi simpliciali, una proprietà che si basa sull'idea di costruire il complesso "faccetta per faccetta", efficace per il calcolo della sua omologia simpliciale.

Si entra poi nel vivo dell'approccio combinatorio alla poset topology: si abbandona l'intuizione geometrica della shellability per passare, tramite la corrispondenza, allo studio combinatorio di questa proprietà sui poset. Negli anni '80 il matematico Richard Stanley introduce una tecnica che consiste nell'associare ad alcuni poset un labeling con determinate caratteristiche, per studiare le loro Möbius function. Successivamente Anders Björner dimostra che la proprietà di avere questo labeling implica la shellability e per questo viene rinominata "edge-lexicographic shellability".

Nell'elaborato si dimostra che questa tecnica, approfondita da A. Björner assieme a Michelle Wachs in [4] e [5], permette di calcolare esplicitamente una base per i gruppi della coomologia di poset.

Il Capitolo 5 si incentra sullo studio dell'algebra booleana. In questo esempio, l'associazione tra struttura di  $\mathfrak{S}_n$ -poset e di  $\mathfrak{S}_n$ -complesso simpliciale è immediata in quanto l'ordine parziale coincide con l'inclusione insiemistica (che caratterizza la definizione di complesso simpliciale astratto). Gli strumenti presentati nei primi 4 capitoli concorrono nel teorema conclusivo dell'elaborato: il labeling dato dalla proprietà di edge-lexicographic shellability permette di visualizzare l'azione del gruppo  $\mathfrak{S}_n$  sulla base esplicita della coomologia di poset dell'algebra booleana. Il risultato è un isomorfismo di rappresentazioni tra il top cohomology group e un particolare modulo di Specht.

# Complessi simpliciali e poset

In questo capitolo si introducono le definizioni base di complesso simpliciale e poset, mettendole in relazione tramite le costruzioni di order complex e face poset.

Si riportano due testi di riferimento: per la trattazione dei complessi simpliciali l'introduzione del libro [7] e per i poset il libro di R. Stanley [12].

## 1.1 Complessi simpliciali

Vengono formulate due definizioni distinte di complesso simpliciale: la versione geometrica fornisce un'intuizione "grafica" degli oggetti definiti e la versione astratta descrive le stesse proprietà tramite condizioni puramente algebriche.

### Definizione 1.1.1 - Complesso simpliciale geometrico

Un *simpleso geometrico  $d$ -dimensionale* in  $\mathbb{R}^k$  è l'involuppo convesso di  $(d + 1)$ -punti affinemente indipendenti in  $\mathbb{R}^k$ , detti *vertici*. Gli involuppi convessi di sottoinsiemi di vertici sono detti *facce* del simpleso.

Un *complesso simpliciale geometrico*  $K \subset \mathbb{R}^n$  è una collezione non vuota di semplici geometrici tali che:

- per ogni faccia  $F$  di un simpleso  $G \in K$  si ha  $F \in K$ . Si dice che  $F$  è *faccia* del complesso  $K$ .
- un'intersezione non vuota di due semplici geometrici in  $K$  è faccia di entrambi i semplici.

### Esempio 1.1 - Semplici e complessi simpliciali geometrici

Si considerino gli involuppi convessi di 3 e 4 punti non allineati in  $\mathbb{R}^2$ , come riportato in Figura 1.1. Il primo è un simpleso 2-dimensionale, dato che i tre punti sono non allineati. Negli esempi verrà indicato con  $S_2$ .

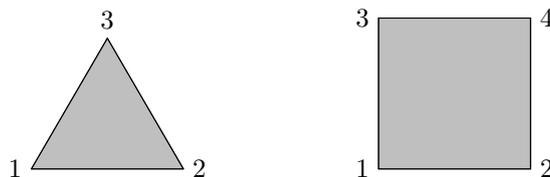


Figura 1.1: Esempi di involuppo convesso in  $\mathbb{R}^2$  di 3 e 4 punti rispettivamente

Il secondo involuppo non è un simpleso in quanto 4 punti in  $\mathbb{R}^2$  non possono essere affinemente indipendenti. Ma "suddividendo" ulteriormente l'involuppo è possibile ottenere un complesso simpliciale geometrico  $K_1$ , formato da due 2-simplici come in Figura 1.2 a sinistra.

Salendo di dimensione, si considerino 4 punti non coplanari in  $\mathbb{R}^3$ . Il loro involucro convesso sarà un 3-simplesso geometrico, d'ora in poi denotato  $\mathcal{S}_3$ .

In generale, si osserva che in  $\mathbb{R}^n$  si possono ottenere  $k$ -simplessi geometrici soltanto per  $k \leq n$ : se si considerano più di  $n + 1$  punti, questi non potranno essere affinementemente indipendenti in uno spazio affine di dimensione  $n$ .

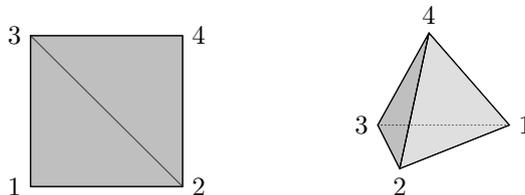


Figura 1.2: Il complesso simpliciale  $\mathcal{K}_1$  e il simplesso  $\mathcal{S}_3$  in  $\mathbb{R}^3$

### Definizione 1.1.2 - Complesso simpliciale astratto

Sia  $V$  un insieme finito di elementi, detti *vertici*. Un *complesso simpliciale astratto* è una collezione  $\Delta$  di sottoinsiemi di  $V$  tale che:

- $\{v\} \in \Delta$  per ogni  $v \in V$ .
- se  $G \in \Delta$  ed  $F \subseteq G$  allora  $F \in \Delta$ .

Gli elementi  $F \in \Delta$  si dicono *facce* e gli elementi massimali per contenimento si dicono *facette*. Si definisce la *dimensione della faccia* come  $\dim(F) = |F| - 1$  e la *dimensione del complesso simpliciale*  $\dim(\Delta) = \max_{F \in \Delta} \dim(F)$ .

Ogni struttura di complesso simpliciale geometrico  $K$  definisce un complesso simpliciale astratto, indicato  $\Delta(K)$  o semplicemente  $K$ , dove:

- l'insieme dei vertici  $V$  di  $\Delta(K)$  è l'insieme dei vertici dei simplessi geometrici di  $K$ .
- $\Delta(K)$  è dato dai sottoinsiemi  $F \subseteq V$  tali che l'involuppo convesso dei vertici di  $F$  sia una faccia di  $K$ .

Viceversa, dato un complesso simpliciale astratto  $K$  una sua *realizzazione geometrica*, indicata  $\|K\|$ , è un complesso simpliciale geometrico tale che  $\Delta(\|K\|) = K$ .

Una realizzazione geometrica di un complesso astratto  $K$  esiste sempre. Numerati i vertici in  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$  si può costruire il complesso simpliciale geometrico  $\|K\| \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  come segue:

- ad ogni vertice  $v_i \in V$  si associa il punto  $P_i \in \mathbb{R}^{d+1}$  di coordinate  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , dove 1 è all' $(i + 1)$ -esima posizione.
- per ogni faccia  $F = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_h}\} \in K$  la rispettiva faccia in  $\|K\|$  sarà l'involuppo convesso dei punti  $\{P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_h}\}$ . Infatti per definizione i punti  $\{P_i\}_{i=0}^d$  sono affinementemente indipendenti quindi l'involuppo convesso costruito sarà un  $h$ -simplesso geometrico, come voluto.

### Esempio 1.2 - Complessi simpliciali astratti

Riprendendo i complessi simpliciali geometrici  $\mathcal{K}_1$  ed  $\mathcal{S}_3$  dell'Esempio 1.1, è possibile descrivere i rispettivi complessi astratti associati.

Nel caso del 3-simplesso  $\mathcal{S}_3$  si indichino i vertici come in Figura 1.2 con  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ . Ogni sottoinsieme di  $V$  genera effettivamente una faccia del simplesso. Allora:

$$\Delta(\mathcal{S}_3) = \mathcal{P}(V)$$

dove con  $\mathcal{P}(V)$  si intende l'insieme delle parti di  $V$ . Il risultato si può estendere ai simplessi geometrici di ogni dimensione: il fatto che i vertici siano affinementemente indipendenti implica che gli

involuppi di sottoinsiemi di vertici definiscano sempre una faccia del semplice.

Questa osservazione non è vera in generale per complessi simpliciali. Nel caso del complesso simpliciale  $\mathcal{K}_1$  si ottiene:

$$\Delta(\mathcal{K}_1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

e ad esempio  $\{1, 4\} \notin \Delta(\mathcal{K}_1)$ .

### Osservazione 1.3

Dalla costruzione di complesso astratto associato si definiscono i concetti di *faccetta* e di *dimensione* anche per complessi simpliciali geometrici.

Dato un complesso geometrico  $K$  le faccette corrisponderanno alle faccette di  $\Delta(K)$  e la dimensione delle facce del complesso coinciderà con quelle dell'associato astratto.

## 1.2 Poset

In questa sezione si introduce la terminologia per gli insiemi parzialmente ordinati che verrà adottata nell'elaborato.

### Definizione 1.2.1 - Poset

Un *insieme parzialmente ordinato* o *poset* è una coppia  $(P, <_P)$  dove  $P$  è un insieme e  $<_P$  è una relazione d'ordine parziale su di esso.

Si dice che il poset  $P$  è *limitato* se esistono due elementi  $\hat{0}_P, \hat{1}_P \in P$  rispettivamente minimo e massimo per la relazione d'ordine  $<_P$ .

D'ora in avanti si considereranno solo poset finiti.

Considerato un poset  $P$ , questo si può estendere ad un poset limitato  $\hat{P}$  aggiungendo gli elementi minimo e massimo  $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$  in modo che per ogni  $x \in P$  valgano  $\hat{0} <_{\hat{P}} x$  e  $x <_{\hat{P}} \hat{1}$ . Viceversa, dato un poset limitato si indica con  $\bar{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$  il sottoposet senza massimo e minimo, con l'ordine indotto da  $P$ .

Dato un poset  $(P, <_P)$  si possono definire le *covering relations* come le relazioni d'ordine "minimali", ovvero  $x <_P y$  tali che non esiste  $z \in P$  tale che  $x <_P z <_P y$ . L'insieme degli *edge* si denota:

$$\mathcal{E}(P) = \{(x, y) \in P \times P \mid x <_P y \text{ è una covering relation}\}$$

Secondo questa nomenclatura, si definisce il *diagramma di Hasse* di  $P$  come il diagramma che rappresenta gli elementi del poset con le rispettive covering relations indicate da segmenti (da qui il termine *edge*) come nel seguente esempio. Per indicare la relazione  $x <_P y$ , l'elemento  $y$  sarà posto più in alto di  $x$  in modo da evidenziare chi è maggiore e chi minore.

Questa rappresentazione definisce univocamente l'ordine parziale  $<_P$  quando l'insieme  $P$  è finito. In seguito, si ometterà la definizione esplicita dell'ordine parziale e verrà invece fornito il diagramma di Hasse associato.

### Esempio 1.4 - Poset e diagramma di Hasse

Si consideri l'insieme  $P = \{1, 2, 3, 4\}$  dotato dell'ordine parziale:

$$<_P = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\} \subseteq P \times P$$

Le covering relations di  $P$  sono  $\mathcal{E}(P) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  e segue che il diagramma di Hasse corrispondente è quello riportato a sinistra in Figura 1.3.

Si definisce  $P' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  con il diagramma di Hasse a destra in Figura 1.3.

Il poset  $P$  risulta essere limitato con  $\hat{0}_P = 1$  e  $\hat{1}_P = 4$  rispettivamente minimo e massimo. Invece il poset  $P'$  non lo è in quanto non esiste un massimo globale: presi gli elementi  $4, 6 \in P'$  massimali, questi non sono tra loro comparabili.

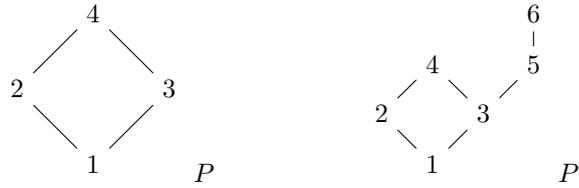


Figura 1.3: Diagramma di Hasse del poset  $P$  e del poset  $P'$  rispettivamente

**Definizione 1.2.2 - Sottoposet e intervallo**

Sia  $(P, <_P)$  un poset. Un suo sottoposet  $(Q, <_Q)$  è un insieme parzialmente ordinato dove  $Q \subseteq P$  e l'ordine  $<_Q$  è quello indotto da  $<_P$ .

Dati due elementi  $x, y \in P$  si definisce *intervallo*  $([x, y], <')$  come il sottoposet di  $P$  dove:

$$[x, y] = \{z \in P \mid x \leq_P z \leq_P y\}$$

Ignorando gli estremi dell'intervallo si ottiene l'*intervallo aperto*  $(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\}$ .

C'è una famiglia di sottoposet rilevante per la teoria che si vuole sviluppare: quando l'ordine parziale induce sul sottoinsieme un ordine totale si usa il concetto di *catena*.

**Definizione 1.2.3 - Catene**

Sia  $(P, <)$  un poset. Un sottoinsieme  $\mathbf{c} \subseteq P$  si dice *n-catena* del poset se  $|\mathbf{c}| = n + 1$  e l'ordine parziale  $<$  induce un ordine totale sul sottoinsieme. Diciamo che  $n$  è la *lunghezza* della catena e si indica con:

$$\mathbf{c} : (c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1} < c_n)$$

l'ordine indotto sugli elementi da  $<$ .

Una catena  $\mathbf{m} \subseteq P$  si dice *massimale* se è massimale per l'inclusione insiemistica sull'insieme di tutte le catene del poset. L'insieme delle catene massimali di  $P$  verrà indicato con  $\mathcal{M}(P)$ .

Una catena  $\mathbf{c} : (c_0 < c_1 < \dots < c_n)$  si dice *non raffinabile* se  $\mathbf{c} \in \mathcal{M}([c_0, c_n])$  o se  $\mathbf{c} = \emptyset$ .

Un poset si dice *puro* se le catene massimali hanno tutte la stessa lunghezza.

**Esempio 1.5 - Catene massimali e purezza**

Ripresi i poset dell'Esempio 1.4, si ottiene che ad esempio  $\mathbf{c}_1 : (1 < 2)$  e  $\mathbf{c}_2 : (1 < 2 < 4)$  sono entrambe catene di  $P$  ma solo  $\mathbf{c}_2$  è massimale dato che  $\mathbf{c}_1 \subsetneq \mathbf{c}_2$ .

Si nota che  $P$  è puro, dato che  $\mathcal{M}(P) = \{(1 < 2 < 4), (1 < 3 < 4)\}$  cioè tutte le catene massimali hanno lunghezza 2.

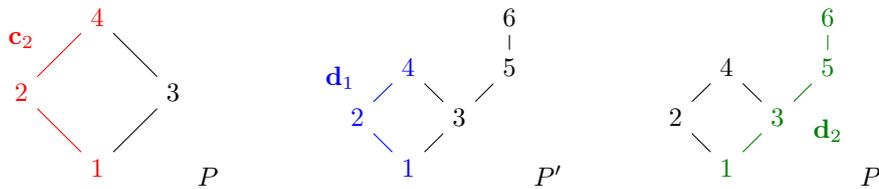


Figura 1.4: Esempi di catene massimali per i poset  $P$  e  $P'$

Il poset  $P'$  invece non è puro: ci sono due catene massimali

$$\mathbf{d}_1 : (1 < 2 < 4) \quad \mathbf{d}_2 : (1 < 3 < 5 < 6)$$

che hanno rispettivamente lunghezze 2 e 3.

**1.3 Order complex e face poset**

Si introducono ora due definizioni che collegano le strutture di complesso simpliciale astratto e poset: order complex e face poset.

Queste costruzioni si riveleranno in un certo senso complementari con la Proposizione 1.3.3 e motiveranno la costruzione di omologia e coomologia di poset nel Capitolo 2.

**Definizione 1.3.1 - Order complex**

Sia  $(P, <)$  un poset finito. L'order complex di  $P$ , denotato  $\Delta(P)$ , è il complesso simpliciale astratto dove:

- i vertici sono gli elementi del poset  $P$ .
- le facce sono le catene di  $P$ .

La buona definizione si verifica osservando che  $\Delta(P)$  è un complesso simpliciale astratto:

- dato  $x \in P$  vertice di  $\Delta(P)$  si ha che  $\{x\}$  è una catena del poset  $P$  quindi  $\{x\} \in \Delta(P)$  è una faccia dell'order complex.
- sia  $\mathbf{c} : (x_1 < x_2 < \dots < x_n)$  faccia dell'order complex. Allora ogni  $\mathbf{d} \subseteq \mathbf{c}$  è a maggior ragione catena del poset e faccia di  $\Delta(P)$ .

**Esempio 1.6 - Order complex di un poset**

Si consideri il poset  $P$  definito in Figura 1.5 a sinistra. In centro viene riportata una rappresentazione geometrica del suo order complex  $\Delta(P) = \mathcal{K}_2$ .

Notare, ad esempio, che alla catena massimale  $\mathbf{m} : (4 < 3 < 2 < 1)$  si associa il 3-simplesso con vertici  $\{1, 2, 3, 4\}$  mentre alla catena  $\mathbf{n} : (6 < 5)$  l'1-simplesso di estremi  $\{5, 6\}$ .

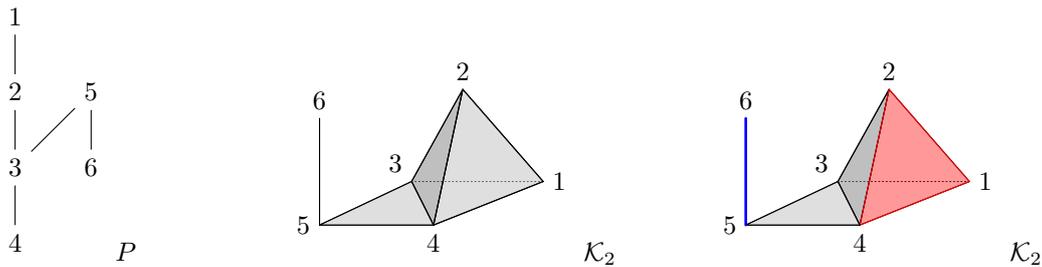


Figura 1.5: Poset  $P$  e il suo order complex  $\mathcal{K}_2$

Sempre in Figura 1.5 a destra sono state evidenziate le facce relative alle catene  $\mathbf{c} : (4 < 2 < 1)$  ed  $\mathbf{n}$  rispettivamente in rosso e in blu.

Si introduce ora una costruzione opposta: un complesso simpliciale astratto che viene associato ad un poset.

**Definizione 1.3.2 - Face poset**

Sia  $\Delta$  un complesso simpliciale astratto. Il face poset associato a  $\Delta$ , denotato  $P(\Delta)$ , è l'insieme delle facce non vuote del complesso con la relazione d'ordine data dall'inclusione insiemistica.

Si riportano due esempi di questa costruzione.

**Esempio 1.7 - Face poset di complessi astratti**

Si considerino i complessi simpliciali astratti  $\Delta(\mathcal{S}_2)$  e  $\Delta(\mathcal{K}_1)$  dell'Esempio 1.1. I relativi face poset hanno i diagrammi di Hasse riportati in Figura 1.6.

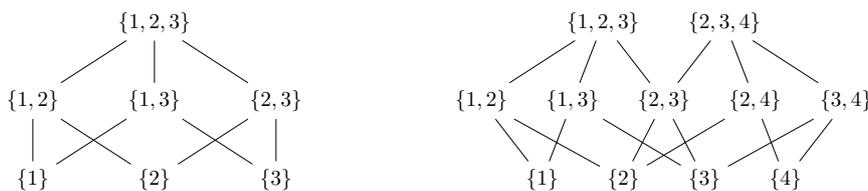


Figura 1.6: Face posets rispettivamente di  $\mathcal{S}_2$  e di  $\mathcal{K}_1$

Si potrebbe a questo punto supporre che dato un complesso astratto  $\Delta$  la composizione delle due costruzioni  $\Delta(P(\Delta))$  risulti nel complesso originale  $\Delta$ .

Questo in generale è falso, ma dal seguente risultato si deriva l'equivalenza di  $\Delta$  e  $\Delta(P(\Delta))$  a meno di omeomorfismo.

**Proposizione 1.3.3**

*Dato un complesso simpliciale astratto  $\Delta$  la composizione  $\Delta(P(\Delta))$  è la suddivisione baricentrica di  $\Delta$ .*

La dimostrazione della proposizione viene omessa, ma si fornisce ora un esempio che descrive il ragionamento e motiva il risultato.

**Esempio 1.8 - Suddivisione baricentrica di  $\mathcal{S}_2$**

Si consideri il 2-simplesso astratto  $\mathcal{S}_2$ . Per definizione  $\Delta(P(\mathcal{S}_2))$  ha come insieme di vertici:

$$V' = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

L'order complex  $\Delta(P(\mathcal{S}_2))$  si può rappresentare fissando gli elementi di  $V'$  nel seguente modo sul piano  $\mathbb{R}^2$ :

- gli insiemi  $\{a\} \in V'$  alla posizione occupata da  $a$  nella rappresentazione geometrica di  $\mathcal{S}_2$  in  $\mathbb{R}^2$ .
- i vertici del tipo  $\{a, b\} \in V'$  al baricentro dei segmenti con estremi  $\{a\}, \{b\}$ .
- il vertice  $\{1, 2, 3\}$  come baricentro del 2-simplesso dato da  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ .

Questa disposizione dei vertici viene riportata in Figura 1.7. Completando l'order complex disegnando anche le facce, si ottiene la rappresentazione a destra.

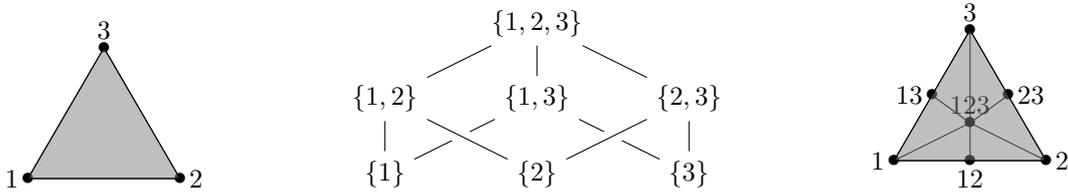


Figura 1.7: Rappresentazione di  $\mathcal{S}_3$ ,  $P(\mathcal{S}_3)$  e  $\Delta(P(\mathcal{S}_3))$ .

Questa costruzione può essere estesa ricorsivamente a simplessi di tutte le dimensioni.

Dato allora un complesso  $\mathcal{K}$  basterà iterare la suddivisione sui simplessi che lo compongono e questo coincide sia con la suddivisione baricentrica di  $\mathcal{K}$  che con l'order complex di  $P(\mathcal{K})$ .

# Capitolo 2

## Omologia e coomologia di poset

Lo studio delle proprietà topologiche dei poset offre un nuovo approccio alla descrizione geometrica di complessi simpliciali.

Lo sviluppo di questa teoria, la *poset topology*, ha origine<sup>1</sup> nell'articolo del 1964 di Gian-Carlo Rota "On the Foundations of Combinatorial Theory I." [8] sulla funzione di Möbius per poset. Il collegamento che nasce tra la struttura di insieme parzialmente ordinato e altre branche della matematica si rivela profondo e porta a sviluppi in diversi campi.

La stretta relazione con i complessi simpliciali, accennata nel precedente capitolo, viene ora approfondita introducendo il concetto di omologia e coomologia di poset.

### 2.1 Definizioni

D'ora in poi si userà la notazione  $\mathbb{K}$  per indicare un campo o l'anello degli interi  $\mathbb{Z}$ .

