Esercizio Tutorato

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Definiamo l'applicazione lineare:

$$f_A : Mat_{3\times3}(\mathbb{R}) \longrightarrow Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$$
$$X \longmapsto A \cdot X .$$

a) Determinare una base per $\ker f_A$. → Visto al tutorato!

b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ tale che:

$$[f_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A \end{array}\right). \quad \circledast$$

Soluzione del Punto (b) e spunti di riflessione.

Osserviamo che $\dim Mat_{3\times3}(\mathbb{R}) = 9$. Stiamo quindi cercando una base $\mathcal{B}$ formata da 9 elementi, che permette di scrivere l'applicazione lineare f_A come una matrice della forma 9×9.

$$\left\{ \text{NOTA: nel testo dell'esercizio, si intende:} \quad \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \right\}$$

Quali basi conosciamo per $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$?

Sappiamo che l'insieme delle matrici date da

$$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \dots \qquad \dots \qquad E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

genera lo spazio $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ ed è formato da elementi linearmente indipendenti.

Proviamo ad usare questo insieme per scrivere una base C e vedere cosa succede a $[f_A]_C^C$.

<u>Problema</u>: in che ordine mettiamo gli elementi nella base?

Perché ad esempio potremmo prendere i seguenti ordini:

$$C = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$$

oppure

$$C' = \{E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{12}, E_{22}, E_{32}, E_{13}, E_{23}, E_{33}\}$$

e otterremmo due matrici $[f_A]_C^C$ ed $[f_A]_{C'}^{C'}$ diverse a priori. $\rightsquigarrow$ L'ordine in cui mettiamo gli elementi della base conta!

Costruiamo mano a mano la base B cercata, colonna per colonna. ⊛ → Se il ragionamento che segue non è chiaro, andare in fondo agli appunti, spiega meglio le annotazioni in verde!

Proviamo a vedere cosa succede se prendiamo come primo elemento della base B la matrice E_{11}.

Calcoliamo allora che:

$$f_A(E_{11}) = A \cdot E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo dal Punto (a) visto al tutorato che la prima colonna del prodotto matriciale si ottiene valutando A nella prima colonna della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ovvero schematicamente

$A \cdot (\,) = [\,]$, $A \cdot (\,) = [\,]$, $A \cdot (\,) = [\,]$.

Quindi, dato che vogliamo la matrice $[f_A]_B^B$ della forma ⊛, vogliamo che nella nostra base la prima colonna sia proprio:

$$\begin{array}{cc}
 & \overbrace{E_{11} \quad \dots\text{ancora non sappiamo}}^{\text{Base in partenza } B} \\
\underbrace{\begin{array}{c} E_{11} \leftarrow \\ ? \leftarrow \\ ? \leftarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}}_{\text{Base in arrivo } B} &
\left(\begin{array}{c|c}
0 & \\
2 & * \text{ altri valori} \\
-2 & \text{che per ora} \\
0 & \text{non ci} \\
0 & \text{interessano } * \\
0 & \\
0 & \\
0 & \\
0 &
\end{array}\right)
\end{array}$$

Ma allora quali elementi mettiamo al posto di "? ?"?

Dal calcolo sopra, si vede che:

$$f_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot E_{21} + (-2) E_{31}.$$

Allora proviamo a mettere $\begin{matrix} E_{21} \\ E_{31} \end{matrix}$ al posto di $\begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix}$:
la base $\mathcal{B}$ che stiamo costruendo ora ha come elementi ordinati:

$$\mathcal{B} = (E_{11} , E_{21} , E_{31} , \quad \text{... ancora boh ...})$$

perchè così facendo torna che nella prima riga di $[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ci siano i coefficienti
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

I coefficienti successivi saranno 0 perchè intendiamo completare la base $\mathcal{B}$ con gli elementi

$$E_{12}, E_{22}, E_{32}, E_{13}, E_{23}, E_{33}$$

che non compaiono nella scritture di:

$$f_A(E_{11}) = 2 \cdot E_{21} + (-2) E_{31}$$

Vediamo cosa succede alla seconda colonna di $[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ora che ho scelto come secondo elemento della base E_{21}:
calcoliamo

$$f_A(E_{21}) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{come il ragionamento fatto prima}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$f_A(E_{21}) = 1 \cdot E_{11} + 2 \cdot E_{21} + (-3) \cdot E_{31}$$

e scrivendo allora la seconda colonna della matrice $[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ otteniamo:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} E_{11} & E_{21} & E_{31} \; \dots \text{ ancora boh } \dots \end{array} \; \Big\} \text{ Base in partenza } \mathcal{B} \\
\begin{array}{c} E_{11} \leftarrow \\ E_{21} \leftarrow \\ E_{31} \leftarrow \\ \vdots \\ \text{ancora boh} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c|c}
0 & 1 & \\
2 & 2 & * \text{ altri valori} \\
-2 & -3 & \text{che per ora} \\
0 & 0 & \text{non ci} \\
0 & 0 & \text{interessano } * \\
0 & 0 & \\
0 & 0 & \\
0 & 0 & \\
0 & 0 &
\end{array}\right) \\
\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Base in arrivo } \mathcal{B}} &
\end{array}
$$

Come volevamo! Perchè è proprio la seconda colonna della matrice richiesta ⊛.