Dato un poset  $(P, <)$  si definisce lo *spazio delle catene* di  $P$  come il modulo graduato  $C_\bullet(P; \mathbb{K})$  definito per ogni  $j \geq -1$ :

$$C_j(P; \mathbb{K}) = \mathbb{K}\text{-modulo libero generato dalle } j\text{-catene di } P.$$

Notare che, formalmente, per  $j = -1$  si ottiene  $C_{-1}(P; \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$  modulo libero generato dalla sola catena  $\emptyset \subseteq P$ .

Si introduce la *mappa di bordo*  $\partial_j : C_j(P; \mathbb{K}) \rightarrow C_{j-1}(P; \mathbb{K})$  definita su ogni  $j$ -catena  $\mathbf{c} : (x_0 < x_1 < \dots < x_j)$  come:

$$\partial_j(\mathbf{c}) = \sum_{i=0}^j (-1)^i (x_0 < \dots < x_{i-1} < \widehat{x}_i < x_{i+1} < \dots < x_j)$$

dove il simbolo  $\widehat{x}_i$  indica che l'elemento  $x_i$  viene tolto dalla catena.

Dato che le  $j$ -catene generano il modulo libero  $C_j(P; \mathbb{K})$ , la mappa si può estendere univocamente ad un omomorfismo  $\mathbb{K}$ -lineare di moduli.

Va verificato che la mappa  $\partial_\bullet$  definisce effettivamente una mappa di bordo.

**Lemma 2.1.1 - Complesso di catene del poset**

La coppia  $(C_\bullet(P; \mathbb{K}), \partial_\bullet)$  è un complesso di catene.

<sup>1</sup>Viene riconosciuto il merito di quest'articolo nell'introduzione delle lecture notes "Poset Topology: Tools and Application" di Michelle L. Wachs [15].

*Dimostrazione.* Si deve verificare che  $\partial_{j-1} \circ \partial_j = 0$ ; basta farlo sulle  $j$ -catene per ogni  $j \in \mathbb{N}$ . Nel caso  $j = 0$  la verifica è banale, dato che formalmente  $\partial_{-1} = 0$ . Sia  $j > 0$  e si fissa  $\mathbf{c} : (x_0 < x_1 < \dots < x_j)$  una  $j$ -catena. La tesi segue dal calcolo esplicito:

$$\begin{aligned} \partial_{j-1}(\partial_j(\mathbf{c})) &\stackrel{(a)}{=} \sum_{h=0}^j (-1)^h \partial_{j-1}((x_0 < \dots < x_{h-1} < \widehat{x}_h < x_{h+1} < \dots < x_j)) \\ &= \sum_{h=0}^j (-1)^h \left[ \sum_{k=0}^{h-1} (-1)^k (x_0 < \dots < \widehat{x}_k < \dots < \widehat{x}_h < \dots < x_j) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=h+1}^j (-1)^{k-1} (x_0 < \dots < \widehat{x}_h < \dots < \widehat{x}_k < \dots < x_j) \right] \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{0 \leq h < k \leq j} (-1)^{h+k} \left[ (x_0 < \dots < \widehat{x}_h < \dots < \widehat{x}_k < \dots < x_j) - \right. \\ &\quad \left. - (x_0 < \dots < \widehat{x}_h < \dots < \widehat{x}_k < \dots < x_j) \right] = 0 \end{aligned}$$

dove in (a) si usa la  $\mathbb{K}$ -linearità di  $\partial_\bullet$  e in (b) si esegue un cambio di indici, per scrivere le due eliminazioni sempre nell'ordine  $(\dots < \widehat{x}_h < \dots < \widehat{x}_k < \dots)$ .  $\square$

E' possibile definire *cicli* e *bordi* del complesso di catene del poset  $P$  come:

$$Z_j(P; \mathbb{K}) = \ker \partial_j \quad B_j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \partial_{j+1}$$

e questo permette di introdurre l'omologia di poset.

### Definizione 2.1.2 - Omologia di poset

Sia  $(P, <)$  un poset e si consideri il suo complesso di catene  $(C_\bullet(P; \mathbb{K}), \partial_\bullet)$ . Il  $j$ -esimo gruppo di omologia (ridotta) del poset  $P$  si definisce come:

$$\tilde{H}_j(P; \mathbb{K}) = Z_j(P; \mathbb{K}) / B_j(P; \mathbb{K}).$$

Si osserva che l'omologia è ridotta, dato che in grado  $-1$  si ha  $C_{-1}(P; \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ .

Per definire la coomologia si costruisce una *mappa di cobordo*  $\delta_j : C_j(P; \mathbb{K}) \rightarrow C_{j+1}(P; \mathbb{K})$  in modo che per ogni  $\alpha \in C_j(P; \mathbb{K})$  e  $\beta \in C_{j+1}(P; \mathbb{K})$  verifichi la condizione:

$$(2.1) \quad \langle \delta_j(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \partial_{j+1}(\beta) \rangle$$

dove il prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è dato dalla forma bilineare su  $\bigoplus_{j \geq -1} C_j(P; \mathbb{K})$  che ha come base ortonormale le catene di  $P$ .

L'unica mappa che verifica la proprietà (2.1) è definita su ogni  $j$ -catena  $\mathbf{c} : (x_0 < x_1 < \dots < x_j)$  del poset  $P$  come:

$$(2.2) \quad \delta_j(\mathbf{c}) = \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \sum_{y \in (x_{i-1}, x_i)} (x_0 < \dots < x_{i-1} < y < x_i < \dots < x_j)$$

dove nei casi limite  $i = 0, j + 1$  si pongono rispettivamente  $x_{-1} = \hat{0}$  e  $x_{j+1} = \hat{1}$  che sono minimo e massimo<sup>2</sup> di  $\hat{P}$ .

Questa definizione si estende per linearità ad un omomorfismo di moduli, dato che le catene del poset sono una base di  $C_\bullet(P; \mathbb{K})$ .

Anche in questo caso va verificato che  $\delta_\bullet$  sia effettivamente mappa di cobordo per il complesso di catene.

---

<sup>2</sup>In questo caso si può considerare il poset esteso  $\hat{P}$  in quanto gli intervalli  $(x_{i-1}, x_i)$  aperti sono comunque sottoposet di  $P$ .

**Lemma 2.1.3 - Complesso di cocatene del poset**

Sia  $(P, <)$  un poset. La coppia  $(C_\bullet(P; \mathbb{K}), \delta_\bullet)$  è un complesso di cocatene.

*Dimostrazione.* Va verificato che  $\delta_{j+1} \circ \delta_j = 0$  per ogni  $j \geq -1$ . Dato che la mappa  $\delta_\bullet$  verifica la proprietà (2.1), segue che per ogni  $\alpha \in C_j(P; \mathbb{K})$  e per ogni  $\beta \in C_{j+2}(P; \mathbb{K})$ :

$$\langle \delta_{j+1}(\delta_j(\alpha)), \beta \rangle = \langle \delta_j(\alpha), \partial_{j+2}(\beta) \rangle = \langle \alpha, \partial_{j+1}(\partial_{j+2}(\beta)) \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$$

dove la penultima uguaglianza segue dal Lemma 2.1.1.

Questo implica che  $\delta_{j+1}(\delta_j(\alpha)) = 0$  per ogni  $\alpha \in C_j(P; \mathbb{K})$  ovvero  $\delta_{j+1} \circ \delta_j = 0$ . □

Come nel caso dei complessi di catene, si definiscono *cocicli* e *cobordi* rispettivamente come:

$$Z^j(P; \mathbb{K}) = \ker \delta_j \quad \text{e} \quad B^j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \delta_{j-1}.$$

Si ottiene la seguente definizione di coomologia di poset.

**Definizione 2.1.4 - Coomologia di poset**

Sia  $(P, <)$  un poset e  $(C_\bullet(P; \mathbb{K}), \delta_\bullet)$  il suo complesso di cocatene. Si definisce il *j-esimo gruppo di coomologia (ridotta)* del poset  $P$  come:

$$\tilde{H}^j(P; \mathbb{K}) = Z^j(P; \mathbb{K}) / B^j(P; \mathbb{K}).$$

## 2.2 Omologia e order complex

Le nozioni di omologia di poset e di omologia simpliciale (per complessi simpliciali) si relazionano con le costruzioni di order complex e face poset visti nel precedente capitolo. La creazione di questo “ponte” è uno degli esempi di applicazione della poset topology in altri rami della matematica.

In questa sezione per le nozioni di omologia simpliciale, cellulare e di CW-complesso si rimanda al libro “Algebraic Topology” di A. Hatcher [6].

I concetti di complesso simpliciale geometrico e astratto verranno utilizzati in modo interscambiabile quando si parlerà di omologia di un complesso. Eventualmente, se l’argomento lo richiede, si potrà considerare una realizzazione geometrica del complesso astratto.

**Proposizione 2.2.1 - Isomorfismo di omologie per order complex**

Sia  $(P, <)$  un poset. Vi è un isomorfismo di  $\mathbb{K}$ -moduli:

$$\tilde{H}_j(P; \mathbb{K}) \simeq \tilde{H}_j(\Delta(P); \mathbb{K})$$

per ogni  $j \geq -1$ .

*Dimostrazione.* E’ sufficiente dimostrare l’isomorfismo per  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ . Infatti nel caso di  $\mathbb{K}$  campo, ci si può ricondurre all’omologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}$  per il teorema dei coefficienti universali (Proposizione 11.9.1 del libro [13]).

Il complesso simpliciale  $\Delta(P)$  ha una naturale struttura di CW-complesso: per ogni dimensione  $i = 0, 1, \dots, \dim \Delta(P)$  le  $i$ -celle corrispondono alle  $i$ -facce di  $\Delta(P)$ .

Si fissi una numerazione dei vertici di  $\Delta(P)$ . Presa una  $n$ -faccia  $F$  di  $\Delta(P)$ , la mappa<sup>3</sup> di incollamento  $e_F^n : \Delta^n \xrightarrow{\cong} F$  manderà l’ $n$ -simplex standard  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$  nel simplex geometrico  $F$  tramite una trasformazione lineare (quindi omeomorfismo) che porta i vertici  $\{P_i\}_{i=0}^n$  nei vertici della faccia  $F$  nell’ordine della numerazione.

Si indica con  $X = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  la struttura in scheletri di  $\Delta(P)$  come CW-complesso.

Dal Teorema 2.35 in [6], c’è un isomorfismo  $g : H_n^{\text{CW}}(\Delta(P); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_n(\Delta(P); \mathbb{Z})$  tra omologia cellulare e singolare. Basta quindi esibire un isomorfismo tra l’omologia di poset e l’omologia cellulare

<sup>3</sup>Per semplicità si considerano i simplex standard  $\Delta^n$  come domini delle mappe di incollamento. Nel libro di riferimento [6] si usano invece i dischi unitari  $D^n$ , ma questo è ininfluente a meno di omeomorfismo tra domini.

del complesso simpliciale.

Si ricorda che il complesso cellulare di catene  $C_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Z})$  è generato in ogni grado  $n$  proprio dalle mappe di incollamento  $\{e_\alpha^n : \Delta^n \rightarrow \Delta(P) \mid \alpha \in \Lambda_n\}$  delle  $n$ -celle (dove  $\Lambda_n$  è un insieme di indici per le  $n$ -celle). Si possono allora definire per ogni  $n \in \mathbb{N}$  le mappe

$$\begin{aligned} f_n : C_n(P; \mathbb{Z}) &\longrightarrow C_n(X; \mathbb{Z}) \\ \mathbf{c} : (x_0 < x_1 < \cdots < x_n) &\longmapsto e_{\alpha(\mathbf{c})}^n \end{aligned}$$

dove l'indice  $\alpha(\mathbf{c})$  corrisponde alla cella (cioè alla faccia) di vertici  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .

Posto  $C_{-1}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , si definisce  $f$  anche in grado  $n = -1$  mandando la catena  $\emptyset$  nel generatore di  $\mathbb{Z}$ . Per linearità questa mappa si estende ad un isomorfismo di  $\mathbb{Z}$ -moduli dato che manda una base di  $C_n(P; \mathbb{Z})$  in una base di  $C_n(X; \mathbb{Z})$ .

Questo isomorfismo è naturale, cioè commuta con le rispettive mappe di bordo  $\partial_\bullet$  e  $d_\bullet$  dei complessi di catene ridotti del poset e del CW-complesso: si può controllare che sulla base data dalle  $n$ -catene del poset  $d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Data una catena  $\mathbf{c} : (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$  del poset  $P$ , si calcola:

$$\begin{aligned} f_{n-1} \circ \partial_n(\mathbf{c}) &= f_{n-1} \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j (x_0 < \cdots < \hat{x}_j < \cdots < x_n) \right) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j f_{n-1}((x_0 < \cdots < \hat{x}_j < \cdots < x_n)) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j e_{\alpha_j}^{n-1} = d_{n-1}(e_{\alpha(\mathbf{c})}^n) = d_{n-1} \circ f_n(\mathbf{c}) \end{aligned}$$

dove gli  $\alpha_j$  indicizzano le facce  $(n-1)$ -dimensionali della faccia associata a  $\mathbf{c}$ . La penultima uguaglianza segue dalla “cellular boundary formula” a pagina 140 del libro [6].

Passando in omologia ridotta, si ottiene quindi l'isomorfismo

$$\tilde{f}_j : \tilde{H}_j(P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_j^{\text{CW}}(\Delta(P); \mathbb{Z})$$

che composto con la versione ridotta dell'isomorfismo  $g$ , dà la tesi.  $\square$

Segue subito un risultato che evidenzia la biunivocità di tale relazione: anche il passaggio al face poset di un complesso simpliciale fornisce un'isomorfismo tra le omologie, compatibile con quello già ottenuto a meno di suddivisione baricentrica.

**Corollario 2.2.2 - Isomorfismo di omologie per face poset**

*Sia  $\mathcal{K}$  un complesso simpliciale. In omologia si ottiene un isomorfismo:*

$$\tilde{H}_j(\mathcal{K}; \mathbb{K}) \simeq \tilde{H}_j(P(\mathcal{K}); \mathbb{K})$$

per ogni  $j \geq -1$ .

*Dimostrazione.* Dato che l'omologia (ridotta) è un invariante per la suddivisione baricentrica a meno di isomorfismo, dalla Proposizione 1.3.3 segue che:

$$\tilde{H}_j(\mathcal{K}; \mathbb{K}) \simeq \tilde{H}_j(\Delta(P(\mathcal{K})); \mathbb{K}).$$

Si applica allora la Proposizione 2.2.1 e componendo gli isomorfismi

$$\tilde{H}_j(\mathcal{K}; \mathbb{K}) \simeq \tilde{H}_j(\Delta(P(\mathcal{K})); \mathbb{K}) \simeq \tilde{H}_j(P(\mathcal{K}); \mathbb{K})$$

si ottiene la tesi.  $\square$

Diversi complessi simpliciali ottenuti come order complex di poset sono omotopicamente equivalenti ad un wedge di sfere: nel Capitolo 4 si dimostrerà che una speciale categoria di order complex ha questa proprietà.

Risulterà quindi utile il seguente risultato, quando  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ .

**Teorema 2.2.3**

Sia  $\mathcal{K}$  un complesso simpliciale con omotopia di tipo wedge di sfere<sup>a</sup>, dove  $r_i$  indica il numero di sfere di dimensione  $i$  nel wedge. Per  $n = \dim(\mathcal{K})$  e  $i = 1, 2, \dots, n$  si ottiene che:

$$(2.3) \quad \tilde{H}_i(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{r_i} \simeq \tilde{H}^i(\mathcal{K}; \mathbb{Z}).$$

<sup>a</sup>Dire "omotopia di tipo wedge di sfere" equivale a "omotopicamente equivalente ad un wedge di sfere".

*Dimostrazione.* Dato che  $\mathcal{K}$  è omotopicamente equivalente ad un wedge di sfere, i gruppi di omologia e coomologia sono gli stessi. Si può quindi assumere che  $\mathcal{K}$  sia un wedge di sfere. Si dimostra ora il primo isomorfismo della formula (2.3) per induzione su  $r = \sum_{i=1}^n r_i$  che è numero complessivo di sfere nel wedge.

- Passo base: in questo caso  $\mathcal{K}$  è una sfera di dimensione  $n$ . E' noto che l'omologia di una sfera sia:

$$(2.4) \quad \tilde{H}_i(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ \mathbb{Z} & i = n \end{cases}$$

quindi  $\tilde{H}_i(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{r_i}$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , dato che  $r_i = 0$  se  $i \neq n$  e che  $r_n = 1$ .

- Passo induttivo: si suppone che  $r > 1$ . Si considera il sottospazio  $A \subseteq \mathcal{K}$  dato da una delle sfere di dimensione massima nel wedge e si denota con  $B \subseteq \mathcal{K}$  il sottospazio dato dal wedge delle rimanenti sfere.

Si può applicare l'ipotesi induttiva sullo spazio  $B$  che è wedge di  $r - 1$  sfere, per cui:

$$(2.5) \quad \tilde{H}_i(B; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{r_i} & i \neq n \\ \mathbb{Z}^{r_n-1} & i = n \end{cases}.$$

Sia  $C \subseteq \mathcal{K}$  un aperto connesso del punto base del wedge tale che l'intersezione di  $C$  con ogni sfera sia contraibile. Per costruzione  $C$  è contraibile, quindi  $\tilde{A} = A \cup C$  e  $\tilde{B} = B \cup C$  sono aperti di  $\mathcal{K}$  omotopicamente equivalenti rispettivamente ad  $A$  e  $B$ . Inoltre vale che:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \mathcal{K} \quad \text{e} \quad \tilde{A} \cap \tilde{B} = C$$

per cui si può considerare la successione esatta di Mayer-Vietoris (vedere la Sezione 2.2 del libro [6]):

$$\dots \rightarrow H_i(C; \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(\tilde{A}; \mathbb{Z}) \oplus H_i(\tilde{B}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{i-1}(C; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Dato che  $C$  è contraibile e gli spazi  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  sono omotopicamente equivalenti ad  $A$  e  $B$ , si può riscrivere la successione:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_i(A; \mathbb{Z}) \oplus H_i(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_i(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

dove l'omomorfismo centrale è un isomorfismo per esattezza. Un argomento analogo permette di ottenere l'isomorfismo anche in omologia ridotta.

L'omologia del complesso simpliciale si può riscrivere usando i risultati (2.4) e (2.5) come:

$$\tilde{H}_i(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 \oplus \mathbb{Z}^{r_i} = \mathbb{Z}^{r_i} & i \neq n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{r_n-1} = \mathbb{Z}^{r_n} & i = n \end{cases}$$

che è proprio l'isomorfismo cercato.

Un'induzione analoga si può fare nel caso della coomologia del complesso  $\mathcal{K}$ , dato che esiste la successione esatta di Mayer-Vietoris anche in coomologia (vedere Sezione 3.1 del libro [6]). Si ottiene così il secondo isomorfismo della formula (2.3), che conclude la dimostrazione.  $\square$

## 2.3 Top cohomology group

In quest'ultima sezione del Capitolo 2 si fornisce una descrizione più intuitiva del gruppo di coomologia non banale di grado più alto, detto *top cohomology group*. Nell'ambito della coomologia di poset  $P$  puri questa nozione è ben definita: il complesso di catene associato è banale in grado superiore alla lunghezza delle catene massimali di  $P$  per definizione, quindi anche la coomologia lo sarà.

L'interpretazione del top cohomology group sarà rilevante nel Capitolo 5, dove viene presentata un'applicazione della teoria sviluppata.

Sia  $(P, <)$  un poset puro con catene massimali di lunghezza  $n$ . Si usano le notazioni:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(P) &= \{\text{catene massimali di } P\} = \{\text{catene in } P \text{ di lunghezza } n\} \\ \mathcal{M}'(P) &= \{\text{catene in } P \text{ di lunghezza } n-1\}.\end{aligned}$$

Dato che  $C_{n+1}(P; \mathbb{K}) = 0$ , segue che  $\delta_n = 0$  ovvero:

$$Z^n(P; \mathbb{K}) = \ker \delta_n = C_n(P; \mathbb{K}) = \langle \mathcal{M}(P) \rangle.$$

Si definisce inoltre l'insieme delle *relazioni di cobordo* come:

$$\mathcal{B}(P) = \{\delta_{n-1}(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in \mathcal{M}'(P)\}$$

che genera gli  $n$ -cobordi  $B^n(P; \mathbb{K}) = \langle \mathcal{B}(P) \rangle$  dato che  $\mathcal{M}'(P)$  è una base per  $C_{n-1}(P; \mathbb{K})$ . Segue che la top cohomology può essere descritta come un quoziente:

$$\tilde{H}^n(P; \mathbb{K}) = C_n(P; \mathbb{K}) / B^n(P; \mathbb{K})$$

dove i moduli a destra dell'uguaglianza hanno insiemi di generatori noti. L'interesse di questa riscrittura sta nel fatto che le relazioni di cobordo hanno una semplice interpretazione.

Sia  $\mathbf{c} : (c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1}) \in \mathcal{M}'(P)$  una catena di lunghezza  $n-1$ . La catena  $\mathbf{c}$  si può scrivere come concatenazione  $(\mathbf{c}' < \mathbf{c}'') := \mathbf{c}' \cup \mathbf{c}''$  di due catene non raffinabili che possono essere anche vuote. Infatti per purezza del poset  $P$  deve esistere  $x \in P \setminus \mathbf{c}$  tale che:

$$(c_0 < \dots < c_i < x < c_{i+1} < \dots < c_{n-1}) \in \mathcal{M}(P)$$

e per ogni  $y \in P \setminus (\mathbf{c} \cup \{x\})$  che estende la catena  $\mathbf{c}$  in  $(c_0 < \dots < c_j < y < c_{j+1} < \dots < c_{n-1}) \in \mathcal{M}(P)$  deve valere  $i = j$ . Infatti, supponendo  $i < j$  (il caso  $j < i$  è analogo), si otterrebbe una valida catena:

$$(c_0 < \dots < c_i < x < c_{i+1} < \dots < c_j < y < c_{j+1} < \dots < c_{n+1})$$

di lunghezza  $n+1$ , assurdo perché le catene massimali di  $P$  hanno tutte lunghezza  $n$ . Basta allora porre  $\mathbf{c}' : (c_0 < \dots < c_i)$  e  $\mathbf{c}'' : (c_{i+1} < \dots < c_{n-1})$  per ottenere le sottocatene non raffinabili cercate.

Si può calcolare il cobordo della  $(n-1)$ -catena  $\mathbf{c}$  con la formula (2.2), ottenendo:

$$\begin{aligned}\delta_{n-1}(\mathbf{c}) &= \sum_{h=0}^n (-1)^h \sum_{x \in (c_{h-1}, c_h)} (c_0 < \dots < c_{h-1} < x < c_h < \dots < c_{n-1}) \\ &= (-1)^{|\mathbf{c}'|} \sum_{x \in (a_{\mathbf{c}}, b_{\mathbf{c}})} (\mathbf{c}' < x < \mathbf{c}'')\end{aligned}$$

dove gli estremi dell'intervallo sono:

$$a_{\mathbf{c}} = \begin{cases} \hat{0} & \text{se } \mathbf{c}' = \emptyset \\ c_{i-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{\mathbf{c}} = \begin{cases} \hat{1} & \text{se } \mathbf{c}'' = \emptyset \\ c_i & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

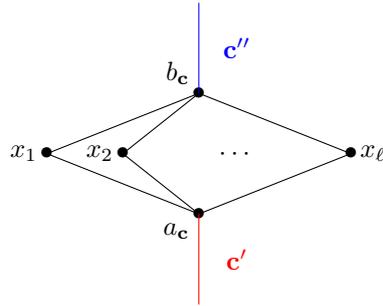


Figura 2.1: Relazione di cobordo data da  $\delta_{n-1}(\mathbf{c})$ .

Quindi la relazione di bordo è una somma con segno di catene massimali della forma:

$$\delta_{n-1}(\mathbf{c}) = \pm((\mathbf{c}' < x_1 < \mathbf{c}'') + \cdots + (\mathbf{c}' < x_\ell < \mathbf{c}''))$$

dove  $(a_{\mathbf{c}}, b_{\mathbf{c}}) = \{x_1, x_2, \dots, x_\ell\}$ . Graficamente, la situazione si può rappresentare nella forma di diagramma di Hasse come in Figura 2.1.



# Capitolo 3

## Rappresentazioni di $\mathfrak{S}_n$

In questo capitolo si introduce una teoria apparentemente distante da quanto visto finora: la teoria delle rappresentazioni di gruppo. Un testo di riferimento per la teoria sviluppata è il libro di Bruce E. Sagan “The Symmetric Group” [9].

Si pone particolare attenzione alle rappresentazioni dei gruppi simmetrici: nella Sezione 3.3 viene definita l’azione del gruppo simmetrico  $\mathfrak{S}_n$  sull’omologia di poset, in preparazione all’esempio dell’algebra booleana troncata del Capitolo 5.

### 3.1 Rappresentazioni di gruppo

Si introducono in questa sezione le definizioni base necessarie ad affrontare gli aspetti della teoria rilevanti ai fini dell’elaborato.

#### Definizione 3.1.1 - Rappresentazione di gruppo

Sia  $G$  un gruppo e  $V$  uno spazio vettoriale. Una *rappresentazione del gruppo*  $G$ , detta anche  *$G$ -rappresentazione*, è la coppia  $(V, \rho)$  dove  $\rho$  è un omomorfismo:

$$\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V).$$

Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio vettoriale.  $W$  è una *sottorappresentazione* di  $(V, \rho)$  se è invariante sotto l’azione di gruppo, ovvero  $\rho(g)(W) \subseteq W$  per ogni  $g \in G$ .

In particolare  $(W, \pi)$  è a sua volta una  $G$ -rappresentazione con  $\pi(g) = \rho(g)|_W$ .

#### Esempio 3.1 - Rappresentazione di gruppo

Si portano degli esempi di  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazione, dove  $\mathfrak{S}_n$  è l’ $n$ -esimo gruppo simmetrico.

- Rappresentazione banale: dato il  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale  $V = \mathbb{C}$ , si osserva che  $\text{GL}(V) \simeq \mathbb{C}^*$  visto come l’azione di moltiplicazione. E’ ben definita la rappresentazione  $(V, \rho_{\text{triv}})$  data da:

$$\rho_{\text{triv}} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & 1 \end{array} .$$

Questa rappresentazione si dice banale in quanto l’azione del gruppo  $\mathfrak{S}_n$  su ogni elemento agisce come l’identità.

- Rappresentazione segno: nella notazione dell’esempio precedente, si può definire anche la rappresentazione  $(V, \rho_{\text{sgn}})$  dove:

$$\rho_{\text{sgn}} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & \text{sgn}(\sigma) \end{array}$$

cioè l’azione di ogni permutazione  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  agisce come la moltiplicazione per  $\pm 1$  in base al segno di  $\sigma$ . Da qui il nome “rappresentazione segno”.

- Rappresentazione regolare: si definisce la *group algebra*  $V = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ , dove le permutazioni di  $\mathfrak{S}_n$  formano una base formale del  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Gli elementi di questo spazio si possono quindi scrivere nella forma  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha_\sigma \sigma$  dove  $\alpha_\sigma \in \mathbb{C}$  ed è ben definita l'operazione aggiuntiva di moltiplicazione:

$$\left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha_\sigma \sigma \right) \cdot \left( \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \beta_\tau \tau \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \alpha_\sigma \beta_\tau \sigma \tau.$$

Si può costruire la  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazione  $(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \rho_{\text{reg}})$  dove per ogni  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ :

$$\rho_{\text{reg}}(\sigma) \left( \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \alpha_\tau \tau \right) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \alpha_\tau (\sigma \tau).$$

Un esempio di sottorappresentazione banale è fornito, nel caso della rappresentazione regolare  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ , dal sottospazio vettoriale monogenerato  $W = \langle \tilde{x} \rangle \simeq \mathbb{C}$  dove  $\tilde{x} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma$ . Infatti vale che per ogni  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ :

$$\rho_{\text{reg}}(\tau)(\tilde{x}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \tau \sigma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma = \tilde{x}$$

quindi  $W$  è invariante per  $\rho_{\text{reg}}$ . Si osserva che questa  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazione e la rappresentazione triviale si comportano allo stesso modo (in entrambe le rappresentazioni  $\mathfrak{S}_n$  agisce nel modo banale sugli elementi degli spazi) e gli spazi hanno stessa dimensione: è utile introdurre un concetto analogo a quello di isomorfismo per spazi vettoriali.

I morfismi della categoria delle rappresentazioni di gruppo saranno gli omomorfismi tra spazi vettoriali che si comportano bene per l'azione del gruppo  $G$ .

#### Definizione 3.1.2 - $G$ -omomorfismo di rappresentazioni

Date due  $G$ -rappresentazioni  $(V, \rho)$  e  $(W, \pi)$ , un omomorfismo  $\varphi : V \rightarrow W$  si definisce  *$G$ -omomorfismo* se per ogni  $g \in G$  e  $v \in V$  vale  $\varphi(\rho(g)(v)) = \pi(g)(\varphi(v))$ .

L'insieme dei  $G$ -omomorfismi da  $V$  a  $W$  si indicherà con  $\text{hom}_G(V, W)$ .

Un  $G$ -omomorfismo  $\varphi : V \rightarrow W$  è un  *$G$ -isomorfismo* se  $\varphi$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.

A partire dal concetto di sottorappresentazione è possibile distinguere una famiglia di rappresentazioni, le rappresentazioni irriducibili, che nel caso di  $G$  finito è l'insieme delle  $G$ -rappresentazioni "essenziali" da cui si ottengono tutte le altre.

Si riporta formalmente questo risultato con il Teorema 3.1.4.

#### Definizione 3.1.3 - Rappresentazione irriducibile

Una rappresentazione  $(V, \rho)$  si dice *irriducibile* se è non vuota e le sue uniche sottorappresentazioni sono  $\{0\}$  e  $V$ .

#### Teorema 3.1.4 - Teorema di Maschke

Se  $G$  è un gruppo finito allora ogni  $G$ -rappresentazione  $V$  si decompone come somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

*Dimostrazione.* La dimostrazione del teorema viene omissa, si rimanda al Teorema 1.5.3 del libro [9].  $\square$

## 3.2 Moduli di Specht

In questa sezione si fornisce una lista completa delle rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{S}_n$  a meno di isomorfismo: viene esibita una costruzione esplicita di queste rappresentazioni con i moduli di Specht.

Si definiscono ora gli oggetti combinatori che daranno una base per gli spazi vettoriali che si intende costruire.

**Definizione 3.2.1 - Partizioni di  $n$** 

Dato  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  definiamo una *partizione di  $n$*  come una sequenza debolmente decrescente di interi positivi  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  tale che  $|\lambda| = \sum_{i=1}^k \lambda_i = n$ .

Una notazione più concisa che verrà usata è  $\lambda \vdash n$ . Inoltre per indicare una partizione  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_h)$  con  $h \leq k$  e  $\mu_i \leq \lambda_i$  per  $i = 1, 2, \dots, h$  si abbrevierà  $\mu \subseteq \lambda$ .

Le partizioni si identificano con i cosiddetti diagrammi di Ferrer, associati ad una struttura algebrica di sottoinsieme di  $\mathbb{Z}^2$  e una geometrica di sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 3.2.2 - Diagramma di Ferrer**

Sia  $\lambda \vdash n$  una partizione. Il *diagramma di Ferrer* di forma  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  è dato da:

1. il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  definito con:

$$D_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq k, 0 < x \leq \lambda_{\lceil y \rceil}\}.$$

2. il sottoinsieme di  $\mathbb{Z}^2$  dato da:

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 < j \leq k, 0 < i \leq \lambda_j\}.$$

Dato  $\mu \subseteq \lambda$  si definisce il *diagramma di Ferrer skew* di forma  $\lambda/\mu$  l'analogia struttura a cui si tolgono le celle della forma  $\mu$ , ovvero:

1. il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  definito con:

$$D_{\lambda/\mu} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq k, \mu_{\lceil y \rceil} < x \leq \lambda_{\lceil y \rceil}\}.$$

2. il sottoinsieme di  $\mathbb{Z}^2$  dato da:

$$D_{\lambda/\mu} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 < j \leq k, \mu_j < i \leq \lambda_j\}.$$

Ogni coppia  $(i, j) \in D_\lambda \subseteq \mathbb{Z}^2$  si chiamerà *cella* del diagramma, di coordinate  $(i, j)$ .

**Esempio 3.2 - Diagrammi di Ferrer**

Si consideri  $\lambda = (6, 6, 3, 2, 1) \vdash 18$  partizione e  $\mu = (4, 2, 2)$ . Si nota che  $\mu \subseteq \lambda$ .

Nella rappresentazione geometrica  $D_\lambda \subseteq \mathbb{R}^2$  si può evidenziare come fatto in Figura 3.1 la suddivisione in celle, corrispondenti alle coppie di  $D_\lambda \subseteq \mathbb{Z}^2$ . A destra viene poi riportato il diagramma skew della forma  $\lambda/\mu$ .

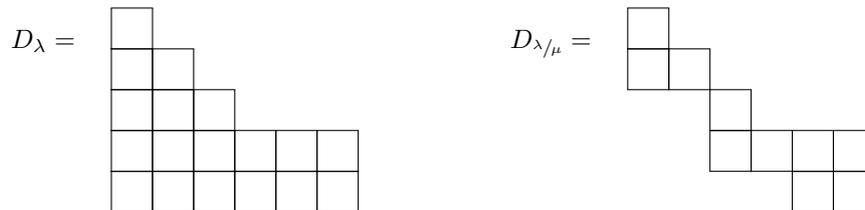


Figura 3.1: Diagrammi di Ferrer rispettivamente di  $\lambda$  e  $\lambda/\mu$

In questo elaborato viene adottata<sup>1</sup> la “notazione francese”. In letteratura si utilizza anche la “notazione inglese” che si ottiene riflettendo i diagrammi rispetto all’asse  $x$  del piano  $\mathbb{R}^2$ .

Alle celle di un diagramma di Ferrer si possono associare dei numeri naturali. In base alle regole imposte per riempire il diagramma, si otterranno gli standard e semi-standard Young tableaux.

<sup>1</sup>La scelta di questa notazione segue dal fatto che le coordinate delle celle sono coerenti con l’usuale orientazione degli assi  $xy$  sul piano. Quella inglese richiederebbe di invertire il verso dell’asse  $y$ .

**Definizione 3.2.3 - Tableaux**

Sia  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$  partizione. Un *tableau* di forma  $\lambda$  è un array  $T = (T_{(i,j)}) \in \mathbb{N}^n$  indicizzato sulle coordinate intere di  $D_\lambda$ . Tra questi, si definiscono:

- i *semi-standard Young tableaux* indicati con  $T \in \text{SSYT}(\lambda)$ , le cui entrate delle celle sono debolmente crescenti sulle righe e strettamente sulle colonne, ovvero:

$$\begin{cases} T_{(i,j)} \leq T_{(i+1,j)} & \forall 1 \leq j \leq k, 1 \leq i < \lambda_j \\ T_{(i,j)} < T_{(i,j+1)} & \forall 1 \leq j < k, 1 \leq i \leq \lambda_{j+1} \end{cases}$$

- gli *injective tableaux*, indicati  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ , ovvero i tableaux le cui entrate sono i numeri  $1, 2, \dots, n$  senza ripetizioni.
- gli *standard Young tableaux* denotati  $T \in \text{SYT}(\lambda)$ , che sono injective tableaux dove i numeri sono disposti in ordine strettamente crescente su righe e colonne. In altre parole:

$$\text{SYT}(\lambda) = \text{SSYT}(\lambda) \cap \mathcal{T}_\lambda.$$

Le definizioni si possono dare in modo analogo per le forme skew. Gli injective tableaux di forma skew avranno entrate senza ripetizioni nell'insieme  $\{1, 2, \dots, |\lambda| - |\mu|\}$ .

**Esempio 3.3 - (Semi-)Standard Young tableaux**

Riprendendo i diagrammi di Ferrer dell'Esempio 3.2 di forma  $\lambda = (6, 6, 3, 2, 1)$  e forma skew  $\lambda/\mu$  con  $\mu = (4, 2, 2)$ , degli esempi di semi-standard e standard Young tableaux sono riportati rispettivamente nelle Figure 3.2 e 3.3.

7					
6	6				
4	5	7			
2	3	3	5	6	10
1	1	2	3	5	8

2				
1	3			
		5		
	4	6	6	7
			3	4

Figura 3.2: Esempi di semi-standard Young tableaux di forma  $\lambda$  e  $\lambda/\mu$

17					
9	13				
5	12	16			
2	8	10	11	15	18
1	3	4	6	7	14

9				
1	10			
		7		
	3	5	6	8
			2	4

Figura 3.3: Esempi di standard Young tableaux di forma  $\lambda$  e  $\lambda/\mu$

Sugli injective tableaux di forma  $\lambda \vdash n$  si possono definire due azioni del gruppo  $\mathfrak{S}_n$ :

- l'*azione sinistra* dove una permutazione  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  permuta le entrate delle celle. Formalmente per ogni  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  e ogni  $(i, j) \in D_\lambda$ :

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)}).$$

- l'*azione destra*. Fissata una numerazione delle celle  $D_\lambda$  (con gli indici  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ) e una permutazione  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , si può indicare con  $\sigma(i, j)$  la cella indicizzata  $\sigma(m)$  dove  $m$  è la numerazione della cella  $(i, j)$ . Allora per  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ :

$$(T \cdot \sigma)_{(i,j)} = T_{\sigma(i,j)}.$$

La numerazione per tableaux che viene adottata nei successivi esempi visita le celle del diagramma per righe, da sinistra a destra e dal basso in alto come raffigurato dal tableau  $T_1$  in Figura 3.4.

Si riportano ora due esempi di azione sinistra e destra, dove la permutazione considerata in one-line notation è:

$$\sigma = 3 \ 2 \ 7 \ 4 \ 11 \ 15 \ 1 \ 8 \ 10 \ 9 \ 14 \ 12 \ 6 \ 13 \ 5.$$

Notare che in Figura 3.4 azione sinistra e destra coincidono, dato che la numerazione delle celle coincide con le entrate del tableau  $T_1$ .

Un esempio più esplicativo è il tableau  $T_2$  in Figura 3.5, dove le entrate sono cambiate. Presa in considerazione la settima cella di  $T_2$ , con entrata “6”, si ottiene:

- nel caso dell’azione sinistra, la settima cella di  $\sigma \cdot T_2$  è data da  $\sigma(6) = 15$ .
- nel caso dell’azione destra, l’entrata della settima cella viene mandata nella  $\sigma(7)$ -esima cella in  $T_2 \cdot \sigma$ , ovvero la prima cella. Infatti la prima cella di  $T_2 \cdot \sigma$  ha come entrata proprio “6”.

Questo procedimento, fatto per tutte le celle del tableau, permette di calcolare l’azione (rispettivamente sinistra e destra) di  $\sigma$  sul tableau complessivo.

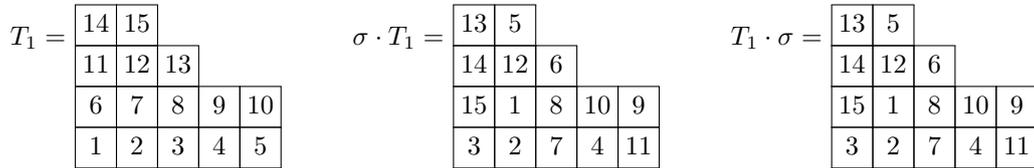


Figura 3.4: Numerazione del tableau  $\lambda = (5, 5, 3, 2)$ , esempi di azione sinistra e destra

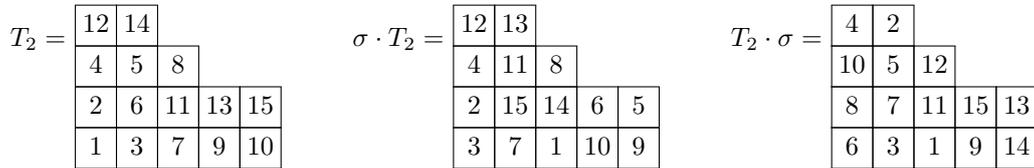


Figura 3.5: Esempi di azione sinistra e destra

Le due azioni commutano tra loro, in quanto l’azione sinistra dipende soltanto dalle entrate del tableau, mentre l’azione destra vede solo la numerazione delle celle, non le sue entrate.

Si definisce il  $\mathbb{C}$ -modulo libero con base data da  $\mathcal{T}_\lambda$ :

$$M^\lambda = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_\lambda} \alpha_T T \mid T \in \mathcal{T}_\lambda \text{ e } \alpha_T \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le azioni sinistra e destra di  $\mathfrak{S}_n$  su  $\mathcal{T}_\lambda$  definiscono rispettivamente una rappresentazione sinistra e destra per il modulo  $M^\lambda$ , agendo sugli individuali injective tableaux.

Per il resto della sezione, dati  $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_n$  si indicherà con  $\alpha\beta \in \mathfrak{S}_n$  la composizione destra, in quanto si considererà l’azione destra di gruppo su  $M^\lambda$ . Quindi ad esempio in  $\mathfrak{S}_3$  vale  $(1 \ 2)(1 \ 3) = (1 \ 2 \ 3)$ .

Due tableaux  $T, T' \in \mathcal{T}_\lambda$  si dicono *row* (o *column*) *equivalent* se le righe (rispettivamente le colonne) dei due tableaux contengono gli stessi numeri, a meno dell’ordine. Seguono le definizioni di due sottogruppi di  $\mathfrak{S}_n$  correlati alla struttura di tableaux:

- il *row stabilizer subgroup* definito:

$$R_\lambda = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid T\sigma \text{ e } T \text{ sono row equivalent per ogni } T \in \mathcal{T}_\lambda \}.$$

- il *column stabilizer subgroup* dato da:

$$C_\lambda = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid T\sigma \text{ e } T \text{ sono column equivalent per ogni } T \in \mathcal{T}_\lambda\}.$$

L'elemento neutro appartiene ad entrambi dato che  $T$  è row (column) equivalent a sè stesso. Gli insiemi sono chiusi per composizione dato che essere row e column equivalent è una relazione transitiva. Segue che  $R_\lambda$  e  $C_\lambda$  sono effettivamente sottogruppi di  $\mathfrak{S}_n$ .

#### Definizione 3.2.4 - Moduli di Specht

Sia  $\lambda \vdash n$  una partizione. Per ogni  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  si definisce il suo *polytabloid* associato:

$$e_T = \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) T\alpha\beta.$$

Si definisce *modulo di Specht* il  $\mathbb{C}$ -sottomodulo di  $M^\lambda$  definito da:

$$S^\lambda = \langle e_T \mid T \in \mathcal{T}_\lambda \rangle.$$

Dalla commutatività di azione sinistra e destra di  $\mathfrak{S}_n$  segue subito che  $\sigma e_T = e_{\sigma T}$  per cui  $S^\lambda$  è una  $\mathfrak{S}_n$ -sottorappresentazione di  $M^\lambda$  (con l'azione sinistra).

#### Teorema 3.2.5

*I moduli di Specht  $S^\lambda$  al variare di  $\lambda \vdash n$  formano un insieme completo di  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazioni irriducibili (a meno di  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfismo).*

*Dimostrazione.* Si rimanda al Teorema 2.4.6 del libro [9]. □

Data una forma  $\lambda \vdash n$ , si intende ora dare una definizione alternativa del rispettivo modulo di Specht come quoziente di  $M^\lambda$  per le seguenti relazioni.

- *Relazioni di riga:* considerando il row-stabilizer  $R_\lambda$ , l'insieme delle relazioni di riga è dato dagli elementi:

$$r_\sigma(T) = T\sigma - T$$

al variare di  $\sigma \in R_\lambda$  e di  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ .

- *Relazioni di Garnir:* si considerano indici  $(i, j) \in D_\lambda$  tali che  $1 \leq j \leq \lambda_{i+1}$ . Per ogni coppia si può definire l'insieme di celle:

$$C_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \{ \text{celle in riga } i \text{ e colonne dalla } j \text{ alla } \lambda_i \} \\ \cup \\ \{ \text{celle in riga } i+1 \text{ e colonne dalla } 1 \text{ alla } j \} \end{array}$$

sottoinsieme di  $D_\lambda$ . Il sottogruppo  $G_{i,j}(\lambda) \subset \mathfrak{S}_n$  è dato dalle permutazioni che permutano solo celle in  $C_{i,j}(\lambda)$  sotto l'azione destra di  $\mathfrak{S}_n$ . Allora le relazioni di Garnir sono date dagli elementi:

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T\sigma$$

al variare di  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ .

#### Esempio 3.4 - Relazioni di Garnir

Si consideri la partizione  $\lambda = (8, 7, 6, 4) \vdash 25$  e la numerazione parziale delle celle nelle righe 2 e 3. In Figura 3.6 a destra sono indicate in giallo le celle dell'insieme  $C_{2,4}(\lambda)$ .

Un esempio di permutazione in  $G_{2,4}(\lambda)$  in one-line notation è  $\sigma = 1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 4 \ 9 \ 7 \ 8 \ 10 \ 5 \ 11 \ 12 \ 13$ .

Sia  $U^\lambda$  il sottospazio di  $M^\lambda$  generato dalle relazioni di riga e di Garnir. Sempre per commutatività di azione sinistra e destra di  $\mathfrak{S}_n$  su  $M^\lambda$ , si osserva che per ogni  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  e  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ :

$$\pi r_\sigma(T) = r_{\sigma\pi}(T) \quad \text{e} \quad \pi g_{i,j}(T) = g_{i,j}(\pi T)$$

Figura 3.6: Numerazione parziale della forma  $\lambda$  e l'insieme  $C_{2,4}(\lambda)$ 

al variare di  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  e di  $(i, j) \in D_\lambda$  tali che  $1 \leq j \leq \lambda_{i+1}$ . Quindi  $U^\lambda$  è anche una  $\mathfrak{S}_n$ -sottorappresentazione di  $M^\lambda$  per l'azione sinistra. E' quindi ben definita l'azione sinistra di  $\mathfrak{S}_n$  sul quoziente  $M^\lambda/U^\lambda$  che si rivela essere  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfo al relativo modulo di Specht.

**Teorema 3.2.6**

Per ogni  $\lambda \vdash n$  si ha che:

$$S^\lambda \cong_{\mathfrak{S}_n} M^\lambda/U^\lambda.$$

*Dimostrazione.* Si consideri la mappa che manda ogni injective tableaux nel polytabloid associato. Per linearità, questa si estende ad un  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : M^\lambda &\longrightarrow S^\lambda \\ T &\longmapsto e_T \end{aligned}$$

che è surgettivo in quanto i polytabloid generano  $S^\lambda$  per definizione.

Si dimostra ora che  $U^\lambda \subseteq \ker \psi$  vedendo che i generatori di  $U^\lambda$  (ovvero le relazioni di riga e di Garnir) si annullano tramite  $\psi$ . Si fissi  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ .

- *Relazioni di riga:* sia  $\sigma \in R_\lambda$ . Si calcola esplicitamente che:

$$\begin{aligned} \psi(r_\sigma(T)) &= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) r_\sigma(T) \alpha \beta \\ &= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) T \sigma \alpha \beta - \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) T \alpha \beta \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{\sigma \alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) T \sigma \alpha \beta - \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) T \alpha \beta = e_T - e_T = 0 \end{aligned}$$

dove all'uguaglianza (a) si usa il fatto che insiemisticamente  $\sigma R_\lambda = R_\lambda$ .