X ESERCIZIO: verificare che anche la terza colonna (cioè quella ottenuta con $f(E_{31})$) soddisfa ⊛.

Ora, soddisfatti dai primi 3 elementi della base $\mathcal{B}$ che stiamo costruendo, andiamo avanti. Come per E_{11}, ora supponiamo che il quarto vettore della base $\mathcal{B}$ sia E_{12}: scelgo E_{12} perchè ragionando sempre sul prodotto matriciale

$$
f_A(E_{12}) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \end{pmatrix}
$$

Come prima, uesta colonna è data da $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ che è la prima colonna di A.

Questo ci piace, perchè la matrice $[f_A]_B^B$ che vogliamo deve avere come quarta colonna
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

X ESERCIZIO: con questa scelta, ripercorrere il ragionamento sopra per scegliere il 5°, 6° elemento della base B affinchè la 4ª colonna di $[f_A]_B^B$ sia quella cercata.
Fatto questo, ragionare allo stesso modo per trovare il 7°, 8°, 9° elemento della base.

☆ SPIEGAZIONE ANNOTAZIONI in VERDE

Nelle annotazioni in verde, troverete uno schema di questo tipo:

$$\begin{array}{c|c} & v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad \} \text{ Base in Partenza} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{matrix}}_{\text{Base in Arrivo}} & \begin{pmatrix} \text{matrice di } f_A \\ \text{associata a} \\ \text{due basi} \end{pmatrix} \end{array}$$

Perchè ?

Questo può essere un modo <u>intuitivo</u> col quale pensare a matrici associate ad applicazioni.

Facciamo un esempio: consideriamo la mappa

$$f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$$
$$p \longmapsto p' \quad \text{(derivata di } p\text{)}$$

che potete verificare (x esercizio) essere una ben definita mappa lineare. Consideriamo le basi:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2) \quad \text{di } \mathbb{R}_{\leq 2}[x].$$
$$\mathcal{C} = (1, x) \quad \text{di } \mathbb{R}_{\leq 1}[x].$$

Allora per calcolare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ possiamo "riempire" la matrice associata <u>per colonne</u>: in particolare

- <u>I^a colonna</u>: la costruiamo calcolando come si scrive $f(1)$ quindi:

$$f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x$$

permette di scrivere:

Base di partenza $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \leftarrow \\ x \leftarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Base in arrivo $\mathcal{C}$

- <u>II^a colonna</u>: la costruiamo valutando il secondo vettore di $\mathcal{B}$, quindi:

$$f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x$$

permette di scrivere nella matrice $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- <u>III^a colonna</u>: valutando x^2:

$$f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x$$

quindi:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

<u>Morale</u>: le basi in partenza e in arrivo sono legate rispettivamente alle colonne e righe della matrice.

→ <u>Base in partenza</u>: se considerassimo una base

$$B' = (1, x^2, x)$$

dove abbiamo scambiato x ed x^2, nella matrice associata si scambiano le <u>colonne</u> associate a x, x^2:

$$
[f]^B_C = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
[f]^{B'}_C = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & x^2 & x \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

→ <u>Base in arrivo</u>: se consideriamo

$$C' = (x, 1)$$

con l'ordine scambiato, allora si scambiano le <u>righe</u> della matrice associata:

$$[f]^{B}_{C'} = \begin{array}{c} 1 \leftarrow \\ x \leftarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad [f]^{B}_{C'} = \begin{array}{c} x \leftarrow \\ 1 \leftarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PRO TIP (per chi è arrivato in fondo)

In questo esercizio notare che fatto il punto (b), il punto (a) è un "semplice" calcolo a cui siamo abituati (cioè trovare il ker di matrici).

Quindi se a qualcuno non fosse venuta in mente la strada veloce (ovvero vedere il prodotto matriciale $A \cdot X$ come valutazione di A sulle colonne di X), avrebbe potuto risolvere (a) con il punto (b).

> ⚠ È necessario aver RISOLTO il Punto (b) per fare questa cosa: per dare una base di $\ker(f_A)$ bisogna conoscere la base B del Punto (b)!