- *Relazioni di Garnir:* fissati  $(i, j) \in D_\lambda$  tali che  $1 \leq j \leq \lambda_{i+1}$  si vuole calcolare  $\psi(g_{i,j}(T))$ :

$$\begin{aligned} \psi(g_{i,j}(T)) &= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) g_{i,j}(T) \alpha \beta = \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T \sigma \alpha \beta \\ &= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \left( \sum_{\substack{\beta \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\beta)=1}} \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T \sigma \alpha \beta - \sum_{\substack{\beta \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\beta)=-1}} \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T \sigma \alpha \beta \right) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{\alpha \in R_\lambda} \left( \sum_{\substack{\beta \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\beta)=1}} \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T \sigma \alpha \beta - \sum_{\substack{\beta \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\beta)=-1}} \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T \sigma \sigma_\alpha \alpha \tau_\alpha \beta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \left( \sum_{\substack{\beta \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\beta)=1}} \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T\sigma\alpha\beta - \sum_{\substack{\tau_\alpha \beta \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\tau_\alpha\beta)=1}} \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T\sigma\sigma_\alpha\tau_\alpha\beta \right) \\
&= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \left( \sum_{\substack{\beta \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\beta)=1}} \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T\sigma\alpha\beta - \sum_{\substack{\beta' \in C_\lambda \\ \text{sgn}(\beta')=1}} \sum_{\sigma' \in G_{i,j}(\lambda)} T\sigma'\alpha\beta' \right) = 0
\end{aligned}$$

dove per l'uguaglianza (a) si usa il Lemma 3.2.7 con  $\alpha \in R_\lambda$  e il tableau  $T\sigma$ .

Segue che effettivamente  $U^\lambda \subseteq \ker \psi$ . E' quindi ben definito lo  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo al quoziente:

$$\varphi: M^\lambda / U^\lambda \longrightarrow S^\lambda$$

che è surgettivo in quanto  $\psi$  lo è per definizione. Per vedere che  $\varphi$  è iniettiva, si dimostra che:

1. gli standard polytabloid  $\{e_T \mid T \in \text{SYT}(\lambda)\} \subseteq S^\lambda$  sono linearmente indipendenti. Si rimanda per questo risultato alla Proposizione 2.5.9 del libro [9].

L'idea dimostrativa si basa sul definire un ordine totale sui tabloids (tableaux dove si "dimentica" l'ordine con cui gli elementi compaiono nelle righe) detto *row-dominance order* " $\triangleleft$ ". A quel punto, se ci fosse una combinazione lineare non banale degli standard polytabloid si otterrebbe un assurdo guardando ai tabloid addendi di  $e_T$  ordinati con l'ordine totale, al variare di  $T \in \text{SYT}(\lambda)$ .

2. le classi d'equivalenza (che verranno indicate omettendo i brackets "[...]" ) degli standard

Young tableaux  $\text{SYT}(\lambda)$  generano il quoziente  $M^\lambda / U^\lambda$ . Equivalentemente, si dimostra che ogni injective tableau si deve scrivere come combinazione lineare di standard Young tableaux. Si osserva innanzitutto che, a meno di relazioni di riga, ogni tableau  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  è equivalente ad un tableau  $T\sigma$  (con  $\sigma \in R_\lambda$ ) con entrate crescenti su ogni riga. Usando questo fatto, ogni relazione di Garnir si può riscrivere come combinazione lineare intera di tableaux con righe crescenti, indicata  $g_{i,j}(T) = \alpha T + \sum_{j=1}^k \beta_j T^j$  dove  $\alpha, \beta_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Si usa un argomento induttivo sul row-dominance order per vedere che tutti i tableaux si riscrivono come combinazione di tableaux standard. Partendo dall'elemento massimale, si analizzano tutti i tableaux (bastano quelli con righe crescenti).

- *Passo base*: il massimo del row-dominance order è uno standard Young tableau, quindi non va controllato nulla.
- *Passo induttivo*: supponiamo che tutti i tableaux maggiori di  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  siano esprimibili come combinazione in  $\text{SYT}(\lambda)$ . Se  $T$  è standard si conclude, altrimenti devono esistere due celle tali che  $T_{(i,j)} > T_{(i+1,j)}$ . Dato che le righe hanno entrate crescenti per ipotesi, segue che:

$$(3.1) \quad \max \{T_{(i+1,1)}, \dots, T_{(i+1,j)}\} = T_{(i+1,j)} < T_{(i,j)} = \min \{T_{(i,j)}, \dots, T_{(i,\lambda_i)}\}.$$

In particolare, basta scambiare qualche elemento tra gli insiemi di celle:

$$\{(i+1, 1), (i+1, 2), \dots, (i+1, j)\} \quad \{(i, j), (i, j+1), \dots, (i, \lambda_i)\}$$

affinché per il nuovo tableau (si può supporre a righe crescenti) valga  $T'_{(i,j)} < T'_{(i+1,j)}$ . Questo perché dalla disuguaglianza (3.1) segue che  $T'_{(i,j)}$  sarà un'entrata della  $(i+1)$ -esima riga di  $T$  e viceversa  $T'_{(i+1,j)}$  un'entrata della riga  $i$ -esima di  $T$ .

Si considera la relazione di Garnir di indici proprio  $(i, j)$ , che al quoziente dà l'equivalenza:

$$\alpha T = - \sum_{j=1}^k \beta_j T^j.$$

Per l'osservazione appena fatta, i tableaux  $T^j$  sono tali che  $T^j_{(i,j)} < T^j_{(i+1,j)}$ . Per il Lemma 2.5.5 in [9], segue che  $T^j \triangleright T$  per  $j = 1, 2, \dots, k$ . Dall'ipotesi induttiva segue che  $T$  è combinazione lineare di standard Young tableaux in quanto i tableaux  $T^j$  lo sono.

Anche in questo caso, per i dettagli e un esempio si indica il libro di Bruce E. Sagan [9].

Calcolando allora l'immagine di una combinazione lineare nel quoziente:

$$\varphi \left( \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} \alpha_T T \right) = \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} \alpha_T e_T,$$

per il punto 1 questa è nulla se e solo se  $\alpha_T = 0$  per ogni  $T \in \text{SYT}(\lambda)$ .

Dato che per il punto 2 ogni elemento del dominio di  $\varphi$  si scrive con una combinazione lineare come sopra, segue che  $\ker \varphi = 0$ . La mappa  $\varphi : M^\lambda / U^\lambda \rightarrow S^\lambda$  è quindi lo  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfismo cercato.  $\square$

**Lemma 3.2.7**

Si considerano una forma  $\lambda \vdash n$ , un tableau  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  e una coppia di indici  $(i, j) \in D_\lambda$  tali che  $1 \leq j \leq \lambda_{i+1}$ . Data una permutazione  $\alpha \in R_\lambda$  esiste una trasposizione  $\tau_\alpha \in C_\lambda$  tale che

$$T\alpha = T\sigma_\alpha\alpha\tau_\alpha$$

dove  $\sigma_\alpha = \alpha\tau_\alpha\alpha^{-1} \in G_{i,j}(\lambda)$ .

**Esempio 3.5 - Idea del lemma**

Questo esempio percorre l'idea dimostrativa del lemma. La successiva dimostrazione formalizzerà soltanto i passaggi fatti ora.

Si fissa  $\lambda = (8, 7, 6, 4) \vdash 25$  e la numerazione delle celle fornita dal tableau  $T$  in figura (si considera una numerazione delle sole righe 2 e 3, dato che si lavora solo con quest'ultime). Posto  $\alpha = 7\ 4\ 1\ 5\ 2\ 3\ 6\ 8\ 11\ 10\ 13\ 12\ 9$  si vogliono trovare  $\tau_\alpha$  e  $\sigma_\alpha$  come nell'enunciato del lemma. Fissata la coppia di indici  $(i, j) = (2, 4)$ , le celle di  $C_{2,4}(\lambda)$  sono quelle evidenziate in giallo. Si tiene così traccia di tali celle prima e dopo l'azione di  $\alpha$ .

$T =$																																
<table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>									8	9	10	11	12	13			1	2	3	4	5	6	7									
8	9	10	11	12	13																											
1	2	3	4	5	6	7																										

$T\alpha =$																																
<table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>8</td><td>13</td><td>10</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>									8	13	10	9	12	11			3	5	6	2	4	7	1									
8	13	10	9	12	11																											
3	5	6	2	4	7	1																										

In questo caso, si osserva dalla figura che sulla colonna  $k = 3$  ci sono sia in riga 2 che 3 celle permutate di  $C_{2,4}(\lambda)$ . Si considera la permutazione scritta in cicli  $\tau_\alpha = (3\ 10) \in C_\lambda$ , in one-line notation  $\tau_\alpha = 1\ 2\ 10\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 3\ 11\ 12\ 13$ , che tramite l'azione destra permuta soltanto i numeri 6 e 10. E' fondamentale permutare elementi in celle evidenziate: questo garantisce che la composizione  $\alpha\tau_\alpha\alpha^{-1}$  sia una permutazione in  $G_{2,4}(\lambda)$ .

Le righe  $i$  e  $i + 1$  di  $T\alpha\tau_\alpha$  hanno le stesse entrate, a meno degli elementi permutati dalla traslazione 6, 10. Agendo a destra con  $\alpha^{-1}$ , tutte le entrate tornano alla cella che occupavano in  $T$ , a meno di 6, 10. Nell'esempio in figura  $\alpha^{-1} = 3\ 5\ 6\ 2\ 4\ 7\ 1\ 8\ 13\ 10\ 9\ 12\ 11$ .

$T\alpha\tau_\alpha =$																																
<table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>8</td><td>13</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>3</td><td>5</td><td>10</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>									8	13	6	9	12	11			3	5	10	2	4	7	1									
8	13	6	9	12	11																											
3	5	10	2	4	7	1																										

$T\alpha\tau_\alpha\alpha^{-1} =$																																
<table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>8</td><td>9</td><td>6</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: yellow;"><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>10</td><td>7</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>									8	9	6	11	12	13			1	2	3	4	5	10	7									
8	9	6	11	12	13																											
1	2	3	4	5	10	7																										

La permutazione  $\alpha\tau_\alpha\alpha^{-1}$  agisce solo su celle in  $C_{2,4}(\lambda)$  quindi  $\sigma_\alpha = \alpha\tau_\alpha\alpha^{-1} \in G_{2,4}(\lambda)$ , scritta in one-line notation:

$$\sigma_\alpha = \alpha\tau_\alpha\alpha^{-1} = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 7\ 8\ 9\ 6\ 11\ 12\ 13.$$

Segue subito che  $T\sigma_\alpha\alpha\tau_\alpha = T(\alpha\tau_\alpha\alpha^{-1})\alpha\tau_\alpha = T\alpha$ .

*Dimostrazione.* Si definisce l'insieme:

$$\mathcal{A}_{i,j}(T) = \{\text{entrate di } T \text{ nelle celle sulle righe } i \text{ e } i+1 \text{ che non stanno in } C_{i,j}(\lambda)\} \subseteq [n]$$

che nell'esempio sopra erano le entrate di  $T$  nelle celle bianche delle righe 2 e 3.

Ponendo l'attenzione sulle righe  $i$  e  $i+1$  del tableaux, per definizione di  $C_{i,j}(\lambda)$  segue che  $|\mathcal{A}_{i,j}(T)| = \lambda_{i+1} - 1$ . Considerate le coppie  $\{(i,j), (i+1,j)\}_{j=1}^{\lambda_{i+1}}$  che in numero sono  $\lambda_{i+1}$ , segue che esiste il minimo indice  $k \in \{1, 2, \dots, \lambda_{i+1}\}$  tale che:

$$(T\alpha)_{(i,k)} \notin \mathcal{A}_{i,j}(T) \quad \text{e} \quad (T\alpha)_{(i+1,k)} \notin \mathcal{A}_{i,j}(T).$$

Si definisce la trasposizione  $\tau_\alpha \in C_\lambda$  quella che scambia le entrate delle celle  $(i,k)$  e  $(i+1,k)$ .

Le uniche entrate che hanno cambiato riga in  $T\alpha\tau_\alpha$  sono le entrate di  $T\alpha$  permutate da  $\tau_\alpha$ . Applicando  $\alpha^{-1}$ , le entrate vengono tutte riportate alla cella che occupavano in  $T$ , apparte  $(T\alpha)_{(i,k)}$  e  $(T\alpha)_{(i+1,k)}$  che scambiano le loro posizioni.

Allora, per costruzione segue che  $\sigma_\alpha = \alpha\tau_\alpha\alpha^{-1} \in G_{i,j}(\lambda)$ , in quanto le due entrate permutate occupano due celle di  $C_{i,j}(\lambda)$  sia in  $T$  che in  $T\sigma_\alpha$ . Dato che  $\tau_\alpha^{-1} = \tau_\alpha$ :

$$T\sigma_\alpha\alpha\tau_\alpha = T(\alpha\tau_\alpha\alpha^{-1})\alpha\tau_\alpha = T\alpha(\tau_\alpha\alpha^{-1}\alpha\tau_\alpha) = T\alpha$$

ovvero la tesi.  $\square$

Da questa descrizione alternativa dei moduli di Specht si identifica subito una base.

### Corollario 3.2.8 - Base di $S^\lambda$

Data la partizione  $\lambda \vdash n$ , il modulo di Specht  $S^\lambda$  ha base:

$$\{e_T \mid T \in \text{SYT}(\lambda)\}$$

e in particolare  $\dim_{\mathbb{C}} S^\lambda = |\text{SYT}(\lambda)|$ .

*Dimostrazione.* Dal Teorema 3.2.6 si ha che  $\{e_T \mid T \in \text{SYT}(\lambda)\}$  genera. Ma tramite l'inversa dell'isomorfismo  $\varphi : M^\lambda / U^\lambda \rightarrow S^\lambda$  gli standard polytabloid vanno nei rispettivi standard Young tableaux che sono linearmente indipendenti per quanto visto.  $\square$

Si conclude questa sezione creando una bigezione tra  $\text{SYT}(\lambda)$  e un sottoinsieme di  $\mathfrak{S}_n$ .

### Definizione 3.2.9 - Descent set

Sia  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  una permutazione. Si definisce il suo *descent set* come l'insieme delle sue *discese*, ossia:

$$\text{des}(\sigma) = \{i \in [n-1] \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}.$$

Data  $H \subseteq [n-1]$ , si definisce:

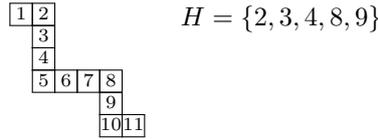
$$\text{Des}(H) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \text{des}(\sigma) = H\}$$

ovvero l'insieme delle permutazioni con descent set  $H$ .

### Lemma 3.2.10

Si definisce forma  $\lambda$  ribbon una forma skew con parte interna connessa e senza sottodiagrammi di forma  $(2,2)$ . Data  $\lambda \vdash n$  ribbon, si numerano con  $1, \dots, n$  in ordine crescente le celle adiacenti del diagramma  $D_\lambda$  percorse dall'alto a sinistra (come in Figura 3.7). Sia  $H \subseteq [n-1]$  l'insieme dei valori nella numerazione delle celle di  $D_\lambda$  con una cella adiacente in basso.

Allora il modulo di Specht  $S^\lambda$  ha dimensione pari a  $|\text{Des}(H)|$ .



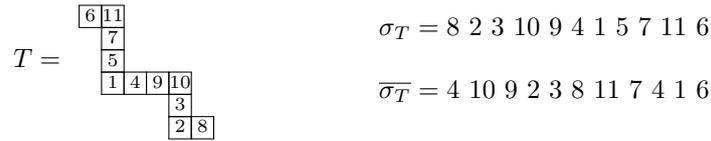
$$H = \{2, 3, 4, 8, 9\}$$

Figura 3.7: Esempio di diagramma ribbon con la numerazione.

*Dimostrazione.* Si definisce una bigezione esplicita. Dato  $T \in \text{SYT}(\lambda)$ , si scrive una permutazione  $\sigma_T$  in one-line notation leggendo le entrate del tableau  $T$  seguendo la numerazione descritta nell'enunciato al contrario. Definita  $T_{[i]}$  l'entrata dell' $i$ -esima cella di  $T$ , formalmente:

$$\sigma_T = T_{[n]} T_{[n-1]} \dots T_{[1]} \in \mathfrak{S}_n.$$

Si porta un esempio con la forma ribbon in Figura 3.7.



$$\sigma_T = 8 \ 2 \ 3 \ 10 \ 9 \ 4 \ 1 \ 5 \ 7 \ 11 \ 6$$

$$\overline{\sigma}_T = 4 \ 10 \ 9 \ 2 \ 3 \ 8 \ 11 \ 7 \ 4 \ 1 \ 6$$

Figura 3.8: Esempio di permutazione  $\sigma_T$  dato  $T$

Per definizione di standard Young tableau,  $\sigma_T$  avrà le *ascese*<sup>2</sup> nelle posizioni numerate dagli elementi in  $H$ . Si definisce l'involuzione:

$$- : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$$

tale che  $\overline{\sigma}(i) = n + 1 - \sigma(i)$  per ogni  $i \in [n]$ . E' involuzione dato che:

$$\overline{(\overline{\sigma})}(i) = n + 1 - \overline{\sigma}(i) = n + 1 - (n + 1 - \sigma(i)) = \sigma(i)$$

e ha la proprietà di mandare le ascese nelle discese e viceversa. E' quindi ben definita la mappa:

$$f : \begin{array}{ccc} \text{SYT}(\lambda) & \longrightarrow & \text{Des}(H) \\ T & \longmapsto & \overline{\sigma}_T \end{array}.$$

Si riportano in Figura 3.9 e 3.10 degli esempi di questa costruzione.

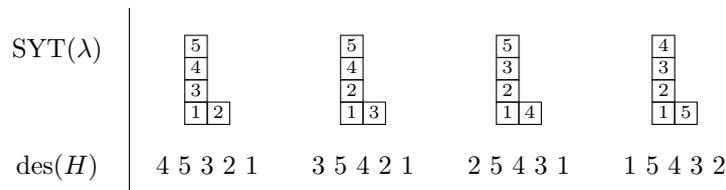


Figura 3.9: Corrispondenza per  $\lambda = (21^3)$ .

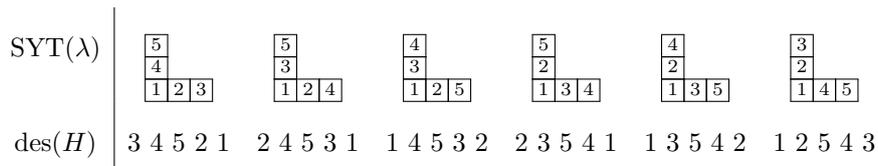


Figura 3.10: Corrispondenza per  $\lambda = (31^3)$ .

<sup>2</sup>La definizione è analoga a quella di *discesa*: è un  $i \in [n - 1]$  tale che  $\sigma_T(i) < \sigma_T(i + 1)$ .

Si può costruire la mappa inversa ripercorrendo al contrario quanto fatto per definire  $\alpha$ . Dato  $\sigma \in \text{Des}(H)$ , si applica la trasformazione  $\bar{\sigma}$  e si considera il tableau  $T_\sigma$  dove:

$$(T_\sigma)_{[i]} = \bar{\sigma}(i) \quad i \in [n].$$

Dato che  $\text{des}(\sigma) = H$ , le disuguaglianze dei valori  $\sigma(i)$  danno le condizioni per cui  $T_\sigma \in \text{SYT}(\lambda)$ . Questa costruzione è proprio  $\alpha^{-1}$ , quindi si ottiene che  $|\text{SYT}(\lambda)| = |\text{Des}(H)|$ . Dal Corollario 3.2.8 segue la tesi.  $\square$

### 3.3 Azione di $\mathfrak{S}_n$ sulla (co)omologia

Sulle strutture algebriche definite nei capitoli precedenti si può spesso descrivere l'azione di un qualche gruppo  $G$ . Si richiede che queste azioni conservino le proprietà fondamentali della struttura su cui agiscono, come nel caso delle prossime definizioni.

**Definizione 3.3.1 -  $G$ -complesso simpliciale**

Sia  $G$  un gruppo. Un  $G$ -complesso simpliciale è un complesso simpliciale  $\Delta$  con un'azione di  $G$  sui vertici del complesso (cioè per permutazione degli elementi di  $V$ ) che manda facce in facce.

Data  $\|\Delta\|$  la realizzazione geometrica del complesso simpliciale astratto,  $G$  vi agisce come un gruppo di omeomorfismi. Si dice che  $\|\Delta\|$  è un  $G$ -spazio.

**Esempio 3.6**

Riprendendo dall'Esempio 1.1 il complesso simpliciale  $\mathcal{K}_1$  che descrive un quadrato in  $\mathbb{R}^2$ , si vede che:

- l'azione di  $\mathfrak{S}_4$  sull'insieme di vertici  $V = [4]$  non dà una struttura di  $G$ -complesso simpliciale. Infatti la permutazione in one-line notation  $\sigma = 1\ 2\ 4\ 3 \in \mathfrak{S}_4$  non manda facce in facce:

$$\mathcal{K}_1 \ni \{1, 2, 3\} \xrightarrow{\sigma} \sigma \cdot \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 4\} \notin \mathcal{K}_1$$

come si può vedere in centro in Figura 3.11.

- l'azione del sottogruppo  $H = \langle 4\ 2\ 3\ 1, 1\ 3\ 2\ 4 \rangle \subseteq \mathfrak{S}_4$  che agisce su  $V$  sempre permutando i vertici definisce una struttura di  $H$ -complesso simpliciale. Infatti l'azione dei generatori di  $H$  corrisponde alle riflessioni rispetto alle diagonali del quadrato (in riferimento alla rappresentazione a sinistra in Figura 3.11). Queste riflessioni mandano facce in facce, per simmetria del complesso simpliciale rispetto agli assi di riflessione (di colore blu per la permutazione  $1\ 3\ 2\ 4$  e rosso per  $4\ 2\ 3\ 1$  a destra in figura).

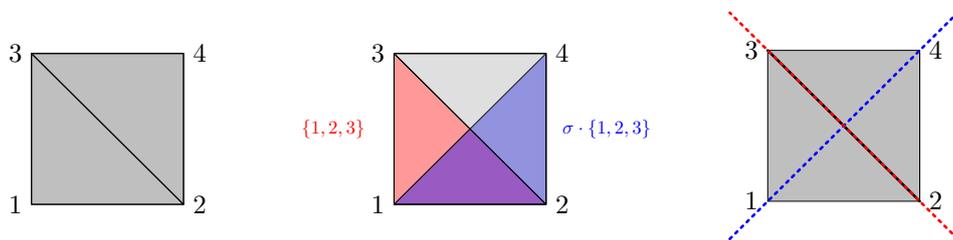


Figura 3.11: Esempi delle azioni di  $\mathfrak{S}_n$  e  $H$  sul complesso  $\mathcal{K}_1$

**Definizione 3.3.2 -  $G$ -poset**

Un  $G$ -poset è un poset  $(P, <)$  tale che  $G$  agisce su  $P$  in modo da preservare le relazioni d'ordine, ovvero:

$$x < y \implies g \cdot x < g \cdot y \quad \forall g \in G.$$

**Osservazione 3.7**

Dato un  $G$ -poset  $(P, <)$  il suo order complex  $\Delta(P)$  è un  $G$ -complesso simpliciale. I vertici di  $\Delta(P)$  sono proprio gli elementi di  $P$ , quindi l'azione di  $G$  sui vertici è data proprio dall'azione di  $G$  sugli elementi del  $G$ -poset.

Viceversa, dato un  $G$ -complesso simpliciale  $\Delta$  il suo face poset  $P(\Delta)$  è un  $G$ -poset con l'azione indotta dall'azione di  $G$  sulle facce di  $\Delta$ .

Si noti che la condizione sui  $G$ -poset di preservare le relazioni d'ordine equivale a chiedere che catene vengano mandate in catene. D'altra parte, le costruzioni di face poset e order complex mettono in relazione proprio le facce dei complessi simpliciali e le catene dei poset. Segue che le richieste delle Definizioni 3.3.1 e 3.3.2 sull'azione di  $G$  sono coerenti.

**Esempio 3.8 -  $G$ -poset**

Sia  $P = P(\mathcal{K}_1)$  il face poset dell' $H$ -complesso simpliciale dell'Esempio 3.6, dove  $H$  è il sottogruppo di  $\mathfrak{S}_n$  definito  $H = \langle 1\ 3\ 2\ 4, 4\ 2\ 3\ 1 \rangle$ . Per l'osservazione precedente segue che  $P$  è un  $H$ -poset.

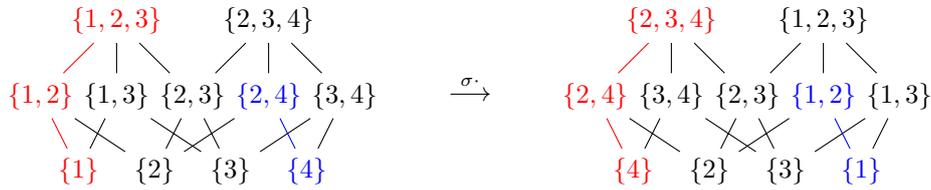


Figura 3.12: Rappresentazione dell'azione di  $H$  sul  $G$ -poset  $P(\mathcal{K}_1)$

Posta la permutazione  $\sigma = 4\ 2\ 3\ 1 \in H \subseteq \mathfrak{S}_4$ , in Figura 3.12 viene riportata una rappresentazione dell'azione per  $\sigma$  sugli elementi di  $P$ . Le catene del poset a sinistra vengono mandate proprio nelle catene che sul diagramma di Hasse a destra passano per le stesse coordinate (degli esempi sono le catene evidenziate in rosso e blu).

Si vede ora che la struttura di  $G$ -poset permette di definire un'azione di gruppo anche su omologia e coomologia di poset. Si ottengono quindi delle  $G$ -rappresentazioni che permettono di studiare la struttura (co)omologica degli spazi, sotto azioni di gruppo.

Preso un  $G$ -poset  $(P, <)$ , ogni elemento  $g \in G$  manda  $j$ -catene in  $j$ -catene: l'azione di  $g$  corrisponde allora ad una trasformazione lineare sul modulo delle  $j$ -catene  $C_j(P; \mathbb{C})$  per ogni  $j \geq -1$ . Questa trasformazione lineare è un morfismo di catene naturale, in quanto si verifica applicando le definizioni che:

$$(3.2) \quad g \cdot \partial(\mathbf{c}) = \partial(g \cdot \mathbf{c}) \quad \text{e} \quad g \cdot \delta(\mathbf{c}) = \delta(g \cdot \mathbf{c})$$

per ogni catena  $\mathbf{c} \in C_\bullet(P; \mathbb{C})$ . Si può passare in (co)omologia, dove  $g \in G$  agisce su  $\tilde{H}_j(P; \mathbb{C})$  e su  $\tilde{H}^j(P; \mathbb{C})$  come una trasformazione lineare. Infatti, data una classe  $[\alpha] \in \tilde{H}_j(P; \mathbb{C})$ , è definita l'azione di  $g \in G$ :

$$g \cdot [\alpha] = [g \cdot \alpha].$$

Questa azione è ben definita, dato che cambiando rappresentante si ottiene la stessa classe (per la relazione (3.2)). Infatti, supponendo che  $[\alpha] = [\beta]$  vale  $\beta = \alpha + \partial(\gamma)$  per qualche  $\gamma \in C_{j+1}(P; \mathbb{C})$ , quindi:

$$g[\beta] = [g\beta] = [g\alpha + g\partial(\gamma)] = [g\alpha + \partial(g\gamma)] = [g\alpha] = g[\alpha].$$

Si può allora considerare  $\tilde{H}_j(P; \mathbb{C})$  come un  $G$ -modulo, con il prodotto scalare dato dall'azione del gruppo  $G$  appena introdotta. Un ragionamento analogo permette di dare anche alla coomologia una struttura di  $G$ -modulo.

La forma  $\mathbb{C}$ -bilineare usata in (2.1), definita su  $\bigoplus_{j \geq -1} C_j(P; \mathbb{C})$  in modo che le catene siano una base ortonormale, si può anche considerare come forma  $G$ -bilineare. Questo induce una dualità tra i  $G$ -moduli di omologia e coomologia:

$$\tilde{H}_j(P; \mathbb{C}) \otimes \tilde{H}^j(P; \mathbb{C}) \longrightarrow G.$$

A questo punto, si dimostra che  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazioni duali sono  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfe.

Si ricorda un corollario del teorema di Maschke e delle relazioni tra caratteristiche di Frobenius (si rimanda al Corollario 1.9.4 punto 5 del libro [9]):  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazioni con stessa caratteristica sono  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfe. Data una  $G$ -rappresentazione  $V$  e il suo duale  $V^*$ , le rispettive caratteristiche di Frobenius sono funzioni complesse coniugate, ovvero:

$$\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}.$$

Nel caso di  $G = \mathfrak{S}_n$  la caratteristica di Frobenius di  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazioni è sempre a valori reali: data una  $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazione  $(V, \rho)$ , questa si può scomporre in moduli di Specht (per il Teorema di Maschke 1.5.3 del libro [9]) come

$$V \cong_{\mathfrak{S}_n} \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{\oplus c_\lambda}$$

con  $c_\lambda \in \mathbb{N}$  per ogni  $\lambda \vdash n$ . Allora la caratteristica di Frobenius di  $V$  è data dalla sommatoria:

$$\chi_V = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda \chi_{S^\lambda}.$$

Ricordando che  $\chi_{S^\lambda}(\sigma) \in \mathbb{Z}$  per ogni  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , le caratteristiche dei moduli di Specht sono a valori reali quindi anche  $\chi_V$  lo è. Segue che  $\chi_V = \chi_{V^*}$  e in particolare  $V \cong_{\mathfrak{S}_n} V^*$ .

Si conclude che omologia e coomologia di  $G$ -poset sono  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfi in quanto rappresentazioni duali:

$$(3.3) \quad \tilde{H}_j(P; \mathbb{C}) \cong_{\mathfrak{S}_n} \tilde{H}^j(P; \mathbb{C}).$$

Come conseguenza dell'Osservazione 3.7, l'omeomorfismo naturale tra un  $G$ -complesso simpliciale  $\Delta$  e la sua suddivisione baricentrica  $\Delta(P(\Delta))$  commuta con l'azione di gruppo  $G$ . Questo permette di ottenere i  $G$ -isomorfismi in omologia e coomologia:

$$\tilde{H}_j(\Delta; \mathbb{C}) \cong_G \tilde{H}_j(P(\Delta); \mathbb{C}) \quad \text{e} \quad \tilde{H}^j(\Delta; \mathbb{C}) \cong_G \tilde{H}^j(P; \mathbb{C})$$

dato che l'azione di  $G$  su poset e complessi simpliciali passa rispettivamente alle costruzioni di order complex e face poset.

# Capitolo 4

## (EL-)Shellability

Questo capitolo è incentrato su una proprietà combinatoria per complessi simpliciali: la shellability. Si metteranno in luce alcune conseguenze algebriche e topologiche per questa classe di complessi.

Introdotta a metà Ottocento da Ludwig Schläfli per calcolare la caratteristica di Eulero di politopi convessi [10], la shellability viene inizialmente definita per i complessi simpliciali puri. Nei primi anni Novanta la teoria viene poi estesa da Anders Björner e Michelle Wachs al caso non-puro portando ad interessanti risultati, ad esempio nel campo dell'intersection semilattice di arrangiamenti di sottospazi [4].

Negli anni '70 Richard Stanley introduce una nuova tecnica che consiste nell'etichettare in un determinato modo gli edges del diagramma di Hasse di un poset, per lo studio della sua Möbius function. Stanley congettura che il metodo si possa applicare per poset Cohen-Macaulay. Sempre Anders Björner prova questa ipotesi nell'articolo [2] e dimostra che il labeling del diagramma di Hasse implica la shellability per il poset. Da questa osservazione si sviluppa la teoria della lexicographic shellability, affrontata da Björner e Wachs in [3], [4] e [5]. Un'overview più dettagliata dei risultati ottenuti da questa teoria si può trovare nella collezione di lectures [15].

### 4.1 Shellability

La prima famiglia di complessi simpliciali su cui viene introdotta la shellability è quella dei complessi simpliciali puri.

**Definizione 4.1.1 - Complesso simpliciale puro**

Un complesso simpliciale  $\Delta$  di dimensione  $\dim(\Delta) = k$  si dice *puro* se ogni faccia  $F \in \Delta$  che ha  $\dim(F) < k$  è faccia di un'altra faccia  $G \in \Delta$  di dimensione esattamente  $k$ .

La purezza per complessi simpliciali e per poset sono tra loro correlate dalle costruzioni di order complex e face poset: come si può notare nel prossimo esempio, la condizione di esistenza di  $k$ -facce  $G \in \Delta$  equivale in effetti alla massimalità delle sole  $k$ -catene in  $P(\Delta)$ .

**Esempio 4.1 - Complesso puro e non-puro**

Nei capitoli precedenti si sono già incontrati esempi di complessi simpliciali sia puri che non.

Il complesso simpliciale  $\mathcal{K}_1$  degli Esempi 1.1, 3.6 e 3.8 è puro: la sua dimensione è  $\dim(\mathcal{K}_1) = 2$  e in effetti ogni faccia è contenuta in uno dei suoi 2-simplessi  $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\} \in \mathcal{K}_1$  come si può osservare in Figura 4.1 a sinistra.

Si riporta poi a destra il suo face poset  $P(\mathcal{K}_1)$  anch'esso puro. Infatti ogni catena massimale sarà della forma:

$$(\{a\} \subset \{a, b\} \subset \{a, b, c\})$$

dove  $\{a, b, c\} = G$  corrisponde ad una delle 2-facce che garantiscono la purezza del complesso simpliciale  $\mathcal{K}_1$ .

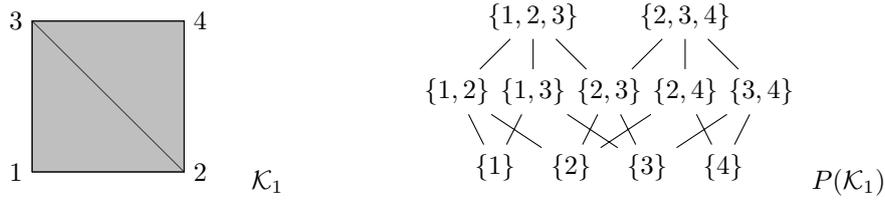


Figura 4.1: Il complesso simpliciale  $\mathcal{K}_1$  con il suo face poset  $P(\mathcal{K}_1)$

Il complesso simpliciale  $\mathcal{K}_2$  dell'Esempio 1.6, ottenuto come order complex di un poset  $\mathcal{P}_2$ , è non-puro. Si può osservare infatti che la condizione di (non-)purezza viene trasmessa anche tramite la costruzione di order complex: catene massimali di lunghezze differenti daranno faccette di dimensioni differenti. Ma le faccette sono i semplici massimali per l'inclusione insiemistica e due faccette di dimensioni differenti implicano che il complesso non è puro. Nell'esempio portato in Figura 4.2 i semplici  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$  e  $\{5, 6\}$  sono tutte faccette di  $\mathcal{K}_2$ , ma di differenti dimensioni.

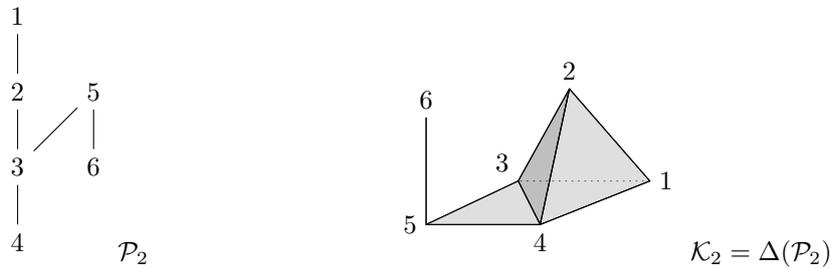


Figura 4.2: Il poset  $\mathcal{P}_2$  e il complesso simpliciale associato  $\mathcal{K}_2$ .

**Notazione 4.2 - Sottocomplesso generato**

Sia  $F \in \Delta$  una faccia del complesso simpliciale. Si denota  $\langle F \rangle$  il sottocomplesso di  $\Delta$  generato da  $F$  come:

$$\langle F \rangle = \{G \in \Delta \mid G \subseteq F\}.$$

Si può ora introdurre la proprietà di shellability, intesa sempre come non-pure shellability.

**Definizione 4.1.2 - Complesso simpliciale shellable**

Un complesso simpliciale  $\Delta$  si dice *shellable* se le sue faccette hanno un ordine  $F_1, F_2, \dots, F_n$  lineare tale che per ogni  $j = 2, 3, \dots, n$  il sottocomplesso:

$$\left( \bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_j \rangle$$

è puro e  $(\dim F_j - 1)$ -dimensionale. La sequenza  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sarà uno *shelling order* per il complesso  $\Delta$ .

Un poset  $P$  si dice *shellable* se il suo order complex  $\Delta(P)$  è shellable.

Questa definizione formalizza l'idea intuitiva di costruire il complesso simpliciale "a passi", in modo che ogni faccetta aggiunta si connetta tramite un sottocomplesso puro che abbia la stessa dimensione del bordo della faccetta (il bordo di un  $n$ -simpleso è un complesso simpliciale puro di dimensione  $n - 1$ ).

**Esempio 4.3 - Complessi shellable**

Si portano ora tre esempi di complessi simpliciali shellable e non, per rafforzare quest'intuizione di shellability.

- Si consideri il complesso simpliciale  $\bar{\mathcal{S}}_3$  ottenuto togliendo l'unica faccetta  $\{1, 2, 3, 4\}$  al 3-simplesso  $\bar{\mathcal{S}}_3$  dell'Esempio 1.1. Uno shelling order per  $\mathcal{S}_3$  è dato da:

$$F_1 = \{1, 2, 3\}, F_2 = \{1, 2, 4\}, F_3 = \{1, 3, 4\}, F_4 = \{2, 3, 4\}$$

e per le simmetrie dell'oggetto anche ogni altra permutazione di queste faccette sarà uno shelling order. Graficamente, si rappresenta:

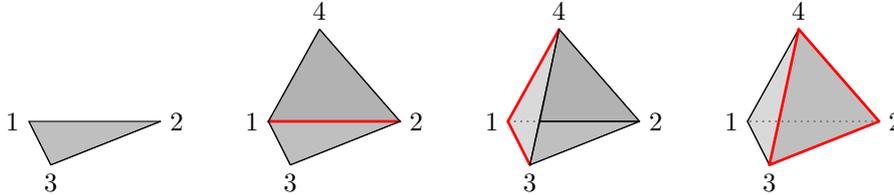


Figura 4.3: Rappresentazione dello shelling di  $\bar{\mathcal{S}}_3$

dove in rosso è evidenziata ad ogni passo l'intersezione tra la nuova faccetta e lo shelling parziale. Si può osservare che ad ogni passo il sottocomplesso in rosso è puro 1-dimensionale, come richiesto.

- Un esempio di complesso shellabile non puro è il complesso  $\mathcal{K}_2$  dell'Esempio 4.1. Lo shelling order che funziona è:

$$F_1 = \{1, 2, 3, 4\}, F_2 = \{3, 4, 5\}, F_3 = \{5, 6\}$$

come viene mostrato in Figura 4.4.

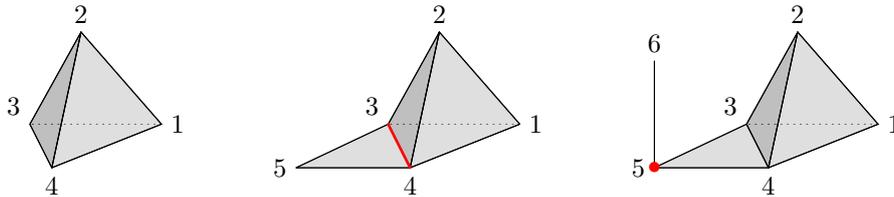


Figura 4.4: Shelling del complesso non-puro  $\mathcal{K}_2$

Notare che in questo caso l'ordine inverso  $F_3, F_2, F_1$  non funzionerebbe: l'intersezione tra  $F_3$  ed  $F_2$  è lo 0-simplesso  $\{5\}$ , che non ha dimensione  $\dim F_2 - 1 = 1$ .

- Si consideri il complesso simpliciale astratto con vertici  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  definito:

$$\mathcal{K}_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$$

di cui si riporta una rappresentazione geometrica in Figura 4.5.

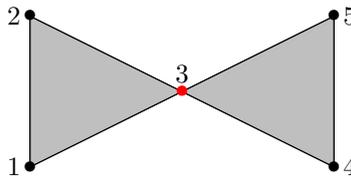


Figura 4.5: Raffigurazione del complesso  $\mathcal{K}_3$

Questo complesso ha dimensione 2 con faccette date da  $F_1 = \{1, 2, 3\}$  e  $F_2 = \{3, 4, 5\}$ . Si osserva che  $\mathcal{K}_3$  non può essere shellabile dato che qualsiasi ordine delle faccette non è shelling: l'intersezione dei 2-simplessi  $\langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle$  dovrebbe avere dimensione 1 ma ha dimensione 0.

Si riporta ora un risultato sull'omologia di complessi simpliciali shellable: conoscere uno shelling del complesso simpliciale permette di calcolare l'omologia del complesso unendo i risultati dei Teoremi 2.2.3 e 4.1.4.

**Definizione 4.1.3 - Faccetta omologica**

Sia  $\Delta$  un complesso simpliciale shellable, con shelling order  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Una faccetta della sequenza  $F_j$  si dice *faccetta omologica* se:

$$\partial F_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle$$

cioè se il suo bordo è contenuto nello shelling parziale dato dalle prime  $j - 1$  faccette.

**Teorema 4.1.4**

*Un complesso simpliciale shellable  $\Delta$  ha omotopia di tipo wedge di sfere e il numero di  $i$ -sfere nel wedge è pari al numero di faccette omologiche di dimensione  $i$  nello shelling.*

*Idea della dimostrazione.* Dato uno shelling  $F_1, F_2, \dots, F_k$  per  $\Delta$ , le faccette si possono riordinare in modo da ottenere un nuovo shelling order con le faccette omologiche  $F_{i+1}, F_{i+2}, \dots, F_k$  in fondo alla sequenza.

Si può vedere che lo shelling parziale  $\Delta' = \bigcup_{j=1}^i F_j$  è contraibile ad un punto. Segue che ogni faccetta omologica si “incolla” al punto della contrazione di  $\Delta'$ . Si ottiene così il wedge di sfere cercato, dato che un  $i$ -simplexso con il bordo quotizzato ad un punto è omeomorfo ad una  $i$ -sfera. Si rimanda all'articolo di A. Björner e M. Wachs [4] per la dimostrazione completa.  $\square$

**Esempio 4.4**

Lo shelling di  $\overline{S}_3$  visto all'Esempio 4.3 si può usare per percorrere l'idea dimostrativa del teorema. Infatti dalla Figura 4.3 si vede che l'unica faccetta omologica dello shelling è  $F_4$ . La realizzazione geometrica dello shelling parziale da  $\Delta' = \langle F_1 \rangle \cup \langle F_2 \rangle \cup \langle F_3 \rangle$  (il terzo complesso in Figura 4.3) è effettivamente uno spazio contraibile, quindi dopo la contrazione di  $\Delta'$  l'incollamento della faccetta  $F_4$  manda il bordo (in rosso nel disegno) in un punto. Si ricorda infine che il quoziente ad un punto del bordo di un 2-simplexso è proprio una sfera  $S^2$ . Effettivamente  $\overline{S}_3$  è omeomorfo ad  $S^2$ .

## 4.2 EL-Shellability

Lo stretto legame creato tra poset e complessi simpliciali si ripresenta in questa sezione con la definizione della edge-lexicographic shellability. Questa proprietà si definisce sulla struttura di poset ma tramite forti risultati legati alla coomologia (ad esempio con il Teorema 4.2.6), offre uno strumento per lo studio topologico di complessi simpliciali, passando ai relativi face poset.

**Definizione 4.2.1 - Edge labeling**

Sia  $(P, <)$  un poset limitato. Un suo *edge labeling* è una mappa:

$$\lambda : \mathcal{E}(P) \longrightarrow \Lambda$$

dove  $\Lambda$  è un insieme parzialmente ordinato. In altre parole,  $\lambda$  è una numerazione delle covering relations di  $P$ .

Nella discussione che segue si suppone  $\Lambda = \mathbb{Z}$  dotato della solita relazione d'ordine totale. Fissato un edge labeling  $\lambda : \mathcal{E}(P) \rightarrow \Lambda$  si può associare ad ogni catena massimale  $\mathbf{c} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \hat{1})$  una *word*:

$$\lambda(\mathbf{c}) = \lambda(x_0, x_1)\lambda(x_1, x_2) \dots \lambda(x_{n-1}, x_n).$$

Nel caso di un poset  $\Lambda$  totalmente ordinato si può definire un ordine lessicografico per le parole con alfabeto  $\Lambda$ : date due words  $w = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_h$  e  $w' = \lambda'_1\lambda'_2 \dots \lambda'_k$  si pone  $w \leq_{\text{lex}} w'$  se e solo se vale una tra le condizioni:

1.  $\lambda_i = \lambda'_i$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, h$  e vale  $h \leq k$ .
2.  $\lambda_i < \lambda'_i$  per il primo indice  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$  per cui non vale l'uguaglianza.

Segue che l'edge labeling induce un ordine (chiamato ancora lessicografico) sulle catene massimali  $\mathcal{M}(P)$ , dove per  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathcal{M}(P)$ :

$$\mathbf{c} \leq_{\text{lex}} \mathbf{d} \iff \lambda(\mathbf{c}) \leq_{\text{lex}} \lambda(\mathbf{d}).$$

**Esempio 4.5 - Edge-labeling e ordine lessicografico**

Si consideri il poset  $\mathcal{P}_3$  definito dal diagramma di Hasse in Figura 4.6 a sinistra.

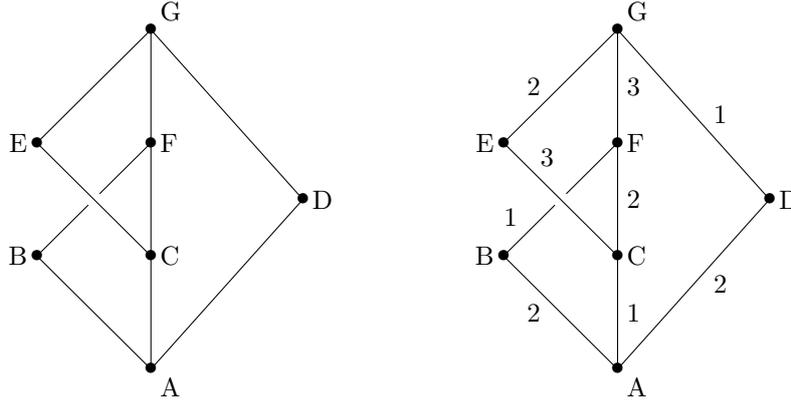


Figura 4.6: Diagramma di Hasse del poset  $\mathcal{P}_3$  e l'edge labeling  $\lambda$

Dato che  $\mathcal{P}_3$  è limitato, si può definire un edge-labeling  $\lambda : \mathcal{E}(\mathcal{P}_3) \rightarrow \mathbb{Z}$  come a destra. Date le catene massimali  $\mathbf{c}_1 : (A < C < F < G)$ ,  $\mathbf{c}_2 : (A < D < G)$  e  $\mathbf{c}_3 : (A < B < F < G)$  si ottiene che le word associate (e il relativo ordine lessicografico) sono:

$$\begin{cases} \lambda(\mathbf{c}_1) = 123 \\ \lambda(\mathbf{c}_2) = 21 \\ \lambda(\mathbf{c}_3) = 213 \end{cases} \quad \begin{matrix} 123 <_{\text{lex}} 21 <_{\text{lex}} 213 \\ \mathbf{c}_1 <_{\text{lex}} \mathbf{c}_2 <_{\text{lex}} \mathbf{c}_3 \end{matrix}.$$

**Definizione 4.2.2 - Catene increasing e decreasing**

Sia  $P$  un poset limitato con un edge-labeling  $\lambda$ . Una catena massimale del poset, indicata  $\mathbf{c} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \hat{1})$ , si dice:

- *increasing* se la word associata  $\lambda(\mathbf{c})$  è increasing, ovvero:

$$\lambda(x_0, x_1) < \lambda(x_1, x_2) < \dots < \lambda(x_{n-1}, x_n).$$

- *decreasing* se la word associata è decreasing cioè:

$$\lambda(x_0, x_1) \geq \lambda(x_1, x_2) \geq \dots \geq \lambda(x_{n-1}, x_n).$$

**Osservazione 4.6 - Restrizione di catene increasing**

Sia  $P$  un poset limitato con  $\lambda$  edge-labeling. Data una catena massimale increasing

$$\mathbf{c} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \hat{1}) \in \mathcal{M}(P)$$

si osserva che le sottocatene non raffinabili del tipo  $\mathbf{c}' : (x_a < x_{a+1} < \dots < x_{b-1} < x_b) \subseteq \mathbf{c}$  sono ancora catene massimali increasing per il sottoposet  $[x_a, x_b] \subseteq P$  con il labeling ristretto  $\lambda|_{\mathcal{E}([x_a, x_b])}$ .

**Definizione 4.2.3 - EL-labeling**

Sia  $P$  un poset limitato. Un *edge-lexicographic labeling* (detto *EL-labeling*) è un edge labeling  $\lambda : \mathcal{E}(P) \rightarrow \mathbb{Z}$  tale che per ogni intervallo chiuso  $[x, y] \subseteq P$  esiste una catena massimale  $\mathbf{c} \in \mathcal{M}([x, y])$  tale che:

- $\mathbf{c}$  è l'unica catena massimale increasing di  $[x, y]$ .
- $\lambda(\mathbf{c})$  è il minimo dell'insieme  $\{\lambda(\mathbf{d}) \mid \mathbf{d} \in \mathcal{M}([x, y])\}$  secondo l'ordine  $<_{\text{lex}}$ .

Un poset  $P$  limitato che ammette un EL-labeling si dice *edge-lexicographic shellable* o *EL-shellable*.

**Esempio 4.7 - EL-shellable poset**

Si riportano due esempi di poset EL-shellable. Notare che il poset a destra non è puro: ci sono catene massimali di lunghezza sia 2 che 3.

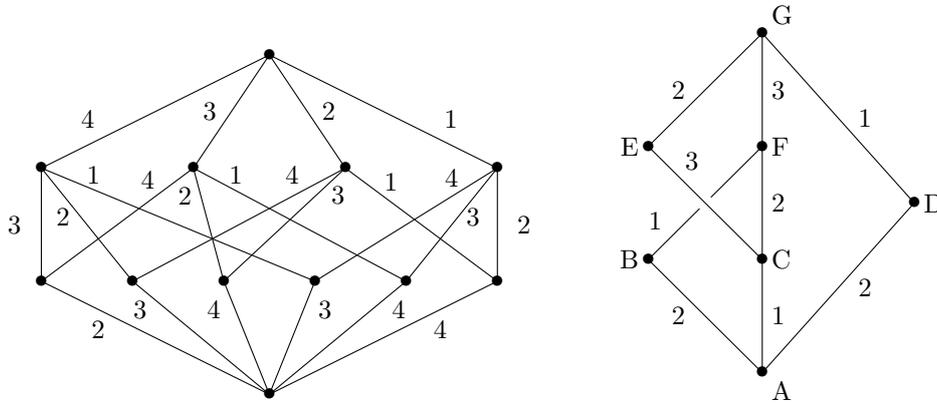


Figura 4.7: Esempi di EL-labeling

**Osservazione 4.8 - Ereditarietà della EL-shellability**

Sia  $P$  un poset limitato con EL-labeling  $\lambda$ . Anche i sottointervalli  $[\alpha, \beta] \subseteq P$  sono EL-shellable con EL-labeling dato dalla restrizione  $\lambda|_{\mathcal{E}([\alpha, \beta])}$ .

Infatti le condizioni richieste dalla Definizione 4.2.3 devono valere per tutti i sottoposet di  $P$ , quindi a maggior ragione valgono per i sottoposet di  $[\alpha, \beta]$ .

Non è ancora chiara la motivazione dell'aggettivo "shellable". Il prossimo teorema giustifica questa terminologia.

**Teorema 4.2.4**

Sia  $P$  un poset limitato con un EL-labeling. Allora l'ordine lessicografico sulle catene massimali di  $P$  fornisce uno shelling order per l'order complex  $\Delta(P)$ .

L'ordine corrispondente indotto sulle catene massimali di  $\bar{P}$  è uno shelling order per  $\Delta(\bar{P})$ .

*Dimostrazione.* La condizione di shellability per l'order complex  $\Delta(P)$  (e quindi la tesi del teorema) descritta nella Definizione 4.1.2 si può riscrivere nel seguente modo in termini di catene.

Per ogni  $\mathbf{k}, \mathbf{m} \in \mathcal{M}(P)$  tali che  $\lambda(\mathbf{k}) <_{\text{lex}} \lambda(\mathbf{m})$  esiste un  $\mathbf{h} \in \mathcal{M}(P)$  con  $\lambda(\mathbf{h}) <_{\text{lex}} \lambda(\mathbf{m})$  tale che:  
 $(\mathbf{k} \cap \mathbf{m}) \subseteq (\mathbf{h} \cap \mathbf{m})$  e  $|\mathbf{h} \cap \mathbf{m}| = |\mathbf{m}| - 1$ .

Si considerano quindi due catene  $\mathbf{k}, \mathbf{m} \in \mathcal{M}(P)$ , scritte  $\mathbf{k} : (\hat{0} = y_0 < y_1 < \dots < y_m = \hat{1})$  ed  $\mathbf{m} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \hat{1})$ , tali che  $\lambda(\mathbf{k}) <_{\text{lex}} \lambda(\mathbf{m})$ .

Sia  $a \in \{0, 1, \dots, n\}$  il più grande indice per cui  $x_i = y_i$  per ogni  $i = 0, 1, \dots, a$ . Si prenda anche  $b \in \{a + 1, a + 2, \dots, n\}$  il minimo indice tale che  $x_b \in \mathbf{k}$ , ovvero il minimo  $b > a$  per cui esiste  $c \in \{a + 1, a + 2, \dots, m\}$  tale che  $x_b = y_c$ . L'indice  $b$  deve esistere dato che nel peggior caso il

massimo del poset  $P$  funziona:  $x_b = x_n = \hat{1} \in \mathbf{k}$ . Per questi indici devono valere le relazioni:

$$b - a \geq 2 \quad \text{e} \quad c - a \geq 2$$

dato che le disuguaglianze  $(x_a < x_b)$  e  $(y_a < y_c)$  non possono essere cover relations, in quanto  $x_{a+1} \neq y_{a+1}$  per definizione dell'indice  $a$ .

Si osserva che  $(x_a < x_{a+1} < \dots < x_b)$  non può essere increasing altrimenti per proprietà di EL-labeling  $\lambda(\mathbf{m}) <_{\text{lex}} \lambda(\mathbf{k})$  contro l'ipotesi. Quindi deve esistere una discesa nella sottocatena, cioè un indice  $d \in \{a+1, a+2, \dots, b-1\}$  tale che  $\lambda(x_{d-1}, x_d) \geq \lambda(x_d, x_{d+1})$ . Presa allora la catena massimale increasing  $(x_{d-1} < z_1 < z_2 \dots < x_{d+1})$  dell'intervallo  $[x_{d-1}, x_{d+1}]$ , si può costruire:

$$\mathbf{h} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_{d-1} < z_1 < z_2 < \dots < x_{d+1} < \dots < x_n = \hat{1})$$

che sarà massimale e per costruzione  $\lambda(\mathbf{h}) <_{\text{lex}} \lambda(\mathbf{m})$ . Si osserva subito che  $|\mathbf{h} \cap \mathbf{m}| = |\mathbf{m}| - 1$ . Questo ragionamento si può applicare ad ogni coppia di catene  $\mathbf{k}, \mathbf{m} \in \mathcal{M}(P)$  quindi  $P$  è shellable (e lo è pure  $\Delta(P)$ ).

La condizione di shellability per  $\bar{P}$  è analoga a quella riportata sopra per  $P$ . Si osserva che  $\mathcal{M}(\bar{P})$  è dato da tutte e sole le parti interne delle catene di  $\mathcal{M}(P)$ : si indicherà con  $\bar{\mathbf{m}}$  la parte interna di  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}(P)$ . Per ogni  $\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{m}} \in \mathcal{M}(\bar{P})$  tali che  $\lambda(\bar{\mathbf{k}}) <_{\text{lex}} \lambda(\bar{\mathbf{m}})$  si possono considerare le loro estensioni  $\mathbf{k}, \mathbf{m}$  e ripercorrere il ragionamento fatto sopra. Si ottiene una catena  $\bar{\mathbf{h}} \in \mathcal{M}(\bar{P})$  parte interna di  $\mathbf{h} \in \mathcal{M}(P)$ .

Resta da vedere che  $\bar{\mathbf{h}}$  è la catena massimale cercata: dato che l'ordine lessicografico è indotto da quello su  $P$ , segue subito che  $\lambda(\bar{\mathbf{h}}) <_{\text{lex}} \lambda(\bar{\mathbf{m}})$ . Inoltre:

$$|\bar{\mathbf{h}} \cap \bar{\mathbf{m}}| = |\mathbf{h} \cap \mathbf{m}| - 2 = |\mathbf{m}| - 3 = |\bar{\mathbf{m}}| - 1.$$

Si conclude che  $\bar{P}$  è shellable con lo shelling order cercato. □

Nella sezione precedente, la proprietà di shellability portava a notevoli risultati sulla struttura omologica del complesso simpliciale, come il Teorema 4.1.4. Sotto l'ipotesi più forte di EL-shellability lo shelling order è esplicito (come appena visto con il Teorema 4.2.4) ed è possibile descrivere una base di generatori per la coomologia di poset.

Si introduce un lemma tecnico che caratterizza meglio la struttura di poset sotto particolari ipotesi: questo risultato sarà necessario per dimostrare il Teorema 4.2.6.

**Lemma 4.2.5**

*Sia  $P$  un poset finito di tipo intervallo  $[x, y]$ . Si suppone che  $P$  sia EL-shellable e che l'unica catena massimale increasing  $\mathbf{c}$  del poset sia di lunghezza 2, ovvero  $\mathbf{c} : (x < a < y)$ .*

*Allora tutte le catene massimali di  $P$  hanno lunghezza 2.*

*Dimostrazione.* Dato che  $\mathbf{c}$  è una catena massimale di lunghezza 2, il diagramma di Hasse di  $P$  è della forma in Figura 4.8: eliminare il vertice  $a \in P$  dal poset toglie solamente le covering relations  $(x < a)$  e  $(a < y)$ .

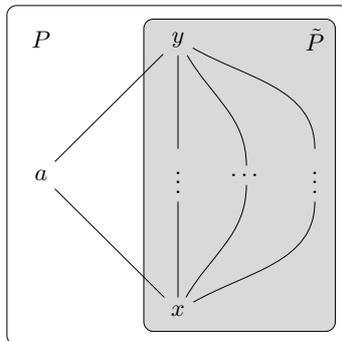


Figura 4.8: Diagramma di Hasse del poset  $[x, y]$ .

Sia  $\tilde{P} = P \setminus \{a\}$  con l'ordine parziale indotto. Per quanto detto, segue che  $\mathcal{M}(\tilde{P}) = \mathcal{M}(P) \setminus \{\mathbf{c}\}$  e l'edge labeling indotto  $\lambda$  non è più un EL-labeling (manca la catena massimale increasing di  $\tilde{P}$ ). Per dimostrare la tesi si vuole vedere che non esistono catene massimali di  $\tilde{P}$  di lunghezza  $\geq 3$ . La proprietà di EL-shellability viene ereditata dai sottointervalli di  $P$  e continua a valere per gli intervalli propri di  $\tilde{P}$ , dato che non cambiano con l'eliminazione di  $a \in P$ . Si può quindi introdurre la notazione:

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta) = \text{“unica catena massimale increasing di } [\alpha, \beta]\text{”}$$

per ogni coppia  $(\alpha, \beta) \in \tilde{P} \times \tilde{P} \setminus \{(x, y)\}$  tale che  $\alpha < \beta$ .

Si suppone per assurdo che  $\tilde{P}$  ammette una catena  $\mathbf{d}_0 : (x < b' < \dots < b < y)$  massimale di lunghezza  $\geq 3$ . Indicando  $b = h_0$  si può fare la seguente costruzione.

1. Si considera  $\mathcal{I}(x, h_0)$ . Essa deve avere lunghezza  $m \geq 2$  perché se avesse lunghezza 1, ovvero  $\mathcal{I}(x, h_0) = (x < h_0)$ , esisterebbe la catena  $(x < b' < h_0)$  suo raffinamento. Assurdo per massimalità di  $\mathcal{I}(x, h_0)$ . Scritto:

$$\mathcal{I}(x, h_0) : (x < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < h_0)$$

si pone  $\ell_1 = x_1$ .

2. Per una motivazione analoga, la catena massimale  $\mathcal{I}(\ell_1, y)$  ha lunghezza  $n \geq 2$ . Si nota che scritto

$$\mathcal{I}(\ell_1, y) : (\ell_1 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y)$$

e definito  $h_1 = y_{n-1}$ , deve valere  $h_1 \neq h_0$ . Infatti se valesse l'uguaglianza, per unicità della catena massimale increasing di  $[\ell_1, h_1]$  si avrebbe:

$$(\ell_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < h_0) = (\ell_1 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-2} < h_1)$$

in quanto eliminare gli estremi di catene conserva la proprietà di essere increasing. Ma questo implicherebbe che la catena

$$(x < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < h_0 < y) = (x < \ell_1 < y_2 < \dots < y_{n-2} < h_1 < y)$$

è increasing. Essendo “unione” delle catene increasing  $\mathcal{I}(x, h_0)$  e  $\mathcal{I}(\ell_1, y)$ , valgono infatti le disuguaglianze  $\lambda(x, x_1) < \lambda(x_1, x_2) = \lambda(\ell_1, y_2) < \dots < \lambda(y_{n-2}, h_1) < \lambda(h_1, y)$ . Questo porta ad un assurdo, dato che  $P$  è EL-shellable quindi  $\mathbf{c}$  doveva essere l'unica catena massimale increasing di  $P$ .

Questa costruzione si può reiterare in modo da ottenere un algoritmo. Supponendo di aver definito i nodi  $\{h_1, h_2, \dots, h_{i-1}\}$  ed  $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{i-1}\}$ , si può definire la catena:

$$\mathbf{d}_{i-1} : (x < \mathcal{I}(\ell_{i-1}, y)) = (x < \ell_{i-1} < \dots < h_{i-1} < y)$$

che per costruzione ha lunghezza  $\geq 3$ . Gli stessi punti (1) e (2) si possono reiterare sostituendo  $\mathbf{d}_{i-1}$  alla catena  $\mathbf{d}_0$  presa all'inizio.

Si osserva che, per quanto discusso al punto (2), devono valere  $h_i \neq h_{i-1}$  ed  $\ell_i \neq \ell_{i-1}$ .

Dato che il poset  $P$  è finito, lo è anche  $\tilde{P}$ . Iterando i passi dell'algoritmo, per un indice  $k > 2$  deve presentarsi per la prima volta uno dei seguenti due casi:

- a.  $h_k = h_j$  con  $j < k$ . Si suppone senza perdita di generalità che  $j = 1$ , a meno di aver cominciato l'algoritmo con la catena  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_{j-1}$ .

In questo caso, per costruzione  $\ell_1 = \ell_k$  dato che sono definiti entrambi come il secondo elemento della catena  $\mathcal{I}(x, h_1) = \mathcal{I}(x, h_k)$ .

Si rappresenta in Figura 4.9 il sottoposet di  $\tilde{P}$  evidenziato dall'algoritmo.

Nell'immagine sono state evidenziate in rosso le catene increasing della forma  $\mathcal{I}(\ell_i, y)$  e in blu quelle  $\mathcal{I}(x, h_i)$ .

- b.  $\ell_k = \ell_j$  per  $j < k$ , ma  $h_k \notin \{h_1, h_2, \dots, h_{k-1}\}$ . Come nel caso precedente, si può supporre che  $j = 1$ . La struttura del sottoposet di  $\tilde{P}$  trovata dall'algoritmo è rappresentata in Figura 4.10: notare che, tolto il vertice  $h_1$ , il sottoposet riarrangiato (muovendo il nodo  $\ell_1 = \ell_k$  in fondo

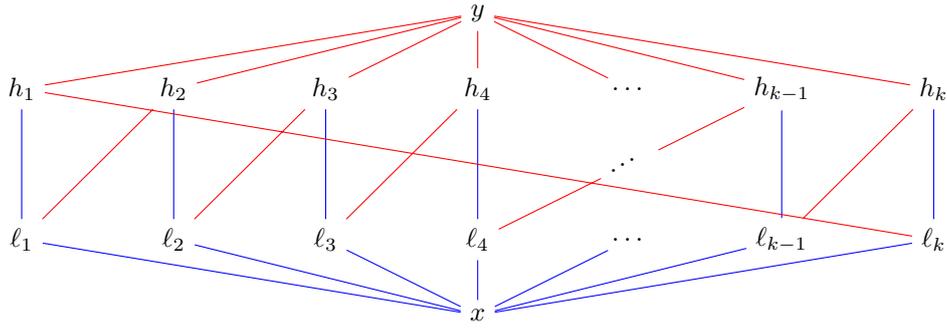


Figura 4.9: Sottoposet di  $\tilde{P}$  con catene increasing evidenziate.

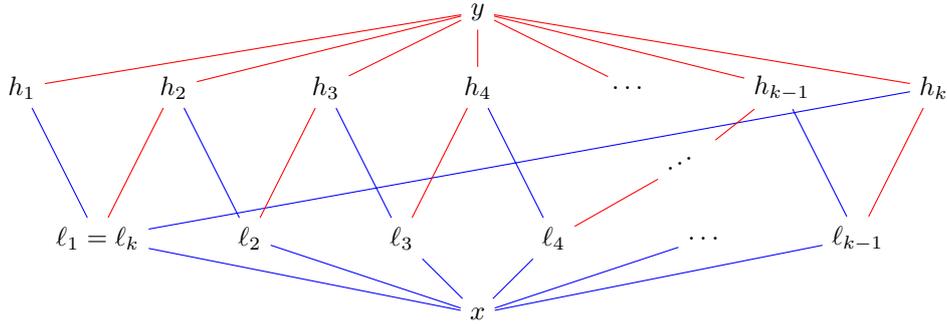


Figura 4.10: Sottoposet di  $\tilde{P}$  con catene increasing evidenziate.

alla riga) ha la stessa struttura di quello in Figura 4.9.

Ci si può allora ricondurre al caso precedente. Infatti, riapplicando più volte l’algoritmo partendo da  $\mathbf{d}_2 = (x < \ell_2 < \dots < h_2 < y)$  invece di  $\mathbf{d}_0$ , si ottengono di nuovo gli elementi  $h_2, h_3, h_4, \dots, h_k$  ed  $\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_k$ . Al passo successivo si ritrovano gli elementi del poset  $h_2 = h_{k+1}$  ed  $\ell_2 = \ell_{k+1}$  (dato che  $\ell_1 = \ell_k$ ): si ricade nel caso (a) discusso prima.

In entrambi i casi esiste un sottoposet di  $\tilde{P}$  della forma in Figura 4.9.

Si evidenzia l’esistenza delle seguenti catene increasing non raffinabili, introducendo una nuova notazione:

- per  $i = 1, 2, \dots, k$  la catena  $\mathcal{I}(\ell_i, h_i)$  che risulta essere uguale ad  $\mathcal{I}(x, h_i) \setminus \{x\}$ . Verrà indicata con  $\ell_i \rightarrow h_i$  e nel diagramma in Figura 4.9 è il segmento blu che collega  $\ell_i$  e  $h_i$ .
- quando  $j = i+1$  oppure  $(i, j) = (k, 1)$  è definita la catena  $\mathcal{I}(\ell_i, h_j)$ . Questa catena corrisponde ad  $\mathcal{I}(x, h_i) \setminus \{y\}$  e verrà indicata con  $\ell_i \rightsquigarrow h_j$ . In Figura 4.9 è il segmento rosso tra  $\ell_i$  e  $h_j$ .

Si osserva che per ogni  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  deve valere:

$$\lambda(x < \ell_{i+1} \rightarrow h_{i+1}) <_{\text{lex}} \lambda(x < \ell_i \rightsquigarrow h_{i+1})$$

dato che l’intervallo  $[x, h_{i+1}]$  è EL-shellable con catena massimale increasing  $(x < \ell_{i+1} \rightarrow h_{i+1})$ . Quindi per definizione di ordinamento lessicografico si ottiene:

$$\lambda(x, \ell_i) \geq \lambda(x, \ell_{i+1}).$$

Lo stesso argomento si può fare nel caso dell’intervallo  $[x, h_1]$ :  $\lambda(x < \ell_1 \rightarrow h_1) <_{\text{lex}} \lambda(x < \ell_k \rightsquigarrow h_1)$  implica che  $\lambda(x, \ell_k) \geq \lambda(x, \ell_1)$ . Unendo le disuguaglianze si trova:

$$\lambda(x, \ell_1) \geq \lambda(x, \ell_2) \geq \dots \geq \lambda(x, \ell_k) \geq \lambda(x, \ell_1)$$

quindi in realtà valgono tutte le uguaglianze.

Lavorando con le seconde lettere delle word, si arriva all’assurdo. Si scrive in modo esplicito:

$$\ell_1 \rightsquigarrow h_2 = (\ell_1 < u < \dots < h_2) \quad \text{e} \quad \ell_2 \rightarrow h_2 = (\ell_2 < v < \dots < h_2).$$

In questa notazione, si osserva che:

- $\lambda(x, \ell_2) < \lambda(\ell_2, v)$  dato che  $\mathcal{I}(x, h_2)$  è increasing.
- $\lambda(x, \ell_1) \geq \lambda(\ell_1, u)$  altrimenti la catena  $(x < \ell_1 < u < \dots < h_1 < y)$  sarebbe massimale increasing per il poset  $P$ , ma è diversa da  $\mathbf{c}$ .
- $\lambda(x, \ell_1) = \lambda(x, \ell_2)$  per la serie di uguaglianze viste prima.

Questi tre risultati implicano che:

$$\lambda(x < \ell_1 \rightsquigarrow h_2) <_{\text{lex}} \lambda(x < \ell_2 \rightarrow h_2)$$

che è l'assurdo cercato per minimalità di  $(x < \ell_2 \rightarrow h_2)$  secondo l'ordine lessicografico  $<_{\text{lex}}$ .  $\square$

#### **Teorema 4.2.6 - Base della coomologia di poset**

Sia  $P$  un poset finito tale che  $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$  ammetta un EL-labeling. Allora:

1.  $P$  ha omotopia di tipo wedge di sfere, dove il numero di  $i$ -sfere coincide con il numero di  $(i+2)$ -catene massimali decreasing di  $\hat{P}$ .
2. le parti interne delle  $(i+2)$ -catene massimali decreasing di  $\hat{P}$  compongono una base per  $\tilde{H}^i(P; \mathbb{Z})$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due risultati separatamente.

1. Per il Teorema 4.2.4 si ha che  $\hat{P}$  è shellable e in particolare  $P$  ha shelling order indotto dall'ordine lessicografico sulle catene massimali di  $\hat{P}$ . Per il Teorema 4.1.4 segue che  $\Delta(P)$  ha omotopia di tipo wedge di sfere.

Per concludere basta quindi vedere che le faccette di  $\Delta(P)$  corrispondenti alle catene massimali decreasing di  $P$  sono tutte e sole le faccette omologiche.

Data  $\mathbf{c} \in \mathcal{M}(\hat{P})$ , si indica la sua parte interna con  $\bar{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}(P)$ . Il suo bordo è dato dalle sottocatene  $\bar{\mathbf{d}} \subsetneq \bar{\mathbf{c}}$ , quindi una faccetta è omologica se e solo se ogni sottocatena propria di  $\bar{\mathbf{c}}$  compare in una precedente catena massimale dello shelling di  $P$ . Ci sono due casi, fissata la catena  $\mathbf{c} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = \hat{1}) \in \mathcal{M}(\hat{P})$ .

- $\mathbf{c}$  ha una ascesa, ovvero esiste un indice  $i$  per cui:

$$\lambda(x_{i-1}, x_i) < \lambda(x_i, x_{i+1}).$$

Allora si dimostra che  $\mathbf{d} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < \hat{x}_i < \dots < x_{n+1} = \hat{1}) \subset \mathbf{c}$  non è contenuta nelle precedenti catene massimali dello shelling dato da  $<_{\text{lex}}$ . Infatti data una catena  $\mathbf{c}' \in \mathcal{M}(P)$  tale che  $\mathbf{d} \subset \mathbf{c}'$  si può scrivere la catena nella forma:

$$\mathbf{c}' : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < y_1 < y_2 < \dots < y_m < x_{i+1} < \dots < x_{n+1} = \hat{1})$$

Dato che  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  è EL-shellable con unica catena massimale increasing  $(x_{i-1} < x_i < x_{i+1})$  di lunghezza 2, si può applicare il Lemma 4.2.5. Tutte le altre catene massimali dell'intervallo hanno lunghezza 2: quindi  $m = 1$  e  $\mathbf{c}'$  si riscrive:

$$\mathbf{c}' : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < y_1 < x_{i+1} < \dots < x_{n+1} = \hat{1}).$$

Ora le word associate  $\lambda(\mathbf{c})$  e  $\lambda(\mathbf{c}')$  differiscono per le due lettere ottenute nelle cover relations in  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Dato che su tale intervallo  $(x_{i-1} < x_i < x_{i+1}) <_{\text{lex}} (x_{i-1} < y_1 < x_{i+1})$  segue che  $\mathbf{c} <_{\text{lex}} \mathbf{c}'$ .

Quindi  $\mathbf{d}$  non è contenuta in nessuna catena massimale che precede  $\mathbf{c}$  nell'ordinamento lessicografico (a maggior ragione questo vale passando alle parti interne delle catene). Dunque la faccetta associata a  $\bar{\mathbf{c}}$  non è omologica.

- $\mathbf{c}$  è decreasing. Per ogni sottocatena  $\bar{\mathbf{d}} \subsetneq \bar{\mathbf{c}}$  c'è un minimo indice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tale che  $x_i \notin \bar{\mathbf{d}}$ . Considerato l'intervallo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  esiste per EL-shellability una catena massimale  $(x_{i-1} < y_1 < y_2 < \dots < y_\ell < x_{i+1})$  increasing e minimale per  $<_{\text{lex}}$  su  $\mathcal{M}([x_{i-1}, x_{i+1}])$ .

Si costruisce la catena:

$$\mathbf{c}' : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < y_1 < y_2 < \dots < y_\ell < x_{i+1} < \dots < x_n < x_{n+1} = \hat{1})$$

massimale per il poset  $\hat{P}$ . Dato che

$$(x_{i-1} < y_1 < y_2 < \dots < y_\ell < x_{i+1}) <_{\text{lex}} (x_{i-1} < x_i < x_{i+1})$$

si ottiene  $\mathbf{c}' <_{\text{lex}} \mathbf{c}$ . Per costruzione allora  $\bar{\mathbf{d}} \subset \bar{\mathbf{c}}'$  compare prima di  $\bar{\mathbf{c}}$  nello shelling order di  $P$ . L'argomento si può reiterare per ogni  $\bar{\mathbf{d}} \subsetneq \bar{\mathbf{c}}$  quindi la faccetta associata a  $\bar{\mathbf{c}}$  è omologica.

Si conclude che le faccette omologiche corrispondono esattamente alle catene decreasing.

2. Si vuole ora dimostrare che le parti interne delle catene decreasing di  $\hat{P}$  generano la coomologia del poset  $P$ . Per farlo è sufficiente vedere che, tramite le relazioni di cobordo, ogni catena massimale si può riscrivere come combinazione lineare di catene massimali decreasing.

Sia  $\mathbf{c} : (\hat{0} = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \hat{1})$  una catena massimale di  $\hat{P}$ .

Se  $\mathbf{c}$  è decreasing non c'è nulla da dimostrare. Si suppone allora che  $\mathbf{c}$  abbia una ascesa: esiste un indice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tale che  $\lambda(x_{i-1}, x_i) < \lambda(x_i, x_{i+1})$ .

Si considera l'intervallo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ : la catena  $(x_{i-1} < x_i < x_{i+1})$  è l'unica massimale increasing dato che  $\hat{P}$  è EL-shellable. Data la massimalità della catena  $\mathbf{c}$ , vale che gli intervalli aperti tra elementi successivi sono vuoti, ovvero  $(x_j, x_{j+1}) = \emptyset$ . Questo permette di scrivere una relazione di cobordo in modo analogo al caso della top cohomology della Sezione 2.3, anche se  $\hat{P}$  non è puro:

$$\begin{aligned} \delta(x_0 < \dots < x_{i-1} < \hat{x}_i < x_{i+1} < \dots < x_{m+1}) &= \\ &= (-1)^i \sum_{x \in (x_{i-1}, x_{i+1})} (x_0 < \dots < x_{i-1} < x < x_{i+1} < \dots < x_{m+1}) \end{aligned}$$

In coomologia per definizione vale  $[\delta(x_0 < \dots < x_{i-1} < \hat{x}_i < x_{i+1} < x_m)] = [0]$ . Si può evidenziare il termine  $x = x_i$  della sommatoria, ottenendo:

$$(4.1) \quad [\mathbf{c}] = \left[ - \sum_{\substack{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ x \neq x_i}} (x_0 < \dots < x_{i-1} < x < x_{i+1} < \dots < x_{m+1}) \right]$$

Il Lemma 4.2.5 si può applicare al poset  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  con l'EL-labeling indotto. Segue che le catene della sommatoria a destra dell'ultima uguaglianza sono tutte massimali.

Dato che per ogni  $x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \setminus \{x_i\}$  vale  $\lambda(x_{i-1} < x_i < x_{i+1}) <_{\text{lex}} \lambda(x_{i-1} < x < x_{i+1})$ , si trova che

$$\lambda(\mathbf{c}) <_{\text{lex}} \lambda(x_0 < \dots < x_{i-1} < x < x_{i+1} < \dots < x_{m+1}).$$

In altre parole, in coomologia si può riscrivere  $[\mathbf{c}]$  come somma di catene massimali maggiori per ordine lessicografico.

Il ragionamento fatto per la catena  $\mathbf{c}$  che presenta una ascesa si può iterare per tutte le catene della sommatoria in (4.1) che non sono già decreasing. Questo processo di sostituzione deve terminare dato che l'ordine lessicografico delle nuove catene è sempre maggiore.

Al termine delle sostituzioni tutte le catene devono essere decreasing, altrimenti si potrebbe riapplicare il ragionamento alle ascese ancora non eliminate.

Resta da vedere che le catene decreasing sono proprio una base della coomologia. Ma per il punto (1) e il Teorema 2.2.3 vale che  $\text{rk}(\tilde{H}^i(P; \mathbb{Z})) = \#\{(i+2)\text{-catene decreasing di } \hat{P}\}$ . Allora per cardinalità l'insieme di generatori dato dalle catene decreasing dev'essere libero.

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$



# Capitolo 5

## Algebra booleana

Nel precedente capitolo si è visto come la proprietà di EL-shellability per poset permette di calcolare i gruppi di coomologia in modo esplicito. Il risultato si basa sull'esistenza di un EL-labeling, che evidenzia nella struttura di poset le catene che formeranno una base della coomologia.

La struttura aggiuntiva che l'EL-labeling fornisce al poset non è rilevante alla sola discussione fatta nel Capitolo 4: viene portato l'esempio dell'algebra booleana (intesa come reticolo booleano), dove la peculiare definizione dell'EL-labeling  $\ell$  permetterà di costruire una mappa tra le catene del poset (descritte proprio da  $\ell$ ) e i tableaux di una determinata forma  $\lambda \vdash n$ .

Questa mappa indurrà un  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfismo di rappresentazioni tra la coomologia del reticolo booleano e il modulo di Specht  $S^\lambda$ .

### 5.1 Definizione

In questa sezione si introduce l'algebra booleana come struttura insiemistica: non sarà rilevante alla discussione la presenza delle due operazioni "and" e "or", quanto il reticolo da essa generata (ovvero il suo poset).

#### Definizione 5.1.1 - Algebra booleana (troncata)

Si fissa un intero positivo  $n > 0$  e la notazione  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . L'algebra booleana è il poset dato dall'insieme:

$$B_n = \{F \subseteq [n]\}$$

dove la relazione d'ordine è data dall'inclusione insiemistica " $\subseteq$ ".

Sia  $0 < k \leq n$ . L'algebra booleana troncata è il sottoposet di  $B_n$  dato da:

$$B_n^k = \{F \subseteq [n] \mid |F| \geq k\} \cup \{\emptyset\}$$

con l'ordine parziale indotto.

#### Osservazione 5.1

L'algebra booleana può essere vista anche come complesso simpliciale astratto.

Infatti, dato l'insieme di vertici  $V = [n]$ , le condizioni richieste nella Definizione 1.1.2 sono rispettate dall'insieme  $B_n$  appena definito. Si può dire di più: dato che  $B_n = \mathcal{P}(V)$ , l'algebra booleana rappresenta proprio un  $(n-1)$ -simpleso astratto (si rimanda al risultato discusso nell'Esempio 1.2).

E' interessante studiare alcune variazioni sulla struttura dell'algebra booleana  $B_n$ : ad esempio togliendo determinati elementi si può cambiare il complesso simpliciale associato al poset.

La seguente proposizione è un esempio particolarmente semplice di questo studio.

**Proposizione 5.1.2**

Per  $n > 1$  si può considerare l'algebra booleana ridotta, definita  $\overline{B}_n = B_n \setminus \{\emptyset, [n]\}$ . Vale che:

$$\Delta(\overline{B}_n) \simeq \mathbb{S}^{n-2}$$

dove  $\mathbb{S}^{n-2}$  indica la sfera  $(n-2)$ -dimensionale.

Lo stesso approccio verrà applicato in seguito con l'algebra booleana troncata  $B_n^k$ : lo studio delle variazioni sulla struttura di poset porteranno al risultato conclusivo dell'elaborato.

**Esempio 5.2 - Il caso  $n = 3$** 

Partendo dal poset dell'algebra booleana ridotta  $\overline{B}_3$  si costruisce il suo order complex riportato in Figura 5.1 a destra. Graficamente si può vedere come la realizzazione geometrica di  $\Delta(\overline{B}_3)$  è omeomorfa alla sfera  $\mathbb{S}^1$ .

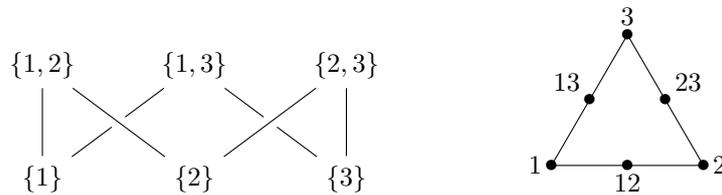


Figura 5.1: Rappresentazione di  $\overline{B}_3$  e  $\Delta(\overline{B}_3)$ .

La disposizione dei sei vertici in figura non è casuale: l'algebra booleana ridotta coincide con il face poset di un 3-simplesso a cui è stato tolto l'elemento massimo (corrispondente all'unica faccetta). Questa è l'osservazione fondamentale usata nella dimostrazione della proposizione. Diventa evidente confrontando il diagramma di Hasse in Figura 1.7 e quello in Figura 5.1.

*Dimostrazione.* Fissato  $n > 1$ , si associano gli elementi di  $[n]$  ad  $n$  punti affinementemente indipendenti in  $\mathbb{R}^{n-1}$ , indicati rispettivamente  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Dalla Definizione 1.1.1 l'involuppo convesso  $\Delta$  di  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  è un  $(n-1)$ -simplesso ed è quindi omeomorfo ad un disco  $(n-1)$ -dimensionale. Tolta la faccetta associata ad  $\{1, 2, \dots, n\}$ , si ottiene il bordo  $(n-1)$ -dimensionale del simplesso, indicato  $\overline{\Delta}$ , che tramite l'omeomorfismo coincide con il bordo del disco, ovvero con  $\mathbb{S}^{n-2}$ .

Per l'Osservazione 5.1, l'associazione dei punti  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  con  $\{1, 2, \dots, n\}$  permette di vedere  $\Delta$  come il complesso simpliciale astratto dato da  $B_n$ . Analogamente,  $\overline{\Delta}$  corrisponde al complesso simpliciale  $B_n \setminus \{[n]\}$ .

Se si passa al face poset di  $B_n \setminus \{[n]\}$  si ottiene il poset dato dall'algebra booleana ridotta  $(\overline{B}_n, \subseteq)$ . Infatti per definizione di face poset, la faccia vuota del complesso simpliciale non va considerata elemento del poset. Questo conclude, poiché  $\Delta(\overline{B}_n)$  è la suddivisione baricentrica di  $\overline{\Delta}$  ed è quindi omeomorfo ad  $\mathbb{S}^{n-2}$ .  $\square$

Data la naturale azione di  $\mathfrak{S}_n$  sull'insieme  $[n]$ , si può definire un'azione del gruppo simmetrico su  $\overline{B}_n^k$  nel seguente modo:

$$\sigma \cdot \{a_1, a_2, \dots, a_h\} = \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_h)\}$$

per ogni  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  e  $\{a_1, a_2, \dots, a_h\} \in \overline{B}_n^k$ .

Quest'azione rende  $\overline{B}_n^k$  un  $\mathfrak{S}_n$ -poset, in quanto preserva l'inclusione insiemistica che è la relazione d'ordine parziale. Allora, come visto nel Capitolo 3, il gruppo simmetrico agisce anche su omologia e coomologia dell'algebra booleana troncata.

## 5.2 EL-labeling

Si costruisce in questa sezione un EL-labeling<sup>1</sup>  $\ell$  per l'algebra booleana troncata  $B_n^k$ . L'EL-labeling  $\ell$  indurrà sul poset ridotto  $\overline{B}_n^k$  una mappa indicata  $\bar{\ell}$  che sarà utile nella prossima sezione.

Gli edge del diagramma di Hasse relativo a  $(B_n^k, \subseteq)$  si dividono in due "categorie":

- coppie non ordinate di sottoinsiemi di  $[n]$  di cardinalità  $\geq k$  che differiscono per un solo elemento, quindi:  $\{a_1, a_2, \dots, a_i\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}\}$ .
- le coppie  $(\emptyset, A)$  dove  $|A| = k$ .

Su queste covering relations  $A_1 \subset A_2$  si definisce il labeling  $\ell$  come:

$$\ell(A_1, A_2) = \begin{cases} \max A_2 & \text{se } A_1 = \emptyset \text{ e } |A_2| = k \\ a & \text{se } A_2 \setminus A_1 = \{a\} \end{cases}$$

Si riporta in Figura 5.2 un esempio di questo labeling.

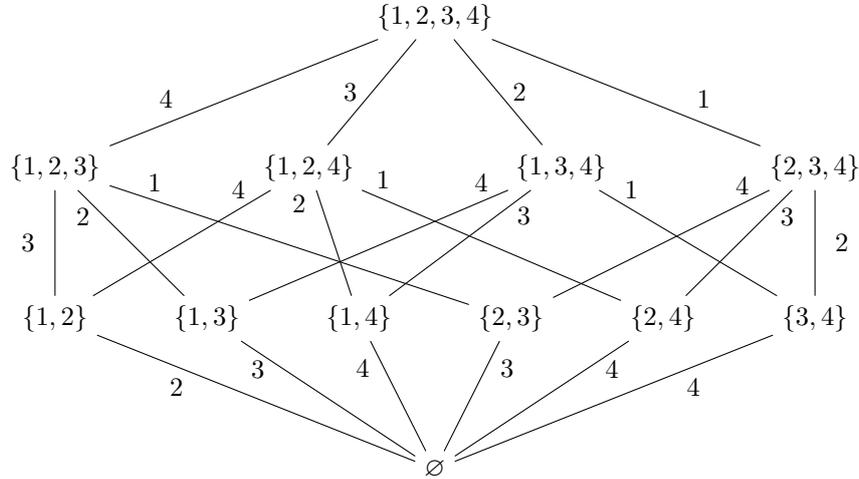


Figura 5.2: Il labeling per l'algebra booleana  $B_4^2$

Data una catena massimale  $\mathbf{c} : (\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{n-k})$  la corrispondente word associata sarà per definizione:

$$(5.1) \quad \ell(\mathbf{c}) = \ell(\emptyset, A_1)\ell(A_1, A_2)\ell(A_2, A_3) \dots \ell(A_{n-k-1}, A_{n-k}) \in [n]^{n-k+1}$$

Si verifica ora che  $\ell$  è un EL-labeling. Ci sono due casi da discutere, in base al tipo di intervallo  $[A_{\min}, A_{\max}] \subseteq B_n^k$  su cui va controllata la proprietà richiesta nella Definizione 4.2.3.

D'ora in poi, il labeling indotto da  $\ell$  su sottointervalli di  $B_n^k$  verrà indicato con lo stesso simbolo: questo non crea ambiguità in quanto l'argomento della funzione  $\ell$  dev'essere sempre una catena massimale, quindi i suoi estremi determinano univocamente l'intervallo su cui si sta lavorando.

- $A_{\min} \neq \emptyset$ : per definizione del labeling indotto da  $\ell$  su  $[A_{\min}, A_{\max}]$  (cioè la formula (5.1)), ogni catena massimale  $\mathbf{c} \in \mathcal{M}([A_{\min}, A_{\max}])$  è associata ad una word  $\ell(\mathbf{c})$  dove ogni lettera di  $A' = A_{\max} \setminus A_{\min}$  compare una e una sola volta.

Dato che  $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_h\} \subseteq [n]$  è totalmente ordinato con  $<_{\mathbb{N}}$  (senza perdere generalità si suppone che gli indici degli elementi  $a_i$  descrivano tale ordine), può esistere un'unica word increasing associata alle catene massimali di  $\mathcal{M}(A_{\min}, A_{\max})$ , cioè  $w_{\mathbf{c}} = "a_1 a_2 a_3 \dots a_h"$ .

Quest'unica word increasing si può ottenere valutando  $\ell$  nella catena:

$$\mathbf{c} : (A_{\min} \subset (A_{\min} \cup \{a_1\}) \subset (A_{\min} \cup \{a_1, a_2\}) \subset \dots \subset (A_{\min} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_h\}) = A_{\max})$$

<sup>1</sup>Il labeling si denoterà  $\ell$  e non  $\lambda$  in quanto la lettera greca indicherà partizioni di  $[n]$ .

Tale catena  $\mathbf{c}$  è l'unica massimale increasing di  $[A_{\min}, A_{\max}]$ , in quanto è l'unica da cui si ottiene la word  $w_{\mathbf{c}}$ .

Considerate una catena massimale  $\mathbf{d} \in \mathcal{M}([A_{\min}, A_{\max}]) \setminus \{\mathbf{c}\}$  e la corrispettiva word  $w_{\mathbf{d}} = \ell(\mathbf{d})$ , resta da verificare che  $w_{\mathbf{c}} <_{\text{lex}} w_{\mathbf{d}}$ .

Si ricorda che le word hanno tutte la stessa lunghezza  $h$  e ogni lettera di  $A'$  vi compare una e una sola volta, quindi  $w_{\mathbf{d}} = "b_1 b_2 \dots b_h"$  dove  $\{b_1, b_2, \dots, b_h\} = A'$ .

Sia  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  il primo indice per cui  $b_i \neq a_i$ : per assurdo si suppone che  $b_i < a_i$ . Dato che  $w_{\mathbf{c}}$  è increasing, deve esistere un indice  $j < i$  tale che  $a_j = b_i$ . Ma questo è impossibile poiché seguirebbe<sup>2</sup>  $b_j = a_j = b_i$  contro l'osservazione che ogni lettera in  $w_{\mathbf{d}}$  non si ripete più di una volta.

Si conclude che  $a_i < b_i$  e quindi  $w_{\mathbf{c}} <_{\text{lex}} w_{\mathbf{d}}$ , come si voleva verificare.

- $A_{\min} = \emptyset$ : per definizione di  $\ell$ , le word associate a catene massimali in  $\mathcal{M}([\emptyset, A_{\max}])$  avranno alfabeto  $A_{\max} = \{a_1, a_2, \dots, a_h\}$  (dove gli indici danno l'ordine totale agli elementi dell'insieme), saranno senza ripetizioni e di lunghezza  $h - k > 0$ .

Considerata una catena massimale  $\mathbf{c} : (\emptyset \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_h = A_{\max}) \in \mathcal{M}([\emptyset, A_{\max}])$  e la sua word associata  $w_{\mathbf{c}} = b_k b_{k+1} \dots b_h = \ell(\mathbf{c})$ , vale che  $b_k = \ell(\emptyset, A_k) = \max A_k$  per definizione. Unito al fatto che  $|A_k| = k$  e  $A_k \subseteq A_{\max}$ , segue che  $b_k \geq a_k$ .

Se la disuguaglianza fosse stretta, ovvero  $b_k > a_k$ , esisterebbe un indice  $j > k$  tale che  $b_k > b_j$  (dato che le lettere in  $w_{\mathbf{c}}$  non si possono ripetere) quindi la word  $w_{\mathbf{c}}$  non potrebbe essere increasing. Segue che una condizione necessaria affinché la catena massimale  $\mathbf{c} \in \mathcal{M}([\emptyset, A_{\max}])$  sia increasing è che  $b_k = \max A_k = a_k$ . Questo obbliga  $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

Per il punto precedente, esiste un'unica catena massimale increasing nell'intervallo  $[A_k, A_{\max}]$ :

$$\tilde{\mathbf{c}} : (A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset A'_{k+1} \subset \dots \subset A'_{h-1} \subset A_{\max})$$

e questa è minimale secondo  $<_{\text{lex}}$  tra le catene in  $\mathcal{M}([A_k, A_{\max}])$ .

Per l'Osservazione 4.6 segue che l'unica catena massimale increasing dell'intervallo  $[\emptyset, A_{\max}]$  è l'unica estensione della catena  $\tilde{\mathbf{c}}$ :

$$\mathbf{c} : (\emptyset \subset A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset A'_{k+1} \subset A'_{k+2} \subset \dots \subset A'_{h-1} \subset A_{\max})$$

Va dimostrata la minimalità di  $\mathbf{c} \in \mathcal{M}([\emptyset, A_{\max}])$  secondo  $<_{\text{lex}}$ . Presa una catena:

$$\mathbf{d} : (\emptyset \subset A''_k \subset \dots \subset A''_{h-1} \subset A_{\max}) \in \mathcal{M}([\emptyset, A_{\max}])$$

con word  $w_{\mathbf{d}} = "b'_k b'_{k+1} \dots b'_h" = \ell(\mathbf{d})$  si hanno due casi:

- se  $b_k = a_k < b'_k$  allora segue subito  $w_{\mathbf{c}} <_{\text{lex}} w_{\mathbf{d}}$ .
- altrimenti  $b_k = a_k = b'_k$ , da cui  $A''_k = A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Ma  $\tilde{\mathbf{c}}$  era la catena minima secondo l'ordine lessicografico su  $[A_k, A_{\max}] = [A''_k, A_{\max}]$ , quindi:

$$b_{k+1} b_{k+2} \dots b_h <_{\text{lex}} b'_{k+1} b'_{k+2} \dots b'_h.$$

In entrambi i casi  $w_{\mathbf{c}} = \ell(\mathbf{c}) <_{\text{lex}} \ell(\mathbf{d}) = w_{\mathbf{d}}$  per cui l'unica catena massimale increasing è anche minimale secondo l'ordine lessicografico indotto su  $\mathcal{M}([\emptyset, A_{\max}])$ .

Segue che  $B_n^k$  è EL-shellable con EL-labeling dato da  $\ell$ .

E' possibile definire una mappa inversa per  $\ell$ . Considerata una word  $w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-k} \in [n]^{n-k+1}$ , si costruisce ricorsivamente una catena massimale di  $B_n^k$  ponendo:

$$(5.2) \quad \begin{cases} A_n = [n] \\ A_{n-i} = A_{n-i+1} \setminus \{w_{n-k-i+1}\} \quad \text{per } i = 1, \dots, k \end{cases}$$

Questo definisce una mappa:

$$\rho : \begin{array}{ccc} [n]^{n-k+1} & \longrightarrow & C_{n-k+1}(B_n^k; \mathbb{C}) \\ w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-k} & \longmapsto & (\emptyset \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_n) \end{array}$$

---

<sup>2</sup>Definito  $i$  il minimo indice per cui  $a_i \neq b_i$  e dato  $j < i$  per forza deve valere  $a_j = b_j$ .

che per costruzione è proprio la mappa inversa dell'EL-labeling.

Si nota che l'algoritmo definito nella formula (5.2) non dipende dal valore di  $w_0 \in [n]$ . Quindi la mappa  $\rho$  si può restringere ad una mappa:

$$(5.3) \quad \begin{array}{ccc} \bar{\rho} : & [n]^{n-k} & \longrightarrow & C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) \\ & w_1 w_2 \dots w_{n-k} & \longmapsto & (A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_{n-1}) \end{array}$$

dove della  $(n - k + 1)$ -catena viene presa solo la parte interna (per passare al poset ridotto  $\overline{B}_n^k$ ). Dato che gli estremi delle  $(n - k + 1)$ -catene sono sempre  $\emptyset$  e  $A_n = [n]$ , essi danno informazioni ridondanti per la definizione di  $\ell$ . Si definisce quindi una mappa:

$$\bar{\ell} : \begin{array}{ccc} C_{n-k+1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) & \longrightarrow & [n]^{n-k} \\ (A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_{n-1}) & \longmapsto & \ell(A_1, A_2)\ell(A_2, A_3) \dots \ell(A_{n-1}, [n]) \end{array}$$

che tornerà utile nella dimostrazione del Teorema 5.3.1.

### 5.3 Omologia di $\overline{B}_n^k$ e la sua $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazione

Ottenuto l'EL-labeling per l'algebra booleana ridotta  $B_n^k$ , si può calcolare una base per la coomologia di poset a coefficienti in  $\mathbb{C}$ . La descrizione esplicita della base in coomologia permette di studiare l'azione del gruppo simmetrico  $\mathfrak{S}_n$  su questa struttura: il risultato è un  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfismo di rappresentazioni, ottenuto per la prima volta da L. Solomon in [11] nello studio di particolari gruppi di Coxeter.

**Teorema 5.3.1**

Per ogni  $k \leq n$  vale il  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfismo di rappresentazioni:

$$\tilde{H}_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) \cong_{\mathfrak{S}_n} S^\lambda$$

dove  $\lambda = (k, 1^{n-k})$ .

*Dimostrazione.* Si costruisce il  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfismo esplicitamente partendo da un  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo:

$$\varphi : M^\lambda \longrightarrow C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$$

e poi passando al quoziente per  $U^\lambda$ . Sono necessari i seguenti passaggi.

- Si definisce l'omomorfismo  $\varphi$  usando l'EL-labeling  $\ell$  di  $B_n^k$ . Ad ogni tableau  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  si assegna la word  $\mathbf{w}_T = w_1 w_2 \dots w_{n-k} \in [n]^{n-k}$  dove  $w_i = T_{(i+1,1)}$ , come negli esempi in Figura 5.3.

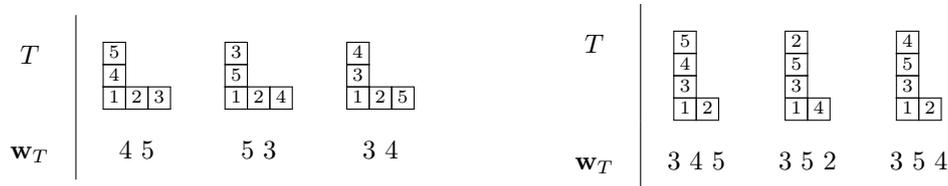


Figura 5.3: Esempi della corrispondenza definita da  $\varphi$ , con  $\lambda = (3, 1^2)$  e  $\lambda = (2, 1^3)$

La mappa  $\mathcal{T}_\lambda \longrightarrow [n]^{n-k}$  definita da questa costruzione è surgettiva: data una qualsiasi word  $\mathbf{w} = w_1 w_2 \dots w_{n-k}$  è sempre possibile trovare un tableau nella preimmagine (basta un qualsiasi injective tableau dove le celle nel segmento verticale contengono le lettere di  $\mathbf{w}$  ordinate). Si compone questa mappa con  $\bar{\rho}$  definita in (5.3), ottenendo:

$$\varphi : \mathcal{T}_\lambda \longrightarrow [n]^{n-k} \xrightarrow{\bar{\rho}} C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}).$$

Dato che l'insieme  $\mathcal{T}_\lambda$  è una base di  $M^\lambda$  per definizione, la mappa  $\varphi$  si estende per linearità ad un omomorfismo. Si osserva che questo omomorfismo è surgettivo per costruzione: preso un elemento

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^h \gamma_i \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^h \gamma_i (A_k^{(i)} \subset A_{k+1}^{(i)} \subset \dots \subset A_{n-1}^{(i)}) \in C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$$

si considerano le word  $w_i = \overline{\ell}(\mathbf{c}_i)$ . Per surgettività della precedente mappa  $\mathcal{T}_\lambda \rightarrow [n]^{n-k}$ , esistono dei tableaux  $T_i \in \mathcal{T}_\lambda$  tali che  $\varphi(T_i) = \mathbf{c}_i$ . Allora:

$$M^\lambda \ni \sum_{i=1}^h \gamma_i T_i \xrightarrow{\varphi} \mathbf{c} \in C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}).$$

Questo verifica la surgettività. In Figura 5.4 si riporta un esempio di questa corrispondenza, partendo dall'EL-labeling dell'algebra booleana  $B_4^2$  in Figura 5.2.

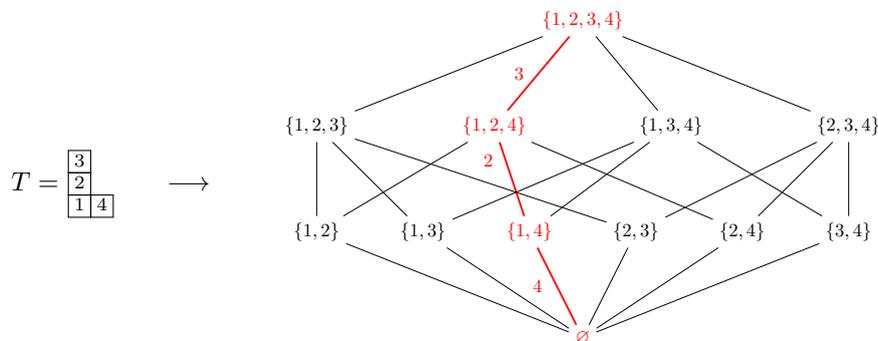


Figura 5.4: Tableau  $T$  e rispettiva catena in  $B_4^2$

Si denota l'insieme degli elementi di una determinata riga con  $T_{[i]} = \{T_{(i,1)}, \dots, T_{(i,\lambda_i)}\}$  e per più righe:

$$T_{[\leq i]} = \bigcup_{j \leq i} T_{[j]}.$$

Così, fissato un tableau  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  si può scrivere la sua immagine  $\varphi(T)$  come:

$$\varphi(T) : (T_{[\leq 1]} \subset T_{[\leq 2]} \subset \dots \subset T_{[\leq n-k]}).$$

Questa notazione verrà usata nei prossimi passaggi.

- L'omomorfismo  $\varphi$  è effettivamente un  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo di rappresentazioni, cioè l'azione di  $\mathfrak{S}_n$  su  $M^\lambda$  coincide tramite  $\varphi$  con l'azione sullo spazio delle catene  $C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$ . Per definizione delle azioni e costruzione della mappa  $\varphi$ , questa verifica è immediata sugli elementi di  $\mathcal{T}_\lambda$ . Inoltre, per linearità, la proprietà si può estendere a tutti gli elementi di  $M^\lambda$ . Quindi  $\varphi$  è  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo.
- Si può comporre la mappa  $\varphi$  con una proiezione al quoziente:

$$M^\lambda \xrightarrow{\varphi} C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} C_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) /_{B^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})} = \tilde{H}^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$$

per ottenere così un  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo  $\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi$  surgettivo, in quanto composizione di  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismi<sup>3</sup> surgettivi.

<sup>3</sup>La proiezione  $\pi$  è un  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo come immediata conseguenza dei risultati della Sezione 3.3.

- Ora, si vuole dimostrare che  $\tilde{\varphi}$  induce un buon  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo quotizzando il dominio in  $S^\lambda = M^\lambda / U^\lambda$ . Per farlo, basta mostrare che le relazioni di riga e di Garnir (ovvero un insieme di generatori per  $U^\lambda$ ) vengono mandate da  $\tilde{\varphi}$  nella classe banale. Fissato un tableau  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ , si studiano separatamente le due tipologie di relazioni.

– *Relazioni di riga*: le permutazioni di riga  $\sigma \in R_\lambda$  agiscono in modo banale sulle righe  $T_{[2]}, \dots, T_{[n-k+1]}$  in quanto queste hanno lunghezza 1. Quindi:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(r_\sigma(T)) &= \tilde{\varphi}(T\sigma) - \tilde{\varphi}(T) \\ &= \bar{\rho}((T_{(2,1)}T_{(3,1)} \dots T_{(n-k+1,1)})) - \bar{\rho}((T_{(2,1)}T_{(3,1)} \dots T_{(n-k+1,1)})) = 0. \end{aligned}$$

In effetti, l'EL-labeling e di conseguenza la mappa  $\bar{\rho}$  dipendono solo dagli elementi delle righe  $> 1$  del tableau, su cui la permutazione agisce in modo banale.

– *Relazioni di Garnir*: nel caso di partizioni della forma  $\lambda = (k, 1^{n-k})$  gli insiemi di celle  $C_{i,j}(\lambda)$  sono delle forme riportate in Figura 5.5.

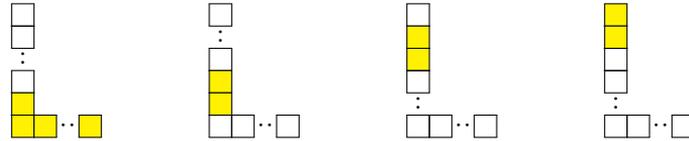


Figura 5.5: Rappresentazione degli insiemi  $C_{i,1}$  al variare della riga  $i$ .

Si osserva che l'unico indice di colonna valido è  $j = 1$ , in quanto nella definizione delle relazioni di Garnir si richiede che  $1 \leq j \leq \lambda_{i+1} = 1$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n-k\}$ .

Per ogni indice di riga  $i \in \{1, \dots, n-k\}$  va dimostrato che  $\tilde{\varphi}$  manda le relazioni di Garnir in relazioni di cobordo per il top cohomology group.

\* Caso  $i = 1$ : in questo caso  $G_{1,1}(T)$  permuta gli elementi delle prime 2 righe del tableau.

Questo risultato si può comprendere meglio facendo un esempio. Si considera il poset  $B_4^2$  con il suo EL-labeling  $\ell$  riportato in Figura 5.2: in questo caso  $\lambda = (2, 1^2)$ . Si prende l'injective tableau  $T \in \mathcal{T}_\lambda$  definito in Figura 5.4 a sinistra e si calcola la relazione di Garnir  $g_{1,1}(T)$ .

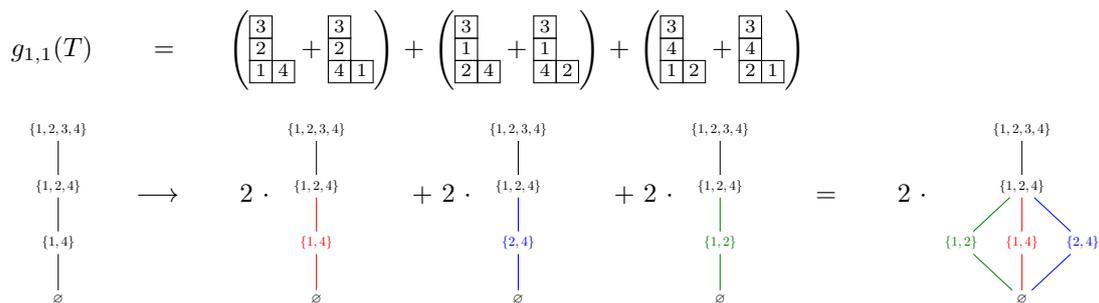


Figura 5.6: Rappresentazione della relazione di Garnir  $g_{1,1}(T)$  con le rispettive catene

Ai tableaux ottenuti si possono associare tramite  $\varphi$  le catene di  $B_4^2$ : così facendo le relazioni di Garnir si possono riportare come in Figura 5.6. Notare che in tale figura, in basso a destra, si ottiene una rappresentazione analoga al grafico delle relazioni di cobordo del top cohomology group in Figura 2.1.

Ora, si dimostra formalmente questo fatto. Ricordando che

$$g_{1,1}(T) = \sum_{\sigma \in G_{1,1}} T\sigma$$

si può evidenziare ad ogni permutazione l'elemento  $\alpha_\sigma = (T\sigma)_{(2,1)}$  del tableaux. Al variare di  $\sigma \in G_{1,1}(T)$ , l'entrata  $\alpha_\sigma$  assume valori nell'insieme  $T_{[\leq 2]}$ . Si calcola che:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g_{1,1}(T)) &= \sum_{\sigma \in G_{1,1}} \tilde{\varphi}(T\sigma) = \sum_{\sigma \in G_{1,1}} \bar{\rho}((\alpha_\sigma T_{(3,1)} T_{(4,1)} \dots T_{(n-k+1,1)}) \\ &\stackrel{(a)}{=} k! \sum_{\alpha \in T_{[\leq 2]}} \bar{\rho}((\alpha T_{(3,1)} T_{(4,1)} \dots T_{(n-k+1,1)}) \\ &= k! \delta_{n-k-1}((T_{[\leq 2]} < T_{[\leq 3]} < \dots < T_{[\leq n-k+1]}) \in B^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) \end{aligned}$$

dove ogni addendo della sommatoria a destra di (a) corrisponde ad una delle coppie di tableaux evidenziate dalle parentesi nell'esempio in Figura 5.6.

\* Caso  $i > 1$ : come si può vedere dalla Figura 5.5, vale che  $G_{i,1}(T) = \{id, \tau_i\}$  dove  $\tau_i$  permuta soltanto i valori delle celle  $(i, 1)$  e  $(i + 1, 1)$ . Si ottiene allora che:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g_{i,1}(T)) &= \tilde{\varphi}(T) + \tilde{\varphi}(T\tau_i) = \bar{\rho}((T_{(2,1)} T_{(3,1)} \dots T_{(i,1)} T_{(i+1,1)} \dots T_{(n-k+1,1)}) + \\ &\quad + \bar{\rho}((T_{(2,1)} T_{(3,1)} \dots T_{(i+1,1)} T_{(i,1)} \dots T_{(n-k+1,1)}) \\ &= \delta_{n-k-1}((T_{[\leq 1]} < T_{[\leq 2]} < \dots < \widehat{T_{[\leq i]}} < \dots < T_{[\leq n-k+1]}) \end{aligned}$$

dove  $\widehat{T_{[\leq i]}}$  indica il termine cancellato dalla catena. Si ottiene anche in questi casi che  $\tilde{\varphi}(g_{i,1}(T)) \in B^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$ .

Riprendendo l'esempio dell'algebra booleana  $B_4^2$  visto prima, si calcola la relazione di Garnir  $g_{2,1}(T)$  in Figura 5.7.

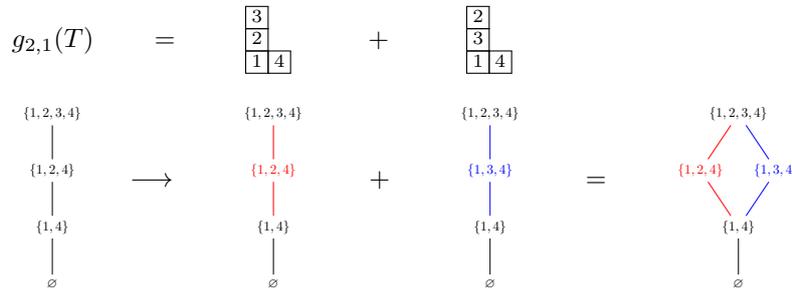


Figura 5.7: Raffigurazione della relazione di Garnir  $g_{2,1}(T)$  con le rispettive catene

Anche in questo caso, si possono associare ai tableaux alcune catene in  $\mathcal{M}(B_4^2)$ : il risultato (in figura in basso a destra) è nuovamente una relazione di cobordo simile a quella in Figura 2.1.

Si può allora indurre  $\tilde{\varphi}$  al quoziente per ottenere:

$$\bar{\varphi}: S^\lambda \longrightarrow \tilde{H}^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$$

che è un ben definito  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo.

Dato che si quozienta per elementi in  $\ker \tilde{\varphi}$ , l'omomorfismo  $\bar{\varphi}$  continua ad essere surgettivo.

- Resta da dimostrare che  $\dim_{\mathbb{C}} S^\lambda = \dim_{\mathbb{C}} \tilde{H}^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$ .

Per il Teorema 4.2.6 si ha che  $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{H}^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C})$  è pari al numero di catene massimali decreasing di  $B_n^k$  secondo l'EL-labeling  $\ell$ .

C'è una corrispondenza biunivoca tra le catene decreasing e l'insieme  $\text{Des}(H)$ , dove si pone  $H = \{k, k + 1, \dots, n - 1\}$ . Infatti si può costruire una bigezione esplicita: data una catena decreasing

$$(\emptyset \subset A_k \subset \dots \subset A_n)$$

si considera l'ordine crescente  $a_1, a_2, \dots, a_k$  degli elementi di  $A_k$ . Si associa:

$$\begin{aligned} \{\text{catene decreasing di } B_n^k\} &\longrightarrow \mathfrak{S}_n \\ (\emptyset \subset A_k \subset \dots \subset A_n) &\xrightarrow{\eta} (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{k-1} \ \lambda(\emptyset, A_k) \ \lambda(A_k, A_{k+1}) \ \dots \ \lambda(A_{n-1}, A_n)) \end{aligned}$$

dove la permutazione a destra è scritta in one-line notation. Infatti, data una catena  $\mathbf{c}$  decreasing,  $\eta(\mathbf{c})$  ha descent set  $H$  come richiesto. L'inversa  $\eta^{-1}$  si costruisce associando alla permutazione  $(\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n) \in \text{Des}(H)$  la catena  $\rho(\sigma_k \sigma_{k+1} \dots \sigma_n)$ . Il fatto che sia l'inversa segue dalla definizione di  $\rho$ .

Si conclude che:

$$\dim_{\mathbb{C}} \tilde{H}^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) = |\text{Des}(H)| = \dim_{\mathbb{C}} S^\lambda$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal Lemma 3.2.10.

Riassumendo, la mappa  $\overline{\varphi}$  è un  $\mathfrak{S}_n$ -omomorfismo surgettivo tra rappresentazioni con stessa dimensione quindi è effettivamente un  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfismo.

Questo conclude, in quanto si può comporre questo isomorfismo con quello costruito nella Sezione 3.3 con l'equazione (3.3): omologia e coomologia di poset sono  $\mathfrak{S}_n$ -isomorfi, quindi

$$\tilde{H}_{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) \cong_{\mathfrak{S}_n} \tilde{H}^{n-k-1}(\overline{B}_n^k; \mathbb{C}) \cong_{\mathfrak{S}_n} S^\lambda$$

ovvero la tesi. □



# Bibliografia

- [1] A. Björner. Topological methods. In *Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2*, pages 1819–1872. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 1995.
- [2] Anders Björner. Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 260(1):159–183, 1980.
- [3] Anders Björner and Michelle Wachs. On lexicographically shellable posets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1):323–341, 1983.
- [4] Anders Björner and Michelle L. Wachs. Shellable nonpure complexes and posets. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(4):1299–1327, 1996.
- [5] Anders Björner and Michelle L. Wachs. Shellable nonpure complexes and posets. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(10):3945–3975, 1997.
- [6] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] Jiří Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler.
- [8] Gian-Carlo Rota. On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 2:340–368, 1964.
- [9] Bruce E. Sagan. *The symmetric group*, volume 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- [10] Ludwig Schläfli. *Theorie der vielfachen Kontinuität*, pages 167–387. Springer Basel, Basel, 1950.
- [11] Louis Solomon. A decomposition of the group algebra of a finite Coxeter group. *J. Algebra*, 9:220–239, 1968.
- [12] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.
- [13] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [14] Michelle L. Wachs. On the (co)homology of the partition lattice and the free Lie algebra. *Discrete Math.*, 193(1-3):287–319, 1998. Selected papers in honor of Adriano Garsia (Taormina, 1994).
- [15] Michelle L. Wachs. Poset topology: tools and applications. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 497–615. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.



# Ringraziamenti

Se mi dovessero chiedere di descrivere l'università, la mia mente andrebbe subito alle persone che mi hanno accompagnato e alle esperienze vissute. Sono convinto che non si possa totalmente distinguere la conoscenza dalle persone che l'hanno condivisa. Per questo motivo ho voluto riservare l'ultima pagina alle persone che ho incontrato in questi tre anni: questo elaborato è strettamente legato anche a loro.

In primis, voglio ringraziare il prof. Michele D'Adderio per avermi diretto e seguito in questo lavoro. Non solo mi ha introdotto all'affascinante campo della combinatoria, ma mi ha anche permesso di dare uno sguardo alla realtà della ricerca e conoscere alcune persone che la portano avanti. Che questo sia il primo passo di un fruttuoso percorso.

Un grazie va alla mia famiglia, per avermi sempre supportato e consigliato nelle scelte che ho fatto. Non potevate farmi un regalo migliore della possibilità di intraprendere questa esperienza di vita.

Ringrazio infine tutti gli amici con cui ho condiviso esperienze in questi anni. Agli amici universitari, perché la vostra compagnia e il vostro aiuto è sempre andato oltre lo studio: ricorderò sempre le serate e le vacanze, gli alti e i bassi passati insieme. Ai miei coinquilini, grazie ai quali ogni giorno posso dire di tornare davvero a casa dopo una giornata di studio. Agli amici che due anni fa ho salutato per studiare a Pisa. Nonostante la distanza, ho sempre sentito il vostro supporto e la vostra vicinanza. Ad Andre, che magari non se l'aspetta ma in questi anni ha fatto davvero la differenza.